



FAKULTA ELEKTROTECHNIKY **ústav**
A KOMUNIKAČNÍCH **výkonové elektrotechniky**
TECHNOLOGIÍ **a elektroniky**

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION

ÚSTAV VÝKONOVÉ ELEKTROTECHNIKY A ELEKTRONIKY

DEPARTMENT OF POWER ELECTRICAL AND ELECTRONIC ENGINEERING

MODELY ASYNCHRONNÍCH STROJŮ

INDUCTION MACHINE MODELS

HABILITAČNÍ PRÁCE

HABILITATION DISSERTATION

AUTOR PRÁCE **Ing. Radoslav Cipín, Ph.D.**

AUTHOR

BRNO 2017

Abstrakt

Práce se zabývá konstrukcí matematických modelů třífázových asynchronních strojů. Jsou zde ukázány dva rozdílné způsoby odvození dynamických rovnic modelu stroje s formálně totožným výsledkem. Z dynamických rovnic modelu stroje je odvozeno statické náhradní zapojení včetně uvedení základních způsobů identifikace jednotlivých elektrických parametrů.

Klíčová slova

Asynchronní stroje, dynamický model, identifikace, náhradní zapojení, prostorový vektor, statický model

Bibliografická citace

Bibliografická citace – Cipín, R. *Modely asynchronních strojů*, Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, 2017. 166 s. Habilitační práce.

Obsah

Seznam obrázků	8
Seznam tabulek	9
Seznam symbolů	10
Seznam indexů	15
I Úvod	16
1 Asynchronní stroje	17
II Modely asynchronních strojů	21
2 Modely založené na výpočtu elektromagnetického pole	23
2.1 2D model asynchronního stroje	24
3 Dynamický model s rotorovým harmonickým vinutím	29
3.1 Odvození dynamických rovnic	30
3.1.1 Vlastní indukčnosti statorového a rotorového vinutí	32
3.1.2 Vzájemné indukčnosti statorového a rotorového vinutí	33
3.1.3 Vzájemné indukčnosti mezi statorovým a rotorovým vinutím	34
3.1.4 Napěťové rovnice ve formě matice	35
3.1.4.1 Napěťové rovnice ve formě matice převedené na stranu statoru	36
3.1.4.2 Napěťové rovnice ve formě prostorového vektoru	37
3.1.5 Výpočet vnitřního momentu stroje	38
3.2 Kompletní dynamický model v rotujících souřadnicích	40
3.3 Dynamický model v zapojení do hvězdy	40
3.3.1 Dynamické rovnice ve formě prostorového vektoru	42
4 Dynamický model s diskretním rotorovým vinutím	44
4.1 Rovnice statorového vinutí	45
4.1.1 Statorový tok způsobený statorovým vinutím	45
4.1.2 Statorový tok způsobený rotorovým vinutím	46
4.1.3 Kompletní model statorového vinutí	47
4.2 Rovnice rotorového vinutí	48
4.2.1 Rotorový tok způsobený rotorovým vinutím	49
4.2.2 Rotorový tok způsobený statorovým vinutím	50
4.2.3 Kompletní model rotorového vinutí	51
4.3 Pohybová rovnice	51
4.4 Kompletní dynamické rovnice v obecné rotující souřadnicové soustavě	51
5 Dynamické modely v rotující souřadnicové soustavě	53
5.1 Transformace dynamických rovnic do obecné souřadnicové soustavy	53

5.1.1	Transformace do stacionární souřadnicové soustavy	54
5.1.2	Transformace do statorové souřadnicové soustavy	55
5.1.3	Transformace do rotorové souřadnicové soustavy	56
6	Redukovaný dynamický model asynchronního stroje	57
6.1	Zanedbání statorových přechodných jevů	57
6.2	Zanedbání rotorových přechodných jevů	58
6.3	Zanedbání statorových a rotorových přechodných jevů	58
6.4	Porovnání řešení redukovaného a klasického modelu	59
7	Statické modely asynchronních strojů	63
7.1	Odvození statického modelu asynchronního stroje	63
7.1.1	Model s respektováním ztrát v železe	65
7.1.2	Přepočty náhradních zapojení	66
7.2	Základní pracovní charakteristiky	71
7.2.1	Proudová charakteristika	71
7.2.1.1	Proudová charakteristika pro náhradní zapojení ve tvaru Gama-článku	73
7.2.2	Momentová charakteristika	74
7.2.2.1	Momentová charakteristika pro náhradní zapojení ve tvaru Gama-článku	76
7.3	Základní pracovní stavy	77
7.3.1	Stav naprázdno	77
7.3.2	Stav nakrátko	78
7.3.3	Chod s maximálním momentem	78
7.3.4	Chod s maximálním výkonem	79
7.4	Statický model s nelineárním magnetickým obvodem	80
7.4.1	Nelineární magnetizační indukčnost	80
III	Identifikace parametrů asynchronních strojů	84
8	Citlivostní analýza	86
8.1	Statorový odpor	87
8.2	Rotorový odpor	88
8.3	Odpor reprezentující ztráty v železe	89
8.4	Rotorová rozptylová reaktance	90
8.5	Magnetizační reaktance	91
8.6	Zhodnocení citlivostní analýzy	92
9	Výpočet elektrických parametrů	93
9.1	Elektrický odpor	93
9.1.1	Povrchový jev ve vodiči	95
9.1.2	Povrchový jev v hluboké rotorové drážce	95
9.2	Vlastní a vzájemná indukčnost	97
9.2.1	Výpočet vlastní a vzájemné indukčnosti elementárního dvoupólového stroje	99
9.2.1.1	Výpočet vazby dvou vinutí – geometrický přístup	100
9.2.2	Vlastní indukčnost statorového vinutí a vliv drážkování	102
9.2.2.1	Celková indukčnost jedné fáze	103
10	Identifikace parametrů asynchronních strojů	105
10.1	Zkouška naprázdno a nakrátko	105
10.1.1	Zkouška naprázdno	105

10.1.2 Zkouška nakrátko	107
10.1.2.1 Zkouška při jmenovitém zatížení	108
10.2 Identifikace s konstantními parametry	110
10.2.1 Statická identifikace s proměnnými parametry	112
10.3 Dynamická identifikace s proměnnými parametry	113
IV Závěr	117
Literatura	119
V Dodatky	123
A Parametry analyzovaného stroje	124
B Základní vztahy elektromagnetického pole	126
B.1 Základní vektorové operace	126
B.1.1 Skalární součin	126
B.1.2 Vektorový součin	126
B.1.3 Gradient	126
B.1.4 Divergence	127
B.1.5 Rotace	127
B.1.6 Gaussova věta	127
B.1.7 Stokesova věta	127
B.2 Maxwellovy rovnice	128
B.2.1 Ampérův zákon	128
B.2.2 Zákon spojitosti indukčního toku	128
B.2.3 Faradayův indukční zákon	129
B.2.4 Gaussův zákon elektrostatiky	129
B.3 Doplnkové rovnice	129
B.3.1 Magnetický vektorový potenciál	129
B.3.2 Elektrický potenciál	129
B.3.3 Ohmův zákon	130
B.4 Výpočet síly	130
B.4.1 Maxwellův napěťový tenzor	130
C O rovnosti vzájemných indukčností magneticky vázaných obvodů	133
D Vinutí	135
D.1 Harmonické vinutí	135
D.2 Magnetické napětí ve vzduchové mezeře m -fázového stroje	136
D.3 Analýza spřažené magnetického toku vinutí	138
E Prostorový vektor a jeho transformace	141
E.1 Prostorový vektor	141
E.2 Transformace do různých souřadnicových soustav	141
E.3 Zpětný výpočet složek prostorového vektoru	143
E.4 Běžně používané transformace	144
E.4.1 Clarkové transformace	145
E.4.2 Parkova transformace	145

E.5	Vzájemné převody soustav s různými počty fází	146
F	Nemožnost přepočtu T-článku na Γ -článek s uvážením R_{Fe}	148
G	Dynamické modely s uvážením ztrát v železe	149
G.1	Dynamický model popsaný prostorovým vektorem	149
G.2	Dynamický model v obecné rotující soustavě	150
G.3	Dynamický model asynchronního stroje se zapojeným vinutím do hvězdy	151
H	Analýza magnetické indukce v rotoru	152
I	Citlivostní analýza – parametry	156
I.1	Statorový odpor	156
I.2	Rotorový odpor	157
I.3	Odpor reprezentující ztráty v železe	157
I.4	Rotorová rozptylová indukčnost	158
I.5	Magnetizační indukčnost	158
J	Identifikace	159
J.1	Neurčitost parametrů při identifikaci pouze na momentovou charakteristiku	159
J.2	Identifikace porovnáním přenosových funkcí	161
K	Kalmanův filtr	164
K.1	Algoritmus Kalmanova filtru	164
K.1.1	Diskretizace spojitého systému	165
K.1.2	Numerický výpočet první derivace funkce $f(x)$	165
	Rejstřík	166

Seznam obrázků

1.1	Schématické zobrazení jedné cívky rotorového vinutí asynchronního stroje. . . .	19
2.1	Schématické zapojení jedné cívky vinutí.	26
2.2	Algoritmus výpočtu elektromagnetických parametrů asynchronního stroje. . . .	28
3.1	Schématické zobrazení rotorového a statorového vinutí.	32
3.2	Schématické zapojení statorového a rotorového vinutí do hvězdy.	40
4.1	Znázornění rotorové klece.	48
4.2	Schématické zobrazení lineárně rozvinuté části rotorové klece.	48
5.1	Ekvivalentní zapojení asynchronního stroje v obecné rotující souřadnicové soustavě.	54
5.2	Rozkreslené ekvivalentní zapojení asynchronního stroje v obecné rotující souřadnicové soustavě.	54
5.3	Ekvivalentní zapojení asynchronního stroje ve stacionární souřadnicové soustavě.	55
5.4	Ekvivalentní zapojení asynchronního stroje ve statorové souřadnicové soustavě.	55
5.5	Ekvivalentní zapojení asynchronního stroje v rotorové souřadnicové soustavě.	56
6.1	Porovnání elektrických veličin pro $\tau_m \approx 2\tau_s$ naprázdno.	59
6.2	Porovnání mechanických veličin pro $\tau_m \approx 2\tau_s$ naprázdno.	60
6.3	Porovnání elektrických veličin pro $\tau_m \approx 2\tau_s$ při zatížení 7 N·m.	60
6.4	Porovnání mechanických veličin pro $\tau_m \approx 2\tau_s$ při zatížení 7 N·m.	60
6.5	Porovnání elektrických veličin pro $\tau_m \approx 20\tau_s$ naprázdno.	61
6.6	Porovnání mechanických veličin pro $\tau_m \approx 20\tau_s$ naprázdno.	61
6.7	Porovnání elektrických veličin pro $\tau_m \approx 20\tau_s$ při zatížení 7 N·m.	61
6.8	Porovnání mechanických veličin pro $\tau_m \approx 20\tau_s$ při zatížení 7 N·m.	62
7.1	Znázornění statorového a rotorového souřadnicového systému.	64
7.2	Náhradní schéma zapojení statoru a rotoru.	65
7.3	Znázornění náhradního zapojení asynchronního stroje.	65
7.4	Znázornění náhradního zapojení asynchronního stroje s respektováním ztrát v železe.	66
7.5	Schématata k přepočtu náhradních zapojení.	67
7.6	Typický průběh amplitudy, reálné a imaginární části statorového proudu v závislosti na skluzu.	72
7.7	Porovnání vypočtených účinníků.	73
7.8	Momentová charakteristika.	76
7.9	Momentová charakteristika a mechanický výkon.	80
7.10	Nelineární náhradní zapojení asynchronního stroje ve tvaru Γ -článku.	80
7.11	Závislost magnetizační indukčnosti na poměru magnetizačního fázového napětí a napájecího kmitočtu statorového vinutí.	81
7.12	Algoritmus výpočtu I_1 a M při uvážení nelineární magnetizační indukčnosti.	82

7.13	Závislost magnetizační indukčnosti na poměru magnetizačního fázového napětí a napájecího kmitočtu statorového vinutí.	83
8.1	Momentová a proudová charakteristika při změně R_1	87
8.2	Momentová a proudová charakteristika při změně R_2	88
8.3	Momentová a proudová charakteristika při změně R_{Fe}	89
8.4	Momentová a proudová charakteristika při změně $X_{\sigma 2}$	90
8.5	Momentová a proudová charakteristika při změně X_h	91
9.1	Znázornění rotorové drážky.	96
9.2	Frekvenční závislost odporu rotorové tyče pro relativní permeabilitu drážky 1, 10, 100, 200, 500, 1000, 2000 a ∞	96
9.3	Porovnání výsledků povrchového jevu podle (9.1.13) a (9.1.10).	97
9.4	Znázornění elementárního dvoupólového stroje.	99
9.5	K výpočtu činitele vazby elementárního dvoupólového stroje.	101
9.6	Závislost vlastní indukčnosti jedné fáze na natočení rotoru.	102
9.7	Závislost vzájemné indukčnosti dvou statorových fází natočení rotoru.	103
9.8	Závislost činitele vazby na natočení rotoru.	103
9.9	Celková indukčnost jedné fáze při maximálním proudu.	104
9.10	Celková indukčnost jedné fáze při polovičním proudu.	104
10.1	Náhradní zapojení při zkoušce naprázdno.	105
10.2	Náhradní zapojení při zkoušce nakrátko.	107
10.3	Zobrazení impedance asynchronního stroje pro různé zatížení.	110
10.4	Algoritmus identifikace parametrů s konstantními hodnotami.	111
10.5	Algoritmus identifikace parametrů ze statických charakteristik.	112
10.6	Časový průběh hodnot estimovaných proudů $i_{s,d}$ a $i_{i,d}$	115
10.7	Časový průběh hodnot estimovaných odporů R_s a R_r	116
D.1	Znázornění integrační křivky pro výpočet rozložení vinutí.	135
D.2	Znázornění rozložení trojfázového harmonického vinutí podél vzduchové mezery.	136
D.3	Znázornění jednoho závitu statorového vinutí.	137
E.1	Transformace vektoru mezi dvěma souřadnicovými systémy.	142
E.2	Souřadnicové systémy pro asynchronní stroj.	143
E.3	Znázornění třífázové a čtyřfázové soustavy zapojené do hvězdy.	146
F.1	Náhradní zapojení ASM ve tvaru T a Γ -článku s R_{Fe}	148
G.1	Schematické zobrazení dynamického modelu s respektováním ztrát v železe.	149
G.2	Ekvivalentní zapojení asynchronního stroje s respektováním ztrát v železe v obecné rotující souřadnicové soustavě.	150
H.1	Průběh vektorového magnetického potenciálu a amplitudy magnetické indukce o jednotkové velikosti pro $\varphi = 0^\circ$	153
H.2	Rozložení magnetického vektorového potenciálu a rozložení radiální hodnoty magnetické indukce v rotoru pro pátou harmonickou.	153
H.3	Rozložení magnetického vektorového potenciálu a magnetické indukce v rotoru pro první harmonickou.	154
H.4	Rozložení magnetického vektorového potenciálu a magnetické indukce v rotoru pro druhou harmonickou.	154
H.5	Rozložení magnetického vektorového potenciálu a magnetické indukce v rotoru pro dvacátou třetí harmonickou.	155

J.1	Přenos naprázdno.	161
J.2	Odezva na jednotkový skok napájecího napětí ve stavu naprázdno.	162
J.3	Porovnání přenosu nakrátko s a bez respektování R_{Fe}	163
J.4	Porovnání přenosů pro různé hodnoty skluzu.	163

Seznam tabulek

2.1	Elektrické a magnetické veličiny ve 3D a ve 2D.	24
7.1	Příklady hodnot parametrů pro různé náhradní zapojení asynchronního stroje. . .	71
10.1	Příklad hodnot parametrů při zkoušce naprázdno.	106
10.2	Příklad hodnot parametrů při zkoušce naprázdno s nenulovým skluzem.	107
10.3	Příklad hodnot parametrů při zkoušce nakrátko.	108
10.4	Příklad hodnot parametrů při zkoušce jmenovitým zatížením.	109
A.1	Štítkové údaje.	124
A.2	Změřené a identifikované parametry motoru AOM 060L02-016.	124
A.3	Konstrukční údaje statorového svazku.	124
A.4	Konstrukční údaje rotorového svazku.	125
J.1	Příklad hodnot parametrů z momentové charakteristiky.	160

Seznam symbolů

Symbol	Popis	Jednotka
A	Magnetický vektorový potenciál	$V \cdot s \cdot m^{-1}$
\tilde{a}	Komplexní číslo značící fázový posun 120° mezi jednotlivými fázemi statoru v Gaussově rovině	–
A_c	Matice soustavy	$[A_c]$
A_d	Diskrétní tvar matice soustavy	$[A_d]$
α	Obecný úhel podél vzduchové mezery stroje	rad
α_r	Úhel mezi dvěma sousedními rotorovými tyčemi	rad
B	Magnetická indukce – absolutní hodnota	T
\tilde{b}	Komplexní číslo značící fázový posun $\frac{360^\circ}{N_t}$ mezi jednotlivými fázemi rotoru v Gaussově rovině	–
B_c	Matice vstupu	$[B_c]$
B_d	Diskrétní tvar matice vstupu	$[B_d]$
b	Šířka drážky	m
B	Magnetická indukce – vektor	T
b_v	Šířka vodiče	m
C_c	Matice výstupu	$[C_c]$
$\cos \varphi$	Účinník	–
$\delta[\cdot]$	Diracův impulz	–
D_c	Matice vazeb vstupu na výstup	$[D_c]$
δ_e	Ekvivalentní délka vzduchové mezery	m
δ_r	Polovina úhlu mezi dvěma sousedními rotorovými tyčemi	rad
δ	Délka vzduchové mezery	m
δ_p	Efektivní délka vzduchové mezery	m
$\delta_{\mathcal{X},x}$	Citlivost funkce \mathcal{X} na parametr x	$[\mathcal{X}/x]$
$\Delta P_{Cu,1}$	Jouleovy ztráty ve statorovém vinutí	W
$\Delta P_{Cu,2}$	Jouleovy ztráty v rotorovém vinutí	W
ΔP_{Fe}	Ztráty ve feromagnetických částech stroje	W
δ_v	Hloubka vniku	m
E	Intenzita elektrického pole – absolutní hodnota	$V \cdot m^{-1}$
\mathcal{E}	Optimalizační kritérium	–
e	Eulerovo číslo, $e = 2,71828 \dots$	–
ϵ	Permitivita	$F \cdot m^{-1}$
E	Intenzita elektrického pole – vektor	$V \cdot m^{-1}$

Symbol	Popis	Jednotka
\mathcal{F}	Magnetické napětí	A
f	Frekvence	Hz
f_{opt}	Optimalizační funkce	–
H	Intenzita magnetického pole – absolutní hodnota	$\text{A}\cdot\text{m}^{-1}$
h	Výška vodiče	m
\mathbf{H}	Intenzita magnetického pole – vektor	$\text{A}\cdot\text{m}^{-1}$
\mathbf{I}	Jednotková matice	–
i	Okamžitá hodnota elektrického proudu	A
\mathbf{I}_1	Vektor měřených hodnot statorového proudu	A
I_1	Efektivní hodnota statorového proudu	A
$I_{1f,0}$	Fázová hodnota statorového proudu naprázdno	A
$I_{1f,k}$	Fázová hodnota statorového proudu nakrátko	A
$I_{1f,n}$	Fázová hodnota statorového proudu při jmenovitém zatížení	A
i_s	Okamžitá hodnota rotorového proudu fáze A	A
i_s	Okamžitá hodnota statorového proudu fáze a	A
I_μ	Magnetizační proud	A
I_r	Efektivní hodnota rotorového proudu	A
I_s	Efektivní hodnota statorového proudu	A
i_s	Okamžitá hodnota statorového proudu	A
J_i	Proudová hustota – absolutní hodnota	$\text{A}\cdot\text{m}^{-2}$
J	Moment setrvačnosti	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$
j	Imaginární jednotka, $j = \sqrt{-1}$	–
J_s	Proudová hustota statorového vinutí	$\text{A}\cdot\text{m}^{-2}$
J_i	Proudová hustota – vektor	$\text{A}\cdot\text{m}^{-2}$
k	Činitel vazby	–
$k_{v,k}$	Činitel vinutí pro k -tou harmonickou	–
L	Indukčnost	H
l	Délka	m
L_e	Rozptylová indukčnost části kruhu nakrátko spojující dvě sousedící rotorové tyče	H
L_h	Hlavní indukčnost	H
\mathcal{L}_h	Magnetizační indukčnost jedné fáze statoru	H
$\mathcal{L}_{h,r}$	Magnetizační indukčnost jedné fáze rotoru	H
\mathcal{L}_r	Vlastní indukčnost jedné fáze rotoru	H
L_r	Ekvivalentní rotorová indukčnost	H
\mathcal{L}_s	Vlastní indukčnost jedné fáze statoru	H
L_s	Ekvivalentní statorová indukčnost	H
L_σ	Indukčnost vinutí mimo aktivní část stroje	H
$L_{\sigma 1}$	Rozptylová indukčnost statorového vinutí	H
$L_{\sigma 2}$	Rozptylová indukčnost rotorového vinutí	H
$\mathcal{L}_{\sigma r}$	Magnetizační indukčnost jedné fáze rotoru	H
$\mathcal{L}_{\sigma s}$	Magnetizační indukčnost jedné fáze statoru	H
L_t	Rozptylová indukčnost jedné rotorové tyče	H
\mathbf{M}	Vektor měřených hodnot momentu	$\text{N}\cdot\text{m}$

Symbol	Popis	Jednotka
M	Moment	N·m
m	Počet fází	–
m_i	Vnitřní elektromagnetický moment	N·m
M_n	Jmenovitý moment	N·m
\mathcal{M}_r	Vzájemná indukčnost dvou fází rotoru	H
\mathcal{M}_s	Vzájemná indukčnost dvou fází statoru	H
\mathcal{M}_{sr}	Vzájemná indukčnost mezi jednou fází statoru a rotoru	H
M_{sr}	Ekvivalentní vzájemná indukčnost mezi statorovým a rotorovým vinutím	H
μ	Permeabilita	H·m ⁻¹
μ_0	Permeabilita vakua	H·m ⁻¹
m_z	Zátěžný moment	N·m
M_{zv}	Moment zvratu	N·m
N	Počet vodičů	–
n	Hustota vodičů	–
N_{mer}	Celkový počet měřených hodnot	–
N_r	Počet vodičů rotorového vinutí	–
N_s	Počet vodičů statorového vinutí	–
N_t	Počet rotorových tyčí	–
ω_K	Úhlová rychlost obecné rotující souřadnicové soustavy	rad·s ⁻¹
ω_{mech}	Mechanická úhlová rychlost	rad·s ⁻¹
ω_r	Rotorová elektrická úhlová rychlost	rad·s ⁻¹
ω_s	Statorová úhlová rychlost	rad·s ⁻¹
\mathbf{P}	Kovarianční matice	–
p	Počet pólových dvojic	–
P_1	Elektrický příkon	W
P_δ	Výkon prostupující vzduchovou mezerou ze statoru do rotoru	W
Φ	Elektrický skalární potenciál	V
ϕ	Magnetický tok	Wb
$\varphi_{1,0}$	Fázový posun mezi statorovým napětím a proudem naprázdno	–
$\varphi_{1,k}$	Fázový posun mezi statorovým napětím a proudem nakrátko	–
$\varphi_{1,n}$	Fázový posun mezi statorovým napětím a proudem při jmenovitém zatížení	–
P_j	Střední hodnota Jouleových ztrát	W
p_j	Okamžitá hodnota Jouleových ztrát	W
$p_{\mathcal{L}}$	Laplaceův operátor	–
P_{mech}	Mechanický výkon	W
Ψ	Spřažený magnetický tok	V·s
Ψ_s	Celkový spřažený magnetický tok s rotorovým vinutím	–

Symbol	Popis	Jednotka
Ψ_{rr}	Tok rotorového vinutí spřažený s ostatními fázemi rotoru	–
Ψ_{sr}	Tok rotorového vinutí spřažený s ostatními fázemi statoru	–
Ψ_s	Celkový spřažený magnetický tok se statorovým vinutím	–
Ψ_{rs}	Tok statorového vinutí spřažený s ostatními fázemi rotoru	–
Ψ_{ss}	Tok statorového vinutí spřažený s ostatními fázemi statoru	–
Q	Matrice reprezentující nepřesnost modelu	–
R	Matrice reprezentující chyby měření	–
R	Elektrický odpor	Ω
r	Střední poloměr vzduchové mezery	m
R_1	Statorový odpor	Ω
R_2	Rotorový odpor s hodnotou přepočtenou pro dané náhradní zapojení	Ω
R_e	Elektrický odpor části kruhu nakrátko spojující dvě sousední rotorové tyče	Ω
$\Re \{ \cdot \}$	Reálná část	–
R_{Fe}	Odpor respektující ztráty v železe	Ω
ρ	Rezistivita (měrný elektrický odpor)	$\Omega \cdot m$
\mathcal{R}_m	Magnetický odpor hlavního magnetického toku	H^{-1}
\mathcal{R}	Magnetický odpor	H^{-1}
R_r	Rotorový odpor jedné fáze	Ω
R_s	Statorový odpor jedné fáze	Ω
R_σ	Odpor vinutí mimo aktivní část stroje	Ω
$\mathcal{R}_{\sigma r}$	Magnetický odpor rozptylového toku jedné fáze rotorového vinutí	H^{-1}
$\mathcal{R}_{\sigma s}$	Magnetický odpor rozptylového toku jedné fáze statorového vinutí	H^{-1}
R_{ss}	Stejnoseměrná hodnota eklektického odporu	Ω
R_{st}	Střídavá hodnota eklektického odporu	Ω
R_t	Elektrický odpor jedné rotorové tyče	Ω
S	Průřez	m^2
s	Vektor měřených hodnot skluzu	–
s	Skluz	–
S^+	Kladně orientovaná plocha	m^2
S^-	Záporně orientovaná plocha	m^2
σ	Parametr pro volbu tvaru náhradního zapojení ASM	–
σ_r	Měrná elektrická vodivost (konduktivita)	$S \cdot m^{-1}$
s_n	Jmenovitý skluz	–
s_p	Skluz odpovídající maximálnímu výkonu stroje	–
s_{zv}	Skluz zvratu	–
T	Perioda	s

Symbol	Popis	Jednotka
t	Čas	s
θ	Obecný úhel podél vzduchové mezery stroje	rad
θ_K	Obecné natočení souřadnicové soustavy	rad
θ_r	Natočení rotoru vůči statoru	rad
T_{ij}	Maxwellův napěťový tenzor	$\text{N}\cdot\text{m}^{-2}$
T_s	Vzorkovací čas	s
\mathbf{u}	Vektor vstupů	$[\mathbf{u}]$
u	Okamžitá hodnota elektrického napětí	V
U_1	Efektivní hodnota statorového napětí	V
$U_{1f,0}$	Fázová hodnota statorového napětí naprázdno	V
$U_{1f,k}$	Fázová hodnota statorového napětí nakrátko	V
$U_{1f,n}$	Fázová hodnota statorového napětí při jmenovitém zatížení	V
u_A	Okamžitá hodnota rotorového napětí fáze A	V
u_a	Okamžitá hodnota statorového napětí fáze a	V
U_h	Napětí na hlavní (magnetizační) indukčnosti	V
U_s	Efektivní hodnota statorového napětí	V
u_s	Okamžitá hodnota statorového napětí	V
V	Objem	m^3
W_{co}	Magnetická koenergie	J
W_{mag}	Magnetická energie	J
$\hat{\mathcal{X}}$	Prostorový vektor pomocné proměnné představující např. napětí, proud atd.	$[\mathcal{X}]$
$\hat{\mathcal{X}}$	Prostorový vektor prvků pomocných proměnných představujících např. napětí, proud atd.	$[\mathcal{X}]$
\mathcal{X}	Vektor / matice prvků pomocných proměnných představujících např. napětí, proud atd.	$[\mathcal{X}]$
\mathcal{X}	Pomocná proměnná představující např. napětí, proud atd.	$[\mathcal{X}]$
\mathbf{x}	Stavový vektor	$[\mathbf{x}]$
X_1	Reaktance statorového vinutí	Ω
X_2	Reaktance rotorového vinutí	Ω
X_h	Hlavní reaktance	Ω
ξ	Redukovaná výška vodiče	–
$X_{\sigma 1}$	Rozptylová reaktance statorového vinutí	Ω
$X_{\sigma 2}$	Rozptylová reaktance rotorového vinutí	Ω
\mathbf{y}	Vektor výstupů	$[\mathbf{y}]$
Z	Impedance	Ω
$\tilde{Z}_{1,0}$	Vstupní impedance jedné fáze ve stavu naprázdno	Ω
$\tilde{Z}_{1,k}$	Vstupní impedance jedné fáze ve stavu nakrátko	Ω
$\tilde{Z}_{1,n}$	Vstupní impedance jedné fáze při jmenovitém zatížení	Ω

Seznam indexů

Index	Význam
1	statorová veličina v případě náhradního zapojení
s	statorová veličina v dynamického modelu
2	rotorová veličina v případě náhradního zapojení
r	rotorová veličina v dynamického modelu
re	reálné část
im	imaginární část
mer	změřeno
vyp	vypočteno
α	v ose α
β	v ose β
d	v ose d
q	v ose q
k	v ose k
l	v ose l
x	v ose x
y	v ose y
z	v ose z

Část I

Úvod

1 | Asynchronní stroje

Asynchronní stroje patří stále k nejpoužívanějším zařízením pro elektromechanickou přeměnu energie a to ať už při přeměně elektrické energie na energii mechanickou v případě elektrických motorů, tak i mechanické energie na elektrickou v případě elektrických generátorů, viz např. [1].

Dalo by se říci, že problematika asynchronních strojů je přes jejich stáří, a to jak z pohledu teorie, tak i praktického využití sahajícího až do předminulého století, viz např. [2, 3], zcela vyčerpána, ale opak je pravdou. V posledních letech nastává jejich renezance ve formě vysokootáčkových strojů a to jak strojů s klasicky provedenou rotorovou klecí nakrátko, tak i strojů bez klasického rotoru v provedení s tzv. plným rotorem, viz [4, 5]. Veškeré tyto úpravy asynchronních strojů jsou prováděny za účelem zlevnění jejich výroby a jejich provozu, tj. hlavním hybatelem je snaha zvýšení účinnosti asynchronních strojů. Z těchto důvodů je stále žádána dobrá zlostnost principu funkce asynchronních strojů a schopnost matematického popisu jejich chování za různých pracovních stavů, a to ať už z důvodu návrhu těchto strojů, tak i z důvodu návrh nových řídicích algoritmů, s ohledem na ekonomičnost jejich provozu.

Výhodou asynchronních strojů oproti jiným strojům točivým, tj. zejména stejnosměrným a synchronním strojům, jsou v hlavní řadě jejich relativně nízké pořizovací náklady, velmi nízké požadavky na údržbu během jejich provozu a jejich vysoká robustnost. Další velkou výhodou je možnost přímého připojení a provozu z napájecí třífázové sítě bez nutnosti použití dalších cenově a provozně nákladnějších měničů. Toto je obvykle provedeno na úkor nižší efektivity jejich chodu, protože se změnou zatížení se mění i výkon stroje, čemuž odpovídá i změna účinnosti stroje. Tuto nevýhodu je právě možné eliminovat napájením asynchronních strojů pomocí měničů, kdy je možné maximalizovat jejich účinnost pro libovolné zatížení a pracovní stav.

Samotná práce se zabývá konstrukcí matematických modelů asynchronních strojů. Ihned v úvodu je třeba dodat, že na asynchronní stroj je pohlíženo jako na ideální symetrické trojfázové zařízení napájené z čistě harmonického napětí/ového zdroje, tj. v modelech nejsou uvažovány vyšší harmonické napětí/proudu a jim odpovídající parazitní efekty na chod asynchronního stroje. Na jednu stranu se toto může zdát jako přílišné zjednodušení a velký odklon od reálných zařízení, ale na druhou stranu takto odvozené modely jsou relativně snadno pochopitelné a použitelné a to ať v případě výukových potřeb, tak i v případě návrhů pokročilých regulačních struktur. Uvážením vyšších harmonických, tedy zejména páté a sedmé, sebou přináší zvýšení počtu rovnic modelu, protože je možné předpokládat, že každá jednotlivá harmonická vytváří svoji část statorového/rotorového proudu a momentu stroje, tzn. tyto veličiny je nutné popsat dodatečnými rovnicemi. Výsledné průběhy proudů a momentu jsou pak dány součtem dílčích výsledků pro jednotlivé harmonické. Prakticky to tedy znamená, že je nutné řešit v případě uvážení dvou harmonických soustavu nejméně devíti diferenciálních rovnic a k nim náležej-

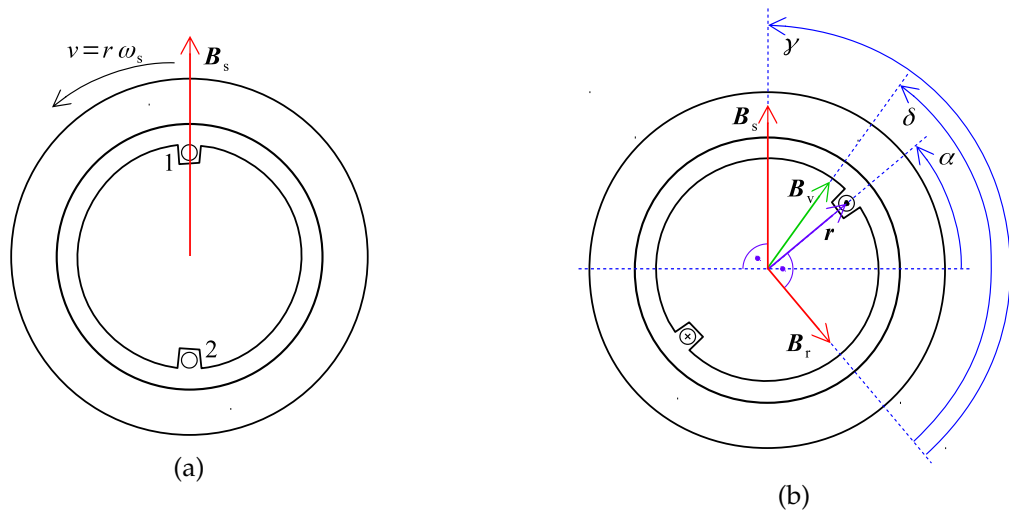
jící patřičný počet neznámých parametrů, tj. odporů a vlastních a vzájemných indukčností, jak vyplývá z dalšího textu práce. V článkách [6–8] jsou ukázány detailní modely asynchronních strojů respektujících vyšší harmonické a vlivy na chod stroje s jejich uvážením. Prakticky s ohledem na počet řešených rovnic, počet neznámých parametrů a zjednodušení za kterých je daný model asynchronního stroje sestaven, je toto zcela zbytečná úloha, která naprosto nemusí odpovídat měřeným průběhům na skutečném stroji. Proto je pro analýzu vlivy vyšších harmonických na chod stroje, tj. např. synchronní a synchronní momenty, výhodnější využít programů k tomu určených, tj. programů založených na přímém řešení rovnic popisujících rozložení elektromagnetického pole v asynchronním stroji pomocí metod konečných prvků, nebo jim podobných.

Proto se tato práce zabývá pouze modely s uvážením první harmonické. Což, ale není na škodu protože i na tomto modelu asynchronního stroje je možné ukázat všechny jeho podstatné vlastnosti. A i praxe ukazuje, že i takto zjednodušený model stroje je dostatečný pro relativně přesné řízení pohonů těmito stroji poháněnými, viz např. [9, 10].

V práci jsou odvozeny modely asynchronních strojů na základě opodstatněných předpokladů a to snad i srozumitelnou cestou krok za krokem. Důraz je kladen na zachování a dodržování jednotného značení jednotlivých parametrů modelu, tj. převážně odporů a indukčností vinutí stroje, v celém textu a to tak, aby byly tyto parametry snadno identifikovatelné a použitelné v libovolném modelu. S tím, že při daném konkrétním pracovním stavu musí po ustálení všech přechodných dějů dávat dynamický model stroje shodné výsledné hodnoty, např. proudů, jako model statický. Toto je snad podstatný rozdíl oproti běžně uváděným odvozením, kde jednotlivé parametry a v některých případech i samotné modely autoři postulují bez zjevné možnosti je nějakým způsobem odvodit nebo přepočítat, viz např. [11].

Sestavené modely strojů vycházejí ze základních funkčních principů asynchronních strojů, tj. z principu indukovaného napětí do vinutí rotoru stroje a z principu vzniku vnitřního mechanického momentu stroje. Proto jsou tyto dva principy stručně shrnuty v následujících dvou odstavcích.

Na základě Dodatku D.1 je možné ukázat, že radiální magnetické pole vytvořené ve vzduchové mezeře asynchronního stroje trojfázovým statorovým harmonickým vinutím napájené harmonickým napětím je možné vyjádřit pomocí vektoru $\mathbf{B}_s = \frac{H_s}{\mu_0} e^{j\omega_s t}$. Indukované napětí v jednom vodiči pohybujícího se v magnetickém poli je dáno vztahem $u_{i,1} = \mathbf{l} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_s)$. Polarita indukovaného napětí je dána vektorovým součinem $\mathbf{v} \times \mathbf{B}_s$, kde kladné napětí je ve směru tohoto vektorového součinu. Zde je třeba si uvědomit, že vztah platí za předpokladu pohybu vodiče v magnetickém poli, nikoli pohybu magnetického pole a statického vodiče. Proto je vždy nutné při jeho použití přejít do souřadnicové soustavy takové, kde je magnetická indukce konstantní a vodič se pohybuje, tj. v případě statického vodiče a pohyblivého magnetického pole úhlovou rychlostí ω_s , je tento souřadnicový systém spojen s magnetickým polem, vůči kterému má vodič úhlovou rychlost $-\omega_s$. Podrobněji viz např. [12, 13]. Pro statickou cívku umístěnou v rotoru stroje podle Obr. 1.1 a) je celkové indukované napětí dáno vztahem $u_i = 2r\omega_s \frac{H_s}{\mu_0} \cos \omega_s t$. Což je možné přepsat ve formě $u_i = \phi_s \omega_s \cos \omega_s t = \frac{d\Psi_r}{dt}$. Nebo-li indukované napětí v jediném závitě je dáno časovou derivací spráženého magnetického toku s tímto závitěm. Pokud je takovýto závit zapojen do dalšího obvodu je možné pro něj napsat napět'ovou rovnici ve formě $u = Ri + \frac{d\Psi}{dt}$. Obdobným způsobem je možné sestavit napět'ové rovnice pro celé statorové a rotorové vinutí a tyto pak jsou základním kamenem při odvození napět'ových rovnic matematických modelů.



Obr. 1.1: Schématické zobrazení jedné cívky rotorového vinutí asynchronního stroje.

Jestliže v předchozím odstavci je nastíněno odvození napěťových rovnic pro jednotlivá vinutí stroje, pak v tomto odstavci je naznačen způsob výpočtu vnitřního momentu stroje. Moment působící na jeden vodič v magnetickém poli protékaný proudem je dán vtahem $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times (i\mathbf{l} \times \mathbf{B})$. Je zřejmé, že moment je vektorová veličina a jeho směr je na základě Obr. 1.1 b) ke čtenáři. V dalších částech textu práce je uvažován moment jako skalární veličina mající pouze velikost, protože informace o jeho směru není při modelování asynchronního stroje příliš podstatná, tj. $M = |\mathbf{M}|$. Velikost momentu působícího na jeden závit podle obrázku je snadné vypočítat jako $M = 2rBil \sin \alpha$. Z čehož vyplývá, že maximální moment je právě, když $\alpha = 90^\circ$, tj. vodiče protékané proudem jsou v místě maximální magnetické indukce. Na základě Ampérova zákona, je možné ukázat, že směr magnetické indukce vytvořené rotorovým vinutím \mathbf{B}_r je ve směru znázorněném na Obr. 1.1 b). Kde úhel mezi statorovým a rotorovým polem je $\gamma = 180^\circ - \alpha$. Na základě tohoto je možné velikost momentu vypočítat též jako $M = k |\mathbf{B}_r \times \mathbf{B}_s| = k B_r B_s \sin \gamma = k B_r B_s \sin \alpha$, kde veličina k zohledňuje geometrii stroje. Nebo-li moment je dán vzájemnou interakcí statorového a rotorového magnetického pole a jeho maximum nastává, pokud tyto pole jsou právě navzájem kolmé. Na vznik momentu je možné též pohlížet jako interakci rotorového magnetického pole a pole výsledného vzniklého jako součet statorového a rotorového pole, tj. $\mathbf{B}_v = \mathbf{B}_s + \mathbf{B}_r$. Podle Obr. 1.1 b) výsledné pole svírá úhel δ s magnetickým polem rotorovým. Nyní už je snadné ukázat, že velikost momentu je též možné určit ze vztahu $M = k |\mathbf{B}_r \times \mathbf{B}_v| = k B_r B_v \sin \delta$. Z tohoto vztahu vyplývá základní princip vektorového řízení asynchronního stroje, kdy pro dané sycení stroje je snahou řídicí struktury udržovat úhel δ maximální tak, aby byl i moment stroje maximální. Při výpočtu momentu v dalším textu není počítáno s magnetickými indukci, toto je provedeno např. v [14], ale se spráženými magnetickými toky, resp. statorovými a rotorovými proudy.

Z předešlých dvou odstavců je zřejmé, že aby asynchronní stroj mohl konat práci, musí existovat relativní pohyb mezi statorem a rotorem, tj. ve vinutí rotoru se indukuje elektrické napětí, které vytvoří rotorové magnetické pole, jenž interaguje se statorovým magnetickým polem a ve výsledku vzniká užitečný mechanický moment, který může konat práci. Jinými slovy, rotor neideálního asynchronního motoru nikdy nemůže dosáhnout synchronní rychlosti a touto se trvale otáčet.

Práce je rozdělena do dvou stěžejních částí, kde jednotlivé části jsou:

- (i) Část první zabývající se matematickými modely asynchronních strojů se zaměřením na trojfázové symetrické asynchronní stroje napájené ze zdrojů čistě harmonického napětí. V těchto částech práce jsou odvozeny, nebo alespoň ukázány způsoby sestavení a výpočtu modelu asynchronních strojů, ať už zcela obecného modelu stroje popsaného pomocí Maxwellových rovnic pro elektromagnetického pole, tak i jeho zjednodušení za pomoci soustředných parametrů ve formě soustavy dynamického modelu popsaného soustavou právě čtyř napěťových diferenciálních rovnic a jedné diferenciální rovnice pohybové. Tento dynamický model je v posledních kapitolách této části práce redukován až na čistě statický model a jsou ukázány způsoby odvození různých náhradních zapojení pro tento typ modelu.
- (ii) Část druhá zabývající se identifikací elektrických parametrů náhradních zapojení. Je zde ukázán vliv jednotlivých parametrů na pracovní stavy stroje.

a na dodatky, které je možné rozdělit na:

- (i) Dodatky doplňující, nebo upřesňující materiál samotné práce, viz např. Dodatky E a I. Tyto dodatky obvykle obsahují dodatečný materiál nutný k porozumění, nebo k doplnění a rozšíření teoretických předpokladů použitých v textu práce. Tyto důležité části jsou umístěny v dodatcích obvykle z důvodu jejich rozsáhlosti.
- (ii) Dodatky informační, viz např. Dodatek B, které obvykle obsahují obecně známá fakta. Tudíž by mohly být vypuštěny, ale na druhou stranu také slouží k ozřejmění použitých definic a pojmů v samotném textu.

Část II

Modely asynchronních strojů

Tato část práce se zabývá matematickým popisem asynchronních strojů. Simulace asynchronních strojů, tj. sestavení rovnic matematického modelu stroje a jejich vyřešení, je podstatná a důležitá činnost jak pro pochopení jejich funkce za různých provozních stavů, tak i pro možnost návrhu pokročilých regulačních struktur, dříve než jsou implementovány na reálném pohonu s asynchronním strojem.

Pod pojmem model, resp. matematický model je rozuměna alespoň jedna rovnice popisující daný jev a to s dostatečnou přesností, tj. v případě modelu asynchronního stroje tento udává s dostatečnou přesností velikosti např. statorového proudu, momentu apod. Tvar rovnic matematického modelu udává tzv. strukturu modelu, může se jednat např. o soustavu diferenciálních rovnic, o soustavu přenosových funkcí, o soustavu lineárních rovnic apod. Nedílnou součástí každého matematického modelu jsou i vstupní parametry, tj. v případě asynchronního stroje velikosti statorových a rotorových odporů, vlastních a vzájemných indukčností atd. Struktura a parametry modelu musí být jen a pouze tak komplexní, jak vyžaduje úloha, pro kterou je model konstruován. Pro příklad je možné uvést, je-li požadována velikost efektivní hodnoty statorového proudu při daných otáčkách, tj. daném zatížení, je zbytečné konstruovat model sestávající se ze soustavy diferenciálních rovnic, kde jejich řešení je časově náročné a výsledky jsou přesné jen do té doby, dokud struktura a parametry samotného modelu věrně popisují skutečný stav.

Na základě předchozích výše uvedených faktů je tedy možné matematické modely rozdělit do dvou skupin:

- (i) Dynamické modely – popisující okamžité stavy a děje v dané soustavě.
- (ii) Statické modely – popisující ustálené stavy a děje v dané soustavě.

Vždy je, ale nutné mít na paměti, že libovolný ustálený stav je možné získat nejenom ze statického modelu, ale i z modelu dynamického, tj. statický model je zvláštním případem dynamického modelu a může být z něj odvozen.

Modely asynchronních strojů je možné dále rozdělit podle komplexnosti použitých rovnic a použitých principů při jejich odvození:

- (i) Modely striktně vycházející ze základních rovnic elektromagnetismu – tyto modely vycházejí z Maxwellových rovnic a rovnic doplňkových, tyto typy modelů lze řešit analyticky jen ve velmi zvláštních případech. Většinou je při jejich řešení nutné použít numerických metod, např. metoda konečných prvků.
- (ii) Modely vycházející z obvodových vlastností daného stroje – tyto modely vycházejí z možnosti separovat odpory a indukčnosti jednotlivých vinutí, což umožňuje snadné sestavení napěťových a pohybových rovnic.

Hlavním kritériem kvality modelu je jeho schopnost nasimulovat správně požadované průběhy (charakteristiky) a to takovým způsobem, že tyto nasimulované průběhy jsou srovnatelné s reálně naměřenými průběhy. Neboli, matematický model je soubor rovnic, do kterých vstupují ekvivalentní parametry stroje a to takové, aby veškeré vypočtené veličiny byly ve shodě s měřením.

2 | Modely založené na výpočtu elektromagnetického pole

Veškeré simulace elektromagnetických soustav, tj. i asynchronních strojů, jsou založeny na základních čtyřech Maxwellových rovnicích, viz Dodatek B.2, k nim náležejících doplňkových vztahů popisujících materiálové vlastnosti, zohledňujících mechaniku soustavy a v neposlední řadě také základní zákony zachování energie. Vhodně sestavenou soustavou parciálních diferenciálních rovnic je možné vyřešit téměř libovolně komplikovanou problematiku v elektrických strojích, viz [15, 16]. Je zde velký potenciál v možnosti upravovat, či dokonce nově formulovat vztahy, např. pro výpočet ztrát v magnetickém obvodu stroje, nebo zohlednění různých nelinearit, např. hysterese magnetického materiálu apod., kde v současné době neexistují přesné analytické způsoby jejich výpočtu. Zde je třeba ale podotknout, že takovéto řešení nejsou téměř nikdy dosažena v analyticky uzavřeném tvaru z důvodu velké komplexnosti řešených rovnic. Proto je nutné při jejich řešení spoléhat na numerické metody, viz např. [17, 18]. Výhodou těchto modelů jsou vykoupeny jedinou ale o to podstatnější nevýhodou. Tato spočívá ve velké výpočetní náročnosti při numerickém řešení dané úlohy. Toto je tak omezující problém, že řada úloh, které by měly být řešitelné, např. uvážení hysterese křivek magnetických materiálů, nebo zohlednění laminace plechů na chod stroje, z technických důvodů řešitelné nejsou.

Řešení rovnic popisujících elektromagnetické pole je možné rozdělit do dvou skupin:

- (i) řešení v ustáleném stavu dělí se na:
 - (a) řešení magnetostatické a elektrostatické,
 - (b) řešení harmonické.
- (ii) řešení tranzientní.

Statické řešení, tj. řešení kdy elektromagnetické veličiny jsou uvažovány jako konstantní, tj. např. $B = \text{konst.}$, resp. jako harmonické o daném kmitočtu, tj. např. $B = B_m \cos \omega t$. Tento typ řešení je vhodný např. při vyšetřování rozložení magnetického pole při prvotním elektromagnetickém návrhu stroje, nebo analýze parametrů stroje, tj. např. elektrických odporů a indukčností jednotlivých vinutí asynchronního stroje, viz kapitola 9. Tento typ řešení je méně výpočetně náročný oproti tranzientnímu řešení, ale obvykle je jeho využití značně omezené, např. při výpočtu vnitřního momentu stroje je nutné znát rozložení proudové hustoty ve statorovém i rotorovém vinutí, což není vždy snadné určit, resp. není vždy možné přesně určit.

Na druhou stranu tranzientní řešení jsou řešení, která zohledňují vliv přechodných dějů ve stroji, nebo dějů, které není možné zohlednit při statickém řešení. Je zde možné přesně analyzovat průběhy proudů, momentu, časové rozložení ztrát v jednotlivých částech stroje apod. Cenou za tyto možnosti přesné analýzy je nutnost volby velmi malých časových kroků simulace tak, aby byly zohledněny všechny elektrické a mechanické děje ve stroji. Např. při vyšetřování průběhů statorového proudu o síťovém kmitočtu 50 Hz by se mohlo zdát, že krok 1 ms je do-

statečný, ale v případě, že se dvojpólový rotor otáčí synchronní rychlostí, tj. 3000 min^{-1} , toto odpovídá úhlovému natočení rotoru o $\frac{360^\circ}{20} = 18^\circ$, což je nepřipustně vysoká hodnota. Taktéž v případě kroku 1 ms není možné zahrnout přesně vliv drážkování statoru a rotoru na průběh statorového proudu, proto je vhodné pro zohlednění alespoň první drážkové harmonické volit krok, který odpovídá alespoň desetinásobku drážkové harmonické, tj. v případě stroje s 24 drážkami je krok přibližně $50 \mu\text{s}$ nebo menší. Z tohoto je zřejmé, že tento typ analýzy je výpočetně velmi časově náročný.

Při elektromagnetických simulacích se dále musí rozlišovat, jakým způsobem je daná úloha formulována, tj. zda je řešení požadované v trojrozměrném prostoru (3D), nebo je řešení dostatečné v dvojrozměrné ploše (2D).

Samozřejmě je nejpřesnější výpočet ve 3D, kdy je možné do simulovaného problému zahrnout veškeré geometrické a materiálové nuance, jako např. tvary čel vinutí ve stroji, zešíkmení drážek apod. Nevýhodou je, že modely jsou velmi výpočetně náročné a proto se pro tyto výpočty provádí řada zjednodušení, např. vinutí je modelováno jako jeden celek a nikoli složené z jednotlivých vodičů apod.

Výpočet ve 2D není tak výpočetně náročný, ale jeho nevýhodou je, že není možné určit např. rozptylovou indukčnost čel vinutí, kruhu nakrátko apod. Pro zpřesnění výpočtů je obvykle možné tyto parazitní jevy do simulace zařadit ve formě známých konstant, viz kapitola 2.1.

V případě řešení obecného elektromagnetického problému v trojrozměrném prostoru mohou být veškeré elektrické a magnetické veličiny libovolně prostorově orientovány, proto je při jejich popisu nutné uvažovat vektor/vektorovou funkci mající všechny tři prostorové souřadnice, viz Tab. 2.1. Pro řešení rovinných problému je předpokládáno, že rovina řezu stroje leží v rovině xy a délka stroje je podél osy z , tj. proudy ve vodičích mají směr pouze podél osy z a magnetické veličiny jsou v rovině xy .

Tab. 2.1: Elektrické a magnetické veličiny ve 3D a ve 2D.

Veličina		3D prostor	2D rovina
Magnetická indukce	\mathbf{B}	(B_x, B_y, B_z)	$(B_x, B_y, 0)$
Intenzita magnetického pole	\mathbf{H}	(H_x, H_y, H_z)	$(H_x, H_y, 0)$
Proudová hustota	\mathbf{J}_i	(J_x, J_y, J_z)	$(0, 0, J_z)$
Intenzita elektrického pole	\mathbf{E}	(E_x, E_y, E_z)	$(0, 0, E_z)$
Magnetický vektorový potenciál	\mathbf{A}	(A_x, A_y, B_z)	$(0, 0, A_z)$

2.1 2D model asynchronního stroje

Cílem této kapitoly není odvození přesného elektromagnetického modelu asynchronního stroje za použití Maxwellových rovnic, ale spíše ukázat základní problematiku a relativní komplikovanost použitých vztahů. V mnohem detailnější míře je daná problematika uvedena např. v [15, 16] a numerické metody spojené s řešením parciálních diferenciálních rovnic popisující elektromagnetické pole např. v [17].

Pro odvození modelu asynchronního stroje jsou předem uvažovány následující zjednodušující předpoklady¹:

- (i) Elektromagnetické pole v aktivních částech stroje je kvazistacionární² a dvoudimenzionální³.
- (ii) Vinutí statoru jako i vinutí rotoru⁴ je uvažované jako celistvá oblast, tj. vinutí je reprezentováno jediným mnohoúhelníkem majícím stejný průřez jako vodiče jednotlivého vinutí.
- (iii) Statorové a rotorové plechy jako i vzduchová mezera jsou uvažovány jako elektricky nevodivé⁵.
- (iv) Magnetické materiály rotoru i statoru mají lineární magnetizační charakteristiku.
- (v) Veškeré elektromagnetické vztahy modelu asynchronního stroje jsou uvažovány ve statické kartézské souřadnicové soustavě pevně spojené se statorem⁶.

Pro statorové vinutí je možné na základě Ampérova zákona, viz Dodatek B.2, formulovat vztah mezi magnetickým vektorovým potenciálem A a proudovou hustotou J_s statorového vinutí ve formě diferenciální rovnice

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times A \right) = J_s, \quad (2.1.1)$$

kde μ je permeabilita daného prostředí.

Protože do rotoru se indukuje napětí vlivem relativního pohybu rotoru a statorového magnetického pole, je možné rotorovou proudovou hustotu vyjádřit pomocí modifikovaného Ohmova zákona, viz Dodatek B.3.3, a formulovat diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times A \right) &= \sigma_r E + \sigma_r v \times B, \\ &= -\sigma_r \frac{\partial A}{\partial t} - \sigma_r \nabla \Phi + \sigma_r v \times (\nabla \times A), \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

kde σ_r je konduktivita rotorového vinutí, $v = (v_x, v_y, 0)$ je lineární rychlost daného bodu rotoru $r = (r_x, r_y, 0)$ a pro elektrický skalární potenciál Φ platí

$$\sigma_r \nabla \Phi = -\frac{u_n}{l} \hat{z}, \quad (2.1.3)$$

kde u_n představuje elektrické napětí n -té rotorové tyče mající délku l podél osy z , viz Obr. 2.1 b).

Kombinací vztahů (2.1.1) a (2.1.2) je možné určit rovnici popisující magnetické pole uvnitř asynchronního stroje

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times A \right) + \sigma_r \frac{\partial A}{\partial t} = J_s - \sigma_r \nabla \Phi + \sigma_r v \times (\nabla \times A). \quad (2.1.4)$$

K této rovnici je třeba doplnit vztahy dávající do souvislosti statorové napětí a statorovou proudovou hustotu a obdobně i pak vztahy pro rotorové napětí. Schematicky si je možné jednu

¹V literatuře uvedené výše jsou odvozeny vztahy mnohem obecnější, pro které neplatí takto striktní předpoklady.

²Je předpokládáno, že napájecí kmitočet statorového napětí je dostatečně nízký, aby nebylo nutné uvažovat Maxwellovy posuvné proudy.

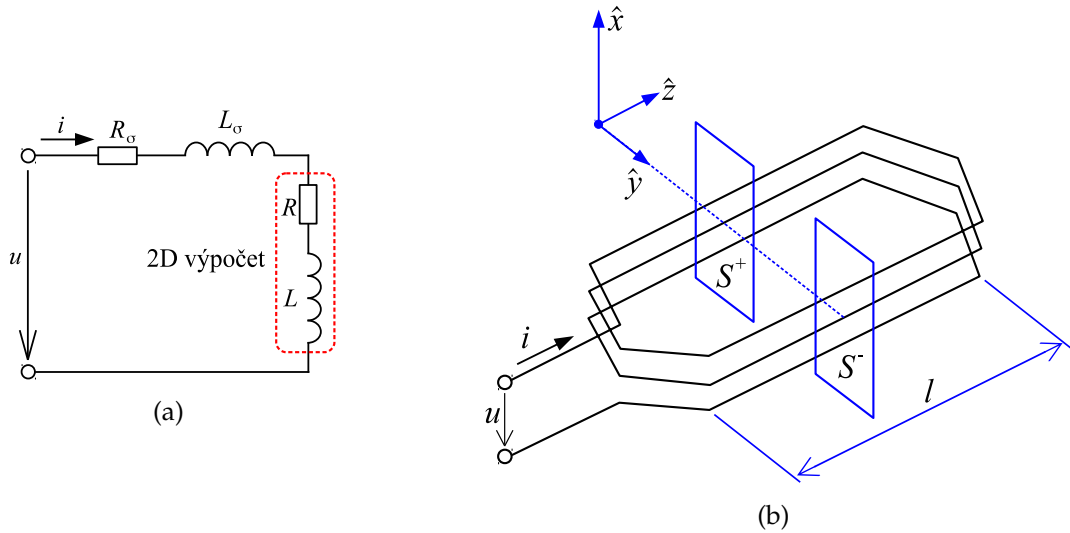
³Je předpokládán přímý stator, resp. rotor bez jakéhokoliv natočení drážek. Tento efekt je relativně snadné simulovat i v případě dvoudimenzionálního pole, viz např. [19, 20]. Na druhou stranu to znamená, že v tomto modelu není možné automaticky zahrnout parazitní jevy jako odpory a indukčnosti čel vinutí, resp. kruhu nakrátko.

⁴Místo vinutého rotoru se může jednat o litou klec, tj. vinutí je reprezentováno rotorovými tyčemi.

⁵Prakticky to tedy znamená, že v daných materiálech nemohou vznikat vířivé proudy a následně ani jim odpovídající ztráty.

⁶Tato volba není nejvhodnější z pohledu modelu asynchronního stroje, ale pro dané účely je dostačující. Praktičtější je uvažovat dvě souřadnicové soustavy jednu statickou spojenou se statorem pro popis statorových dějů/veličin a jednu rotující pevně spojenou s rotorem.

cívku statorového/rotorového vinutí představit⁷ podle Obr. 2.1 a). Kde jednotlivé symboly mají následující význam: R_σ a L_σ představují „parazitní“ odpor a indukčnost části vinutí mimo aktivní části stroje, např. odpor a indukčnost čel vinutí, přívodních vodičů apod. Tyto veličiny není možné z dvourozměrné analýzy identifikovat a je nutné je předem postulovat za známe. R a L představují elektrický odpor a indukčnost části vinutí uložené v aktivní části stroje, tyto veličiny je možné snadno vypočítat z rozložení elektromagnetického pole ve stroji, viz kapitola 9.



Obr. 2.1: Schématické zapojení jedné cívky vinutí.

V dvourozměrném prostoru lze jednu cívku vinutí schématicky zobrazit podle Obr. 2.1 b). Kde je znázorněna jedna cívka vinutí mající aktivní délku $2l$, skládající se z N_1 závitů majících celkovou plochu S^+ a S^- , kde jednotlivé horní indexy značí kladně, resp. záporně orientovanou plochu ve směru \hat{z} . Cívka je napájena napětím u a protéká jí proud i . Na základě předchozího je tedy možné sestavit napěťovou rovnici takovéto jedné cívky ve tvaru

$$\begin{aligned} u &= (R_\sigma + R) i + \frac{d}{dt} (L_\sigma i + Li) \\ &= (R_\sigma + R) i + L_\sigma \frac{di}{dt} + \frac{IN_1}{\int_{S^+} dS} \int_{S^+} \frac{\partial A_z}{\partial t} dS - \frac{IN_1}{\int_{S^-} dS} \int_{S^-} \frac{\partial A_z}{\partial t} dS. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Skládá-li se celé vinutí jedné fáze z n stejných cívek, potom napěťová rovnice má tvar

$$u_{\text{fáze}} = \sum_n (R_\sigma + R) i + \sum_n (L_\sigma) \frac{di}{dt} + \sum_n \left(\frac{IN_1}{\int_{S^+} dS} \int_{S^+} \frac{\partial A_z}{\partial t} dS - \frac{IN_1}{\int_{S^-} dS} \int_{S^-} \frac{\partial A_z}{\partial t} dS \right). \quad (2.1.6)$$

Finální vztah pro napětí statorového vinutí by byl sestaven na základě zapojení jednotlivých fází statoru obvykle hvězdy, nebo do trojúhelníka. Obdobným způsobem je možné sestavit fázová napětí rotorového vinutí, nebo klece nakrátko, viz kapitola 4. Finální vztahy zde nejsou odvozeny a ani uvedeny, protože není cílem této práce sestavit model asynchronního stroje pomocí metody konečných prvků a ani tento model řešit. Pro hrubou představu o komplikovanosti řešení modelu asynchronního stroje jsou tyto napěťové rovnice (2.1.6) a rovnice magnetického pole (2.1.4) dostačující.

⁷Opět je nutné zdůraznit, že je uvažován dvourozměrný model stroje.

K těmto rovnicím je třeba doplnit rovnici pohybovou

$$J \frac{d\omega_{\text{mech}}}{dt} = m_i - m_z, \quad (2.1.7)$$

kde ω_{mech} je mechanická úhlová rychlost rotoru, m_z je zatěžovací moment a m_i je vnitřní moment stroje, který je možné určit z rozložení magnetického pole ve vzduchové mezeře za použití Maxwellova napět'ového tenzoru, viz Dodatek B.4.1,

$$m_i = \oint_S (\mathbf{r} \times T_{ij}) \cdot d\mathbf{S} \Big|_{\text{Pouze komponenta v ose } z}. \quad (2.1.8)$$

Zde je třeba upozornit na to, že v obecném případě je moment vektorovou veličinou. Ale zatěžovací moment obvykle působí pouze v ose stroje, tj. ve vztahu (2.1.8) je třeba uvažovat pouze komponentu momentu působící právě v ose stroje z . S přihlédnutím na řešení asynchronního stroje ve 2D je možné tento vztah dále zjednodušit použitím křivkového integrálu, kde integrační křivka je obvykle kružnice umístěná ve středu vzduchové mezery, místo integrálu plošného po obvodu rotoru, viz např. [15].

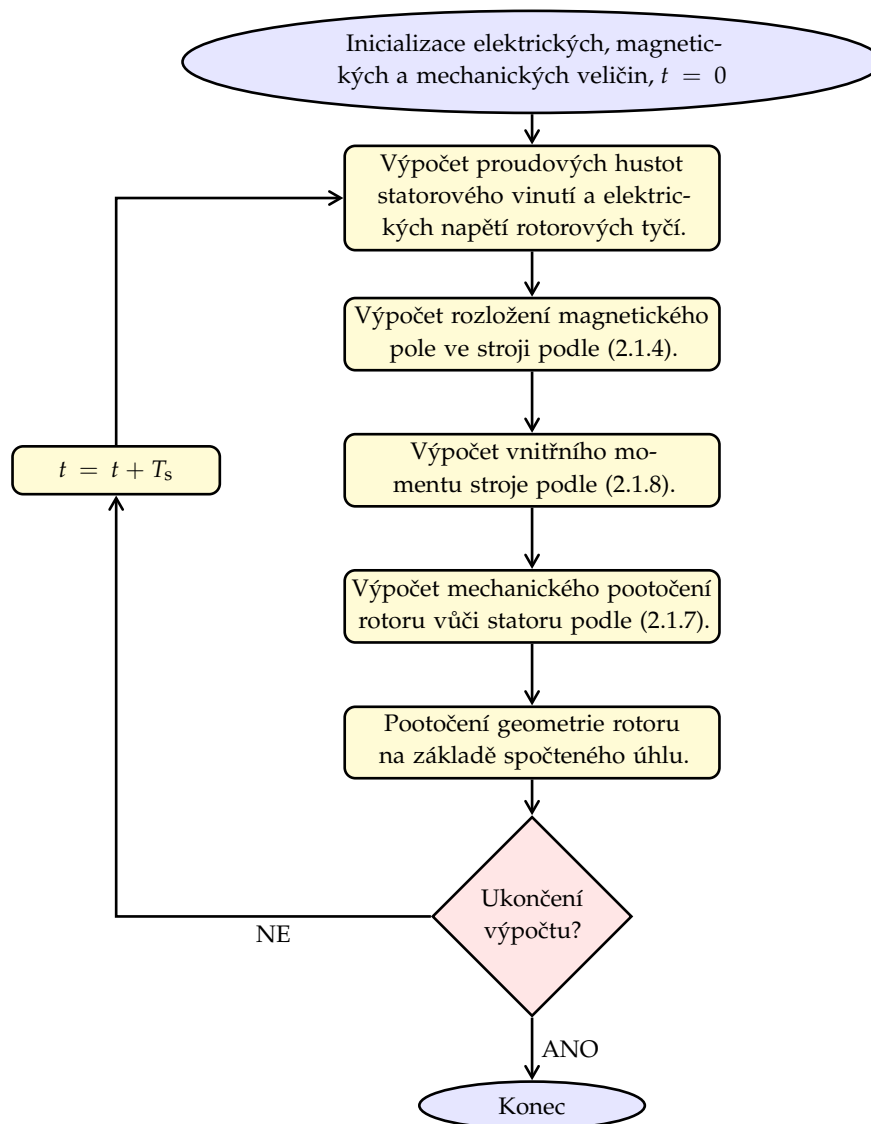
Z takto sestavených rovnic je už relativně snadné zkonstruovat algoritmus pro výpočet užitečných vlastností asynchronního stroje, viz Obr. 2.2. Předložený algoritmus je relativně jednoduchý, ovšem praktická realizace je velmi obtížná a proto je vhodnější využít komerčně dostupných produktů, které řeší elektromagnetické problémy obdobným způsobem. Z uvedeného algoritmu je zřejmé, že je možné jej snadno modifikovat a do výpočtu zařadit další doplňkové výpočty takové, aby model asynchronního stroje blíže respektoval realitu, např. nelinearitu magnetického obvodu.

Uvedený způsob výpočtu pracovních charakteristik a parametrů asynchronních strojů pro daný pracovní stav je pro běžné použití, např. při regulaci, příliš komplikovaný a výpočetně velmi náročný, zvláště pokud jsou v modelu stroje zahrnuty další parazitní jevy, jako např. hysterese, rotační ztráty magnetického pole apod. Z tohoto důvodu je vhodné provést určité zjednodušení a to zejména nahradit veškeré rozprostřené parametry, tj. převážně indukčnosti, jejich ekvivalentními⁸ soustřednými parametry. Po této úpravě přejde soustava parciálních diferenciálních rovnic na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic, obvykle maximálně druhého řádu, kterou je možné relativně rychle a snadno řešit. Zde je ale nutné zdůraznit, že tímto zjednodušením se ztrácí kompletní informace o aktuálních dějích v elektromagnetickém obvodu stroje, např. ztrácí se informace o velikosti syčení a jemu odpovídajícím ztrátám.

Při přechodu od obvodu s rozprostřenými parametry je v případě asynchronního stroje největším úskalím nahrazení statorového a rotorového vinutí jejich náhradními ekvivalenty. V následujících dvou kapitolách je toto provedeno pro případ:

- (i) harmonického statorového a harmonického rotorového vinutí,
- (ii) harmonického statorového a diskretního rotorového vinutí.

⁸Tj., takovými parametry které v širokém rozsahu pracovních oblastí stroje dobře reprezentují jeho elektromagnetické vlastnosti.



Obr. 2.2: Algoritmus výpočtu elektromagnetických parametrů asynchronního stroje.

3 | Dynamický model s rotorovým harmonickým vinutím

Na rozdíl od předchozí kapitoly je zde na asynchronní stroj pohlíženo za předpokladu separovatelnosti magnetických a elektrických jevů. Kdy je možné elektromagnetický obvod stroje nahradit vázanými RL obvody.

Asynchronní stroj lze z čistě elektrického pohledu chápat jako soubor statických a rotujících cívek reprezentujících statorová a rotorová vinutí stroje. Pohyb rotoru vůči statoru je dán vzájemnou elektromagnetickou interakcí jednotlivých cívek, přesněji interakcí magnetických polí vytvořených jednotlivými vinutími, viz úvod. Z tohoto je zřejmé, že dynamický model asynchronního stroje se skládá z napěťových rovnic, jejichž počet je dán počtem vinutí statoru a rotoru, a jedné pohybové rovnice udávající vzájemný vztah mezi vnitřním elektromagnetickým momentem stroje a zatěžovacím momentem.

Základní předpoklady při odvození rovnic dynamického modelu trojfázového asynchronního stroje jsou následující:

- (i) Trojfázová napájecí soustava je uvažována jako symetrická se vzájemným fázovým posunem 120° elektrických, kde jednotlivé napájecí (statorové) napětí¹ jsou

$$\begin{aligned} u_a &= \sqrt{2}U_s \sin(\omega_s t), \\ u_b &= \sqrt{2}U_s \sin\left(\omega_s t - \frac{2}{3}\pi\right), \\ u_c &= \sqrt{2}U_s \sin\left(\omega_s t - \frac{4}{3}\pi\right). \end{aligned} \tag{3.0.1}$$

- (ii) Magnetický obvod stroje je lineární².
 (iii) Statorové vinutí je trojfázové v zapojení do hvězdy.
 (iv) Rotorové vinutí je trojfázové v zapojení do hvězdy a zkratované, tj. jedná se o rotor nakrátko.

¹ Obecně pro m -fázovou soustavu jsou napětí k -té fáze dány vztahem

$$u_k = \sqrt{2}U_s \sin\left[\omega_s t - \frac{2\pi}{m}(k-1)\right],$$

kde pořadové číslo fáze k leží v rozsahu 1 až m .

²Tento předpoklad je velmi zásadní při odvozování dynamických rovnic, protože díky němu je zřejmé, že nedochází k přesycování stroje, tj. všechny indukčnosti jsou konstantní a nezávislé na velikosti protékajícího proudu. Z tohoto je zřejmé, že je možné spřažený magnetický tok jedné cívky psát ve formě $\Psi = Li$, energii uloženou v magnetickém poli cívky vypočítat jako $\frac{1}{2}Li^2$ a je možné využít principu superpozice.

- (v) Jednotlivá statorová a rotorová vinutí jsou symetrická, tj. mají totožné odpory a indukčnosti, jsou harmonicky rozloženy³ podél vzduchové mezery stroje a jsou vzájemně posunuty o 120°, viz Dodatek D.1.
- (vi) Magnetický tok libovolného vinutí je možné separovat⁴ na tok magnetizační a na tok rozptylový.

POZNÁMKA 1.

Statorové veličiny jsou v dalším textu označeny malým písmenem v indexu a rotorové velkým.

POZNÁMKA 2.

Pod pojmem hlavní, nebo-li magnetizační tok je rozuměn magnetický tok procházející přes vzduchovou mezeru asynchronního stroje a zároveň se podílející na tvorbě užitečného pracovního momentu stroje.

3.1 Odvození dynamických rovnic

Matematický model trojfázového asynchronního stroje je v obecném případě dán soustavou šesti⁵ diferenciálních napěťových rovnic ve formě⁶

$$u_k = R_k i_k + \frac{d\Psi_k}{dt} \quad k = \{a, b, c, A, B, C\}, \quad (3.1.1)$$

a jednou rovnicí pohybovou

$$\frac{J}{p} \frac{d\omega_r}{dt} = m_i - m_z, \quad (3.1.2)$$

kde u_k je napětí příslušné fáze, R_k je odpor dané fáze, Ψ_k je spřažený magnetický tok vinutí dané fáze, p je počet pólových dvojic stroje, J je moment setrvačnosti stroje a zátěže, ω_r je elektrická úhlová rychlost rotoru, m_i je vnitřní elektromagnetický moment stroje a m_z je moment zátěže.

Vztah mezi elektrickou a mechanickou úhlovou rychlostí je

$$\omega_r = p\omega_{\text{mech}}. \quad (3.1.3)$$

V případě stroje s kotvou nakrátko dále platí, že rotorová napětí jsou nulová, tj. $u_k = 0$ pro $k = \{A, B, C\}$.

³Z tohoto předpokladu dále vyplývá, že není uvažováno drážkování statoru ani rotou, tj. ve vzduchové mezeře stroje je čistě harmonické magnetické pole a dále pak, že vlastní indukčnosti jednotlivých vinutí jsou konstantní a nezávislé na vzájemné poloze rotoru a statoru.

⁴U reálného stroje nikdy nelze říct jaká část toku je rozptylová a ani to kudy rozptylový tok teče. Rozptylový tok je možné částečně odhadnout na dobře definovaných částech stroje, např. rozptylový tok drážkou, viz např. [21].

⁵V kapitole 3.3 je ukázáno, že je-li stroj napájen harmonickým napětím, je symetrický a vinutí je zapojeno do hvězdy, pak je možné stroj popsat soustavou čtyř diferenciálních rovnic pro sdružená napětí.

⁶Formálně mají stejný tvar jako již uvedený vztah (2.1.6), rozdíl je pouze ve způsobu uvažování jednotlivých parametrů, přesněji indukčností.

V obecném případě, kdy je povolen vzájemný pohyb mezi vinutími statoru a rotoru stroje, je možné časovou derivaci spráženého magnetického toku rozepsat jako součet derivací

$$\frac{d\Psi_k}{dt} = \sum_l \left(\frac{\partial \Psi_k}{\partial i_l} \Big|_{i_l \neq \text{konst.}} \frac{di_l}{dt} \right) + \frac{\partial \Psi_k}{\partial \theta_r} \Big|_{\theta_r \neq \text{konst.}} \frac{d\theta_r}{dt} \quad k, l = \{a, b, c, A, B, C\}, \quad (3.1.4)$$

kde index l představuje l -tý magnetický obvod vázaný s k -tým vinutím. Podmínky u jednotlivých parciálních derivací je třeba chápat tak, že právě daný proud i_l , resp. poloha θ_r je proměnná, zatímco ostatní veličiny jsou uvažovány konstantní. Potom lze výraz $\frac{d\Psi_k}{dt}$ chápat jako napětí na samotném cívce vinutí a toto lze rozdělit na napětí transformační indukované v závitěch cívký vlivem změny proudu v l -tých cívkách a napětí rotační způsobené změnou magnetického toku k -tého vinutí. Vztah je obecně platný jak pro lineární tak i pro nelineární⁷ magnetické obvody.

V případě lineárního⁸ magnetického obvodu je možné vyjádřit sprážený magnetický tok vztahem

$$\Psi_k = L_k i_k + \sum_l M_{kl} i_l \quad k, l = \{a, b, c, A, B, C\} \quad \text{a} \quad k \neq l. \quad (3.1.5)$$

Rovnice (3.1.4) lze pro lineární magnetický obvod potom dále upravit na tvar

$$\frac{d\Psi_k}{dt} = \sum_l \left(M_{kl} \frac{di_l}{dt} \right) + \sum_l \left(i_l \frac{\partial M_{kl}}{\partial \theta_r} \frac{d\theta_r}{dt} \right) \quad k, l = \{a, b, c, A, B, C\}, \quad (3.1.6)$$

kde M_{kl} je vzájemná indukčnost mezi k -tým a l -tým obvodem. V případě $k = l$ se jedná o vlastní indukčnost L_k k -tého obvodu.

Pro názornější představu o tvaru vztahu (3.1.5) je vhodnější jej přepsat ve formě matice

$$\begin{bmatrix} \Psi_a \\ \Psi_b \\ \Psi_c \\ \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_a & M_{ab} & M_{ac} & M_{aA} & M_{aB} & M_{aC} \\ M_{ba} & L_b & M_{bc} & M_{bA} & M_{bB} & M_{bC} \\ M_{ca} & M_{cb} & L_c & M_{cA} & M_{cB} & M_{cC} \\ M_{Aa} & M_{Ab} & M_{Ac} & L_A & M_{AB} & M_{AC} \\ M_{Ba} & M_{Bb} & M_{Bc} & M_{BA} & L_B & M_{BC} \\ M_{Ca} & M_{Cb} & M_{Cc} & M_{CA} & M_{CB} & L_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix}. \quad (3.1.7)$$

Je zřejmé, že se jedná o symetrickou čtvercovou matici, protože platí oboustranná rovnost vzájemných indukčností mezi k -tým a l -tým obvodem, tj. $M_{kl} \stackrel{!}{=} M_{lk}$. V dodatku C je ukázáno, že tento předpoklad je opodstatněný a v lineárních obvodech vždy platný.

Na základě podmínek uvedených na začátku kapitoly 3 je možné konstatovat, že:

(i) vlastní indukčnosti jsou konstantní a nezávisí na poloze θ_r

$$L_k = \mathcal{L}_s \quad k = \{a, b, c\}$$

a

$$L_k = \mathcal{L}_r \quad k = \{A, B, C\}.$$

(ii) vzájemné indukčnosti mezi statorovými, nebo rotorovými obvody jsou konstantní a nezávisí na poloze θ_r

$$M_{kl} = \mathcal{M}_s \quad k, l = \{a, b, c\} \quad \text{a} \quad k \neq l.$$

a

$$M_{kl} = \mathcal{M}_r \quad k, l = \{A, B, C\} \quad \text{a} \quad k \neq l.$$

⁷Rovnice neplatí v případě, že by se uvažovala hystereze magnetického obvodu.

⁸V případě nelineárního obvodu, jsou rovnice stále použitelné, ale je nutné okolí pracovního bodu linearizovat, tj. mají pouze omezenou platnost.

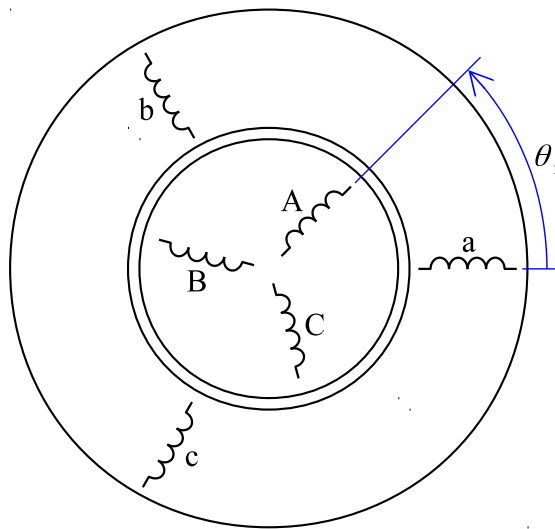
(iii) vzájemné indukčnosti mezi statorovými a rotorovými obvody závisí na poloze θ_r

$$M_{kl} = M(\theta_r)_{kl} \quad k = \{a, b, c\} \quad l = \{A, B, C\}.$$

V dalších kapitolách je provedeno odvození vztahů pro výpočet jednotlivých indukčností, jako i zjednodušení celého modelu asynchronního stroje.

3.1.1 Vlastní indukčnosti statorového a rotorového vinutí

Harmonicky rozložená statorová a rotorová vinutí podél vzduchové mezery stroje je možné, viz [22], schematicky zobrazit pomocí cívek podle Obr. 3.1. Pro zjednodušení obrázku nejsou jednotlivé fáze, tj. cívky, zapojeny do hvězdy. Cívky statorového a rotorového vinutí jsou vystaveny vzájemnému a rozptylovému magnetickému toku, které tyto cívky sami vytvářejí.



Obr. 3.1: Schematické zobrazení rotorového a statorového vinutí.

Hlavní (magnetizační) magnetický tok prochází statorovým vinutím, rotorovým vinutím a dvakrát přes vzduchovou mezeru. Magnetická reluktance, tj. magnetický odpor, hlavního magnetického toku jedné fáze statoru a rotoru je \mathcal{R}_m . Vlivem drážkování, vzduchové mezery, nasycení magnetického obvodu, čel vinutí apod. je každé jednotlivé vinutí⁹ vystaveno nejen hlavnímu magnetickému toku, ale i rozptylovým magnetickým tokům. Magnetický odpor rozptylového toku jedné fáze statorového vinutí necht' je \mathcal{R}_{σ_s} a rotorového vinutí \mathcal{R}_{σ_r} .

Vlastní a vzájemná indukčnost mezi jednotlivými fázemi statorového vinutí je nezávislá na poloze rotoru. V kapitole 9.2.2 je ukázáno, že pokud je stroj správně navržen, pak tento předpoklad je platný. Obdobně je nezávislá na poloze rotoru i vlastní indukčnost a vzájemná indukčnost rotorového vinutí. Jedinou indukčností, která je závislá na poloze, je vzájemná indukčnost mezi rotorovým a statorovým vinutím.

Na základě předchozího je vlastní indukčnost jedné fáze statorového vinutí rovna

$$\mathcal{L}_s = \frac{N_s^2}{\mathcal{R}_m \parallel \mathcal{R}_{\sigma_s}} = \frac{\mathcal{R}_{\sigma_s} + \mathcal{R}_m}{\mathcal{R}_m \mathcal{R}_{\sigma_s}} N_s^2 = \mathcal{L}_h + \mathcal{L}_{\sigma_s} \quad (3.1.8)$$

⁹Při dalším odvození je předpokládáno, že každý individuální závit cívky vinutí je vystaven témuž rozptylovému toku. U reálného stroje toto není nikdy splněno, ale na druhou stranu skutečné rozložení rozptylových toků není možné přesně analyticky popsat a ani přiřadit konkrétním závitům cívek vinutí.

a rotorového vinutí rovna

$$\mathcal{L}_r = \frac{N_r^2}{\mathcal{R}_m \parallel \mathcal{R}_{\sigma r}} = \frac{\mathcal{R}_{\sigma r} + \mathcal{R}_m}{\mathcal{R}_m \mathcal{R}_{\sigma r}} N_r^2 = \mathcal{L}_{h,r} + \mathcal{L}_{\sigma r}, \quad (3.1.9)$$

kde N_s , resp. N_r je počet vodičů statorového, resp. rotorového vinutí, \mathcal{L}_h , resp. $\mathcal{L}_{h,r}$ je magnetizační indukčnost statorového, resp. rotorového vinutí a $\mathcal{L}_{\sigma s}$, resp. $\mathcal{L}_{\sigma r}$ je rozptylová indukčnost statorového, resp. rotorového vinutí.

Z těchto vztahů je zřejmé, že jak statorová, tak i rotorová indukčnost se skládá ze dvou složek:

- (i) z indukčnosti magnetizační, tj. $\frac{N_s^2}{\mathcal{R}_m}$, resp. $\frac{N_r^2}{\mathcal{R}_m}$, která odpovídá magnetickému toku procházejícího přes vzduchovou mezeru stroje a zároveň se podílejšího na tvorbě užitečného pracovního momentu stroje.
- (ii) z indukčnosti rozptylové¹⁰, tj. $\frac{N_s^2}{\mathcal{R}_{\sigma s}}$, resp. $\frac{N_r^2}{\mathcal{R}_{\sigma r}}$, která odpovídá magnetickému toku nepodílejšího se na tvorbě užitečného pracovního momentu stroje.

Vztahy (3.1.8) a (3.1.9) jsou přesné pouze pro lineární oblast magnetizační charakteristiky a za předpokladu, že je možné magnetický tok vytvořený vinutím zcela přesně separovat na magnetizační a rozptylový. Je zřejmé, že v případě jednoho samotného vinutí nelze vlastní indukčnost žádným relevantním způsobem rozdělit na magnetizační a rozptylovou, proto je nutné vztahy (3.1.8) a (3.1.9) chápat jako první iteraci toho, jak skutečně vlastní indukčnosti jednotlivých vinutí vypadají. Při popisu indukčností reálného stroje je možná libovolná změna těchto vztahů tak, aby co nejvíce odpovídali skutečnosti, např. eliminací jedné z rozptylových indukčností.

3.1.2 Vzájemné indukčnosti statorového a rotorového vinutí

Vzájemná indukčnost mezi statorovým vinutím, např. fází a a b , lze vyjádřit vztahem

$$\mathcal{M}_s = k \sqrt{L_a L_b} = k \mathcal{L}_s, \quad (3.1.10)$$

kde k je činitel vazby mezi vinutím a a b . Při jeho určení jsou uvažovány následující dva předpoklady:

- (i) Rozptylový tok neovlivňuje¹¹ vzájemný magnetický tok mezi jednotlivými vinutími.
- (ii) Vzájemná vazba je zmenšena o koeficient $\cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$ z důvodu vzájemného pootočení jednotlivých fází o 120° , podrobněji viz kapitola 9.2.1.

Velikost činitele vazby lze určit¹² vztahem

$$k = \frac{\mathcal{R}_{\sigma s}}{\mathcal{R}_m + \mathcal{R}_{\sigma s}} \cos \frac{2}{3}\pi. \quad (3.1.11)$$

¹⁰K rozptylové indukčnosti je dále nutné přičíst tzv. intrinzičnou indukčnost samotného vodiče, viz [23], která nijak neovlivňuje magnetické pole okolo vodiče a tudíž ji nelze počítat z rozptylového magnetického toku, ale pouze z magnetické energie uložené v samotném vodiči protékajícího elektrickým proudem.

¹¹Tato podmínka předpokládá klasický model rozptylu, jako např. v případě vinutí transformátoru, kdy se rozptylový tok uzavírá pouze vzduchem kolem cívky a hlavní tok se uzavírá v magneticky vodivém jádře. Je třeba si však uvědomit, že tento model je velmi zidealizovaný a ve skutečnosti i rozptylový tok prochází jádrem.

¹²Tento vztah je lépe přepsat pomocí magnetických vodivostí

$$k = \frac{\frac{1}{\mathcal{R}_m}}{\frac{1}{\mathcal{R}_m} + \frac{1}{\mathcal{R}_{\sigma s}}} \cos \frac{2}{3}\pi.$$

Dosazením (3.1.8) a (3.1.11) do (3.1.10) lze určit finální vztah pro satorovou vzájemnou indukčnost

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_s &= \frac{N_s^2}{\mathcal{R}_m} \cos \frac{2}{3}\pi \\ &= \mathcal{L}_h \cos \frac{2}{3}\pi.\end{aligned}\quad (3.1.12)$$

Zcela analogickým způsobem je možné odvodit vzájemnou indukčnost jednotlivých fází rotorových vinutí, výsledná rovnice má tvar

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_r &= \frac{N_r^2}{\mathcal{R}_m} \cos \frac{2}{3}\pi \\ &= \frac{N_r^2}{N_s^2} \mathcal{L}_h \cos \frac{2}{3}\pi \\ &= \mathcal{L}_{h,r} \cos \frac{2}{3}\pi.\end{aligned}\quad (3.1.13)$$

Ze vztahů (3.1.12) a (3.1.13) vyplývá, že poměr magnetizačních indukčností satoru a rotoru je úměrný kvadrátu počtu závitů

$$\frac{\mathcal{M}_s}{\mathcal{M}_r} = \frac{\mathcal{L}_h}{\mathcal{L}_{h,r}} = \frac{N_s^2}{N_r^2}.\quad (3.1.14)$$

3.1.3 Vzájemné indukčnosti mezi satorovým a rotorovým vinutím

Na základě vztahů (3.1.8) a (3.1.9), kde za předpokladu, že rozptylové indukčnosti jsou rovny nule¹³, je možné vyjádřit vzájemnou indukčnost mezi rotorovou fází *A* a satorovou fází *a*

$$\begin{aligned}M_{aA} &= \frac{N_s N_r}{\mathcal{R}_m} \cos \theta_r \\ &= \mathcal{M}_{sr} \cos \theta_r.\end{aligned}\quad (3.1.15)$$

Podle Obr. 3.1 je rotorové vinutí fáze *B* vůči fází satorové fázi *a* posunuto o -120° , obdobně pak rotorové vinutí fáze *C* o -240° . Proto pro jejich výpočet je dostačující pouze patřičně změnit úhel θ_r

$$\begin{aligned}M_{aB} &= \mathcal{M}_{sr} \cos \left(\theta_r + \frac{2}{3}\pi \right), \\ M_{aC} &= \mathcal{M}_{sr} \cos \left(\theta_r + \frac{4}{3}\pi \right).\end{aligned}\quad (3.1.16)$$

Obdobným způsobem je možné určit vzájemné indukčnosti i pro ostatní satorové a rotorové fáze.

¹³Je třeba poznamenat, že podle předpokladů magnetický rozptylový tok satorového vinutí neprochází rotorovým vinutím a naopak, tudíž se nepodílí na vzájemné vazbě mezi satorem a rotorem, tj. ani na vzájemné indukčnosti.

3.1.4 Napěťové rovnice ve formě matice

Na základě odvozených indukčností je možné přepsat napěťové rovnice (3.1.1) ve formě matice

$$\begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \\ u_A \\ u_B \\ u_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_s] & [0] \\ [0] & [R_r] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} [L_s] & [\mathcal{L}_{sr}] \\ [\mathcal{L}_{sr}^T] & [L_r] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix}, \quad (3.1.17)$$

kde jsou matice statorových a rotorových odporů

$$[R_s] = R_s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.1.18)$$

$$[R_r] = R_r \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.19)$$

a $[0]$ je nulová matice

$$[0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.1.20)$$

Matice vlastních indukčností statoru a rotoru jsou

$$[L_s] = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_s & \mathcal{L}_h \cos \frac{2}{3}\pi & \mathcal{L}_h \cos \frac{4}{3}\pi \\ \mathcal{L}_h \cos \frac{4}{3}\pi & \mathcal{L}_s & \mathcal{L}_h \cos \frac{2}{3}\pi \\ \mathcal{L}_h \cos \frac{2}{3}\pi & \mathcal{L}_h \cos \frac{4}{3}\pi & \mathcal{L}_s \end{bmatrix} \quad (3.1.21)$$

a

$$[L_r] = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_r & \mathcal{L}_{h,r} \cos \frac{2}{3}\pi & \mathcal{L}_{h,r} \cos \frac{4}{3}\pi \\ \mathcal{L}_{h,r} \cos \frac{4}{3}\pi & \mathcal{L}_r & \mathcal{L}_{h,r} \cos \frac{2}{3}\pi \\ \mathcal{L}_{h,r} \cos \frac{2}{3}\pi & \mathcal{L}_{h,r} \cos \frac{4}{3}\pi & \mathcal{L}_r \end{bmatrix}. \quad (3.1.22)$$

V případě symetrické soustavy zapojené do hvězdy, tj. platí $\sum i = 0$, je možné (3.1.21) a (3.1.22) přepsat¹⁴ do tvaru

$$[L_s] = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_s + \frac{1}{2}\mathcal{L}_h & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_s + \frac{1}{2}\mathcal{L}_h & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{L}_s + \frac{1}{2}\mathcal{L}_h \end{bmatrix} \quad (3.1.23)$$

¹⁴ Postup je následující:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_h \cos \frac{2\pi}{3} i_b + \mathcal{L}_h \cos \frac{4\pi}{3} i_c &= -\frac{1}{2}\mathcal{L}_h i_b - \frac{1}{2}\mathcal{L}_h i_c \\ &= -\frac{1}{2}\mathcal{L}_h (i_b + i_c) \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}_h i_a. \end{aligned}$$

a

$$[L_r] = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_r + \frac{1}{2}\mathcal{L}_{h,r} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_r + \frac{1}{2}\mathcal{L}_{h,r} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{L}_r + \frac{1}{2}\mathcal{L}_{h,r} \end{bmatrix}. \quad (3.1.24)$$

S přihlédnutím ke vztahům (3.1.8) a (3.1.9) je možné tyto vztahy dále rozepsat ve tvaru

$$[L_s] = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\sigma s} + \frac{3}{2}\mathcal{L}_h & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_{\sigma s} + \frac{3}{2}\mathcal{L}_h & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{L}_{\sigma s} + \frac{3}{2}\mathcal{L}_h \end{bmatrix} \quad (3.1.25)$$

a

$$[L_r] = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\sigma r} + \frac{3}{2}\mathcal{L}_{h,r} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_{\sigma r} + \frac{3}{2}\mathcal{L}_{h,r} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{L}_{\sigma r} + \frac{3}{2}\mathcal{L}_{h,r} \end{bmatrix}. \quad (3.1.26)$$

Matice vzájemných indukčností statorové a rotorového vinutí je podle (3.1.15), (3.1.16) a Obr. 3.1

$$[\mathcal{L}_{sr}] = \mathcal{M}_{sr} \begin{bmatrix} \cos \theta_r & \cos(\theta_r + \frac{2}{3}\pi) & \cos(\theta_r + \frac{4}{3}\pi) \\ \cos(\theta_r + \frac{4}{3}\pi) & \cos \theta_r & \cos(\theta_r + \frac{2}{3}\pi) \\ \cos(\theta_r + \frac{2}{3}\pi) & \cos(\theta_r + \frac{4}{3}\pi) & \cos \theta_r \end{bmatrix}. \quad (3.1.27)$$

3.1.4.1 Napěťové rovnice ve formě matice převedené na stranu statoru

Obdobně jako v případě transformátoru, viz např. [13], je možné veškeré rotorové kvantify převést na stranu statoru¹⁵. Výhodou transformace rotorových veličin na stranu statoru je, že všechny rotorové veličiny mají obdobnou velikost a v ideálním případě shodnou velikost jako statorové. Bez této transformace je numerické řešení napěťových rovnic (3.1.17) relativně obtížné, protože numerický rozdíl mezi rotorovými a statorovými veličinami může být až několik řádů, obzvláště v případě asynchronního stroje s kotvou nakrátko. Pro převod rotorových veličin na statorové jsou definovány následující čtyři transformace:

(i) Transformace rotorových napětí

$$u'_r = u_r \frac{N_s}{N_r}. \quad (3.1.28)$$

(ii) Transformace rotorových proudů

$$i'_r = i_r \frac{N_r}{N_s}. \quad (3.1.29)$$

(iii) Transformace rotorových odporů a obdobně i vlastních a vzájemných indukčností rotorového vinutí

$$R'_r = R_r \frac{N_s^2}{N_r^2}. \quad (3.1.30)$$

(iv) Transformace vzájemných indukčností mezi rotorovým a statorovým vinutím¹⁶

$$M'_{sr,aA} = M_{sr,aA} \frac{N_s}{N_r}. \quad (3.1.31)$$

¹⁵Je třeba poznamenat, že provedená transformace nijak nemění smysl samotných rotorových rovnic pouze je přeškáluje vhodně zvolenou konstantou, což se dá i jednoduše dokázat.

¹⁶Zde je nutné poznamenat to, že vzájemná indukčnost mezi státorem a rotorem se netransformuje pomocí kvadrátu poměru závitů, ale pouze s poměrem závitů. Je třeba si uvědomit, že tato vzájemná indukčnost je sama o sobě vázaná ke statoru a rotoru a transformuje se pouze ta část vzájemné indukčnosti vázaná na rotor.

Aplikací těchto transformací na vztahy z předešlé kapitoly je možné ukázat, že vlastní rotorové a statorové indukčnosti jsou identické a vzájemná indukčnost mezi státorem a rotorem je identická s magnetizační indukčností

$$\begin{aligned} [L_r] &\longmapsto [L_s], \\ \mathcal{M}_{sr} &\longmapsto \mathcal{L}_h. \end{aligned} \quad (3.1.32)$$

POZNÁMKA 3.

Protože přepočtem rotorových veličin na statorovou stranu se nemění smysl napěťových rovnic, ale pouze se tyto rovnice přeškálují, je v dalším textu úmyslně vynecháno jakékoliv značení toho zda jsou, či nejsou rotorové veličiny přepočteny na stranu statoru.

3.1.4.2 Napěťové rovnice ve formě prostorového vektoru

V předchozích kapitolách jsou odvozeny kompletní napěťové rovnice v přirozených souřadnicích¹⁷. Tyto rovnice je možné řešit běžnými numerickými metodami řešení diferenciálních rovnic, viz např. [24]. Čistě analytické řešení je velmi komplikované z důvodu toho, že se v rovnicích vyskytují proměnné koeficienty v matici vzájemných indukčností $[\mathcal{L}_{sr}]$, viz (3.1.27). Pro snížení nároků na řešení těchto rovnic je běžné eliminovat tyto proměnné koeficienty pomocí speciálních transformací, viz Dodatek E.

Pro statorové a rotorové vinutí, tj. třífázové soustavy, je možné definovat komplexní číslo \tilde{a} značící fázový posun 120° mezi jednotlivými fázemi v Gaussově komplexní rovině

$$\tilde{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}}. \quad (3.1.33)$$

Pro okamžité hodnoty veličiny \mathcal{X} reprezentující: statorové napětí, proud, spřažený magnetický, rotorové napětí, proud, nebo spřažený magnetický tok dané fáze je možné zavést podle Dodatku E prostorový vektor¹⁸

$$\hat{\mathcal{X}}_s = \frac{2}{3} (\mathcal{X}_a + \tilde{a}\mathcal{X}_b + \tilde{a}^2\mathcal{X}_c). \quad (3.1.34)$$

Použitím tohoto vztahu je možné snadno převést kompletní napěťové rovnice (3.1.17) s použitím vztahů pro indukčnosti (3.1.25), (3.1.26) a (3.1.27) na tvar

$$\begin{aligned} \hat{u}_s &= R_s \hat{i}_s + \frac{dL_s \hat{i}_s}{dt} + \frac{d}{dt} M_{sr} e^{j\theta_r} \hat{i}_r, \\ \hat{u}_r &= R_r \hat{i}_r + \frac{dL_r \hat{i}_r}{dt} + \frac{d}{dt} M_{sr} e^{-j\theta_r} \hat{i}_s, \end{aligned} \quad (3.1.35)$$

¹⁷Pod pojmem přirozené souřadnice je myšleno to, že napěťové rovnice jsou sestaveny pro každou fázi stroje zvlášť, tj. jsou tři statorové a tři rotorové diferenciální rovnice pro napětí v každé jednotlivé fázi.

¹⁸Pod pojmem prostorový vektor je v užším slova smyslu myšlen vektor vzniklý po napěťové invariantní Clarkové transformaci vypočtený na základě vztahu (E.4.1).

kde jsou formálně zavedeny nové ekvivalentní trojfázové indukčnosti:

(i) Ekvivalentní statorová indukčnost

$$L_s = \mathcal{L}_{\sigma s} + \frac{3}{2}\mathcal{L}_h, \quad (3.1.36)$$

(ii) Ekvivalentní rotorová indukčnost

$$L_r = \mathcal{L}_{\sigma r} + \frac{3}{2}\mathcal{L}_{h,r}, \quad (3.1.37)$$

(iii) Ekvivalentní vzájemná indukčnost mezi statorovým a rotorovým vinutím

$$M_{sr} = \frac{3}{2}\mathcal{M}_{sr}. \quad (3.1.38)$$

Po provedení naznačených derivací ve vztazích (3.1.35) a po úpravě vychází

$$\begin{aligned} \hat{u}_s &= R_s \hat{i}_s + L_s \frac{d\hat{i}_s}{dt} + M_{sr} e^{j\theta_r} \frac{d\hat{i}_r}{dt} + j\omega_r e^{j\theta_r} M_{sr} \hat{i}_r, \\ \hat{u}_r &= R_r \hat{i}_r + L_r \frac{d\hat{i}_r}{dt} + M_{sr} e^{-j\theta_r} \frac{d\hat{i}_s}{dt} - j\omega_r e^{-j\theta_r} M_{sr} \hat{i}_s, \end{aligned} \quad (3.1.39)$$

kde je zavedena elektrická rotorová úhlová rychlost ω_r

$$\omega_r = \frac{d\theta_r}{dt}. \quad (3.1.40)$$

3.1.5 Výpočet vnitřního momentu stroje

Vnitřní elektromagnetický moment stroje nutný pro kompletní pohybové rovnice (3.1.2), je možné určit dvěma způsoby. První způsob vychází z energetické bilance stroje, viz [25], kdy je celkovou dodanou energií stroje $\sum u_k i_k dt$ možné separovat na Jouleovy ztráty, změny energie uložené v magnetickém poli stroje a na energii sloužící k přeměně elektrické energie na mechanickou. Z této poslední energie lze již snadno určit vnitřní výkon stroje a také moment.

Druhý způsob výpočtu momentu je dán jako podíl změny koenergie¹⁹ uložené v magnetickém obvodu při změně vzájemné polohy statoru a rotoru

$$m_i = \left. \frac{\partial W_{co}}{\partial \theta_r} \right|_{i=\text{konst.}}, \quad (3.1.41)$$

kde W_{co} je celková koenergie uložená v magnetickém obvodu stroje a θ_r je úhel mezi statorem a rotorem, viz Obr. 3.1. Zde je třeba poznamenat, že výpočet momentu na základě (3.1.41) je zcela univerzální a je možné jej použít i v případě nelineárních²⁰ magnetických obvodů na rozdíl od momentu určeného na základě energetické bilance.

¹⁹V případě výpočtu z magnetické energie je moment dán vztahem

$$m_i = - \left. \frac{\partial W_{mag}}{\partial \theta_r} \right|_{\Psi=\text{konst.}}.$$

²⁰V případě uvážení hystereze je jeho platnost diskutabilní.

Magnetickou koenergií je možné vyjádřit vztahem

$$W_{co} = \frac{1}{2} \sum_k \Psi_k i_k \quad k, l = \{a, b, c, A, B, C\}, \quad (3.1.42)$$

tento vztah je možné dále rozepsat na

$$W_{co} = \frac{1}{2} \sum_k L_k i_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k,l} M_{kl} i_k i_l \quad k, l = \{a, b, c, A, B, C\} \quad \text{a} \quad k \neq l. \quad (3.1.43)$$

Pro potřeby výpočtu elektromagnetického momentu, viz (3.1.41), je postačující znalost magnetické koenergie závislé pouze na úhlu natočení θ_r

$$W_{co}(\theta_r) = \sum_k \sum_l M_{kl} i_k i_l \quad k = \{a, b, c\} \quad \text{a} \quad l = \{A, B, C\}. \quad (3.1.44)$$

Předpokladem platnosti vztahu (3.1.44) je, že pouze vzájemné indukčnosti mezi statorem a rotorem jsou závislé na natočení rotoru, pokud by toto neplatilo, je nutné užít obecnější vztah (3.1.43).

Po dosazení (3.1.44) do (3.1.41) a po úpravě má výsledný vztah²¹ pro moment tvar

$$\begin{aligned} m_i = & \frac{2}{3} p (i_A i_b + i_B i_c + i_a i_C) M_{sr} \cos \left(\theta_r - \frac{\pi}{6} \right) - \\ & \frac{2}{3} p (i_a i_B + i_A i_c + i_b i_C) M_{sr} \cos \left(\theta_r + \frac{\pi}{6} \right) - \\ & \frac{2}{3} p (i_a i_A + i_b i_B + i_c i_C) M_{sr} \sin (\theta_r). \end{aligned} \quad (3.1.45)$$

Tento výraz je dále možné rozepsat na dvě části závislé pouze na kosinu a sinu úhlu θ_r

$$\begin{aligned} m_i = & \frac{\sqrt{3}}{3} p M_{sr} [i_A (i_b - i_c) + i_B i_c - i_b i_C + i_a (-i_B + i_C)] \cos \theta_r + \\ & \frac{1}{3} p M_{sr} [i_B i_c - 2i_b i_B + i_A (i_b + i_c) + i_b i_C - 2i_c i_C + i_a (-2i_A + i_B + i_C)] \sin \theta_r. \end{aligned} \quad (3.1.46)$$

Za předpokladu, že platí $i_a + i_b + i_c = 0$ a $i_A + i_B + i_C = 0$, je možné momentovou rovnici dále zjednodušit vyjádřením jednoho statorového a jednoho rotorového proudu, zde např. i_c a i_C , do tvaru

$$m_i = p M_{sr} \sqrt{3} (i_A i_b - i_a i_B) \cos \theta_r - p M_{sr} [i_a (2i_A + i_B) + i_b (i_A + 2i_B)] \sin \theta_r. \quad (3.1.47)$$

V případě výpočtu momentu asynchronního stroje pomocí prostorového vektoru je možné nalézt celou řadu, viz např. [9], ekvivalentních výrazů pro jeho výpočet. V této práci jsou použity následující dva výrazy

$$\begin{aligned} m_i = & -\frac{3}{2} p M_{sr} \Im \left\{ e^{j\theta_r} \hat{i}_s^* \hat{i}_r \right\} \\ = & \frac{3}{2} p M_{sr} \Im \left\{ e^{-j\theta_r} \hat{i}_s \hat{i}_r^* \right\}. \end{aligned} \quad (3.1.48)$$

²¹Při použití indukčnosti \mathcal{M}_{sr} místo M_{sr} koeficient $\frac{2}{3}$ vymizí.

3.2 Kompletní dynamický model v rotujících souřadnicích

Kompletní dynamický model asynchronního stroje s harmonickým satorovým a rotorovým vinutím je reprezentován soustavou čtyř napěťových rovnic (3.1.39) a jedné pohybové rovnice (3.1.2) s vnitřním momentem vypočteným pomocí vztahu (3.1.45)

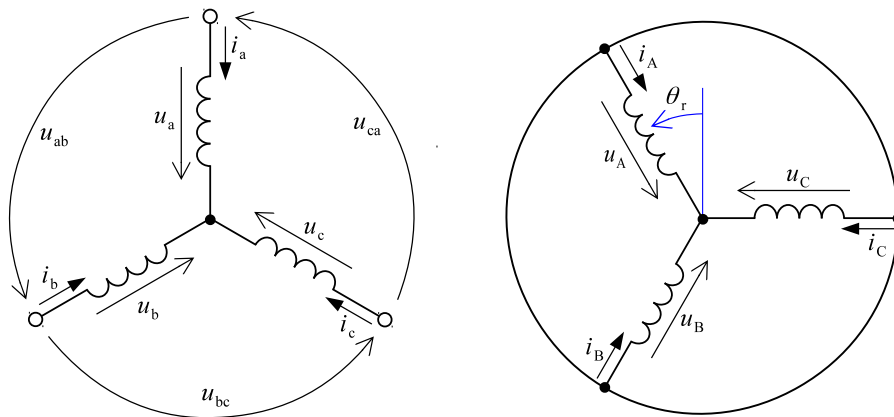
$$\begin{aligned}\hat{u}_s &= R_s \hat{i}_s + L_s \frac{d\hat{i}_s}{dt} + M_{sr} e^{j\theta_r} \frac{d\hat{i}_r}{dt} + j\omega_r e^{j\theta_r} M_{sr} \hat{i}_r, \\ \hat{u}_r &= R_r \hat{i}_r + L_r \frac{d\hat{i}_r}{dt} + M_{sr} e^{-j\theta_r} \frac{d\hat{i}_s}{dt} - j\omega_r e^{-j\theta_r} M_{sr} \hat{i}_s, \\ \frac{J}{p} \frac{d\omega_r}{dt} &= \frac{3}{2} p M_{sr} \Im \left\{ e^{-j\theta_r} \hat{i}_s \hat{i}_r^* \right\} - m_z.\end{aligned}\quad (3.2.1)$$

3.3 Dynamický model v zapojení do hvězdy

V předešlých kapitolách je odvozen dynamický model asynchronního stroje s kotvou nakrátko, kde vstupními parametry jsou satorová fázová napětí a moment zátěže. Asynchronní motory nemívají často vyvedené začátky a konce fázových vinutí, resp. asynchronní stroje nejsou běžně napájeny ze tří nezávislých zdrojů elektrické energie, proto je vhodně napěťové rovnice upravit do podoby, která více respektuje skutečné napájení těchto strojů. V praxi se používá zapojení satorového vinutí do hvězdy, nebo trojúhelníku. V další části práce je zvolena varianta zapojení satorového a rotorového vinutí do hvězdy. Odvozené rovnice jsou formálně shodné s vinutím zapojeným do trojúhelníku. Rozdíl spočívá pouze ve smyslu uvažovaných napájecích napětí.

Uvažované schematické zapojení satorového a rotorového vinutí asynchronního stroje do hvězdy je zobrazeno na Obr. 3.2. Za předpokladu, že není vyveden střed, resp. není nikam zapojen a proudy se nemohou uzavírat jinudy než přes vinutí stroje, potom platí

$$\begin{aligned}i_a + i_b + i_c &= 0, \\ i_A + i_B + i_C &= 0.\end{aligned}\quad (3.3.1)$$



Obr. 3.2: Schematické zapojení satorového a rotorového vinutí do hvězdy.

Podle Obr. 3.2 je možné zavést statorové a rotorové sdružené napětí²²

$$\begin{aligned}
 u_{ab} &= u_a - u_b, \\
 u_{bc} &= u_b - u_c, \\
 u_{ca} &= u_c - u_a, \\
 u_{AB} &= u_A - u_B = 0, \\
 u_{BC} &= u_B - u_C = 0, \\
 u_{CA} &= u_C - u_A = 0.
 \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Pro takto definovaná sdružená napětí dále platí

$$\begin{aligned}
 u_{ab} + u_{bc} + u_{ca} &= 0, \\
 u_{AB} + u_{BC} + u_{CA} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Z tohoto je zřejmé, že při popisu napěťových rovnic statoru a rotoru je dostačující použít právě dvě statorové a dvě rotorové sdružené napětí, protože zbývající třetí je možné dopočítat podle (3.3.3). V dalším textu je zvolena kombinace²³ sdružených napětí u_{ab} , u_{bc} , u_{AB} a u_{BC} . Napěťové rovnice je možné na základě (3.1.17) sestavit ve tvaru

$$\begin{aligned}
 u_{ab} &= R_s (i_a - i_b) + \frac{d\Psi_{ab}}{dt}, \\
 u_{bc} &= R_s (i_a + 2i_b) + \frac{d\Psi_{bc}}{dt}, \\
 u_{AB} &= R_r (i_A - i_B) + \frac{d\Psi_{AB}}{dt}, \\
 u_{BC} &= R_r (i_A + 2i_B) + \frac{d\Psi_{BC}}{dt},
 \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

kde spřažené magnetické toky jsou definovány vztahy

$$\begin{aligned}
 \Psi_{ab} &= \Psi_a - \Psi_b, \\
 \Psi_{bc} &= \Psi_b - \Psi_c, \\
 \Psi_{AB} &= \Psi_A - \Psi_B, \\
 \Psi_{BC} &= \Psi_B - \Psi_C.
 \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Tyto toky je dále možné na základě kapitoly 3.1.4 rozepsat ve tvaru

$$\begin{aligned}
 \Psi_{ab} &= (i_a - i_b) L_s + (i_A - i_B) M_{sr} \cos \theta_r - \sqrt{3} (i_A + i_B) M_{sr} \sin \theta_r, \\
 \Psi_{bc} &= (i_a + 2i_b) L_s + (i_A + 2i_B) M_{sr} \cos \theta_r + \sqrt{3} i_A M_{sr} \sin \theta_r, \\
 \Psi_{AB} &= (i_A - i_B) L_r + (i_a - i_b) M_{sr} \cos \theta_r + \sqrt{3} (i_a + i_b) M_{sr} \sin \theta_r, \\
 \Psi_{BC} &= (i_A + 2i_B) L_r + (i_a + 2i_b) M_{sr} \cos \theta_r - \sqrt{3} i_a M_{sr} \sin \theta_r.
 \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

²²Zpětný převod ze sdružených napětí na napětí fázová je možný např. pomocí vztahů

$$\begin{aligned}
 u_a &= \frac{1}{3} (u_{ab} - u_{ca}), \\
 u_b &= \frac{1}{3} (u_{bc} - u_{ab}), \\
 u_c &= \frac{1}{3} (u_{ca} - u_{bc}).
 \end{aligned}$$

²³Rovnice pro ostatní kombinace je možné určit analogickým způsobem.

K těmto napěťovým rovnicím je třeba ještě doplnit pohybovou rovnicí

$$\frac{J}{p} \frac{d\omega_r}{dt} = m_i - m_z. \quad (3.1.2)$$

kde vnitřní moment stroje se vypočítá pomocí již dříve uvedeného vztahu

$$m_i = pM_{sr}\sqrt{3}(i_A i_b - i_a i_B) \cos \theta_r - pM_{sr}[i_a(2i_A + i_B) + i_b(i_A + 2i_B)] \sin \theta_r. \quad (3.1.47)$$

Postup simulace modelu asynchronního stroje napájeného soustavou sdružených napětí, např. v prostředí MATLAB Simulink, je:

- (i) Vypočtou se spřažené magnetické toky z (3.3.4).
- (ii) Z těchto toků se na základě (3.3.6) určí jednotlivé proudy

$$\begin{aligned} i_a &= \frac{(2\Psi_{ab} + \Psi_{bc})L_r - (2\Psi_{AB} + \Psi_{BC})M_{sr} \cos \theta_r + \sqrt{3}\Psi_{BC}M_{sr} \sin \theta_r}{3(L_r L_s - M_{sr}^2)}, \\ i_b &= \frac{(\Psi_{ab} - \Psi_{bc})L_r - (\Psi_{AB} - \Psi_{BC})M_{sr} \cos \theta_r + \sqrt{3}(\Psi_{AB} + \Psi_{BC})M_{sr} \sin \theta_r}{3(-L_r L_s + M_{sr}^2)}, \\ i_A &= \frac{-(2\Psi_{AB} + \Psi_{BC})L_s + (2\Psi_{ab} + \Psi_{bc})M_{sr} \cos \theta_r + \sqrt{3}\Psi_{bc}M_{sr} \sin \theta_r}{3(-L_r L_s + M_{sr}^2)}, \\ i_B &= \frac{-(\Psi_{AB} - \Psi_{BC})L_s + (\Psi_{ab} - \Psi_{bc})M_{sr} \cos \theta_r + \sqrt{3}(\Psi_{ab} + \Psi_{bc})M_{sr} \sin \theta_r}{3(L_r L_s - M_{sr}^2)}. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

- (iii) Vypočte se vnitřní moment stroje na základě (3.1.47).
- (iv) Vypočtou se otáčky a poloha z rovnice (3.1.2).

3.3.1 Dynamické rovnice ve formě prostorového vektoru

Pro zjednodušení výše uvedených vztahů sdruženého modelu asynchronního stroje pomocí prostorového vektoru je nutné formálně zavést pojem sdružený proud a to následovně

$$\begin{aligned} i_{ab} &= i_a - i_b, \\ i_{bc} &= i_b - i_c, \\ i_{ca} &= i_c - i_a, \\ i_{AB} &= i_A - i_B, \\ i_{BC} &= i_B - i_C, \\ i_{CA} &= i_C - i_A. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Zavedením prostorového vektoru

$$\hat{\mathcal{X}}_s = \frac{2}{3}(\tilde{a}^2 \mathcal{X}_{ab} + \mathcal{X}_{bc} + \tilde{a} \mathcal{X}_{ca}), \quad (3.3.9)$$

který je možné dále upravit pomocí (3.3.3) na

$$\hat{\mathcal{X}}_s = \frac{2}{3}[\tilde{a}^2 \mathcal{X}_{ab} - \tilde{a}(\mathcal{X}_{ab} + \mathcal{X}_{bc}) + \mathcal{X}_{bc}], \quad (3.3.10)$$

je možné ukázat, že sdružená napětí se transformují podle vztahu

$$\hat{U}_s = -\frac{|U|}{\sqrt{3}}e^{j\omega_s t}, \quad (3.3.11)$$

kde $|U| = |U_{ab}| = |U_{bc}| = |U_{ca}|$. Obdobně pak je možné transformovat i zbylé statorové a rotorové veličiny. Je zřejmé, že se jedná o stejný prostorový vektor, který by se dostal výpočtem

prostorového vektoru fázových napětí (3.0.1) pomocí transformačního vztahu (3.1.34). Znaménko mínus je možné neuvažovat z důvodu toho, že se na levé i pravé straně napěťových rovnic (3.3.4) vyskytuje symetricky.

Provedením transformace (3.3.9) napěťových rovnic (3.3.4) se získají napěťové rovnice ve formě prostorového vektoru

$$\begin{aligned}\hat{u}_s &= R_s \hat{i}_s + \frac{dL_s \hat{i}_s}{dt} + \frac{d}{dt} M_{sr} e^{j\theta_r} \hat{i}_r, \\ \hat{u}_r &= R_r \hat{i}_r + \frac{dL_r \hat{i}_r}{dt} + \frac{d}{dt} M_{sr} e^{-j\theta_r} \hat{i}_s,\end{aligned}\tag{3.3.12}$$

Je zřejmé, že tato soustava rovnic je identická s již dříve odvozenými napěťovými rovnicemi (3.1.35) pro stroj napájený fázovými napětími. Z tohoto důvodu nejsou tyto vztahy dále upravovány, protože by byly identické s rovnicemi uvedenými již dříve v kapitole (3.1.4.2) a po ní následujících.

4 | Dynamický model s diskrétním rotorovým vinutím

V kapitole 3 je odvozen kompletní dynamický model asynchronního stroje pro případ, kdy je statorové i rotorové vinutí tvořeno ideálním trojfázovým harmonickým vinutím. Taktéž je v této kapitole ukázáno, že dynamický model v přirozených souřadnicích se skládá ze šesti napěťových diferenciálních rovnic a jedné rovnice pohybové. Těchto šest diferenciálních rovnic je možné vhodně zvolenou transformací transformovat na soustavu čtyř diferenciálních rovnic ať už za použití sdružených napětí, nebo prostorového vektoru. Je zde též ukázáno, že všechny zde odvozené modely jsou ekvivalentní a při použití vhodně definovaných parametrů dávají shodné výsledky.

V této kapitole je odvozen dynamický model asynchronního stroje s trojfázovým harmonickým statorovým vinutím a kotvou nakrátko ve formě rotorové klece, tj. je zde respektováno nespojitě rozložené rotorové vinutí v drážkách ve formě rotorových tyčí, viz např [26]. Protože celý model v přirozených souřadnicích by byl velmi rozsáhlý¹ a velmi náchylný k numerickým chybám při jeho řešení, je cílem této kapitoly odvodit přímo dynamický model pomocí prostorového vektoru.

Dynamický model je konstruován pro třífázový asynchronní stroj mající klec nakrátko s N_t rotorovými tyčemi, kde jedna fáze harmonicky rozloženého statorového vinutí podél vzduchové mezery má N_s vodičů a jedna fáze rotorového vinutí má $N_r = 1$ vodič.

Pro statorové třífázové vinutí je možné definovat komplexní číslo \tilde{a} značící fázový posun mezi jednotlivými fázemi v Gaussově komplexní rovině

$$\tilde{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}} \quad (3.1.33)$$

a obdobně pak i pro rotorové vinutí komplexní číslo \tilde{b}

$$\tilde{b} = e^{j\frac{2\pi}{N_t}}. \quad (4.0.1)$$

Prostorový vektor pro statorové napětí, statorový proud a statorový sprážený magnetický tok je definován následovně

$$\hat{u}_s = \frac{2}{3} (u_a + \tilde{a}u_b + \tilde{a}^2u_c), \quad (4.0.2)$$

$$\hat{i}_s = \frac{2}{3} (i_a + \tilde{a}i_b + \tilde{a}^2i_c), \quad (4.0.3)$$

$$\hat{\Psi}_s = \frac{2}{3} (\Psi_a + \tilde{a}\Psi_b + \tilde{a}^2\Psi_c). \quad (4.0.4)$$

¹V případě, že se uvažuje jedna dvojice tyčí jako jedna fáze, pak v přirozených souřadnicích by se jednalo o $(3 + \text{počet rotorových tyčí})$ napěťových diferenciálních rovnic.

Obdobně je pak prostorový vektor rotorového proudu a rotorového spřaženého magnetického toku možné definovat vztahy

$$\hat{i}_r = \frac{2}{N_t} \left(i_{r1} + \tilde{b}i_{r2} + \dots + \tilde{b}^{N_t-1}i_{rN_t} \right), \quad (4.0.5)$$

$$\hat{\Psi}_r = \frac{2}{N_t} \left(\Psi_{r1} + \tilde{b}\Psi_{r2} + \dots + \tilde{b}^{N_t-1}\Psi_{rN_t} \right). \quad (4.0.6)$$

Na rozdíl od kapitoly 3, kde jsou jednotlivé vlastní a vzájemné indukčnosti stroje postulovány na základě předem daných předpokladů, jsou v této kapitole vlastní a vzájemné indukčnosti odvozeny² rigorózněji. Je ale nutné podotknout, že oba přístupy v této a minulé kapitole jsou navzájem ekvivalentní a z prvního je možné odvodit druhý a naopak.

4.1 Rovnice satorového vinutí

Satorové napětí ve formě prostorového vektoru se dá určit rovnicí

$$\hat{u}_s = R_s \hat{i}_s + \frac{d\hat{\Psi}_s}{dt}, \quad (4.1.1)$$

kde je možné spřažený magnetický tok se satorovým vinutím rozdělit na dvě části: na tok satorového vinutí spřažený s ostatními fázemi satoru $\hat{\Psi}_{ss}$ a na tok satorového vinutí spřaženého s fázemi rotoru $\hat{\Psi}_{sr}$

$$\hat{\Psi}_s = \hat{\Psi}_{ss} + \hat{\Psi}_{sr}. \quad (4.1.2)$$

4.1.1 Satorový tok způsobený satorovým vinutím

Pro lineární³ magnetický obvod je magnetický tok spřažený pouze s fázemi satoru dán vztahy

$$\begin{bmatrix} \Psi_{a,s} \\ \Psi_{b,s} \\ \Psi_{c,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\sigma s} + \mathcal{L}_h & \mathcal{M}_s & \mathcal{M}_s \\ \mathcal{M}_s & \mathcal{L}_{\sigma s} + \mathcal{L}_h & \mathcal{M}_s \\ \mathcal{M}_s & \mathcal{M}_s & \mathcal{L}_{\sigma s} + \mathcal{L}_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}, \quad (4.1.3)$$

kde vlastní indukčnost jedné fáze satorového vinutí je rozdělena na část magnetizační \mathcal{L}_h a na část rozptylovou $\mathcal{L}_{\sigma s}$. Prostorový vektor této části spřaženého magnetického toku je možné vyjádřit vztahem

$$\hat{\Psi}_{ss} = \frac{2}{3} (\Psi_{a,s} + \tilde{a}\Psi_{b,s} + \tilde{a}^2\Psi_{c,s}). \quad (4.1.4)$$

Na základě Dodatku D.3 je možné snadno určit magnetizační indukčnost jedné fáze satorového vinutí za předpokladu, že vinutí je harmonicky rozloženo podél vzduchové mezery a hustota vodičů má harmonický průběh daný vztahem

$$n(\alpha) = \frac{N_s}{2} \sin \alpha. \quad (4.1.5)$$

²Je nutné poznamenat, že přesný analytický výpočet rozptylových indukčností není možný, proto i v této kapitole je rozptylová indukčnost rotoru a satoru definována konstantou.

³V případě nelineárního obvodu je vždy možné obvod linearizovat v daném pracovním bodě a sestavit obdobné rovnice.

Použitím rovnice (D.3.5) lze určit vztah pro výpočet magnetizační indukčnosti ve tvaru

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_h &= \frac{\mu_0 l r}{\delta_p} \frac{N_s^2}{4} \int_0^{2\pi} \left[\int \sin \alpha \, d\alpha \int \sin \alpha \, d\alpha \right] d\alpha \\ &= \frac{\mu_0 l r}{\delta_p} \frac{\pi}{4} N_s^2,\end{aligned}\quad (4.1.6)$$

což je v podstatě totožný výraz jako (3.1.8) dříve definovaný v kapitole 3.1.1 pro výpočet magnetizační indukčnosti.

Při výpočtu vzájemné indukčnosti je vinutí fáze a uvažováno v základní poloze a druhé fáze b , nebo c v poloze posunuté o $\beta = \mp \frac{2\pi}{3}$ podle toho zda se počítá vzájemná indukčnost mezi fázemi a a b , nebo a a c . Hustoty vodičů jsou tedy

$$\begin{aligned}n_1(\alpha) &= \frac{N_s}{2} \sin \alpha, \\ n_2(\alpha + \beta) &= \frac{N_s}{2} \sin(\alpha + \beta).\end{aligned}\quad (4.1.7)$$

Dosazením těchto hustot do (D.3.5) je možné vypočítat vzájemnou indukčnost

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_s &= \frac{\mu_0 l r}{\delta_p} \frac{N_s^2}{4} \int_0^{2\pi} \left[\int n_1(\alpha) \, d\alpha \int n_2(\alpha + \beta) \, d\alpha \right] d\alpha \\ &= \frac{\mu_0 l r}{\delta_p} \frac{\pi}{4} N_s^2 \cos \beta \\ &= \mathcal{L}_h \cos \beta \\ &= -\frac{1}{2} \mathcal{L}_h \Big|_{\beta = \mp \frac{2\pi}{3}}.\end{aligned}\quad (4.1.8)$$

Přímým dosazením vztahů pro indukčnosti (4.1.6) a (4.1.8) do (4.1.3) a výpočtem prostorového vektoru $\hat{\Psi}_{ss}$ podle (4.1.4) je možné ukázat, že tento vektor se dá upravit do tvaru

$$\hat{\Psi}_{ss} = \left(\mathcal{L}_{\sigma s} + \frac{3}{2} \mathcal{L}_h \right) \hat{i}_s. \quad (4.1.9)$$

4.1.2 Statorový tok způsobený rotorovým vinutím

Magnetický tok statorového vinutí spřažený pouze s fázemi rotoru má tvar ve formě matice

$$\begin{bmatrix} \Psi_{a,r} \\ \Psi_{b,r} \\ \Psi_{c,r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{a1} & L_{a2} & \cdots & L_{aN_t} \\ L_{b1} & L_{b2} & \cdots & L_{bN_t} \\ L_{c1} & L_{c2} & \cdots & L_{cN_t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{r1} \\ i_{r2} \\ \vdots \\ i_{rN_t} \end{bmatrix}. \quad (4.1.10)$$

Prostorový vektor odpovídající této části spřaženého magnetického toku je definován vztahem

$$\hat{\Psi}_{sr} = \frac{2}{3} (\Psi_{a,r} + \tilde{a} \Psi_{b,r} + \tilde{a}^2 \Psi_{c,r}). \quad (4.1.11)$$

Při odvození vzájemné indukčnosti mezi statorem a rotorem je předpokládáno, že jedna fáze rotorového vinutí je tvořena dvěma sousedními rotorovými tyčemi, podrobněji viz [27],

nebo v kapitole 4.2. Pro zjednodušení analytického výpočtu je hustota vodičů rotorové klece, tj. tyčí, uvažována ve formě Diracových impulzů

$$\begin{aligned} n_1(\alpha) &= \frac{N_s}{2} \sin \alpha, \\ n_2(\alpha) &= \delta[\alpha - \alpha_r k - \theta_r] - \delta[\alpha - \alpha_r(k-1) - \theta_r], \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

kde k označuje k -tou fázi a platí $k \in \langle 1, 2, \dots, N_t \rangle$, úhel $\alpha_r = \frac{2\pi}{N_t}$ odpovídá úhlu mezi dvěma sousedními tyčemi a úhel θ_r představuje obecné natočení rotoru vůči statoru.

Při výpočtu vzájemných indukčností je vhodné v případě popisu hustoty vodičů pomocí Diracových impulzů použít vztah (D.3.6). Po výpočtu a úpravě má vztah pro vzájemnou indukčnost mezi fází statoru a a k -tou fází rotoru tvar

$$\begin{aligned} L_{ak} &= \frac{\mu_0 l r}{\delta_p} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{\alpha}^{2\pi} \left[\int n_1(\alpha) d\alpha \right] d\alpha \right\} n_2(\alpha) d\alpha \\ &= \frac{\mu_0 l r}{\delta_p} N_s \sin \delta_r \cos [\alpha_r(k-1) + \theta_r + \delta_r] \\ &= \frac{4}{\pi} \frac{1}{N_s} \mathcal{L}_h \sin \delta_r \cos [\alpha_r(k-1) + \theta_r + \delta_r] \\ &= \mathcal{M}_{sr} \cos [\alpha_r(k-1) + \theta_r + \delta_r], \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

kde indukčnost \mathcal{M}_{sr} vyjadřuje amplitudu vzájemné indukčnosti jedné fáze statoru s jednou fází rotoru a úhel $\delta_r = \frac{\alpha_r}{2}$ odpovídá polovině úhlové vzdálenosti mezi dvěma sousedními rotorovými tyčemi.

Vzájemné indukčnosti mezi zbylými fázemi statoru a rotoru mají obdobný tvar

$$\begin{aligned} L_{bk} &= \mathcal{M}_{sr} \cos \left[\alpha_r(k-1) + \theta_r + \delta_r - \frac{2\pi}{3} \right], \\ L_{ck} &= \mathcal{M}_{sr} \cos \left[\alpha_r(k-1) + \theta_r + \delta_r + \frac{2\pi}{3} \right]. \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

Dosazením vztahů pro indukčnosti (4.1.13) a (4.1.14) do (4.1.10) a výpočtem prostorového vektoru $\hat{\Psi}_{sr}$ podle (4.1.11) je možné ukázat, že tento vektor se dá upravit na tvar

$$\hat{\Psi}_{sr} = \frac{N_t}{2} \mathcal{M}_{sr} e^{j(\delta_r + \theta_r)} \hat{i}_{r,r}. \quad (4.1.15)$$

4.1.3 Kompletní model statorového vinutí

Dosazením jednotlivých částí spřaženého magnetického toku, tj. vztahů (4.1.9) a (4.1.15), do rovnice (4.1.2) se určí finální tvar statorového spřaženého magnetického toku

$$\hat{\Psi}_s = \left(\mathcal{L}_{\sigma s} + \frac{3}{2} \mathcal{L}_h \right) \hat{i}_s + \frac{N_t}{2} \mathcal{M}_{sr} e^{j(\delta_r + \theta_r)} \hat{i}_{r,r}. \quad (4.1.16)$$

Dosazením tohoto toku do vztahu (4.1.1) a za předpokladu, že jsou časově proměnné pouze proudy \hat{i}_s , \hat{i}_r a natočení θ_r , vychází konečný vztah pro statorové napětí

$$\hat{u}_s = R_s \hat{i}_s + L_s \frac{d\hat{i}_s}{dt} + \frac{N_t}{2} \mathcal{M}_{sr} e^{j(\delta_r + \theta_r)} \frac{d\hat{i}_r}{dt} + j\omega_r \frac{N_t}{2} \mathcal{M}_{sr} e^{j(\delta_r + \theta_r)} \hat{i}_{r,r}, \quad (4.1.17)$$

kde rotorová úhlová rychlost je $\frac{d\theta_r}{dt} = \omega_r$ a dále došlo k přeznačení vlastní indukčnosti statorového vinutí ve smyslu $\mathcal{L}_{\sigma s} + \frac{3}{2} \mathcal{L}_h \mapsto L_s$.

4.2 Rovnice rotorového vinutí

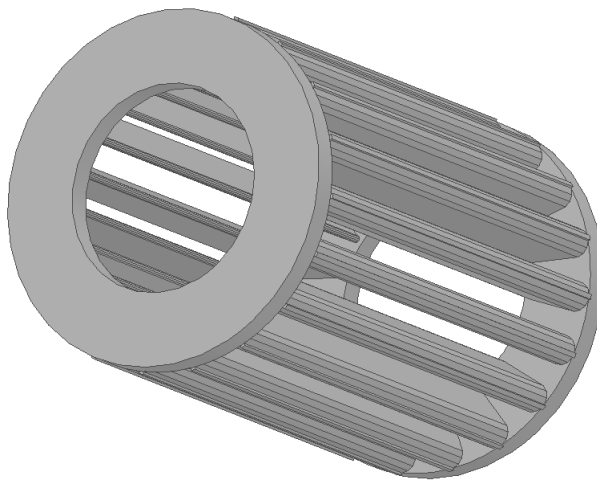
Rotorové vinutí je ve formě klece, tj. rotorové napětí je nulové a dá se vyjádřit ve formě prostorového vektoru

$$\hat{0} = R_r \hat{i}_r + \frac{d\hat{\Psi}_r}{dt}, \quad (4.2.1)$$

kde je možné spřažený magnetický tok rotorového vinutí rozdělit na část, která je spřažena pouze s fázemi statoru $\hat{\Psi}_{rs}$ a na část spřaženou s ostatními fázemi rotoru $\hat{\Psi}_{rr}$

$$\hat{\Psi}_r = \hat{\Psi}_{rr} + \hat{\Psi}_{rs}. \quad (4.2.2)$$

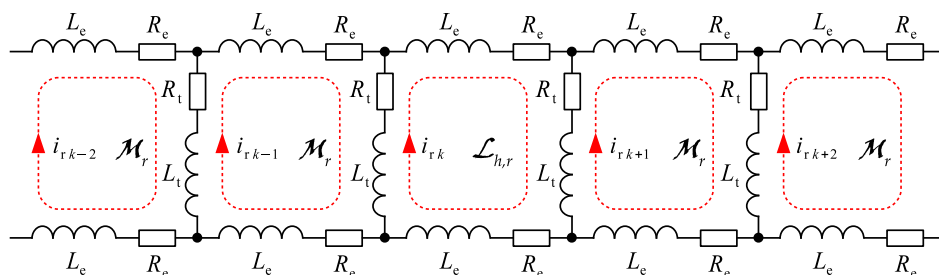
Na Obr. 4.1 je zobrazena rotorová klec vyexportovaná z programu ANSYS Maxwell. Je vidět, že klec se skládá ze dvou různých částí, tj. devatenácti tyčí a dvou čel. Tyto části jsou obvykle vyrobené z hliníku, popřípadě z mědi.



Obr. 4.1: Znáornění rotorové klece.

Pro další postup odvození je nutné zavést pojem rotorová fáze. Rotorová fáze je elektrický obvod skládající se vždy ze dvou sousedních tyčí spojených dvěma částmi kruhu nakrátko. Z tohoto je zřejmé, že rotor má vždy stejný počet fází, jako je počet rotorových tyčí.

Rotorovou tyč si lze představit jako sériové zapojení indukčnosti a odporu, obdobně pak i část kruhu spojující dvě tyče. Na Obr. 4.2 je zobrazena část náhradního zapojení rotorové klece. Kde R_t a R_e jsou elektrické odpory jedné tyče, resp. části kruhu spojující dvě tyče. Indukčnosti L_t a L_e jsou rozptylové indukčnosti jednotlivých částí. Dále pak k -té fázi náleží magnetizační indukčnost $\mathcal{L}_{h,r}$ a současně vzájemná indukčnost \mathcal{M}_r vyjadřující vazbu mezi k -tou fází a ostatními fázemi.



Obr. 4.2: Schematické zobrazení lineárně rozvinuté části rotorové klece.

Z Obr. 4.2 je zřejmé, že pro k -tou fázi je možné napsat napěťovou rovnici ve tvaru

$$0 = 2(R_t + R_e) i_{rk} - R_t i_{rk-1} - R_t i_{rk+1} + \frac{d\Psi_{rk}}{dt}, \quad (4.2.3)$$

kde sprážený magnetický tok s k -tou fází je uveden dále.

Na základě vztahu (4.2.3) je možné napsat kompletní napěťové rovnice pro všechny rotorové fáze pomocí maticového zápisu

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(R_t + R_e) & -R_t & 0 & \cdots & -R_t \\ -R_t & 2(R_t + R_e) & -R_t & \cdots & 0 \\ 0 & -R_t & 2(R_t + R_e) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -R_t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -R_t & 0 & 0 & \cdots & 2(R_t + R_e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{r1} \\ i_{r2} \\ i_{r3} \\ i_{r4} \\ \vdots \\ i_{rN_t} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_{r1} \\ \Psi_{r2} \\ \Psi_{r3} \\ \Psi_{r4} \\ \vdots \\ \Psi_{rN_t} \end{bmatrix}. \quad (4.2.4)$$

Vynásobením jednotlivých řádků matice odporů v (4.2.4) konstantami $1, \tilde{b}, \dots, \tilde{b}^{N_t}$ a následným sečtením jednotlivých řádků, lze ukázat že platí

$$\begin{bmatrix} 2(R_t + R_e) & -R_t & 0 & \cdots & -R_t \\ -R_t & 2(R_t + R_e) & -R_t & \cdots & 0 \\ 0 & -R_t & 2(R_t + R_e) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -R_t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -R_t & 0 & 0 & \cdots & 2(R_t + R_e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{r1} \\ i_{r2} \\ i_{r3} \\ i_{r4} \\ \vdots \\ i_{rN_t} \end{bmatrix} \longrightarrow R_r \hat{i}_r, \quad (4.2.5)$$

kde ekvivalentní odpor rotoru je

$$R_r = 2R_e + 2R_t (1 - \cos \alpha_r). \quad (4.2.6)$$

V dalších kapitolách je ukázán přechod vztahu (4.2.4) do tvaru (4.2.1) jako i odvození jednotlivých sprážených toků.

4.2.1 Rotorový tok způsobený rotorovým vinutím

Jednotlivé sprážené magnetické toky mezi rotorovými vinutími je možné maticově vyjádřit

$$\begin{bmatrix} \Psi_{r1,r} \\ \Psi_{r2,r} \\ \vdots \\ \Psi_{rN_t,r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{h,r} + 2(L_t + L_e) & \mathcal{M}_r & \cdots & \mathcal{M}_r \\ \mathcal{M}_r & \mathcal{L}_{h,r} + 2(L_t + L_e) & \cdots & \mathcal{M}_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{M}_r & \mathcal{M}_r & \cdots & \mathcal{L}_{h,r} + 2(L_t + L_e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{r1} \\ i_{r2} \\ \vdots \\ i_{rN_t} \end{bmatrix} \quad (4.2.7)$$

a prostorový vektor odpovídající této části magnetického toku je definován vztahem

$$\hat{\Psi}_{rr} = \frac{2}{N_t} \left(\Psi_{r1,r} + \tilde{b} \Psi_{r2,r} + \cdots + \tilde{b}^{N_t-1} \Psi_{rN_t,r} \right). \quad (4.2.8)$$

Při výpočtu magnetizační indukčnosti jedné fáze rotorového vinutí je předpokládána hustota vinutí ve formě

$$n(\alpha) = \delta[\alpha - 2\alpha_r] - \delta[\alpha - \alpha_r] \quad (4.2.9)$$

a střední hodnota neurčitého integrálu funkce $n(\alpha)$ je podle (D.3.7)

$$\langle n(\alpha) \rangle = \frac{\alpha_r}{2\pi}. \quad (4.2.10)$$

Magnetizační indukčnost je pak vypočtena za použití vztahu (D.3.5)

$$\mathcal{L}_{h,r} = \frac{\mu_0 l r}{\delta_p} \alpha_r \left(1 - \frac{\alpha_r}{2\pi}\right). \quad (4.2.11)$$

Obdobně pak v případě výpočtu vzájemné indukčnosti jsou např.⁴ hustoty vodičů

$$\begin{aligned} n_1(\alpha) &= \delta[\alpha - 2\alpha_r] - \delta[\alpha - \alpha_r], \\ n_2(\alpha) &= \delta[\alpha - 3\alpha_r] - \delta[\alpha - 2\alpha_r] \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

a finální vztah pro výpočet vzájemné indukčnosti je

$$\mathcal{M}_r = -\frac{\mu_0 l r}{\delta_p} \frac{\alpha_r^2}{2\pi}. \quad (4.2.13)$$

Dosazením jednotlivých indukčností (4.2.11) a (4.2.13) do (4.2.7) a výpočtem prostorového vektoru spřaženého toku (4.2.8) se získá finální vztah

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_{rr} &= \left[2L_t (1 - \cos \alpha_r) + 2L_e + \frac{N_t}{N_t - 1} \mathcal{L}_{h,r} \right] \hat{i}_r \\ &= \left[2L_t (1 - \cos \alpha_r) + 2L_e + \frac{\mu_0 l r}{\delta_p} \alpha_r \right] \hat{i}_r \\ &= L_r \hat{i}_r, \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

kde je zavedena tzv. ekvivalentní indukčnost rotorového vinutí L_r .

4.2.2 Rotorový tok způsobený statorovým vinutím

Magnetický tok rotorového vinutí spřažený pouze s fázemi statoru je dán v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} \Psi_{r1,s} \\ \vdots \\ \Psi_{rN_t,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{1a} & L_{1b} & L_{1c} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{N_t a} & L_{N_t b} & L_{N_t c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (4.2.15)$$

a prostorový vektor odpovídající této části magnetického toku je definován vztahem

$$\hat{\Psi}_{rs} = \frac{2}{N_t} \left(\Psi_{r1,s} + \tilde{b} \Psi_{r2,s} + \dots + \tilde{b}^{N_t-1} \Psi_{rN_t,s} \right). \quad (4.2.16)$$

Protože je předpokládáno, že stroj je symetrický, musí být vzájemné indukčnosti mezi statorem a rotorem stejné, ať jsou uvažovány z jakékoliv strany, tj. např. musí platit $L_{1a} = L_{a1}$. Proto při výpočtu prostorového vektoru $\hat{\Psi}_{rs}$ stačí dosadit indukčnosti (4.1.13) a (4.1.14) do (4.2.15) a výsledný vztah do (4.2.16). Finální tvar rotorového toku $\hat{\Psi}_{rs}$ je

$$\hat{\Psi}_{rs} = \frac{3}{2} \mathcal{M}_{sr} e^{-j(\delta_r + \theta_r)} \hat{i}_s. \quad (4.2.17)$$

⁴Zde je nutné poznamenat, že za předpokladu, že permeabilita železa je nekonečná, je vytvořený magnetický tok mimo aktivní fázi konstantní a proto nezávisí na tom, kde je další fáze umístěna. Výsledkem potom je, že vzájemná indukčnost libovolných dvou fází statorového vinutí je vždy konstantní.

4.2.3 Kompletní model rotorového vinutí

Dosazením jednotlivých částí spráženého magnetického toku, tj. vztahů (4.2.14) a (4.2.17), do rovnice (4.2.2) se určí finální tvar rotorového spráženého magnetického toku

$$\hat{\Psi}_r = \frac{3}{2} \mathcal{M}_{sr} e^{-j(\delta_r + \theta_r)} \hat{i}_s + L_r \hat{i}_r. \quad (4.2.18)$$

Je zřejmé, že v ideálním případě jsou časově proměnné pouze proudy \hat{i}_s , \hat{i}_r a natočení θ_r . Dosazením tohoto toku do vztahu (4.2.1) a po úpravě se dostane vztah

$$\hat{0} = R_r \hat{i}_r + L_r \frac{d\hat{i}_r}{dt} + \frac{3}{2} \mathcal{M}_{sr} e^{-j(\delta_r + \theta_r)} \frac{d\hat{i}_s}{dt} - j\omega_r \frac{3}{2} \mathcal{M}_{sr} e^{-j(\delta_r + \theta_r)} \hat{i}_s. \quad (4.2.19)$$

4.3 Pohybová rovnice

Vnitřní moment asynchronního stroje je možné vypočítat na základě (3.1.41) ze změny celkové magnetické energie stroje při diferenciálním pootočení rotoru vůči statoru. Po výpočtu a upravě, viz např. [9, 28], má finální vztah tvar

$$m_i = \frac{\sqrt{3N_t}}{2} p \mathcal{M}_{sr} \Im \left\{ e^{-j(\delta_r + \theta_r)} \hat{i}_s \hat{i}_r^* \right\}, \quad (4.3.1)$$

tento vztah je dále možné upravit do různých dalších tvarů, viz literatura uvedená výše.

Kompletní pohybová rovnice asynchronního stroje je potom dána vztahem

$$\frac{J}{p} \frac{d\omega_r}{dt} = \frac{\sqrt{3N_t}}{2} p \mathcal{M}_{sr} \Im \left\{ e^{-j(\delta_r + \theta_r)} \hat{i}_s \hat{i}_r^* \right\} - m_z. \quad (4.3.2)$$

4.4 Kompletní dynamické rovnice v obecné rotující souřadnicové soustavě

Kompletní dynamické rovnice asynchronního stroje se skládají ze dvou napěťových rovnic (4.1.17) a (4.2.19) a z jedné pohybové rovnice (4.2.19)

$$\begin{aligned} \hat{u}_s &= R_s \hat{i}_s + L_s \frac{d\hat{i}_s}{dt} + \frac{N_t}{2} \mathcal{M}_{sr} e^{j(\delta_r + \theta_r)} \frac{d\hat{i}_r}{dt} + j\omega_r \frac{N_t}{2} \mathcal{M}_{sr} e^{j(\delta_r + \theta_r)} \hat{i}_r, \\ \hat{0} &= R_r \hat{i}_r + L_r \frac{d\hat{i}_r}{dt} + \frac{3}{2} \mathcal{M}_{sr} e^{-j(\delta_r + \theta_r)} \frac{d\hat{i}_s}{dt} - j\omega_r \frac{3}{2} \mathcal{M}_{sr} e^{-j(\delta_r + \theta_r)} \hat{i}_s, \\ \frac{J}{p} \frac{d\omega_r}{dt} &= \frac{\sqrt{3N_t}}{2} p \mathcal{M}_{sr} \Im \left\{ e^{-j(\delta_r + \theta_r)} \hat{i}_s \hat{i}_r^* \right\} - m_z. \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

Je zřejmé, že výše uvedeným způsobem je redukován počet diferenciálních rovnic matematického modelu trojfázového asynchronního stroje z původního počtu $3 + N_t + 1$ pouze na pět.

Model asynchronního stroje na základě (4.4.1) popisuje stroje mající třífázové vinutí na statoru a rotor složený z N_t -fází. Z tohoto důvodu se v těchto vztazích vyskytují koeficienty $\frac{N_t}{2}$ a $\frac{3}{2}$ u vzájemných indukčností \mathcal{M}_{sr} . Tyto koeficienty je snadné odstranit přechodem k indukčností $\frac{3}{2} \mathcal{M}_{sr} \mapsto M_{sr}$ za předpokladu, že rotorový N_t -fázový obvod je převoden na třífázový.

Tato transformace je popsána v Dodatku E.5. Výsledná soustava diferenciálních rovnic modelu asynchronního stroje s klecovým rotorem popsáným pomocí Diracových impulzů je

$$\begin{aligned} \hat{u}_s &= R_s \hat{i}_s + L_s \frac{d\hat{i}_s}{dt} + M_{sr} e^{j(\delta_r + \theta_r)} \frac{d\hat{i}_r}{dt} + j\omega_r M_{sr} e^{j(\delta_r + \theta_r)} \hat{i}_r, \\ \hat{0} &= R_r \hat{i}_r + L_r \frac{d\hat{i}_r}{dt} + M_{sr} e^{-j(\delta_r + \theta_r)} \frac{d\hat{i}_s}{dt} - j\omega_r M_{sr} e^{-j(\delta_r + \theta_r)} \hat{i}_s, \\ \frac{J}{p} \frac{d\omega_r}{dt} &= \frac{3}{2} p M_{sr} \Im \left\{ e^{-j(\delta_r + \theta_r)} \hat{i}_s \hat{i}_r^* \right\} - m_z. \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

Zde je opět třeba upozornit na to, že přepočtené koeficienty nejsou nijak explicitně značeny, protože formálně nemění finální tvar diferenciálních rovnic.

Porovnáním soustavy rovnic (4.4.2) s již dříve odvozenými vztahy (3.2.1) pro model stroje s harmonickým rotorovým vinutím, je zřejmé, že obě soustavy jsou identické. Jediný rozdíl spočívá v tom, že v rovnicích (4.4.2) se vyskytuje výraz $\delta_r + \theta_r$, který vyjadřuje, že maximální vazba mezi statorem a jednou fází rotoru je, právě když tato rotorová fáze je symetricky natočená vůči statorovému vinutí, tj. např. $\theta_r = -\frac{2\pi}{2N_t} = -\delta_r$. V případě harmonického vinutí toto nastává při nulovém úhlu, proto v rovnicích (3.2.1) tento koeficient není.

Z tohoto je zřejmé, že dynamický model trojfázového asynchronního stroje popsáný pomocí prostorového vektoru má vždy formálně tento jediný tvar, rozdíl je pouze ve způsobu, jakým jsou určeny jeho parametry, tj. odpory, indukčnosti atd.

5 | Dynamické modely v rotující souřadnicové soustavě

V předchozích kapitolách je provedeno odvození dynamických rovnic asynchronního stroje s kotvou nakrátko reprezentovanou trojfázovým harmonickým vinutím, resp. diskrétním vinutím ve formě Diracových impulzů. Z finálních vztahů je zřejmé, že oba modely jsou rovnocenné a že je možné nahradit nespojitě vinutí klece trojfázovým harmonickým vinutím.

Nevýhodou předchozích modelů je, že jednotlivé vzájemné indukčnosti mezi statorovým a rotorovým vinutím jsou závislé na natočení stroje, tj. úhlu θ_r . Tuto závislost lze z čistě matematického pohledu vyloučit transformací do rotující souřadnicové soustavy, tzv. Parkovou transformací, viz Dodatek E. Při odvození rovnic v rotující souřadnicové soustavě je výchozím bodem model stroje s harmonickým statorovým a rotorovým vinutím popsán soustavou rovnic (3.2.1).

5.1 Transformace dynamických rovnic do obecné souřadnicové soustavy

Při transformaci je zaveden statorový a rotorový prostorový vektor $\hat{\mathcal{X}}_{s,K}$ a $\hat{\mathcal{X}}_{r,K}$ představující napětí, proud, nebo spřažený magnetický tok mající obecnou polohu v čase θ_K

$$\hat{\mathcal{X}}_{s,K} = e^{-j\theta_K} \hat{\mathcal{X}}_s \quad (5.1.1)$$

a

$$\hat{\mathcal{X}}_{r,K} = e^{-j(\theta_K - \theta_r)} \hat{\mathcal{X}}_r. \quad (5.1.2)$$

Dosazením těchto transformovaných veličin do napěťových rovnic (3.2.1) a po úpravě vychází

$$\hat{u}_{s,K} = R_s \hat{i}_{s,K} + L_s \frac{d\hat{i}_{s,K}}{dt} + M_{sr} \frac{d\hat{i}_{r,K}}{dt} + j\omega_K \hat{\Psi}_{s,K}, \quad (5.1.3)$$

$$\hat{0} = R_r \hat{i}_{r,K} + L_r \frac{d\hat{i}_{r,K}}{dt} + M_{sr} \frac{d\hat{i}_{s,K}}{dt} + j(\omega_K - \omega_r) \hat{\Psi}_{r,K},$$

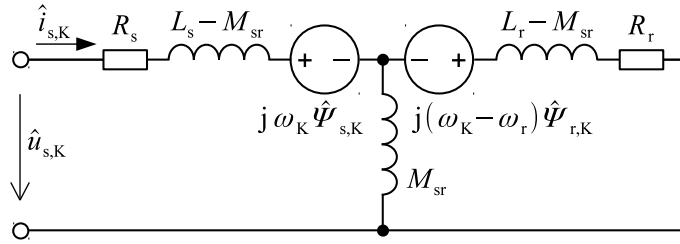
kde jednotlivé spřažené toky jsou

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_{s,K} &= L_s \hat{i}_{s,K} + M_{sr} \hat{i}_{r,K}, \\ \hat{\Psi}_{r,K} &= L_r \hat{i}_{r,K} + M_{sr} \hat{i}_{s,K}. \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

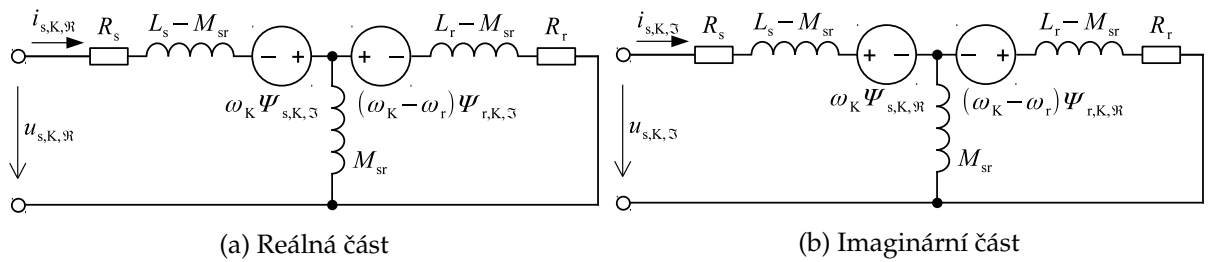
Pohybová rovnice (3.2.1) má po transformaci tvar

$$\frac{J}{p} \frac{d\omega_r}{dt} = \frac{3}{2} p M_{sr} \Im \{ \hat{i}_{s,K} \hat{i}_{r,K}^* \} - m_z. \quad (5.1.5)$$

Na základě rovnic (5.1.3) je možné snadno zkonstruovat ekvivalentní zapojení asynchronního stroje, viz Obr. 5.1. Toto zapojení je dále možné rozkreslit na reálnou a imaginární část, viz Obr. 5.2.



Obr. 5.1: Ekvivalentní zapojení asynchronního stroje v obecné rotující souřadnicové soustavě.



Obr. 5.2: Rozkreslené ekvivalentní zapojení asynchronního stroje v obecné rotující souřadnicové soustavě.

Transformováním elektrických veličin do obecné rotující souřadnicové soustavy se napěťové rovnice velmi zjednoduší eliminací proměnného natočení $e^{j\theta_r}$. Dalšího podstatného zjednodušení je možné dosáhnout vhodnou volbou rychlosti ω_K obecné rotující soustavy. Běžně používané souřadnicové systémy jsou:

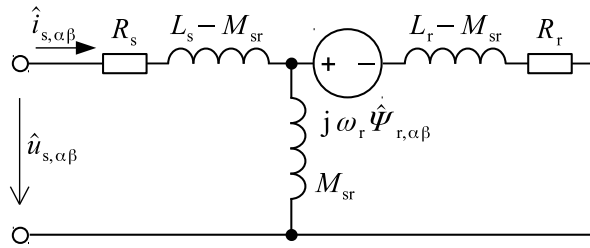
- (i) Stacionární souřadnicová soustava pro $\omega_K = 0$.
- (ii) Statorová souřadnicová soustava pro $\omega_K = \omega_s$.
- (iii) Rotorová souřadnicová soustava pro $\omega_K = \omega_r$.

5.1.1 Transformace do stacionární souřadnicové soustavy

Transformace do stacionární souřadnicové soustavy je dosažena volbou $\omega_K = 0$. Prakticky to tedy znamená, že nová souřadnicová soustava, do které se veličiny transformují, je nerotující a je totožná se soustavou původní. Kompletní dynamické rovnice asynchronního stroje v této soustavě mají tvar

$$\begin{aligned} \hat{u}_{s,\alpha\beta} &= R_s \hat{i}_{s,\alpha\beta} + L_s \frac{d\hat{i}_{s,\alpha\beta}}{dt} + M_{sr} \frac{d\hat{i}_{r,\alpha\beta}}{dt}, \\ 0 &= R_r \hat{i}_{r,\alpha\beta} + L_r \frac{d\hat{i}_{r,\alpha\beta}}{dt} + M_{sr} \frac{d\hat{i}_{s,\alpha\beta}}{dt} - j\omega_r \hat{\Psi}_{r,\alpha\beta}, \\ \hat{\Psi}_{r,\alpha\beta} &= L_r \hat{i}_{r,\alpha\beta} + M_{sr} \hat{i}_{s,\alpha\beta}, \\ \frac{J}{p} \frac{d\omega_r}{dt} &= \frac{3}{2} p M_{sr} \Im \left\{ \hat{i}_{s,\alpha\beta} \hat{i}_{r,\alpha\beta}^* \right\} - m_z. \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

Ekvivalentní zapojení asynchronního stroje sestavené podle těchto rovnic je zobrazeno na Obr. 5.3.



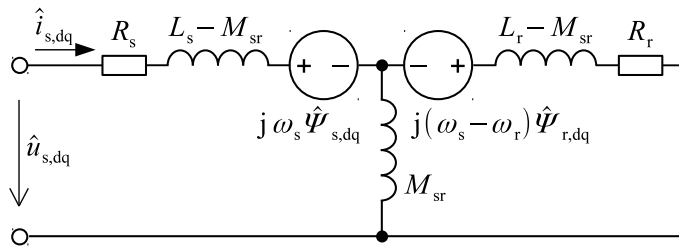
Obr. 5.3: Ekvivalentní zapojení asynchronního stroje ve stacionární souřadnicové soustavě.

5.1.2 Transformace do satorové souřadnicové soustavy

Transformace do satorové souřadnicové soustavy je dosažena volbou $\omega_K = \omega_s$. Prakticky to tedy znamená, že nová souřadnicová soustava, do které se veličiny transformují, je rotující synchronně se satorovými veličinami a tyto se jeví jako stejnosměrné. Kompletní dynamické rovnice asynchronního stroje v této soustavě mají tvar

$$\begin{aligned}
 \hat{u}_{s,dq} &= R_s \hat{i}_{s,dq} + L_s \frac{d\hat{i}_{s,dq}}{dt} + M_{sr} \frac{d\hat{i}_{r,dq}}{dt} + j\omega_s \hat{\Psi}_{s,dq}, \\
 \hat{0} &= R_r \hat{i}_{r,dq} + L_r \frac{d\hat{i}_{r,dq}}{dt} + M_{sr} \frac{d\hat{i}_{s,dq}}{dt} + j(\omega_s - \omega_r) \hat{\Psi}_{r,dq}, \\
 \hat{\Psi}_{s,dq} &= L_s \hat{i}_{s,dq} + M_{sr} \hat{i}_{r,dq}, \\
 \hat{\Psi}_{r,dq} &= L_r \hat{i}_{r,dq} + M_{sr} \hat{i}_{s,dq}, \\
 \frac{J}{p} \frac{d\omega_r}{dt} &= \frac{3}{2} p M_{sr} \Im \left\{ \hat{i}_{s,dq} \hat{i}_{r,dq}^* \right\} - m_z.
 \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

Ekvivalentní zapojení asynchronního stroje sestavené podle těchto rovnic je zobrazeno na Obr. 5.4.



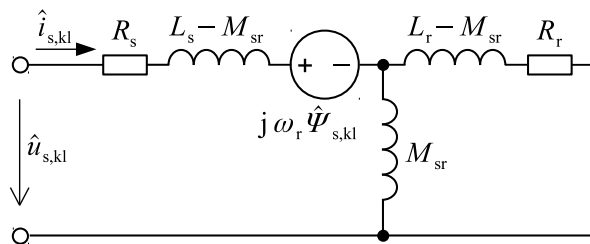
Obr. 5.4: Ekvivalentní zapojení asynchronního stroje ve satorové souřadnicové soustavě.

5.1.3 Transformace do rotorové souřadnicové soustavy

Transformace do rotorové souřadnicové soustavy je dosažena volbou $\omega_K = \omega_r$. Prakticky to tedy znamená, že nová souřadnicová soustava, do které se veličiny transformují, je rotující synchronně s rotorovými veličinami a tyto se jeví jako stejnosměrné. Kompletní dynamické rovnice asynchronního stroje v této soustavě mají tvar

$$\begin{aligned}\hat{u}_{s,kl} &= R_s \hat{i}_{s,kl} + L_s \frac{d\hat{i}_{s,kl}}{dt} + M_{sr} \frac{d\hat{i}_{r,kl}}{dt} + j\omega_r \hat{\Psi}_{s,kl}, \\ \hat{0} &= R_r \hat{i}_{r,kl} + L_r \frac{d\hat{i}_{r,kl}}{dt} + M_{sr} \frac{d\hat{i}_{s,kl}}{dt}, \\ \hat{\Psi}_{s,kl} &= L_s \hat{i}_{s,kl} + M_{sr} \hat{i}_{r,kl}, \\ \hat{\Psi}_{r,kl} &= L_r \hat{i}_{r,kl} + M_{sr} \hat{i}_{s,kl}, \\ \frac{J}{p} \frac{d\omega_r}{dt} &= \frac{3}{2} p M_{sr} \Im \{ \hat{i}_{s,kl} \hat{i}_{r,kl}^* \} - m_z.\end{aligned}\tag{5.1.8}$$

Ekvivalentní zapojení asynchronního stroje sestavené podle těchto rovnic je zobrazeno na Obr. 5.5.



Obr. 5.5: Ekvivalentní zapojení asynchronního stroje v rotorové souřadnicové soustavě.

6 | Redukovaný dynamický model asynchronního stroje

Pod pojmem redukovaný model je v této kapitole myšlen dynamický model asynchronního stroje se zanedbáním statorových, rotorových, nebo obou přechodových dějů. Mechanická pohybová rovnice v těchto modelech zůstává zachována. V kapitole 7 jsou ukázány statické modely asynchronního stroje, kde se neuvažuje ani mechanická dynamika rotoru. Za výchozí dynamický model trojfázového asynchronního stroje je považována soustava rovnic (3.2.1) ve formě prostorového vektoru.

Veškeré zjednodušení modelu je možné a přípustné pouze za předpokladu, že daný statorový/rotorový elektrický dynamický děj ovlivňuje rotorové mechanické přechodné děje pouze v zanedbatelné míře. Prakticky to tedy znamená, že aby bylo toto zjednodušení možné provést, musí být elektrická časová konstanta statorového/rotorového vinutí mnohem menší, než je mechanická¹ časová konstanta rotačních² částí stroje. Tato podmínka je téměř vždycky splněna u strojů velkých výkonů.

6.1 Zanedbání statorových přechodných jevů

Při tomto zjednodušení je předpokládáno, že statorový proud má čistě harmonický průběh ve tvaru³

$$\begin{aligned} i_a &= \sqrt{2}I_s \sin(\omega_s t), \\ i_b &= \sqrt{2}I_s \sin\left(\omega_s t - \frac{2}{3}\pi\right), \\ i_c &= \sqrt{2}I_s \sin\left(\omega_s t + \frac{2}{3}\pi\right), \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

což ve formě prostorového vektoru je

$$\hat{i}_s = \sqrt{2}I_s e^{j(\omega_s t - \frac{\pi}{2})}. \quad (6.1.2)$$

¹Taky někdy označovaná jako elektromechanická časová konstanta.

²Pod pojmem mechanická časová konstanta se rozumí doba, za kterou dosáhnou otáčky nezátíženého stroje při jmenovitém napájení hodnoty $(1 - e^{-1}) \frac{\omega_s}{p} \approx 0,632 \frac{\omega_s}{p}$ za podmínky, že veškeré mechanické děje jsou popsány dynamickou rovnicí prvního řádu.

Za předpokladu, že se asynchronní stroj naprázdno rozbíhá s konstantním záběrovým momentem, tj. otáčky rostou lineárně s časem, je možné ukázat, že mechanická časová konstanta je přibližně rovna

$$\tau_m \cong \frac{1}{3\pi} \frac{0,632 \omega_s^2 J (R_s + R_r)^2 + \omega_s^2 (L_s - L_r)^2}{p^2 M_{sr} 2U_s^2}.$$

³Obecně tento proud může mít libovolné fázové zpoždění, zde je toto zpoždění voleno nulové.

Po dosazení tohoto výrazu do (3.2.1) a úpravě vychází

$$\begin{aligned}\hat{u}_s &= R_s \hat{i}_s + j\omega_s L_s \hat{i}_s + M_{sr} e^{j\theta_r} \frac{d\hat{i}_r}{dt} + j\omega_r e^{j\theta_r} M_{sr} \hat{i}_r, \\ \hat{u}_r &= R_r \hat{i}_r + L_r \frac{d\hat{i}_r}{dt} + j(\omega_s - \omega_r) M_{sr} e^{-j\theta_r} \hat{i}_s, \\ \frac{J}{p} \frac{d\omega_r}{dt} &= \frac{3}{2} p M_{sr} \Im \left\{ e^{-j\theta_r} \hat{i}_s \hat{i}_r^* \right\} - m_z.\end{aligned}\quad (6.1.3)$$

Touto úpravou se soustava pěti diferenciálních rovnic transformovala na soustavu dvou algebraických rovnic a soustavu tří rovnic diferenciálních.

6.2 Zanedbání rotorových přechodných jevů

Při tomto zjednodušení je předpokládáno, že rotorový proud má čistě harmonický průběh ve tvaru

$$\begin{aligned}i_A &= \sqrt{2} I_r \sin [(\omega_s - \omega_r) t], \\ i_B &= \sqrt{2} I_r \sin \left[(\omega_s - \omega_r) t - \frac{2}{3} \pi \right], \\ i_C &= \sqrt{2} I_r \sin \left[(\omega_s - \omega_r) t + \frac{2}{3} \pi \right],\end{aligned}\quad (6.2.1)$$

což ve formě prostorového vektoru je

$$\hat{i}_r = \sqrt{2} I_r e^{j[(\omega_s - \omega_r)t - \frac{\pi}{2}]}. \quad (6.2.2)$$

Po dosazení tohoto výrazu do (3.2.1) a úpravě vychází

$$\begin{aligned}\hat{u}_s &= R_s \hat{i}_s + L_s \frac{d\hat{i}_s}{dt} + j\omega_s M_{sr} e^{j\theta_r} \hat{i}_r, \\ \hat{u}_r &= R_r \hat{i}_r + j(\omega_s - \omega_r) L_r \hat{i}_r + M_{sr} e^{-j\theta_r} \frac{d\hat{i}_s}{dt} - j\omega_r e^{-j\theta_r} M_{sr} \hat{i}_s, \\ \frac{J}{p} \frac{d\omega_r}{dt} &= \frac{3}{2} p M_{sr} \Im \left\{ e^{-j\theta_r} \hat{i}_s \hat{i}_r^* \right\} - m_z.\end{aligned}\quad (6.2.3)$$

6.3 Zanedbání statorových a rotorových přechodných jevů

Toto zjednodušení je kombinací předchozích dvou předchozích případů a proto platí, že statorový prostorový vektor má tvar

$$\hat{i}_s = \sqrt{2} I_s e^{j(\omega_s t - \frac{\pi}{2})}. \quad (6.3.1)$$

a rotorový prostorový vektor je ve formě

$$\hat{i}_r = \sqrt{2} I_r e^{j[(\omega_s - \omega_r)t - \frac{\pi}{2}]}. \quad (6.3.2)$$

Dosazením těchto výrazů do (3.2.1) a po úpravě vychází

$$\begin{aligned}\hat{u}_s &= R_s \hat{i}_s + j\omega_s L_s \hat{i}_s + j\omega_s M_{sr} e^{j\theta_r} \hat{i}_r, \\ \hat{u}_r &= R_r \hat{i}_r + j(\omega_s - \omega_r) L_r \hat{i}_r + j(\omega_s - \omega_r) M_{sr} e^{-j\theta_r} \hat{i}_s, \\ \frac{J}{p} \frac{d\omega_r}{dt} &= \frac{3}{2} p M_{sr} \Im \left\{ e^{-j\theta_r} \hat{i}_s \hat{i}_r^* \right\} - m_z.\end{aligned}\quad (6.3.3)$$

Což z čistě matematického hlediska představuje jedinou nelineární diferenciální rovnici druhého řádu doplněnou čtyřmi algebraickými rovnicemi.

6.4 Porovnání řešení redukováného a klasického modelu

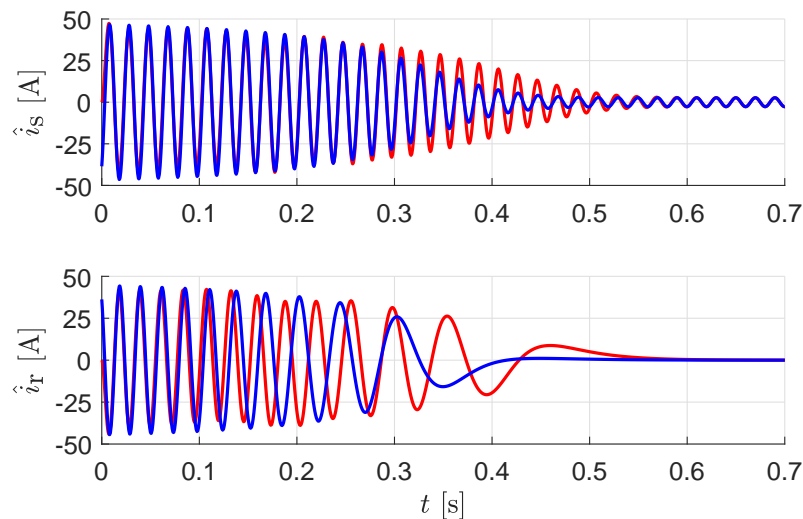
V této části jsou porovnány průběhy elektrických a mechanických veličin trojfázového asynchronního stroje pro dva případy:

- (i) mechanická časová konstanta je přibližně dvakrát větší než elektrické časové konstanty, tj. $\tau_m \approx 2\tau_s$,
- (ii) mechanická časová konstanta je přibližně dvacetkrát větší než elektrické časové konstanty, tj. $\tau_m \approx 20\tau_s$,

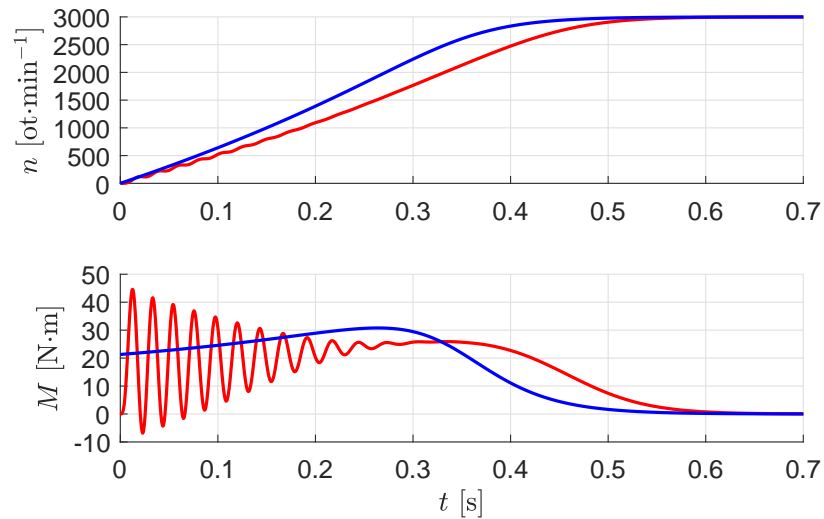
pro stroje v chodu naprázdno a při konstantním zatížení 7 N·m. V jednotlivých průbězích jsou červené průběhy vypočteny na základě vztahů (3.2.1) a modré průběhy pro redukováný model (6.3.3). V případě proudů je vykreslena pouze reálná část jednotlivých prostorových vektorů.

Na Obr. 6.1 až Obr. 6.4 jsou porovnány průběhy elektrických a mechanických veličin za předpokladu, že si jsou elektrické a mechanické časové konstanty velmi blízké, tj. $\tau_m \approx 2\tau_s$. Kvůli tomuto není redukováný model vhodný pro popis dynamických dějů stroje. Pro tento poměr časových konstant je model vhodný pouze pro estimaci otáček a momentu v ustáleném stavu na základě známých hodnot proudů rotoru a statoru.

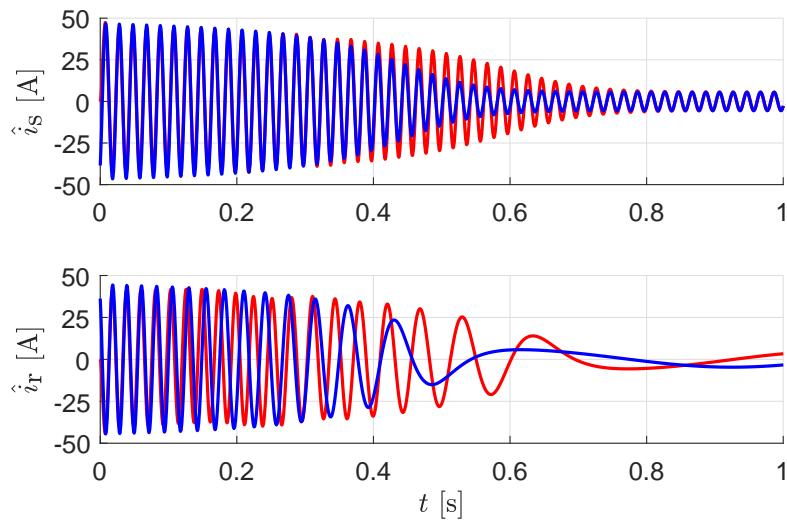
Na Obr. 6.5 až Obr. 6.8 a jsou porovnány průběhy elektrických a mechanických veličin za předpokladu, že poměr elektrické a mechanické časové konstanty je dostatečně velký, tj. v tomto případě $\tau_m \approx 20\tau_s$. Protože je mechanická časová konstanta mnohonásobně větší než elektrické časové konstanty, jsou simulované průběhy proudů statoru i rotoru shodné jako v případě původního modelu popsaného vztahy (6.3.3). V případě rotorového proudu existuje fázový posun mezi redukováným a původním modelem, amplitudy jsou ale v obou případech shodné. Dále je z průběhů zřejmé, že vypočtené velikosti momentu a otáček odpovídají jejich střední hodnotě vypočtené pomocí původního modelu.



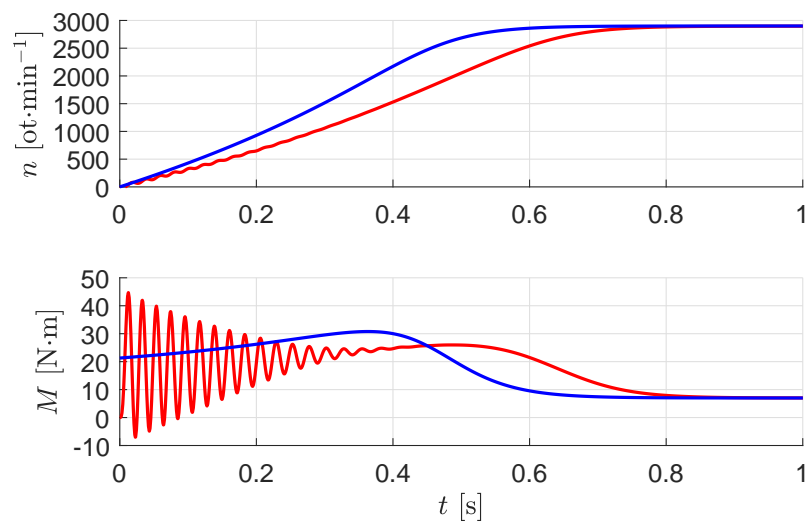
Obr. 6.1: Porovnání elektrických veličin pro $\tau_m \approx 2\tau_s$ naprázdno.



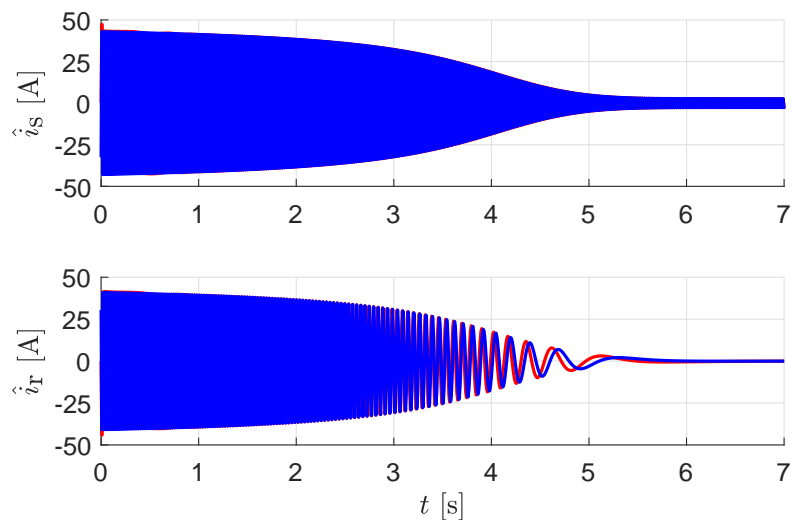
Obr. 6.2: Porovnání mechanických veličin pro $\tau_m \approx 2\tau_s$ naprázdno.



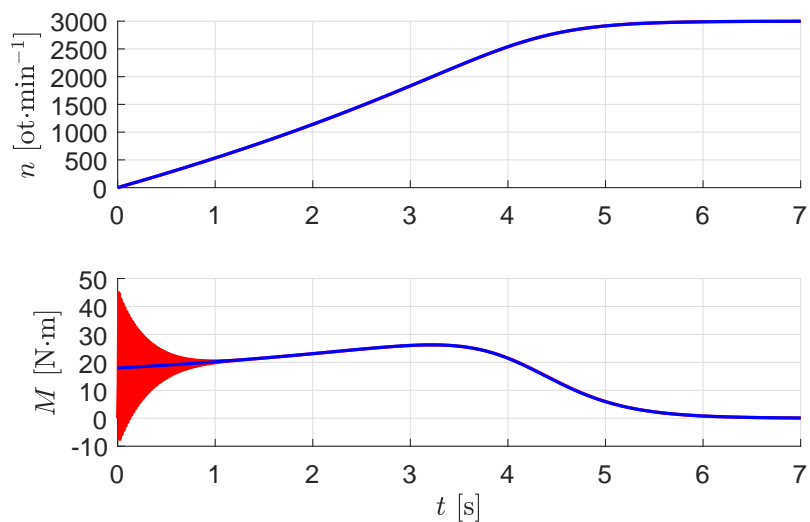
Obr. 6.3: Porovnání elektrických veličin pro $\tau_m \approx 2\tau_s$ při zatížení 7 N·m.



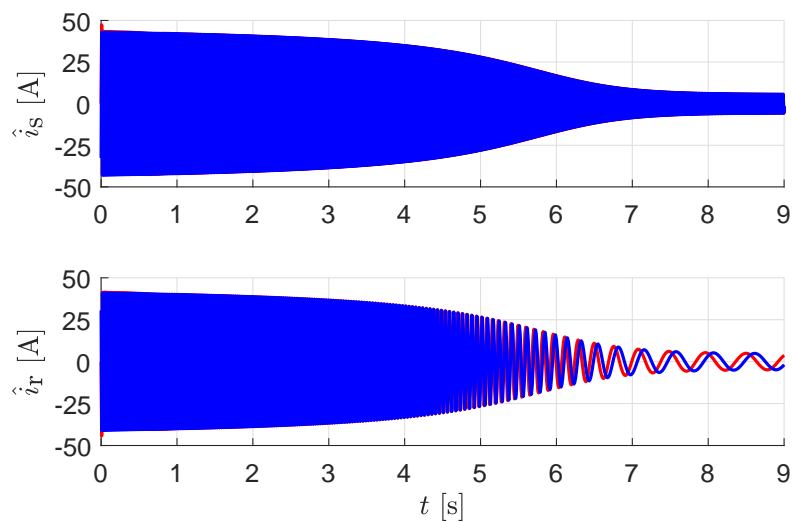
Obr. 6.4: Porovnání mechanických veličin pro $\tau_m \approx 2\tau_s$ při zatížení 7 N·m.



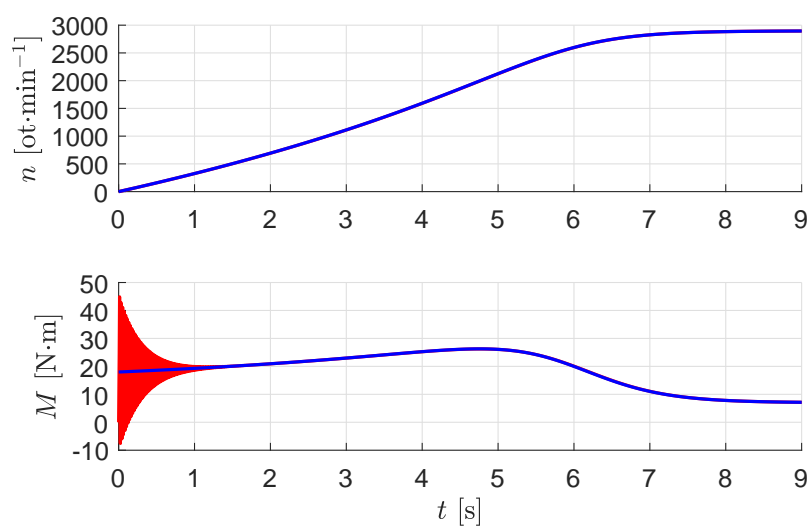
Obr. 6.5: Porovnání elektrických veličin pro $\tau_m \approx 20\tau_s$ naprázdno.



Obr. 6.6: Porovnání mechanických veličin pro $\tau_m \approx 20\tau_s$ naprázdno.



Obr. 6.7: Porovnání elektrických veličin pro $\tau_m \approx 20\tau_s$ při zatížení 7 N.m.



Obr. 6.8: Porovnání mechanických veličin pro $\tau_m \approx 20\tau_s$ při zatížení 7 N·m.

7 | Statické modely asynchronních strojů

V kapitolách 3 a 4 jsou odvozeny dynamické modely trojfázových asynchronních strojů pro případ harmonického statorového a rotorového vinutí a pro případ harmonické statorového a diskretního klecového rotorového vinutí. Jsou zde ukázány dvě varianty dynamického modelu asynchronního stroje: model v přirozených souřadnicích a model vytvořený pomocí prostoro-
vého vektoru. Obě varianty modelů jsou, při zajištění podmínek za kterých jsou odvozeny, ekvivalentní. Nevýhodou těchto modelů je závislost velikosti vzájemných indukčností na nato-
čení rotoru vůči statoru. Tuto závislost je možné eliminovat převedením dynamických rovnic do obecných rotujících souřadnic, viz kapitola 5.

Dalším možným zjednodušením dynamických rovnic je jejich převod na statické rovnice asynchronního stroje, tj. chod stroje se uvažuje v ustáleném stavu. Výhodou statického modelu asynchronního stroje oproti dynamickému modelu je možnost velmi rychlého vyhodnocení ustálených parametrů stroje, tj. např. velikost vnitřního momentu, velikost statorového proudu apod. Při odvození statických rovnic se vychází z dynamických rovnic (5.1.6) transformovaných do stacionární souřadnicové soustavy.

7.1 Odvození statického modelu asynchronního stroje

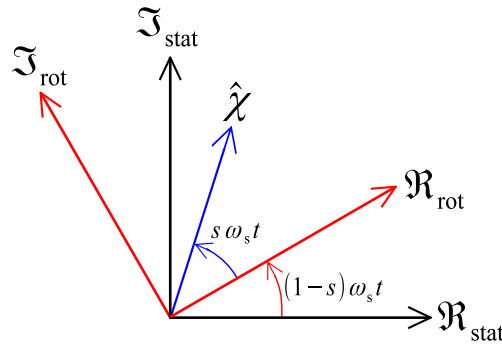
Statický model, nebo-li náhradní obvodové zapojení je odvozeno za předpokladu ustálení všech přechodových dějů ve stroji s konstantní momentovou zátěží.

Z předpokladu ustáleného stavu vyplývá, že

- (i) statorové proudy a napětí mají harmonický průběh s frekvencí f . Prostorový vektor spojený se statorovým souřadnicovým systémem má úhlovou rychlost $\omega_s = 2\pi f$.
- (ii) rotorové proudy a napětí mají harmonický průběh se skluzovou frekvencí $s \cdot f$. Prostorový vektor spojený s rotorovým souřadnicovým systémem má úhlovou rychlost $s \cdot \omega_s$. Protože samotný rotorový souřadnicový systém má úhlovou rychlost $\omega_r = (1 - s)\omega_s$, mají veškeré veličiny transformované z rotorových souřadnic do statorových úhlovou rychlost $s \cdot \omega_s + (1 - s)\omega_s = \omega_s$, viz Obr. 7.1. Znamená to tedy, že veškeré rotorové veličiny transformované na stranu statoru mají frekvenci f .

POZNÁMKA 4.

V dalším textu je předpokládáno, že veškeré veličiny spojené s rotorovým souřadnicovým systémem jsou transformovány do statorového souřadnicového systému.



Obr. 7.1: Znázornění statorového a rotorového souřadnicového systému.

Statorové napětí, statorový a rotorový proud ve formě prostorového vektoru mají tvar

$$\begin{aligned}\hat{u}_s &= \sqrt{2}U_s e^{j\omega_s t}, \\ \hat{i}_s &= \sqrt{2}I_s e^{j(\omega_s t - \varphi_s)}, \\ \hat{i}_r &= \sqrt{2}I_r e^{j(\omega_s t - \varphi_r)}.\end{aligned}\quad (7.1.1)$$

Protože se všechny elektrické veličiny otáčejí stejnou úhlovou rychlostí ω_s , není nutné toto explicitně vyjadřovat a je možné zavést fázor statorového napětí, statorového a rotorového proudu

$$\begin{aligned}\hat{U}_s &= U_s, \\ \hat{I}_s &= I_s e^{-j\varphi_s}, \\ \hat{I}_r &= I_r e^{-j\varphi_r}.\end{aligned}\quad (7.1.2)$$

Po dosazení prostorových vektorů (7.1.1) do napěťových rovnic (5.1.6) a úpravě vychází

$$\begin{aligned}\hat{u}_s &= R_s \hat{i}_s + j\omega_s L_s \hat{i}_s + j\omega_s M_{sr} \hat{i}_r, \\ \hat{0} &= R_r \hat{i}_r + j(\omega_s - \omega_r) L_r \hat{i}_r + j(\omega_s - \omega_r) M_{sr} \hat{i}_s.\end{aligned}\quad (7.1.3)$$

Tyto rovnice je dále možné upravit zavedením skluzu

$$s = \frac{\omega_s - \omega_r}{\omega_s}.\quad (7.1.4)$$

Po jeho dosazení do (7.1.3) a s využitím jednotlivých fázorů (7.1.2) vychází

$$\begin{aligned}\hat{U}_s &= R_s \hat{I}_s + j\omega_s L_s \hat{I}_s + j\omega_s M_{sr} \hat{I}_r, \\ 0 &= \frac{R_r}{s} \hat{I}_r + j\omega_s L_r \hat{I}_r + j\omega_s M_{sr} \hat{I}_s.\end{aligned}\quad (7.1.5)$$

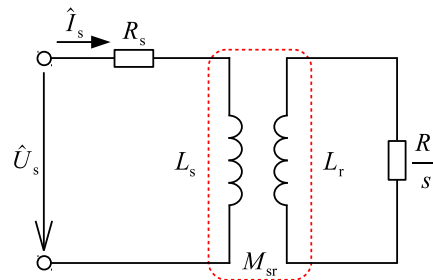
Je zřejmé, že tyto vztahy mají stejný tvar při popisu pomocí prostorového vektoru i pomocí fázorů. Proto nejsou fázory značeny specificky jinou symbolikou.

Na základě vztahů (7.1.5) je možné snadno zkonstruovat náhradní zapojení statoru, viz Obr. 7.2 a), a náhradní zapojení rotoru, viz Obr. 7.2 b).

Z čistě elektromagnetického pohledu vztahy (7.1.5) představují také napěťové rovnice jednofázového transformátoru se sekundární stranou zapojenou nakrátko. Je tedy možné náhradní zapojení asynchronního stroje překreslit do tvaru na Obr. 7.3.



Obr. 7.2: Náhradní schéma zapojení statoru a rotoru.



Obr. 7.3: Znázornění náhradního zapojení asynchronního stroje.

7.1.1 Model s respektováním ztrát v železe

V doposud odvozených rovnicích pro dynamický a statický model asynchronního stroje jsou uvažovány pouze ztráty Jouleovy, tj. jsou uvažovány napěťové úbytky na odporech jednotlivých vinutí a jim odpovídající elektrické ztráty.

V reálných strojích se vyskytují následující typy ztrát:

- (i) Jouleovy ztráty – jsou způsobeny průchodem proudu ve vinutí majících nenulový elektrický odpor, tyto ztráty se počítají dle známého vztahu RI_{ef}^2 .
- (ii) Hysterezní ztráty – jsou způsobeny přemagnetováním železných částí statoru a rotoru. Dají se přibližně vypočítat pomocí empirického vztahu $K_h f B^n$, kde B je hodnota maximální indukce v jádře, f je kmitočet, K_h je materiálová konstanta, index n bývá v rozsahu od 1,5 od 2,5 a jeho hodnota je závislá na sycení magnetického obvodu.
- (iii) Vířivé ztráty – jsou způsobeny indukovaným elektrickým napětím v železných částech stroje majících nenulový elektrický odpor, tj. obdoba Jouleových ztrát. Tyto ztráty se dají spočítat podle vztahu $K_v (Bf\delta)^2$, kde δ je tloušťka laminovaných plechů a K_v je materiálová konstanta.
- (iv) Ztráty dodatečné – jsou ztráty, které není možné zcela přesně zařadit do výše uvedených.
- (v) Mechanické ztráty – jsou převážně způsobeny vzájemným třením rotačních a nerotačních částí stroje.

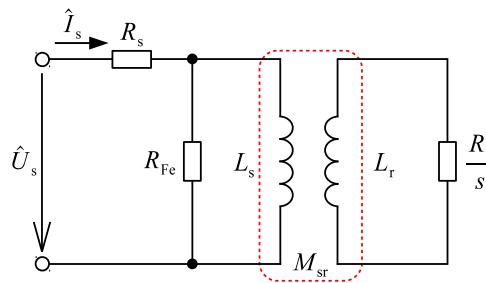
Mechanické ztráty, tj. převážně ventilační ztráty a ztráty v ložiskách, nejsou uvažovány v náhradním zapojení asynchronního stroje, protože nejsou elektromagnetického původu. V dynamických modelech je nutné je zařadit do pohybové rovnice, kde se přičítají k momentu zátěže m_z .

Elektromagnetické ztráty, tj. ztráty hysterezní a vířivé, vznikají ve všech železných částech statoru a rotoru. Podle definice jsou závislé na sycení a kmitočtu magnetického pole, tj. prakticky

pro otáčky rotoru blízké synchronním není nutné tyto ztráty v rotoru uvažovat¹.

Elektromagnetické ztráty v železe primárně nezpůsobují úbytky napětí, pouze zvyšují odebraný proud stroje, tj. je možné reprezentovat pomocí paralelně zařazeného odporu R_{Fe} k napájecímu napětí. Běžně je odpor R_{Fe} v literatuře, viz např. [12, 13, 29–31], řazen vždy paralelně k hlavní (magnetizační) indukčnosti. Je ale třeba si uvědomit, že ani toto není zcela správné a optimální. Protože odpor R_{Fe} nereprezentuje pouze ztráty způsobené magnetizačním tokem v železe statoru, ale i ztráty v železe rotoru a ztráty způsobené rozptylovými toky jak ve statoru, tak i v rotoru.

S přihlédnutím k výše uvedenému, je v této práci odpor R_{Fe} řazen vždy až za odpor R_s podle Obr. 7.4, ale neznamená to, že je vždy umístěn paralelně s hlavní indukčností, viz následující kapitola. Dalším důvodem této volby je, že takto definované náhradní zapojení je možné snadno transformovat na běžně používaný T-článek, nebo Γ -článek, což v případě klasického uspořádání odporu R_{Fe} paralelně s magnetizační indukčností není možné, viz Dodatek F.

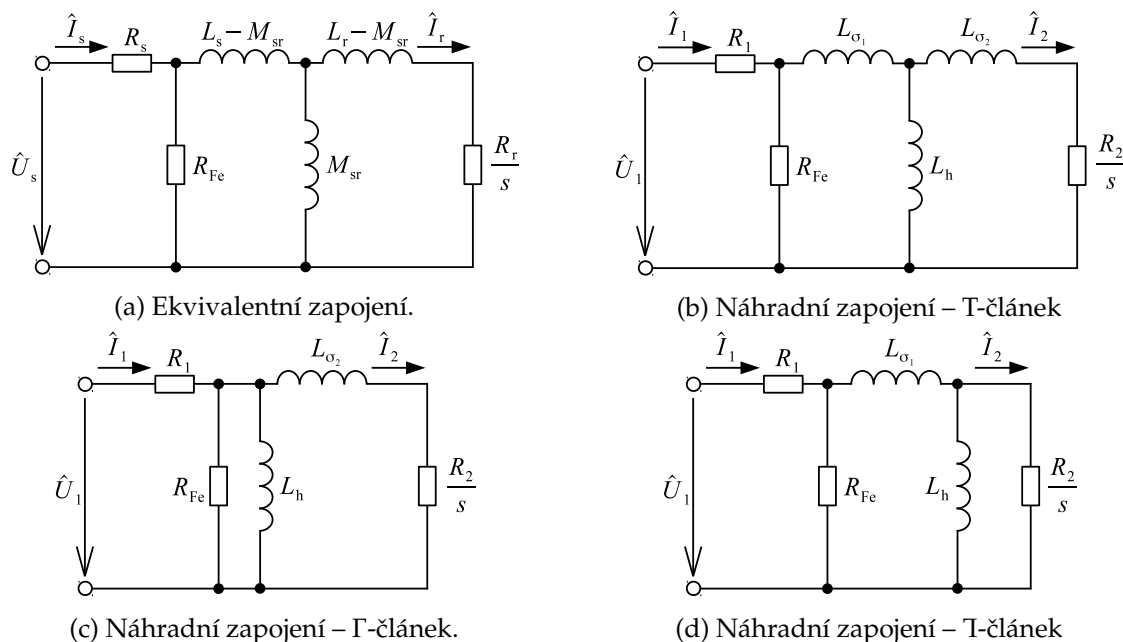


Obr. 7.4: Znázornění náhradního zapojení asynchronního stroje s respektováním ztrát v železe.

7.1.2 Přepočty náhradních zapojení

Z čistě formálního hlediska je možné magnetickou vazbu v zapojení asynchronního stroje podle Obr. 7.4 nahradit tak, jak je zobrazeno na Obr. 7.5 a). Toto zapojení je označeno jako ekvivalentní, protože má identické velikosti parametrů jako původní zapojení podle Obr. 7.4. Z čistě matematického pohledu jsou tyto dvě zapojení rovnocenné, tj. ekvivalentní. Z pohledu fyzikálního mohou hodnoty rozdílů indukčností $L_s - M_{sr}$, nebo $L_r - M_{sr}$ nabývat záporných hodnot, tj. daný elektrický obvod je prakticky nerealizovatelný s použitím diskrétních součástek.

¹V rotoru vznikají hysterezní a vířivé ztráty převážně způsobené vyššími harmonickými. Na základě Dodatku H je možné ukázat, že vyšší harmonické magnetické indukce způsobují ztráty pouze na povrchu rotoru, protože tyto harmonické toky neprocházejí celým rotorem, ale pouze jeho povrchem, resp. pronikají jenom do malé hloubky rotoru. Jejich analýza je relativně komplikovaná a tyto ztráty se obvykle zahrnují do ztrát dodatečných.



Obr. 7.5: Schémata k přepočtu náhradních zapojení.

Na základě vztahů (3.1.36), (3.1.37) a (3.1.38) je možné chápat rozdíl indukčností $L_s - M_{sr}$ a $L_r - M_{sr}$ jako indukčnosti rozptylové jen a pouze za předpokladu, že veškeré rotorové kvantitativy jsou přepočteny na stranu statoru, nebo naopak a dále platí, že magnetizační indukčnost statorového vinutí je rovná vzájemné indukčnosti mezi státorem a rotorem.

Při praktickém výpočtu statických parametrů asynchronních strojů, viz např. [13], není běžné pracovat s pojmy vlastní a vzájemné indukčnosti, ale častěji s rozptylovými indukčnostmi statorového vinutí $L_{\sigma 1}$ a rotorového vinutí $L_{\sigma 2}$ a indukčností hlavní L_h . Přechod od ekvivalentního zapojení Obr. 7.5 a) k náhradnímu² zapojení ve tvaru T-článku podle Obr. 7.5 b) je odvoditelný na základě následujících obecných předpokladů:

- (i) Vstupní impedance libovolného náhradního zapojení je stejná jako vstupní impedance ekvivalentního zapojení pro libovolný pracovní stav stroje. Z tohoto plyne, že i satorový proud je pro libovolné náhradní zapojení stejný.
- (ii) Výkon dodaný do zátěže je pro libovolné náhradní zapojení stejný, tj. moment asynchronního stroje je stejný pro libovolný pracovní bod.

Protože magnetická vazba mezi státorem a rotorem neovlivňuje velikost statorového odporu a odporu reprezentujícího ztráty v železe, lze vstupní impedanci chápat, jako impedanci daného zapojení až za odporem R_{Fe} , tj. vstupní impedance ekvivalentního zapojení podle Obr. 7.5 a) má ve formě přenosové funkce tvar

$$Z_{vst,E} = \frac{(L_s L_r - M_{sr}^2) p_{\mathcal{L}}^2 + L_s R_r p_{\mathcal{L}}}{L_r p_{\mathcal{L}} + R_r}, \quad (7.1.6)$$

kde $p_{\mathcal{L}}$ je Laplaceův operátor³ a dále kvůli zjednodušení zápisu došlo k přeznačení rotorového odporu $\frac{R_r}{s} \mapsto R_r$. Vstupní impedance náhradního zapojení podle Obr. 7.5 b) je ve formě

²Pod pojmem náhradní zapojení je myšleno takové zapojení, které má vstupně/výstupní parametry shodné s ekvivalentním zapojením, ale vnitřní parametry náhradního zapojení jsou rozdílné od parametrů ekvivalentního zapojení.

³V textu není použito běžné značení Laplaceova operátoru p , resp. s z důvodu toho, že tyto symboly jsou již dříve definované pro počet pólových dvojic, resp. skluz.

přenosové funkce

$$Z_{\text{vst},N} = \frac{(L_h L_{\sigma 1} + L_h L_{\sigma 2} + L_{\sigma 1} L_{\sigma 2}) p_{\mathcal{L}}^2 + (L_h + L_{\sigma 1}) R_2 p_{\mathcal{L}}}{(L_h + L_{\sigma 2}) p_{\mathcal{L}} + R_2}, \quad (7.1.7)$$

kde je opět rotorový odpor přeznačen ve smyslu $\frac{R_2}{s} \mapsto R_2$.

Porovnáním pravých stran jednotlivých impedancí je možné získat pro jednotlivé mocniny $p_{\mathcal{L}}$ soustavu tří rovnic:

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{L}}^0 : & L_s R_r R_2 = (L_h + L_{\sigma 1}) R_r R_2, \\ p_{\mathcal{L}}^1 : & L_s (L_h + L_{\sigma 2}) R_r + (L_s L_r - M_{sr}^2) R_2 = \\ & = [L_{\sigma 1} L_{\sigma 2} + L_h (L_{\sigma 1} + L_{\sigma 2})] R_2 + L_r (L_h + L_{\sigma 1}) R_2, \\ p_{\mathcal{L}}^2 : & (L_{\sigma 1} + L_{\sigma 2}) (L_s L_r - M_{sr}^2) = L_r [L_{\sigma 1} L_{\sigma 2} + L_h (L_{\sigma 1} + L_{\sigma 2})]. \end{aligned} \quad (7.1.8)$$

o čtyřech neznámých: R_2 , L_h , $L_{\sigma 1}$ a $L_{\sigma 2}$.

Rovnice (7.1.8) je možné přepsat za pomoci vztahu pro vzájemnou indukčnost

$$M_{sr} = k \sqrt{L_s L_r},$$

kde k je činitel vazby, na tvar:

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{L}}^0 : & L_s R_r R_2 - (L_h + L_{\sigma 1}) R_r R_2 = 0, \\ p_{\mathcal{L}}^1 : & [L_{\sigma 1} L_{\sigma 2} - L_s (L_h + L_{\sigma 2}) + L_h (L_{\sigma 1} + L_{\sigma 2})] R_r, \\ & + L_r [(k^2 - 1) L_s + L_h + L_{\sigma 1}] R_2 = 0, \\ p_{\mathcal{L}}^2 : & L_r [L_{\sigma 1} L_{\sigma 2} + (k^2 - 1) L_s (L_h + L_{\sigma 2}) + L_h (L_{\sigma 1} + L_{\sigma 2})] = 0. \end{aligned} \quad (7.1.9)$$

Tato soustava nemá pro neznámé R_2 , L_h , $L_{\sigma 1}$ a $L_{\sigma 2}$ jednoznačné řešení, proto je vhodné zavést zjednodušující předpoklad, že rozptylové indukčnosti $L_{\sigma 1}$ a $L_{\sigma 2}$ jsou vzájemně závislé⁴.

Jedna z možností, jak tuto závislost stanovit, je následující:

(i) Vyřeší se soustava rovnic (7.1.9) pro neznámé: R_2 , L_h a $L_{\sigma 2}$. Řešením⁵ jsou vztahy

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{(L_s - L_{\sigma 1})^2}{L_s L_s k^2} R_r, \\ L_h &= L_s - L_{\sigma 1}, \\ L_{\sigma 2} &= \frac{(L_s - L_{\sigma 1}) [L_s (1 - k^2) - L_{\sigma 1}]}{k^2 L_s}. \end{aligned} \quad (7.1.10)$$

(ii) Nyní je možné postupovat např. tak, že se hledá velikost indukčnosti $L_{\sigma 1}$ taková, aby se náhradní zapojení v podobě T-článku, viz Obr. 7.5 b), transformovalo na T-článek, viz Obr. 7.5 c), tj. $L_{\sigma 2} = 0$. Je snadné ukázat, že statorová rozptylová indukčnost musí mít velikost⁶

$$L_{\sigma 1} = L_s (1 - k^2). \quad (7.1.11)$$

⁴Obecně lze libovolnou proměnou považovat za známou, resp. spočitatelnou, ale volba závislosti $L_{\sigma 1}$ a $L_{\sigma 2}$ je všeobecně akceptovaná a používaná.

⁵Soustava (7.1.9) má ve skutečnosti ještě jedno triviální řešení $R_2 = 0$, $L_h = 0$ a $L_{\sigma 2} = 0$, ale toto řešení není uvažované.

⁶Triviální řešení, tj. $L_{\sigma 1} = L_s$, není uvažováno.

(iii) Formálně je možné zavést bezrozměrný parametr σ a předchozí vztah přepsat na

$$L_{\sigma 1} = L_s (1 - k \sigma). \quad (7.1.12)$$

Vztahy (7.1.11) a (7.1.12) jsou totožné, právě když $\sigma = k$. Podobná volba při přepočtu ekvivalentního zapojení na náhradní zapojení je uvedena např. v [32].

Po dosazení (7.1.12) do (7.1.10), respektování závislosti rotorového odporu na skluzu a úpravě je možné vyjádřit obecné vztahy pro převod mezi ekvivalentním zapojením a libovolným náhradním zapojením jako funkce parametru σ

$$\begin{aligned} \frac{R_2}{s} &= \frac{L_s}{L_r} \sigma^2 \frac{R_r}{s}, \\ L_h &= L_s k \sigma, \\ L_{\sigma 1} &= L_s (1 - k \sigma), \\ L_{\sigma 2} &= L_s \sigma (\sigma - k). \end{aligned} \quad (7.1.13)$$

Pro nejčastěji používané náhradní zapojení jsou praktické volby velikosti parametru σ následující:

(i) Náhradní zapojení ve tvaru Γ -článku, viz Obr. 7.5 c), vychází při volbě $\sigma = \frac{1}{k}$

$$\begin{aligned} \frac{R_2}{s} &= \frac{L_s}{L_r} \frac{1}{k^2} \frac{R_r}{s}, \\ L_h &= L_s, \\ L_{\sigma 1} &= 0, \\ L_{\sigma 2} &= L_s \left(\frac{1}{k^2} - 1 \right). \end{aligned} \quad (7.1.14)$$

(ii) Náhradní zapojení ve tvaru T-článku, viz Obr. 7.5 d), vychází při volbě $\sigma = k$

$$\begin{aligned} \frac{R_2}{s} &= \frac{L_s}{L_r} k^2 \frac{R_r}{s}, \\ L_h &= L_s k^2, \\ L_{\sigma 1} &= L_s (1 - k^2), \\ L_{\sigma 2} &= 0. \end{aligned} \quad (7.1.15)$$

(iii) Náhradní zapojení ve tvaru T-článku, viz Obr. 7.5 b), vychází při volbě $\sigma = 1$

$$\begin{aligned} \frac{R_2}{s} &= \frac{L_s}{L_r} \frac{R_r}{s}, \\ L_h &= L_s k, \\ L_{\sigma 1} &= L_s (1 - k), \\ L_{\sigma 2} &= L_s (1 - k). \end{aligned} \quad (7.1.16)$$

POZNÁMKA 5.

I když jsou ve vztazích (7.1.14), (7.1.15) a (7.1.16) jednotlivé parametry R_2 , L_h , $L_{\sigma 1}$ a $L_{\sigma 2}$ značeny stejně, je zřejmé, že pro každé jednotlivé náhradní zapojení mají jinou hodnotu. Pro jednotnost celého dalšího textu není explicitně zdůrazněn původ jednotlivých parametrů, protože toto vyplývá samo z kontextu jejich použití.

Z předchozího je zřejmé, že volba parametru σ je zcela libovolná a jednoznačně zadané ekvivalentní zapojení, viz Obr. 7.5 a), je možné transformovat na nekonečně mnoho náhradních zapojení majících totožné vstupní proudy a výstupní výkony.

Ze vztahů (7.1.14), (7.1.15) a (7.1.16) je dále zřejmé, že není možné zpětně z libovolného náhradního zapojení určit původní ekvivalentní zapojení. Je ovšem možné určit parametry L_s , k a $\frac{L_s R_r}{L_r s}$ na základě kterých, je možné libovolné náhradní zapojení zcela přesně převést na zapojení jiné pomocí zvoleného parametru σ a rovnic (7.1.13).

Zpětné určení L_s , k a $\frac{L_s R_r}{L_r s}$ pro základní náhradní zapojení ve tvaru:

(i) Γ -článku⁷ pro $\sigma = \frac{1}{k}$

$$\begin{aligned} L_s &= L_h, \\ k &= \frac{\sqrt{L_h}}{\sqrt{L_h + L_{\sigma 2}}}, \\ \frac{L_s R_r}{L_r s} &= \frac{L_h R_2}{L_h + L_{\sigma 2} s}. \end{aligned} \quad (7.1.17)$$

(ii) T-článku pro $\sigma = k$

$$\begin{aligned} L_s &= L_h + L_{\sigma 1}, \\ k &= \frac{\sqrt{L_h}}{\sqrt{L_h + L_{\sigma 1}}}, \\ \frac{L_s R_r}{L_r s} &= \frac{L_h + L_{\sigma 1} R_2}{L_h s}. \end{aligned} \quad (7.1.18)$$

(iii) T-článku pro $\sigma = 1$

$$\begin{aligned} L_s &= L_h + L_{\sigma 1}, \\ k &= \frac{L_h}{L_h + L_{\sigma 1}}, \\ \frac{L_s R_r}{L_r s} &= \frac{R_2}{s}. \end{aligned} \quad (7.1.19)$$

V případě náhradního zapojení, které není výsledkem přepočtů podle (7.1.14), (7.1.15), ani (7.1.16), je možné určit přepočtovou konstantu σ na základě vztahu

$$\sigma = \frac{\sqrt{L_h + L_{\sigma 2}}}{\sqrt{L_h + L_{\sigma 1}}} \quad (7.1.20)$$

a dále pak určit jednotlivé parametry pomocí vztahů

$$\begin{aligned} L_s &= L_h + L_{\sigma 1} = \frac{L_h + L_{\sigma 2}}{\sigma^2} = \frac{L_{\sigma 1} - L_{\sigma 2}}{1 - \sigma^2}, \\ k &= \frac{L_h}{L_h + L_{\sigma 1} \sigma} = \frac{L_h \sigma}{L_h + L_{\sigma 2}} = \frac{L_{\sigma 1} \sigma^2 - L_{\sigma 2} \sigma}{L_{\sigma 1} - L_{\sigma 2}}, \\ \frac{L_s R_r}{L_r s} &= \frac{R_2}{s \sigma^2}. \end{aligned} \quad (7.1.21)$$

V Tab. 7.1 je uveden příklad hodnot parametrů $L_{\sigma 1}$, $L_{\sigma 2}$, L_h a R_2 typického 2,2 kW dvoupólového asynchronního motoru, viz Dodatek A. Z výsledků je zřejmé, že pro přechod, např. mezi T-článkem a Γ -článkem, je nedostačující pouze přesunutí hlavní indukčnosti před statorovou rozptylovou indukčností, jak je uvedeno v klasické literatuře např. [13, 30].

⁷Při přepočtu Γ -článku na ekvivalentní článek, je vhodné zvolit velikost rotorové indukčnosti $L_r = L_h + L_{\sigma 2}$, protože potom platí: $L_s = L_h$, $M_{sr} = L_h$ a $R_r = R_2$. A identifikované parametry, např. ze zkoušky naprázdno a nakrátko, viz kapitola 10.1, lze bez jakéhokoliv přepočítávání použít jak v dynamickém modelu, tak i statickém modelu asynchronního stroje.

Tab. 7.1: Příklady hodnot parametrů pro různé náhradní zapojení asynchronního stroje.

$$L_s = 0,387 \text{ H}, \frac{L_s}{L_r} \frac{R_r}{s} = 2,14 \Omega \text{ a } k = 0,976$$

Parametr	T-článek	Γ -článek	T-článek
$L_{\sigma 1}$ [mH]	9,164	0	18,111
$L_{\sigma 2}$ [mH]	9,164	19,000	0
L_h [H]	0,378	0,387	0,369
R_2 [Ω]	2,140	2,245	2,040

Pro ověření správnosti odvozených vztahů je vhodné vypočítat celkovou impedanci náhradního zapojení asynchronního motoru ve tvaru T-čláku s respektováním odporů R_{Fe} a R_1 a po následném zjednodušení za použití vztahů (7.1.13) je výsledkem přenosová funkce

$$Z_{Zvst,E} = Z_{Zvst,N} = \frac{L_s p \mathcal{L} (R_s + R_{Fe}) \left[(1 - k^2) L_r p \mathcal{L} + \frac{R_r}{s} \right] + R_s R_{Fe} \left(L_r p \mathcal{L} + \frac{R_r}{s} \right)}{R_{Fe} \left(L_r p \mathcal{L} + \frac{R_r}{s} \right) + L_s p \mathcal{L} \left[(1 - k^2) L_r p \mathcal{L} + \frac{R_r}{s} \right]}. \quad (7.1.22)$$

Z čehož je zřejmé, že vstupní impedance je zcela nezávislá na volbě parametru σ a protože jsou použity nejobecnější transformační vztahy (7.1.13) musí tedy platit, že pokud jsou parametry správně přepočteny, tj. použitím (7.1.13), mají všechny náhradní zapojení vždy shodné vstupně/výstupní parametry se zapojením ekvivalentním.

7.2 Základní pracovní charakteristiky

7.2.1 Proudová charakteristika

Pod pojmem proudová charakteristika je rozuměna závislost statorového proudu na skluzu stroje při známých parametrech náhradního zapojení.

Statorový proud je možné vypočítat na základě náhradního zapojení ve tvaru T-čláku podle Obr. 7.5 b)

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{U}_1}{R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_{Fe}} + \frac{1}{jX_{\sigma 1} + \frac{1}{jX_h + \frac{1}{jX_{\sigma 2} + \frac{R_2}{s}}}}}}}. \quad (7.2.1)$$

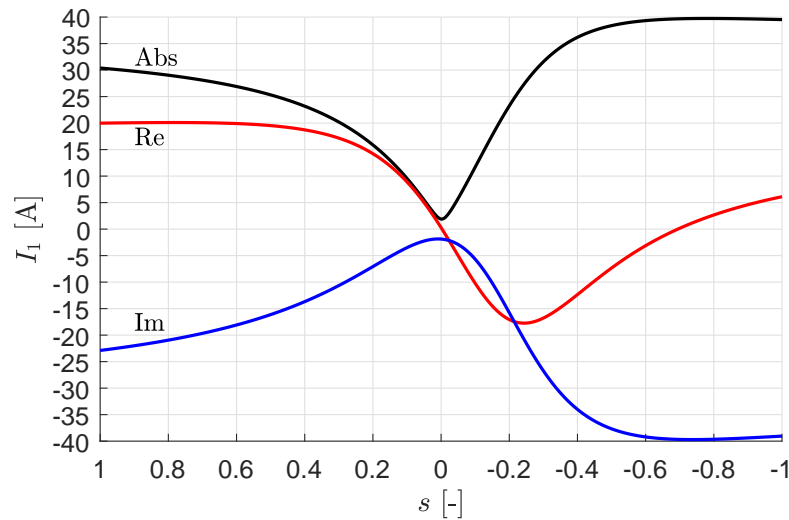
Tento vztah je možné dále rozepsat

$$\hat{I}_1 = \hat{U}_1 \frac{a_1 + ja_2}{a_3 + ja_4} = \frac{a_1 a_3 + a_2 a_4 + j(a_2 a_3 - a_1 a_4)}{a_3^2 + a_4^2}, \quad (7.2.2)$$

kde jednotlivé pomocné parametry⁸ jsou

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{R_2}{s} R_{Fe} - X_h (X_{\sigma 1} + X_{\sigma 2}) - X_{\sigma 1} X_{\sigma 2}, \\
 a_2 &= \frac{R_2}{s} (X_h + X_{\sigma 1}) + R_{Fe} (X_h + X_{\sigma 2}), \\
 a_3 &= R_1 \frac{R_2}{s} R_{Fe} - X_{\sigma 2} (R_1 + R_{Fe}) (X_h + X_{\sigma 1}) - R_1 X_h X_{\sigma 1} - R_{Fe} X_h X_{\sigma 1}, \\
 a_4 &= R_1 \left[\frac{R_2}{s} (X_h + X_{\sigma 1}) + R_{Fe} (X_h + X_{\sigma 2}) \right] + \frac{R_2}{s} R_{Fe} (X_h + X_{\sigma 1}).
 \end{aligned} \tag{7.2.3}$$

Typický průběh statorového proudu je zobrazen na Obr. 7.6.



Obr. 7.6: Typický průběh amplitudy, reálné a imaginární části statorového proudu v závislosti na skluzu.

Použitím vztahů (7.1.19), resp. (7.1.17) je možné vztah pro výpočet statorového proudu (7.2.1) transformovat do tvaru platného pro ekvivalentní zapojení

$$\hat{I}_1 = \hat{U}_1 \frac{R_{Fe} \left(jX_2 + \frac{R_r}{s} \right) + jX_1 \left[(1 - k^2) jX_2 + \frac{R_r}{s} \right]}{jX_1 (R_1 + R_{Fe}) \left[(1 - k^2) jX_2 + \frac{R_r}{s} \right] + R_1 R_{Fe} \left(jX_2 + \frac{R_r}{s} \right)}. \tag{7.2.4}$$

Výhodou výpočtu proudové charakteristiky z parametrů ekvivalentního zapojení je jednodušnost výpočetního vztahu oproti výpočtu např. z náhradního zapojení ve tvaru T-článku pomocí vztahu (7.2.2) s pomocnými parametry (7.2.3).

Účinník $\cos \varphi$, tj. fázový posun mezi statorovým napětím a statorovým proudem, je možné vypočítat pomocí vztahu

$$\cos \varphi = \cos \arctan \left(\frac{\Im \{ \hat{I}_1 \}}{\Re \{ \hat{I}_1 \}} \right), \tag{7.2.5}$$

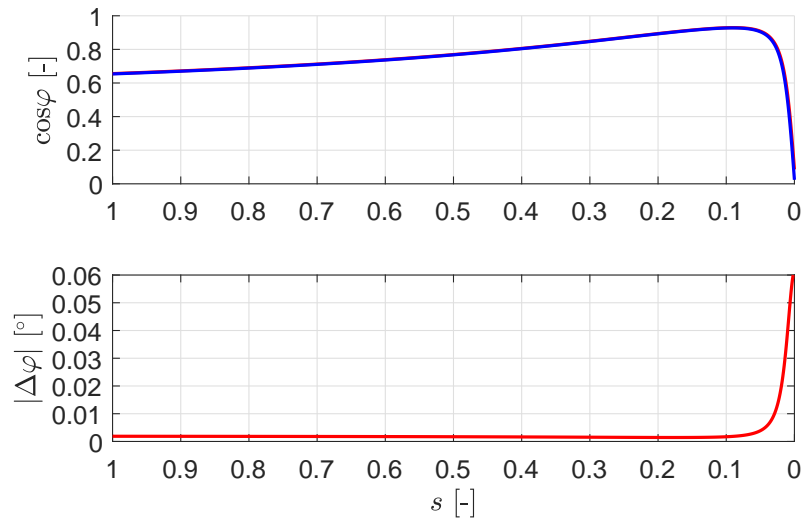
kde reálnou a imaginární část statorového proudu je možné snadno vyjádřit z (7.2.2).

⁸Pomocné parametry nejsou uvedeny v seznamu symbolů, protože dále neslouží jako proměnné, ale slouží pouze ke zjednodušení zápisu daného konkrétního vztahu, který by bez nich byl příliš rozsáhlý a nepřehledný. Mimo jiné je tato forma zápisu rovnic i vhodnější pro případnou implementaci ve výpočetních programech.

Značného zjednodušení vztahu (7.2.5) je možné dosáhnout přechodem z náhradního zapojení k ekvivalentnímu zapojení a zanedbáním ztrát v železe, tj. položení $R_{Fe} \rightarrow \infty$, výsledný vztah je

$$\cos \varphi = \cos \arctan \left[- \frac{X_1 \frac{R_r^2}{s^2} + (1 - k^2) X_1 X_2^2}{R_1 \frac{R_r^2}{s^2} + X_2 \left(X_2 R_1 + k^2 X_1 \frac{R_r}{s} \right)} \right]. \quad (7.2.6)$$

Na Obr. 7.7 je provedeno porovnání vypočtených účinníků podle vztahů (7.2.5) a (7.2.6). Z tohoto obrázku je zřejmé, že chyba výpočtu fáze při zanedbání odporu R_{Fe} je velmi malá a dosahuje hodnoty $0,6^\circ$ ve stavu naprázdno a od momentu zvratu se pohybuje pod hodnotou $0,002^\circ$, prakticky dochází k odchýlkám vypočtených hodnot účinníků 0,062, resp. 0,002.



Obr. 7.7: Porovnání vypočtených účinníků.

7.2.1.1 Proudová charakteristika pro náhradní zapojení ve tvaru Γ -článku

Z předchozí kapitoly je zřejmé, že je možné zkonstruovat nekonečně mnoho totožných proudových charakteristik asynchronního stroje s vhodně přepočtenými parametry na základě kapitoly 7.1.2. Z pohledu popisu chování stroje a identifikace jeho parametrů je nejvýhodnější využít takové náhradní zapojení asynchronního stroje, které obsahuje co nejméně proměnných. Na výběr tedy jsou náhradní zapojení ve tvaru Γ -článku a T-článku. Pro další postup odvození je zvoleno náhradní zapojení ve tvaru Γ -článku. Statorový proud je možné vyjádřit jako

$$\hat{I}_1 = \hat{U}_1 \frac{a_1 + ja_2}{a_3 + ja_4} = \frac{a_1 a_3 + a_2 a_4 + j(a_2 a_3 - a_1 a_4)}{a_3^2 + a_4^2}, \quad (7.2.2)$$

kde jednotlivé pomocné proměnné jsou

$$\begin{aligned} a_1 &= R_2 X_h + s R_{Fe} (X_h + X_{\sigma 2}), \\ a_2 &= s X_h X_{\sigma 2} - R_2 R_{Fe}, \\ a_3 &= R_1 R_2 X_h + R_2 R_{Fe} X_h + R_1 R_{Fe} s (X_h + X_{\sigma 2}), \\ a_4 &= (R_1 + R_{Fe}) s X_h X_{\sigma 2} - R_1 R_2 R_{Fe}. \end{aligned} \quad (7.2.7)$$

Mnohdy je výhodné znát i funkci inverzní, tj. závislost skluzu na statorovém proudu

$$s = \frac{a_1 + ja_2}{a_3 + ja_4}, \quad (7.2.8)$$

kde jednotlivé pomocné proměnné jsou

$$\begin{aligned} a_1 &= R_2 X_h [\hat{U}_1 - \hat{I}_1 (R_1 + R_{Fe})], \\ a_2 &= R_2 R_{Fe} (\hat{I}_1 R_1 - \hat{U}_1), \\ a_3 &= R_{Fe} (X_h + X_{\sigma 2}) (\hat{I}_1 R_1 - \hat{U}_1), \\ a_4 &= X_h X_{\sigma 2} [\hat{I}_1 (R_1 + R_{Fe}) - \hat{U}_1]. \end{aligned} \quad (7.2.9)$$

Předešlé vztahy pro výpočet statorového proudu na základě skluzu jsou funkce v komplexní rovině popsané pomocí fázorů napětí a proudů. Občas je výhodnější pracovat s absolutními hodnotami těchto fázorů, tj. s absolutními hodnotami statorového proudu a napětí

$$I_1 = U_1 \sqrt{\frac{a_1 + a_2 s + a_3 s^2}{a_4 + a_5 s + a_6 s^2}}, \quad (7.2.10)$$

kde jednotlivé pomocné proměnné jsou

$$\begin{aligned} a_1 &= R_2^2 (R_{Fe}^2 + X_h^2), \\ a_2 &= 2R_2 R_{Fe} X_h^2, \\ a_3 &= R_{Fe}^2 (X_h + X_{\sigma 2})^2 + X_h^2 X_{\sigma 2}^2, \\ a_4 &= R_2^2 [R_1^2 R_{Fe}^2 + X_h^2 (R_1 + R_{Fe})^2], \\ a_5 &= 2R_1 R_2 R_{Fe} X_h^2 (R_1 + R_{Fe}), \\ a_6 &= R_1^2 [R_{Fe}^2 (X_h + X_{\sigma 2})^2 + X_h^2 X_{\sigma 2}^2] + 2R_1 R_{Fe} X_h^2 X_{\sigma 2}^2 + R_{Fe}^2 X_h^2 X_{\sigma 2}^2. \end{aligned} \quad (7.2.11)$$

Inverzní funkce má tvar

$$s = \frac{a_5 I_1^2 - a_2 U_1^2 \pm \sqrt{(a_5 I_1^2 - a_2 U_1^2)^2 - 4(a_4 I_1^2 - a_1 U_1^2)(a_6 I_1^2 - a_3 U_1^2)}}{2(a_3 U_1^2 - a_6 I_1^2)}, \quad (7.2.12)$$

kde kladné znaménko odpovídá motorickému chodu a záporné znaménko odpovídá generátorovému chodu.

7.2.2 Momentová charakteristika

Pod pojmem momentová charakteristika je rozuměna závislost vnitřního momentu stroje na skluzu stroje.

Z náhradních zapojení podle Obr. 7.5 je zřejmé, že činný výkon dodaný motoru je možné rozdělit na:

(i) Jouleovy ztráty ve statorovém vinutí

$$\Delta P_{Cu,1} = 3R_1 \hat{I}_1^2. \quad (7.2.13)$$

(ii) ztráty ve feromagnetických částech stroje

$$\Delta P_{Fe} = 3 \frac{U_h^2}{R_{Fe}}. \quad (7.2.14)$$

(iii) Jouleovy ztráty v rotorovém vinutí

$$\Delta P_{Cu,2} = 3R_2 \hat{I}_2^2. \quad (7.2.15)$$

(iv) mechanický výkon P_{mech} .

Na základě předešlého rozdělení výkonů je možné definovat výkon prostupující vzduchovou mezerou do rotoru

$$P_{\delta} = P_1 - \Delta P_{\text{Cu},1} - \Delta P_{\text{Fe}}. \quad (7.2.16)$$

Tento výkon se v rotoru musí spotřebovat na odporu $\frac{R_2}{s}$

$$P_{\delta} = 3 \frac{R_2}{s} \hat{I}_2^2. \quad (7.2.17)$$

Porovnáním tohoto vztahu s (7.2.15) je zřejmé, že výkon P_{δ} je dále možné vyjádřit vztahem

$$P_{\delta} = \frac{\Delta P_{\text{Cu},2}}{s}. \quad (7.2.18)$$

Mechanický výkon je potom dán jako rozdíl výkonu prostupujícího vzduchovou mezerou do rotoru a Joulovými ztrátami v rotoru

$$\begin{aligned} P_{\text{mech}} &= P_{\delta} - \Delta P_{\text{Cu},2} = 3R_2 \hat{I}_2^2 \frac{1-s}{s} \\ &= (1-s) P_{\delta}. \end{aligned} \quad (7.2.19)$$

Reálná velikost mechanického momentu dostupného na hřídeli stroje je nižší než udává vztah (7.2.19) z důvodu mechanických ztrát. Vnitřní mechanický moment asynchronního stroje je dán podílem vnitřního mechanického výkonu stroje a mechanické úhlové rychlosti

$$M = \frac{P_{\text{mech}}}{\omega_{\text{mech}}} = \frac{(1-s) P_{\delta}}{(1-s) \omega_s} = \frac{mpR_2 \hat{I}_2^2}{s\omega_s}, \quad (7.2.20)$$

kde m je počet fází statoru, \hat{I}_2 je rotorový proud daný vztahem

$$\hat{I}_2 = \hat{U}_1 \frac{ja_1}{a_2 + ja_3}, \quad (7.2.21)$$

kde jednotlivé pomocné proměnné jsou

$$\begin{aligned} a_1 &= R_{\text{Fe}} X_h, \\ a_2 &= R_1 \frac{R_2}{s} R_{\text{Fe}} - X_{\sigma 2} (R_1 + R_{\text{Fe}}) (X_h + X_{\sigma 1}) - R_1 X_h X_{\sigma 1} - R_{\text{Fe}} X_h X_{\sigma 1}, \\ a_3 &= R_1 \left[\frac{R_2}{s} (X_h + X_{\sigma 1}) + R_{\text{Fe}} (X_h + X_{\sigma 2}) \right] + \frac{R_2}{s} R_{\text{Fe}} (X_h + X_{\sigma 1}). \end{aligned} \quad (7.2.22)$$

Dosazením (7.2.21) do (7.2.20) a po úpravě vychází

$$M = \frac{mpR_2}{s\omega_s} \frac{a_1^2}{a_2^2 + a_3^2}. \quad (7.2.23)$$

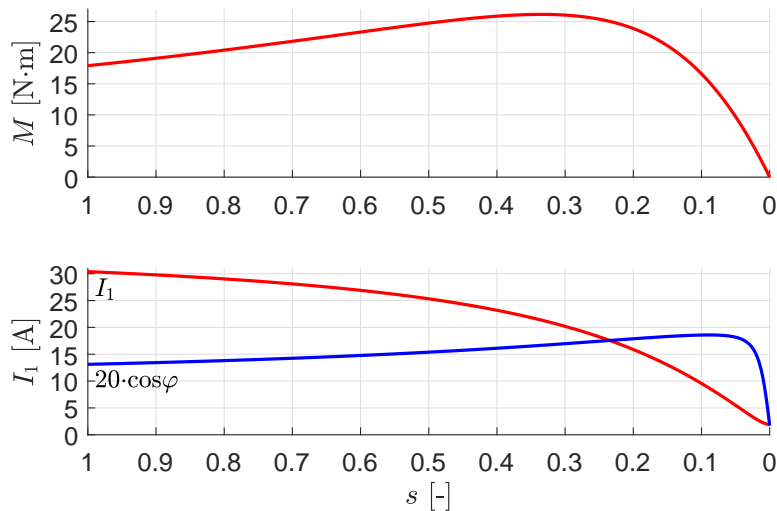
Dosazením pomocných proměnných (7.2.22) do (7.2.23) a úpravou je možné zkonstruovat momentovou charakteristiku ve tvaru

$$M = \frac{a_1 s}{a_2 s^2 + a_3 s + a_4} = \frac{1}{\frac{a_2}{a_1} s + \frac{a_3}{a_1} + \frac{a_4}{a_1} s^{-1}}, \quad (7.2.24)$$

kde nové pomocné parametry jsou

$$\begin{aligned}
 a_1 &= mpR_2R_{Fe}^2U_1^2X_h^2, \\
 a_2 &= \omega_s R_1^2 \left[R_{Fe}^2 (X_h + X_{\sigma 2})^2 + (X_{\sigma 2} (X_h + X_{\sigma 1}) + X_h X_{\sigma 1})^2 \right] \\
 &\quad + 2\omega_s R_1 R_{Fe} [X_h (X_{\sigma 1} + X_{\sigma 2}) + X_{\sigma 1} X_{\sigma 2}]^2 \\
 &\quad + \omega_s [R_{Fe} X_{\sigma 2} (X_h + X_{\sigma 1}) + R_{Fe} X_h X_{\sigma 1}]^2, \\
 a_3 &= 2R_1 R_2 R_{Fe} X_h^2 \omega_s (R_1 + R_{Fe}), \\
 a_4 &= \omega_s R_2^2 \left[R_1^2 (R_{Fe}^2 + (X_h + X_{\sigma 1})^2) \right] \\
 &\quad + \omega_s R_2^2 \left[2R_1 R_{Fe} (X_h + X_{\sigma 1})^2 + R_{Fe}^2 (X_h + X_{\sigma 1})^2 \right].
 \end{aligned} \tag{7.2.25}$$

Typický průběh momentové charakteristiky vypočtený podle (7.2.24), proudové charakteristiky a odpovídajícího účinníku je zobrazen na Obr. 7.8.



Obr. 7.8: Momentová charakteristika.

7.2.2.1 Momentová charakteristika pro náhradní zapojení ve tvaru Γ -článku

Momentová charakteristika asynchronního stroje v případě náhradního zapojení ve tvaru Γ -článku má tvar

$$M = \frac{a_1 s}{a_2 s^2 + a_3 s + a_4} = \frac{1}{\frac{a_2}{a_1} s + \frac{a_3}{a_1} + \frac{a_4}{a_1} s^{-1}}, \tag{7.2.24}$$

kde jednotlivé pomocné parametry jsou

$$\begin{aligned}
 a_1 &= mpR_2R_{Fe}^2U_1^2X_h^2, \\
 a_2 &= \omega_s \left[R_1^2 (R_{Fe}^2 (X_h + X_{\sigma 2})^2 + X_h^2 X_{\sigma 2}^2) + 2R_1 R_{Fe} X_h^2 X_{\sigma 2}^2 + R_{Fe}^2 X_h^2 X_{\sigma 2}^2 \right], \\
 a_3 &= 2R_1 R_2 R_{Fe} X_h^2 \omega_s (R_1 + R_{Fe}), \\
 a_4 &= R_2^2 \omega_s \left[R_1^2 R_{Fe}^2 + X_h^2 (R_1 + R_{Fe})^2 \right].
 \end{aligned} \tag{7.2.26}$$

Pokud není nutné uvažovat ztráty v železe stroje, je možné momentovou rovnici značně zjednodušit do podoby

$$M = \frac{mpR_2sX_h^2U_1^2}{\omega_s \left[2R_1R_2sX_h^2 + X_h^2 (R_2^2 + s^2X_{\sigma 2}^2) + R_1^2 (R_2^2 + s^2 (X_h + X_{\sigma 2})^2) \right]}. \quad (7.2.27)$$

Ze vztahu (7.2.24) je možné odvodit inverzní momentovou charakteristiku ve tvaru

$$s = \frac{a_1 - a_3M \pm \sqrt{(a_1 - a_3M)^2 - 4a_2a_4M^2}}{2a_2M}. \quad (7.2.28)$$

Záporné znaménko je platné pro interval skluzu od nuly do skluzu zvratu a kladné znaménko od skluzu zvratu výše. Je třeba si uvědomit, že jedné hodnotě momentu odpovídají vždy dvě hodnoty skluzu, tj. jedna hodnota je v pracovní oblasti stroje a druhá je v nestabilní⁹ oblasti, a proto není možné zkonstruovat jedinou matematickou funkci, která by byla schopna převést moment stroje na odpovídající skluz.

7.3 Základní pracovní stavy

V této kapitole jsou rozebrány základní pracovní stavy asynchronního stroje s ohledem na jeho vstupně/výstupní parametry. Při popisu je vycházeno z náhradního zapojení ve tvaru Γ -článku.

7.3.1 Stav naprázdno

Stavem naprázdno asynchronního stroje se rozumí stav, kdy se rotor volně otáčí bez jakékoliv zátěže, tj. stroj má skluz $s = 0$. Prakticky tohoto stavu není samotný stroj schopen nikdy dosáhnout, protože vždy je brzděn mechanickými ztrátami a to především ztrátami ventilací. Pro dosažení tohoto stavu je obvykle nutné stroj pohánět externím motorem, např. pomocí dynamometru.

Za předpokladu nulového skluzu, vychází moment stroje podle (7.2.24) rovný nule. Komplexní hodnota statorového proudu je podle (7.2.2) rovna

$$\hat{I}_{1,0} = U_1 \frac{R_1R_{Fe}^2 + (R_1 + R_{Fe})X_h^2 - jR_{Fe}^2X_h}{R_1^2R_{Fe}^2 + (R_1 + R_{Fe})^2X_h^2}, \quad (7.3.1)$$

z čehož je možné vyjádřit absolutní hodnotu

$$I_{1,0} = U_1 \sqrt{\frac{R_{Fe}^2 + X_h^2}{R_1^2R_{Fe}^2 + (R_1 + R_{Fe})^2X_h^2}} \quad (7.3.2)$$

a účinník

$$\cos \varphi_0 = \cos \arctan \left[\frac{R_{Fe}^2X_h}{R_1R_{Fe}^2 + (R_1 + R_{Fe})X_h^2} \right]. \quad (7.3.3)$$

⁹O stabilitě, či naopak nestabilitě je možné rozhodnout pouze se znalostí momentové charakteristiky stroje a charakteristiky zátěže.

7.3.2 Stav nakrátko

Stavem nakrátko asynchronního stroje se rozumí stav, kdy je rotoru zabráněno v pohybu, tj. stroj má skluz $s = 1$. Hodnota statorového proudu nakrátko pro náhradní zapojení asynchronního stroje ve tvaru Γ -článku má velikost

$$\hat{I}_{1,k} = U_1 \sqrt{\frac{a_1 + ja_2}{a_3 + ja_4}}, \quad (7.3.4)$$

kde pomocné parametry jsou

$$\begin{aligned} a_1 &= R_2 X_h + R_{Fe} (X_h + X_{\sigma 2}), \\ a_2 &= X_h X_{\sigma 2} - R_2 R_{Fe}, \\ a_3 &= R_2 R_{Fe} X_h + R_1 (R_2 + R_{Fe}) X_h + R_1 R_{Fe} X_{\sigma 2}, \\ a_4 &= (R_1 + R_{Fe}) X_h X_{\sigma 2} - R_1 R_2 R_{Fe}. \end{aligned} \quad (7.3.5)$$

Absolutní hodnota proudu nakrátko je potom

$$I_{1,k} = U_1 \sqrt[4]{\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_3^2 + a_4^2}}. \quad (7.3.6)$$

Moment asynchronního motoru ve stavu nakrátko je

$$M = \frac{a_1}{a_2 + a_3 + a_4}, \quad (7.3.7)$$

kde jednotlivé pomocné parametry jsou

$$\begin{aligned} a_1 &= mp R_2 R_{Fe}^2 U_1^2 X_h^2, \\ a_2 &= \omega_s \left[R_1^2 \left(R_{Fe}^2 (X_h + X_{\sigma 2})^2 + X_h^2 X_{\sigma 2}^2 \right) + 2 R_1 R_{Fe} X_h^2 X_{\sigma 2}^2 + R_{Fe}^2 X_h^2 X_{\sigma 2}^2 \right], \\ a_3 &= 2 R_1 R_2 R_{Fe} X_h^2 \omega_s (R_1 + R_{Fe}), \\ a_4 &= R_2^2 \omega_s \left[R_1^2 R_{Fe}^2 + X_h^2 (R_1 + R_{Fe})^2 \right]. \end{aligned} \quad (7.2.26)$$

7.3.3 Chod s maximálním momentem

Asynchronní stroj má maximální moment při tzv. skluzu zvratu. Při uvažování obecné zátěže není možné jednoduše říci, zda se jedná o stabilní, či nestabilní pracovní bod stroje. Za předpokladu konstantního zatěžovacího momentu o velikosti menší než je moment záběrový, je možné říci, že tento bod je na pomezí stability, resp. od skluzu většího než je skluz zvratu se stroj nachází v nestabilní oblasti.

Maximální moment stroje, resp. skluz zvratu je možné určit z první derivace průběhu momentové charakteristiky (7.2.24) podle skluzu a najít takového skluzu, při kterém je tato derivace nulová. Derivace momentové charakteristiky (7.2.24) podle skluzu je rovna

$$\frac{dM}{ds} = \frac{a_1 (a_4 - a_2 s^2)}{[a_4 + s (a_3 + a_2 s)]^2}, \quad (7.3.8)$$

kde jednotlivé pomocné parametry jsou

$$\begin{aligned}
 a_1 &= mpR_2R_{Fe}^2U_1^2X_h^2, \\
 a_2 &= \omega_s \left[R_1^2 \left(R_{Fe}^2 (X_h + X_{\sigma 2})^2 + X_h^2 X_{\sigma 2}^2 \right) + 2R_1 R_{Fe} X_h^2 X_{\sigma 2}^2 + R_{Fe}^2 X_h^2 X_{\sigma 2}^2 \right], \\
 a_3 &= 2R_1 R_2 R_{Fe} X_h^2 \omega_s (R_1 + R_{Fe}), \\
 a_4 &= R_2^2 \omega_s \left[R_1^2 R_{Fe}^2 + X_h^2 (R_1 + R_{Fe})^2 \right].
 \end{aligned} \tag{7.2.26}$$

Na základě této rovnice je již snadné určit skluz zvratu

$$s_{zv} = \pm \sqrt{\frac{a_4}{a_2}}, \tag{7.3.9}$$

kde kladné znaménko odpovídá motorickému chodu a záporné znaménko odpovídá generátorovému chodu. Po dosazení tohoto skluzu do momentové rovnice (7.2.24) je snadné určit vztah pro moment zvratu ve tvaru

$$M_{zv} = \frac{a_1}{a_3 \pm 2\sqrt{a_2 a_4}}. \tag{7.3.10}$$

7.3.4 Chod s maximálním výkonem

Asynchronní stroj má maximální možný výkon při maximálním možném součinu mechanického momentu a mechanické úhlové rychlosti. Derivace mechanického výkonu podle skluzu je rovna

$$\frac{d}{ds} \left(M \omega_s \frac{1-s}{p} \right) = -\frac{\omega_s a_1 [(a_2 + a_3)s^2 + a_4(-1 + 2s)]}{p [a_4 + s(a_3 + a_2s)]^2}, \tag{7.3.11}$$

kde jednotlivé pomocné parametry jsou

$$\begin{aligned}
 a_1 &= mpR_2R_{Fe}^2U_1^2X_h^2, \\
 a_2 &= \omega_s \left[R_1^2 \left(R_{Fe}^2 (X_h + X_{\sigma 2})^2 + X_h^2 X_{\sigma 2}^2 \right) + 2R_1 R_{Fe} X_h^2 X_{\sigma 2}^2 + R_{Fe}^2 X_h^2 X_{\sigma 2}^2 \right], \\
 a_3 &= 2R_1 R_2 R_{Fe} X_h^2 \omega_s (R_1 + R_{Fe}), \\
 a_4 &= R_2^2 \omega_s \left[R_1^2 R_{Fe}^2 + X_h^2 (R_1 + R_{Fe})^2 \right].
 \end{aligned} \tag{7.2.26}$$

Na základě této rovnice je již snadné určit skluz odpovídající maximálnímu výkonu stroje

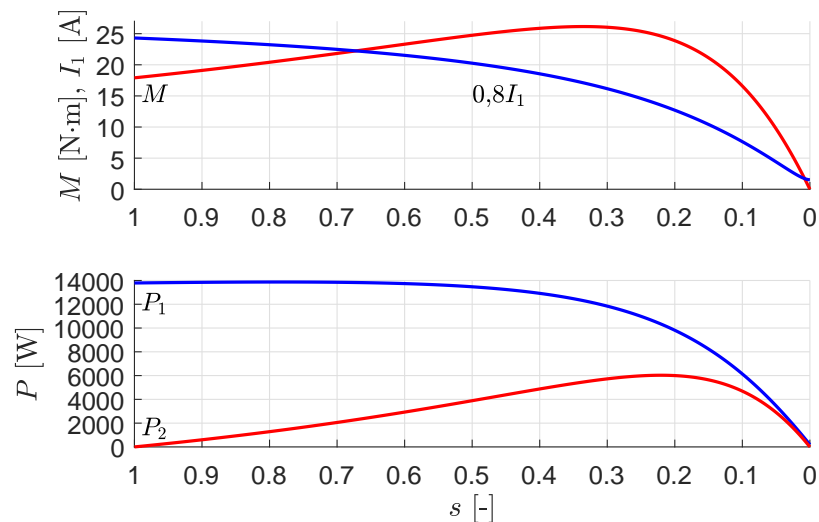
$$s_P = -\frac{a_4 \pm \sqrt{a_4(a_2 + a_3 + a_4)}}{a_2 + a_3}, \tag{7.3.12}$$

kde záporné znaménko odpovídá motorickému chodu a kladné znaménko odpovídá generátorovému chodu.

Dosazením tohoto skluzu do součinu momentu a otáček vyjde vztah pro určení velikosti maximálního výkonu

$$P_{\max} = \frac{\omega_s a_1}{p} \frac{[a_3 + 2a_4 \pm 2\sqrt{a_4(a_2 + a_3 + a_4)}]}{a_3^2 - 4a_2 a_4}. \tag{7.3.13}$$

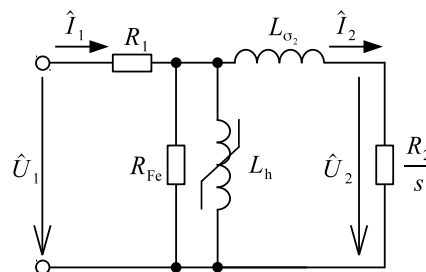
Na Obr. 7.9 je zobrazena proudová a momentová charakteristika společně se zobrazenými průběhy příkonu a výkonu.



Obr. 7.9: Momentová charakteristika a mechanický výkon.

7.4 Statický model s nelineárním magnetickým obvodem

V této kapitole je představen statický nelineárním model asynchronního stroje ve tvaru Γ -článku, viz Obr. 7.10. Vlivem průchodu proudů statorovým vinutím vznikají na statorovém odporu napěťové úbytky a mění se magnetizační napětí na hlavní indukčnosti. Toto způsobuje změny syčení magnetického obvodu a tím i změnu velikosti hlavní indukčnosti a odporu reprezentující ztráty v železe.

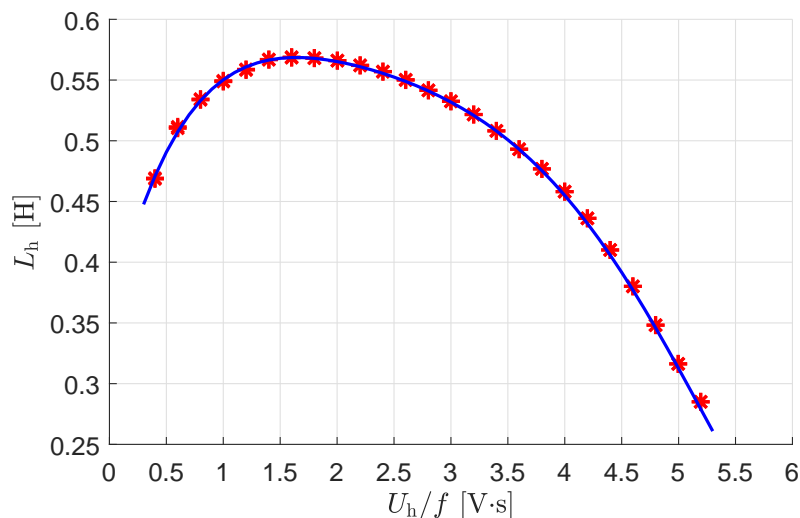

 Obr. 7.10: Nelineární náhradní zapojení asynchronního stroje ve tvaru Γ -článku.

7.4.1 Nelineární magnetizační indukčnost

Nelinearitu magnetizační indukčnosti je velmi snadné určit ze zkoušky naprázdno, viz kapitola 10.1.1. Asynchronní stroj je poháněn externím motorem na synchronní otáčky pro daný napájecí kmitočet a je měněno napájecí statorové napětí. Během měření jsou zaznamenávány velikosti příkonů, proudů a napětí. Z těchto už je velmi snadné určit nelineární závislost magnetizační indukčnosti na magnetizačním napětí, resp. na spřaženém magnetickém toku statorového vinutí.

Tyto závislosti byly určeny z měření na 2,2 kW trojfázovém asynchronním motoru s kotvou nakrátko, viz Obr. 7.11. Červené hvězdičky značí změřené hodnoty magnetizační indukčnosti a

modrý průběh je jejich proložení polynomickou křivkou. Jmenovitá hodnota pro napětí 230 V a frekvenci 50 Hz je $\frac{230}{50} = 4,6 \text{ V} \cdot \text{s}$.



Obr. 7.11: Závislost magnetizační indukčnosti na poměru magnetizačního fázového napětí a napájecího kmitočtu statorového vinutí.

Tuto závislost je možné experimentálně proložit polynomickou křivkou

$$L_h \left(\frac{U_h}{f} \right) = \sum_{ni=0}^5 a_n \left(\frac{U_h}{f} \right)^n, \quad (7.4.1)$$

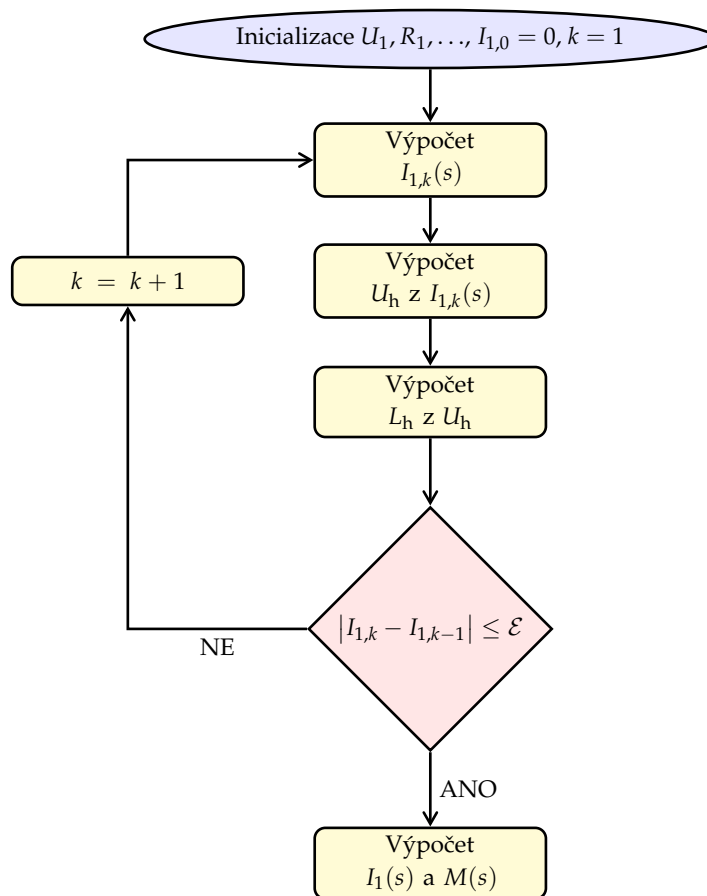
kde je obvykle postačující využít polynom pátého řádu¹⁰.

Statické závislosti statorového proudu a momentu na skluzu dříve definovanými vztahy (7.2.2), resp. (7.2.24) není možné přímo použít při uvažování nelineární magnetizační indukčnosti, protože se v těchto vztazích vyskytuje nelineární magnetizační reaktance, která není přímo závislá na skluzu, ale je závislá na magnetizačním napětí. Z tohoto důvodu je nutné výpočet proudu a momentu provádět iterativně a to tak, jak je naznačeno na Obr. 7.12. Při inicializaci jednotlivých parametrů modelu, je vhodné s ohledem na rychlost konvergence nastavit počáteční hodnotu magnetizační reaktance takovou hodnotu, aby odpovídala magnetizačnímu napětí rovnajícímu se napětí napájecímu. Samotný algoritmus probíhá tak dlouho, dokud rozdíl proudů po sobě jdoucích dvou iterací není menší než předem stanovená hodnota \mathcal{E} . Pro praktické výpočty jsou většinou dostačující tři iterace uvedeného algoritmu, kdy chyba proudu je v řádech desítek miliampér.

Na Obr. 7.13 jsou zobrazeny průběhy magnetizační indukčnosti, poměru magnetizačního napětí a napájecího kmitočtu a statorového proudu pro asynchronní motor. Z průběhu je zřejmé, že magnetizační indukčnost a sycení stroje se za chodu mění přibližně až o 20 % a napěťový úbytek na statorovém odporu dosahuje až 50 V. Na druhou stranu z průběhů plyne, že tyto změny mají pramalý vliv na průběh proudové charakteristiky, kdy maximální odchylka mezi modelem s konstantní magnetizační indukčností a s nelineární indukčností dosahuje pouze 0,3 A. V kapitole 8.5 je ukázáno, že ani změna magnetizační indukčnosti v rozsahu $\pm 50 \%$

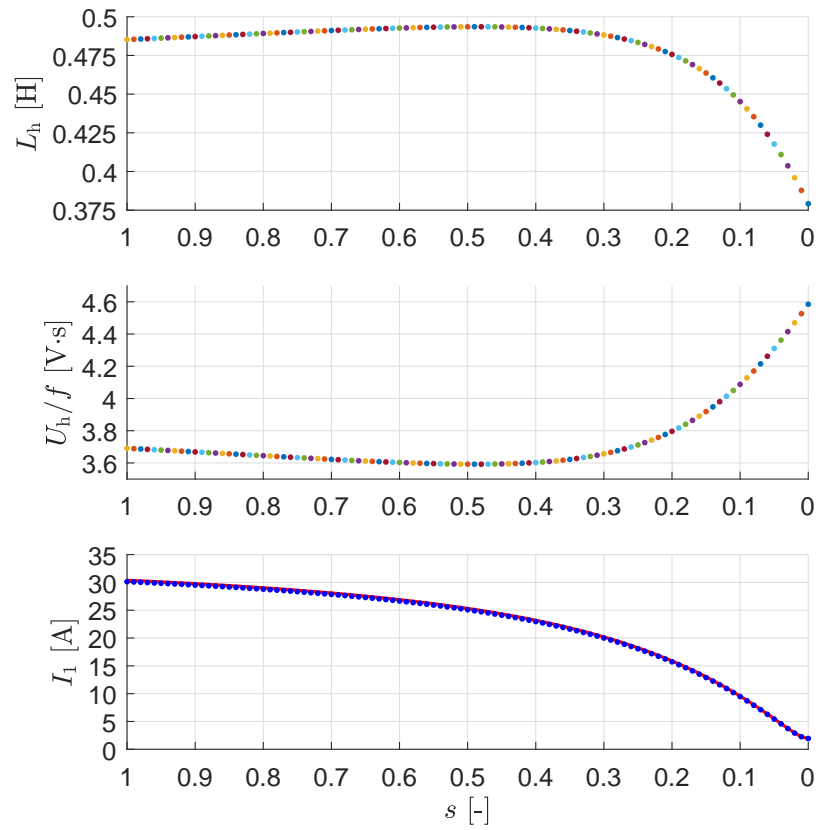
¹⁰V tomto konkrétním případě jsou jednotlivé koeficienty: $a_0 = 0,3534$, $a_1 = 0,3845$, $a_2 = -0,2586$, $a_3 = 0,08384$, $a_4 = -0,01378$, $a_5 = 0,0008429$.

podstatně neovlivňuje proudovou ani momentovou charakteristiku. Z čehož je zřejmé, že pro tento konkrétní případ není nutné nelinearitu magnetizační indukčnosti uvažovat¹¹.



Obr. 7.12: Algoritmus výpočtu I_1 a M při uvážení nelineární magnetizační indukčnosti.

¹¹Podobné závěry je možné vyvodit i v případě nelineárního odporu respektujícího ztráty v železe.



Obr. 7.13: Závislost magnetizační indukčnosti na poměru magnetizačního fázového napětí a napájecího kmitočtu statorového vinutí.

Část III

Identifikace parametrů asynchronních strojů

Podle [33] je možné rozdělit identifikaci parametrů asynchronních strojů na následující typy:

- (i) **Identifikace na základě konstrukce stroje.** Tento způsob vyžaduje detailní znalost konstrukce stroje (např. rozměry, způsob vinutí vinutí, izolace, ...) a materiálové vlastnosti použitých materiálů. Jako jediný z uvedených způsobů nevyžaduje žádná měřená data. Nevýhodou je velká výpočetní náročnost při numerickém řešení parciálních diferenciálních rovnic popisujících rozložení elektromagnetického pole v asynchronním stroji metodou konečných prvků.
- (ii) **Identifikace na základě statického náhradního zapojení.** Tato metoda je v praxi nejběžnější vyžaduje běžně dostupná data ze zkoušky naprázdno a nakrátko, popřípadě údaje uvedené na štítku stroje.
- (iii) **Identifikace ve frekvenční oblasti.** Patří mezi přesnější metody, kdy parametry jsou určovány pro náhradní přenosovou funkci stroje. Měření frekvenční charakteristiky je provedeno pro stojící stroj.
- (iv) **Identifikace v časové oblasti.** Při této identifikaci je zapotřebí znát časové průběhy měřitelných veličin stroje, tj. např. napětí, proudů, otáček atd. Tuto identifikaci je možné provádět buď off-line, tj. až po skončení měření daných průběhů, nebo on-line za chodu stroje, tj. např. identifikace parametrů při automatickém ladění regulátorů pohonu s asynchronním strojem.

V následujících kapitolách jsou vybrané způsoby identifikace podrobněji popsány.

POZNÁMKA 6.

Rotorové parametry R_2 a $X_{\sigma 2}$ jsou v následujícím textu vždy přepočteny na stranu statoru, proto jsou veškeré indexy označující tuto skutečnost dále vynechány.

8 | Citlivostní analýza

Citlivostní analýza slouží k analýze vlivu změny vstupních parametrů funkce/modelu na změnu výstupních parametrů. Na základě provedené citlivostní analýzy lze snadno dedukovat možnosti identifikovatelnosti jednotlivých parametrů náhradního zapojení asynchronního stroje. Citlivostní analýza je v této kapitole provedena pouze pro Γ -článek, protože ostatní náhradní zapojení je možné na něj převést.

Citlivost $\delta_{\mathcal{X},x}$ je definována vztahem

$$\delta_{\mathcal{X},x} = \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x} \quad (8.0.1)$$

kde $\mathcal{X} = \{M, I_1, \dots\}$ je funkce, pro kterou je citlivost počítána a $x = \{R_1, R_2, \dots\}$ je parametr. Je dobré si uvědomit, že takto vypočtená hodnota $\delta_{\mathcal{X},x}$ má pouze lokální platnost, protože \mathcal{X} je obvykle nelineární funkce. Změna hodnoty funkce \mathcal{X} je při změně parametru x o Δx rovna

$$\Delta \mathcal{X} = \delta_{\mathcal{X},x} \Delta x. \quad (8.0.2)$$

8.1 Statorový odpor R_1

Citlivost statorového proudu na změnu statorového odporu je

$$\delta_{I_1, R_1} = -U_1 \left(R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_{Fe}} + \frac{1}{jX_h} + \frac{s}{R_2 + jsX_{\sigma 2}}} \right)^{-2}. \quad (8.1.1)$$

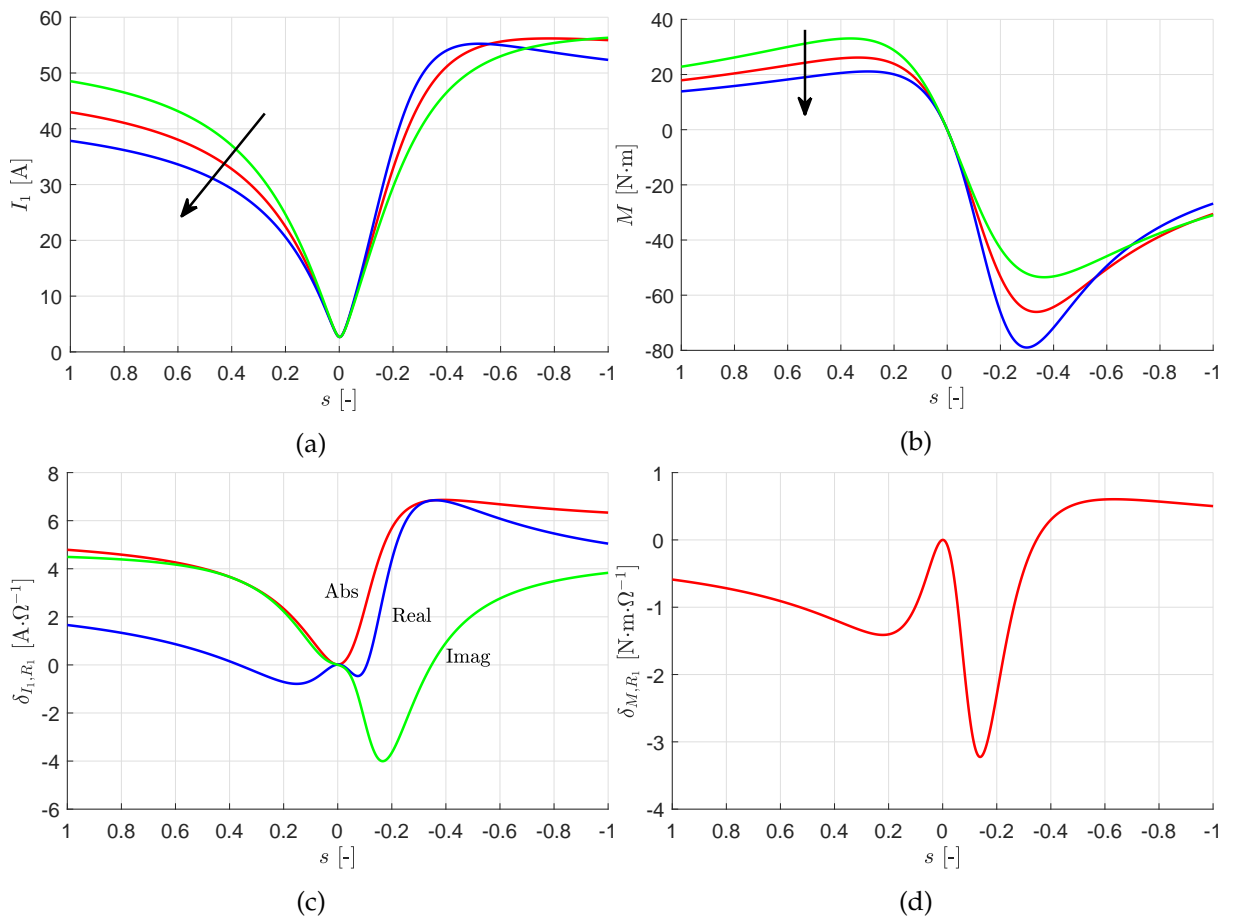
Citlivost momentu na změnu statorového odporu je

$$\delta_{M, R_1} = -\frac{a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4}{a_5 s^4 + a_6 s^3 + a_7 s^2 + a_8 s + a_9} \frac{mpU_1^2}{\omega_s}, \quad (8.1.2)$$

kde jednotlivé parametry a jsou dány vztahy (I.1.1).

Na Obr. 8.1 a) a b) jsou zobrazeny průběhy statorového proudu a momentu při změně statorového odporu $R_1 \pm 50\%$.

Na Obr. 8.1 c) a d) jsou zobrazeny citlivosti statorového proudu a momentu na statorový odpor.



Obr. 8.1: Momentová a proudová charakteristika při změně R_1 .

8.2 Rotorový odpor R_2

Citlivost satorového proudu na změnu rotorového odporu je

$$\delta_{I_1, R_2} = - \frac{R_{Fe}^2 s U_1 X_h^2}{[jR_{Fe}X_h(R_2 + jsX_{\sigma 2}) + R_1[R_2(R_{Fe} + jX_h) + js(jX_hX_{\sigma 2} + R_{Fe}(X_h + X_{\sigma 2}))]]^2} \quad (8.2.1)$$

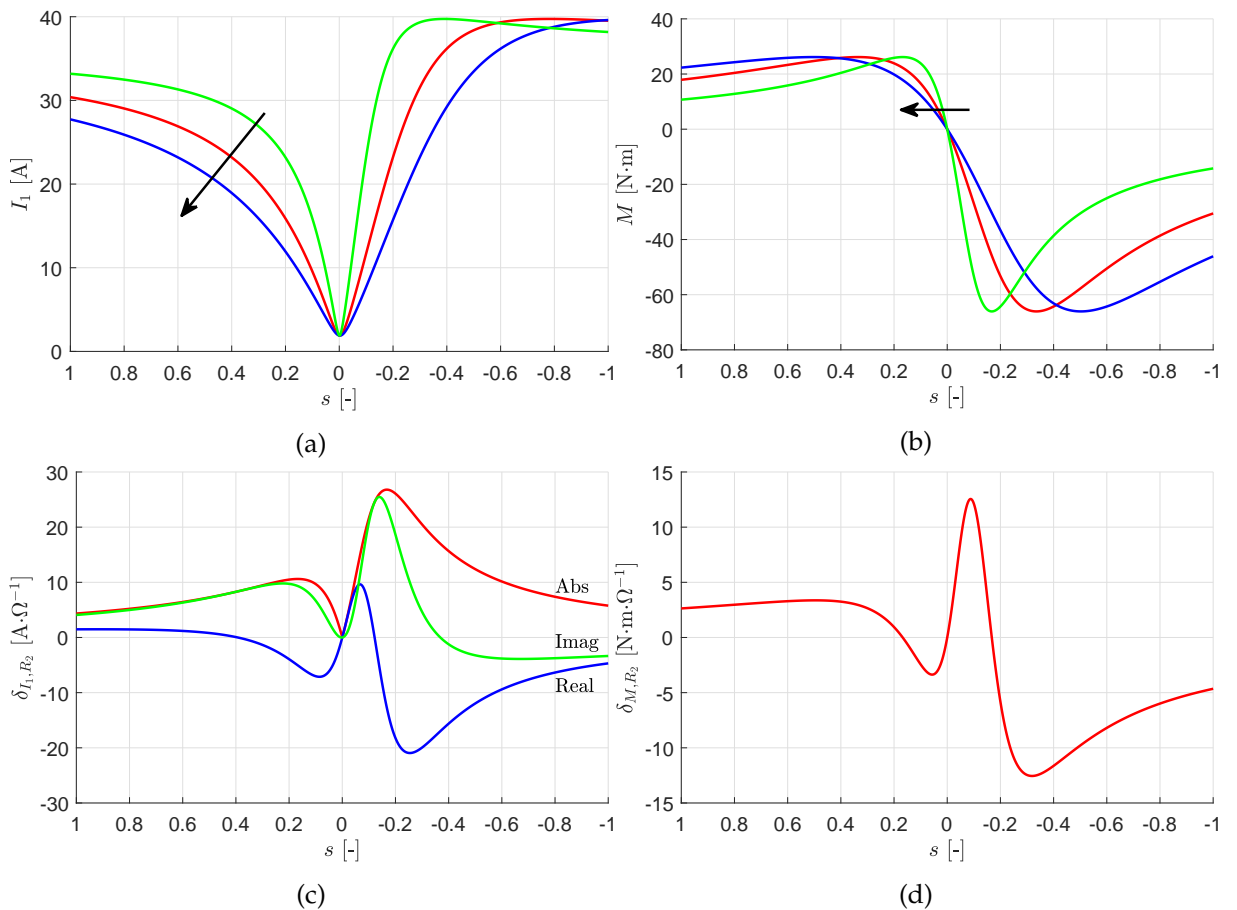
Citlivost momentu na změnu rotorového odporu je

$$\delta_{M, R_2} = \frac{a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4}{a_5 s^4 + a_6 s^3 + a_7 s^2 + a_8 s + a_9} \frac{mpU_1^2}{\omega_s}, \quad (8.2.2)$$

kde jednotlivé parametry a jsou dány vztahy (I.2.1).

Na Obr. 8.2 a) a b) jsou zobrazeny průběhy satorového proudu a momentu při změně rotorového odporu $R_2 \pm 50\%$.

Na Obr. 8.2 c) a d) jsou zobrazeny citlivosti satorového proudu a momentu na rotorový odpor.



Obr. 8.2: Momentová a proudová charakteristika při změně R_2 .

8.3 Odpor reprezentující ztráty v železe R_{Fe}

Citlivost satorového proudu na změnu odporu reprezentující ztráty v železe je

$$\delta_{I_1, R_{Fe}} = \frac{U_1 X_h^2 (R_2 + jsX_{\sigma 2})^2}{[jR_{Fe}X_h (R_2 + jsX_{\sigma 2}) + R_1 [R_2 (R_{Fe} + jX_h) + js(jX_h X_{\sigma 2} + R_{Fe} (X_h + X_{\sigma 2}))]]^2} \quad (8.3.1)$$

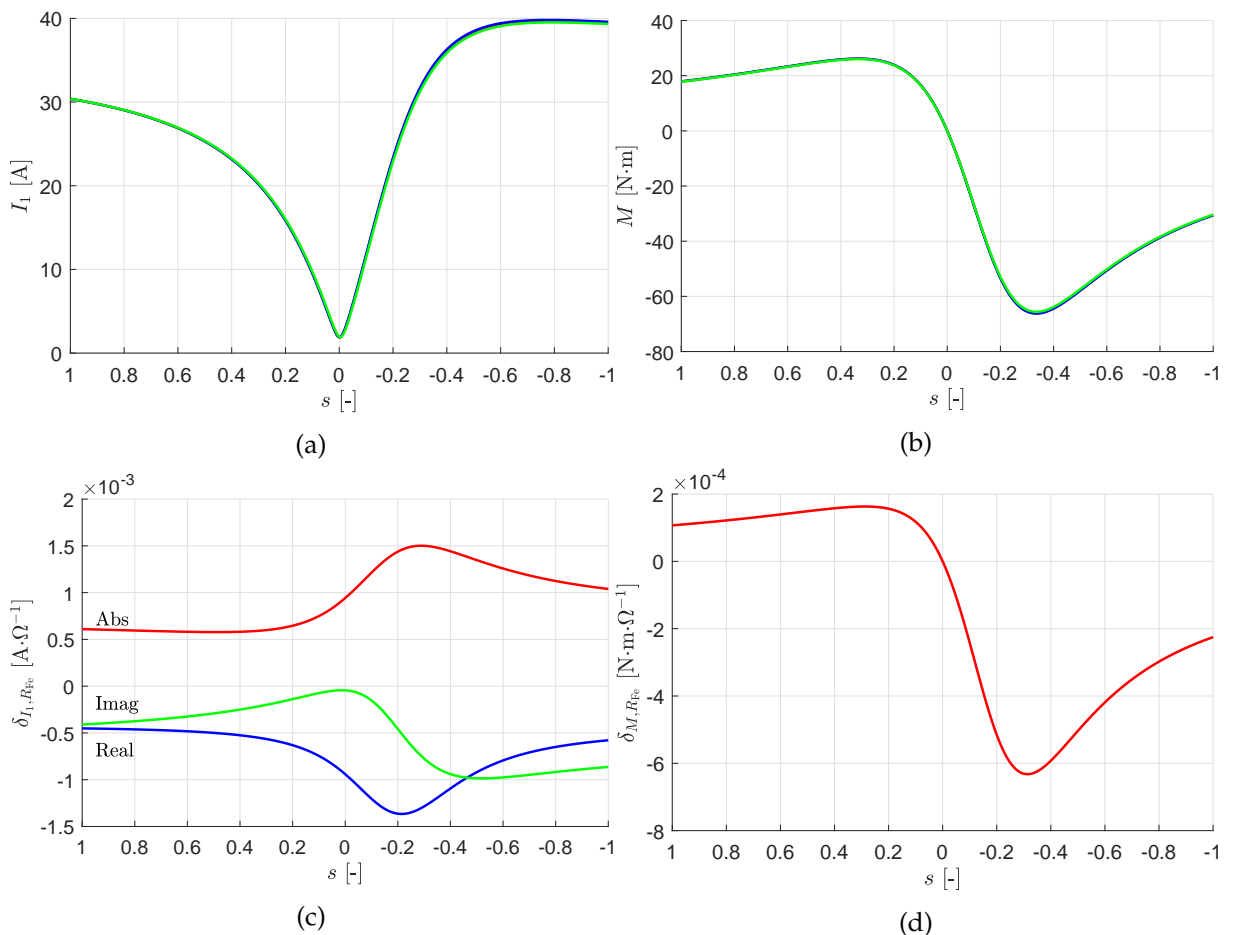
Citlivost momentu na změnu odporu reprezentující ztráty v železe je

$$\delta_{M, R_{Fe}} = \frac{a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4}{a_5 s^4 + a_6 s^3 + a_7 s^2 + a_8 s + a_9} \frac{mpU_1^2}{\omega_s}, \quad (8.3.2)$$

kde jednotlivé parametry a jsou dány vztahy (I.3.1).

Na Obr. 8.3 a) a b) jsou zobrazeny průběhy satorového proudu a momentu při změně odporu reprezentující ztráty v železe $R_{Fe} \pm 50\%$.

Na Obr. 8.3 c) a d) jsou zobrazeny citlivosti satorového proudu a momentu na odporu reprezentující ztráty v železe.



Obr. 8.3: Momentová a proudová charakteristika při změně R_{Fe} .

8.4 Rotorová rozptylová reaktance $X_{\sigma 2}$

Citlivost satorového proudu na změnu rozptylové reaktance je

$$\delta_{I_1, X_{\sigma 2}} = \frac{jR_{Fe}^2 s^2 U_1 X_h^2}{[R_{Fe} X_h (R_2 + js X_{\sigma 2}) + R_1 [-jR_2 R_{Fe} + R_2 X_h + R_{Fe} s X_h + s (R_{Fe} + jX_h) X_{\sigma 2}]]^2} \quad (8.4.1)$$

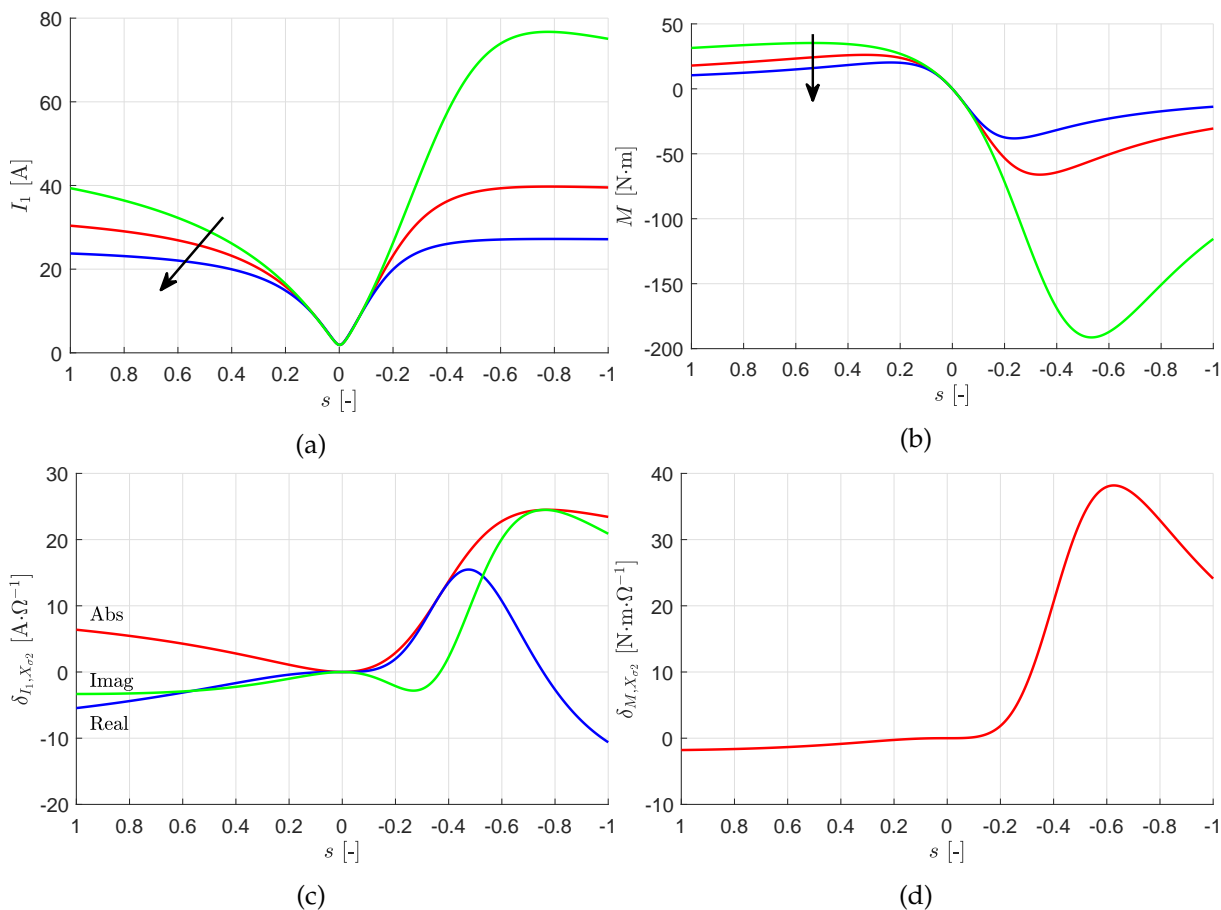
Citlivost momentu na změnu rozptylové reaktance je

$$\delta_{M, X_{\sigma 2}} = -\frac{a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4}{a_5 s^4 + a_6 s^3 + a_7 s^2 + a_8 s + a_9} \frac{mpU_1^2}{\omega_s}, \quad (8.4.2)$$

kde jednotlivé parametry a jsou dány vztahy (I.4.1).

Na Obr. 8.4 a) a b) jsou zobrazeny průběhy satorového proudu a momentu při změně rozptylové reaktance $X_{\sigma 2} \pm 50\%$.

Na Obr. 8.4 c) a d) jsou zobrazeny citlivosti satorového proudu a momentu na rozptylové reaktanci.



Obr. 8.4: Momentová a proudová charakteristika při změně $X_{\sigma 2}$.

8.5 Magnetizační reaktance X_h

Citlivost satorového proudu na změnu magnetizační reaktance je

$$\delta_{I_1, X_h} = - \frac{jR_{Fe}^2 U_1 (R_2 + jsX_{\sigma 2})^2}{[jR_{Fe}X_h (R_2 + jsX_{\sigma 2}) + R_1 [R_2 (R_{Fe} + jX_h) + js (jX_h X_{\sigma 2} + R_{Fe} (X_h + X_{\sigma 2}))]]^2} \quad (8.5.1)$$

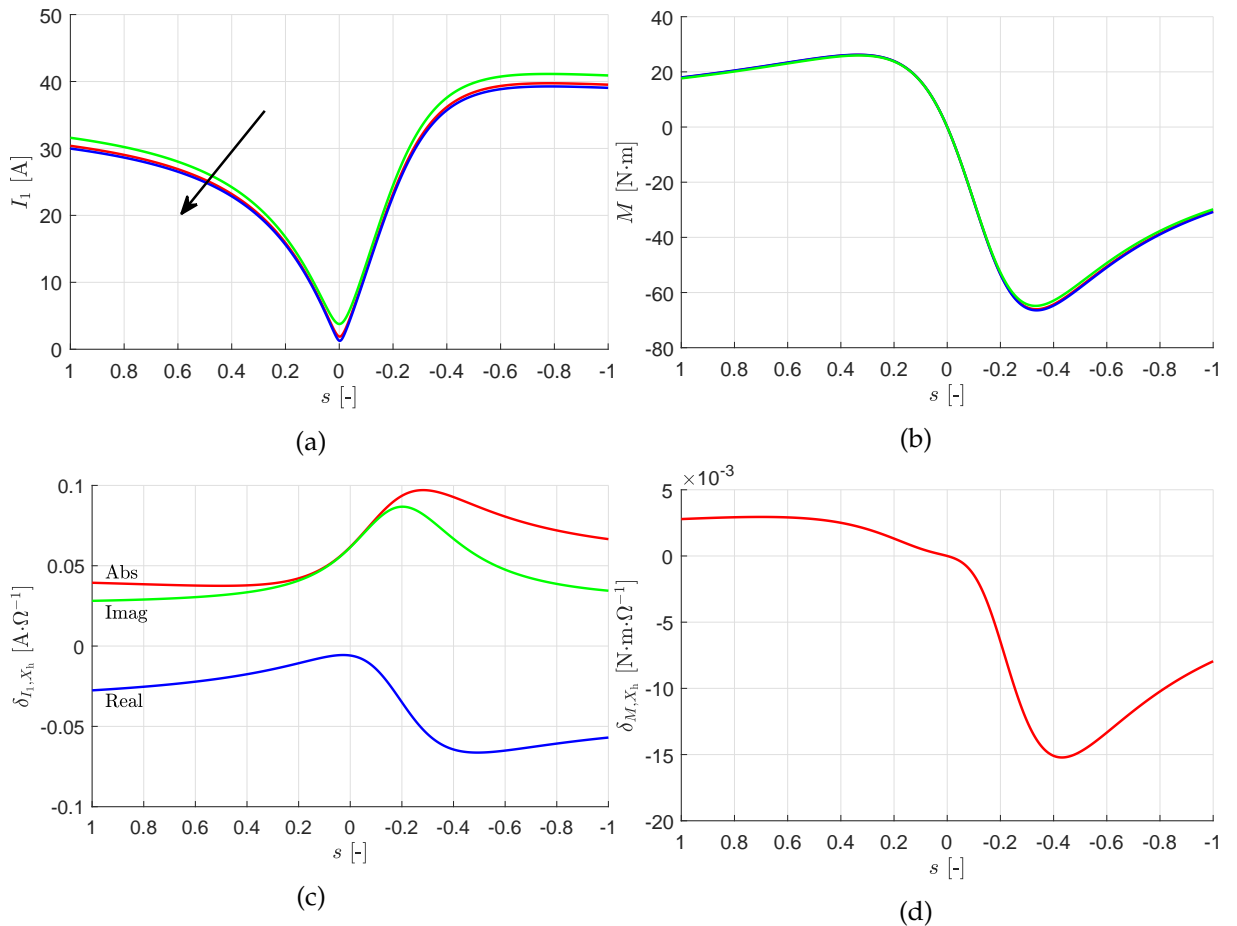
Citlivost momentu na změnu magnetizační reaktance je

$$\delta_{M, X_h} = \frac{a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4}{a_5 s^4 + a_6 s^3 + a_7 s^2 + a_8 s + a_9} \frac{mpU_1^2}{\omega_s}, \quad (8.5.2)$$

kde jednotlivé parametry a jsou dány vztahy (I.5.1).

Na Obr. 8.5 a) a b) jsou zobrazeny průběhy satorového proudu a momentu při změně magnetizační reaktance $X_h \pm 50\%$.

Na Obr. 8.5 c) a d) jsou zobrazeny citlivosti satorového proudu a momentu na magnetizační reaktanci.



Obr. 8.5: Momentová a proudová charakteristika při změně X_h .

8.6 Zhodnocení citlivostní analýzy

Z citlivostní analýzy momentové a proudové charakteristiky z pohledu identifikovatelnosti jednotlivých parametrů je zřejmé, že:

- (i) při identifikaci parametrů z obou charakteristik v okolí jmenovitého bodu lze určit pouze velikost rotorového odporu R_2 , ostatní parametry nemají podstatný vliv na tvar charakteristik v této oblasti a tudíž nejsou dobře identifikovatelné.
- (ii) v okolí nulového skluzu lze z proudové charakteristiky identifikovat hodnotu magnetizační reaktance X_h .
- (iii) identifikace odporu R_{Fe} z charakteristik je prakticky nemožná z důvodu velmi malé citlivosti proudu a momentu na změnu jeho hodnoty.
- (iv) parametry náhradního zapojení R_1 a $X_{\sigma 2}$ je nutné určovat z charakteristik v okolí záběrového momentu.

9 | Výpočet elektrických parametrů

Mezi základní elektrické parametry stroje patří: elektrický odpor, vlastní a vzájemné indukčnosti. Pro určení jejich velikosti je nutná znalost přesných geometrických a materiálových parametrů stroje a jeho součástí. Tyto informace obvykle nejsou zcela dostupné a proto veškeré vypočtené a následně i nasimulované jevy jsou vždy zatíženy chybou. Z tohoto důvodu, zde uvedené vztahy a způsoby výpočtu jsou pouze orientační, resp. jsou platné pouze pro ideální stroj sestávající se z ideálních prvků.

Základním předpokladem je, že veškeré parametry jsou uvažovány jako soustředěné, tzn. např. je-li vinutí stroje tvořeno vodiči o různých průřezech, tj. každé části odpovídá jiná hodnota odporu, bude celkové vinutí reprezentováno pouze jedním odporem s hodnotou takovou, která je měřitelná, tj. je součtem dílčích odporů.

9.1 Elektrický odpor

Elektrický odpor je charakteristickou vlastní materiálu vyjadřující schopnost vést elektrický proud. Na základě toho je možné definovat stejnosměrný¹ elektrický odpor ve formě Ohmova zákona v integrálním tvaru

$$R = \frac{U}{I}, \quad (9.1.1)$$

nebo jeho zobecněním v diferenciálním tvaru

$$\rho = \frac{E}{J_i}. \quad (9.1.2)$$

Jiná možnost definice vyplývá z materiálových vlastností vodiče

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (9.1.3)$$

kde ρ je rezistivita vodiče, l je délka vodiče a S je průřez vodiče, kterým protéká proud.

Výpočet elektrického odporu vinutí/cívky stroje je nejlépe provádět z jeho geometrického uspořádání, tzn. v trojrozměrném prostoru. Takto vypočtené hodnoty jsou vždy zatíženy chybou a nikdy se změřená hodnota odporu nemůže přesně rovnat hodnotě spočtené. Protože každé vinutí je unikátní a je velmi obtížné ho přesně namodelovat, nebo analyticky popsat, proto se obvykle komplikovaná geometrie vinutí idealizuje takovým geometrickým uspořádáním, pro které je elektrický odpor možné snadno spočítat, např. vinutí je nahrazeno celistvým tělesem, pro které je snadné použít vztah (9.1.3).

¹Pod pojmem stejnosměrný elektrický odpor je myšlen elektrický odpor změřený Ohmovou metodou, tzn. nejsou uvažovány jevy spojené se střídavým proudem, např. jev blízkosti.

Výpočet elektrického odporu na základě (9.1.2), tzn. z rozložení elektromagnetického pole, je založen na určení Jouleových ztrát ve vodiči protékaného elektrickým proudem. Z těchto ztrát se již snadno určí velikost elektrického odporu. Výpočet elektrického odporu na základě průběhu proudu protékajícího vodičem v čase je možné rozdělit na:

- (i) stejnosměrný proud – výpočet stejnosměrného elektrického odporu – magnetostatická analýza.
- (ii) harmonický proud – výpočet elektrického odporu respektující kmitočtovou závislost – harmonická/transientní analýza.

Okamžitá hodnota Jouleových ztrát ve vodiči² protékaného proudem, majícího proudovou hustotu J_i , je obecně daná vztahem

$$p_J(t) = \int_V J_i \cdot E \, dV, \quad (9.1.4)$$

což je možné při uvážení lineárního elektrického prostředí³ a použití (9.1.2) přepsat na

$$p_J(t) = \rho \int_V J_i^2 \, dV. \quad (9.1.5)$$

Přechodem od prostorového modelu ke dvojrozměrnému je možné tento vztah dále přepsat na

$$p_J(t) = \rho l \int_S J_i^2 \, dS. \quad (9.1.6)$$

Celkové Jouleovy ztráty za jednu periodu T jsou dány střední hodnotou

$$P_J = \frac{1}{T} \int_0^T p_J(t) \, dt, \quad (9.1.7)$$

kde v případě harmonické analýzy je třeba respektovat to, že pole je počítáno z absolutních hodnot⁴.

Okamžitou velikost proudu protékajícího plochou vodiče S majícího proudovou hustotu J_i lze vypočítat na základě vztahu

$$i_c = \int_S J_i \cdot dS, \quad (9.1.8)$$

kde v případě, že tuto plochu S tvoří N sériově řazených závitů cívky, potom proud jedním závitkem je

$$i = \frac{i_c}{N} = \frac{1}{N} \int_S J_i \cdot dS. \quad (9.1.9)$$

²Nemusí se doslovně jednat o vodič jako takový, ale též např. o magnetický plech v případě uvažování vířivých proudů.

³Většina v technice používaných materiálů je elektricky lineární, tzn. v celém objemu vodiče je konstantní elektrická rezistivita. Například v případě spoje dvou vodičů s rozličnou rezistivitou je nutné počítat odpor jednotlivých částí vodiče zvlášť a následně je výsledný odpor dán jako jejich součet.

⁴V případě dvojrozměrného výpočtu jsou Jouleovy ztráty

$$P_J(t) = \frac{\rho l}{2} \int_S \tilde{J}_i \cdot \tilde{J}_i^* \, dS,$$

kde symbol $*$ označuje komplexně sdružení. Potom odpor vodiče protékaným proudem o amplitudě I je

$$R = 2 \frac{P_J}{I^2}.$$

Z okamžitých hodnot Jouleových ztrát ve vodiči a okamžité velikosti proudu protékajícího jedním závitem lze určit hodnotu odporu vodiče

$$R = \frac{p_J(t)}{i^2(t)} = \frac{\int_V \mathbf{J}_i \cdot \mathbf{E} dV}{\left(\int_S \mathbf{J}_i \cdot d\mathbf{S}\right)^2} N^2 = \frac{\rho \int_V J_i^2 dV}{\left(\int_S \mathbf{J}_i \cdot d\mathbf{S}\right)^2} N^2. \quad (9.1.10)$$

V případě stejnosměrného proudu protékajícího vodičem, tj. s konstantní proudovou hustotou po celém průřezu vodiče, přechází tento vztah do známého tvaru (9.1.3).

9.1.1 Povrchový jev ve vodiči

Povrchový jev, někdy též označovaný jako skin-efekt, je jev při kterém je střídavý proud vytlačován ze středu vodiče k jeho povrchu. Tímto jevem dochází ke zmenšení efektivního průřezu vodiče, jímž prochází střídavý proud a následkem toho roste jeho elektrický odpor.

Na základě Maxwellových rovnic je možné odvodit, viz např. [23], obecný vztah pro výpočet hloubky vniku elektrického pole (proudu) do vodiče

$$\delta_v = \sqrt{\frac{\rho}{\pi f \mu}} \sqrt{\sqrt{1 + (2\pi f \rho \epsilon)^2} + 2\pi f \rho \epsilon}, \quad (9.1.11)$$

kde za předpokladu, že kmitočet proudu je mnohem menší než $\frac{1}{\rho \epsilon}$, je možné tento vztah zjednodušit na

$$\delta_v = \sqrt{\frac{\rho}{\pi f \mu}}. \quad (9.1.12)$$

Pro měděné a hliníkové vodiče, při kmitočtu 50 Hz, mající rezistivitu $0,0169 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$, resp. $0,0267 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$ a relativní permeabilitu rovnou přibližně jedné vychází hloubka vniku 9,25 mm, resp. 11,63 mm. Je tedy zřejmé, že pro běžné stroje není nutné povrchový jev ve vodičích uvažovat.

9.1.2 Povrchový jev v hluboké rotorové drážce

Pro ideální obdélníkovou rotorovou drážku zobrazenou na Obr. 9.1 b) je v literatuře, viz např. [34], odvozen vztah pro vzájemný poměr stejnosměrného R_{ss} a kmitočtově závislého R_{st} odporu

$$\frac{R_{st}}{R_{ss}} = \xi \frac{\sinh 2\xi + \sin 2\xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\xi}, \quad (9.1.13)$$

kde ξ je redukovaná výška vodiče definovaná

$$\xi = \frac{h}{b_v}, \quad (9.1.14)$$

kde h je výška vodiče v drážce a δ_v je hloubka vniku dána vztahem

$$\delta_v = \sqrt{\frac{\rho}{\pi f \mu_0} \frac{b}{b_v}}, \quad (9.1.15)$$

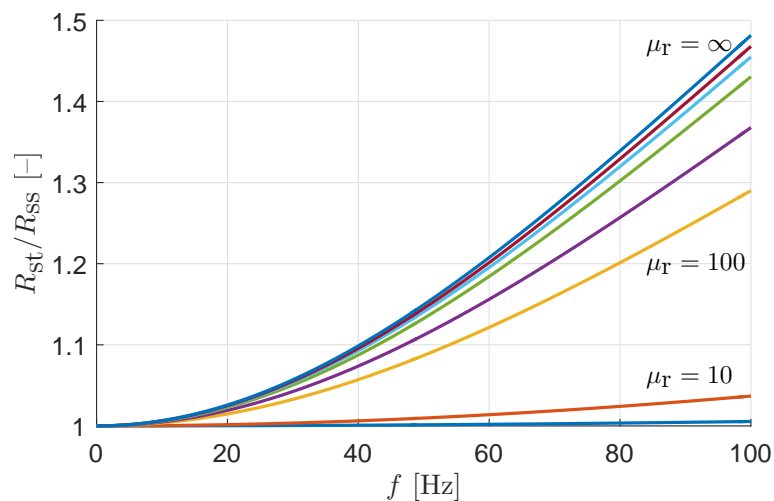
kde b_v je šířka vodiče, b je šířka drážky, f kmitočet procházejícího proudu a ρ je rezistivita vodiče.

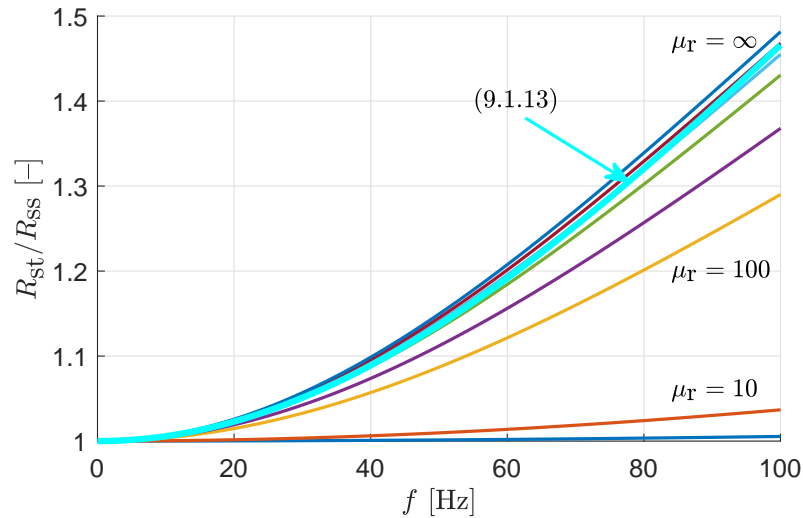


Obr. 9.1: Znáznornění rotorové drážky.

Pro výpočet závislosti odporu vodiče s reálným průřezem rotorové tyče podle Obr. 9.1 a) byla provedena simulace v programu ANSYS Maxwell. Kde na základě rozložení proudové hustoty ve vodiči byl určen odpor jedné rotorové tyče použitím vztahu (9.1.10). Výsledná závislost poměru odporu při jednotlivých frekvencích a stejnosměrného odporu je zobrazena na Obr. 9.2. Simulace byla provedena pro různé velikosti relativní permeability statorového plechu obklopující drážku.

Grafické porovnání povrchového jevu vypočteného na základě teoretického vztahu (9.1.13) a na základě simulace v programu ANSYS Maxwell vypočteného pomocí rovnice (9.1.10) je zobrazeno na Obr. 9.3. Z tohoto je zřejmé, že tuto rovnici je možné používat s dobrou přesností i pro neobdélníkové vodiče v případech, kdy relativní permeabilita zubu kolem drážku je větší jak 1000.

Obr. 9.2: Frekvenční závislost odporu rotorové tyče pro relativní permeabilitu drážky 1, 10, 100, 200, 500, 1000, 2000 a ∞ .



Obr. 9.3: Porovnání výsledků povrchového jevu podle (9.1.13) a (9.1.10).

9.2 Vlastní a vzájemná indukčnost

Indukčnosti cívky je podle [35] možné definovat⁵ následujícími způsoby:

(i) Na základě geometrie cívky

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}_m}, \quad (9.2.1)$$

kde N je počet závitů cívky a \mathcal{R}_m celkový magnetický odpor jimž prochází magnetický tok vyvolaný protékajícím proudem cívkou. Obecně je magnetický odpor definován

$$\mathcal{R}_m = \frac{1}{\mu} \frac{l}{S}, \quad (9.2.2)$$

kde μ je permeabilita materiálu, l a S jsou délka a průřez materiálu, kterým prochází magnetický tok. Na základě geometrické definice indukčnosti lze přesně vypočítat její velikost jen pro omezený počet případů, kdy je možné přesně stanovit cestu magnetického toku.

(ii) Na základě spráženého magnetického toku

$$L = \frac{\Psi}{i} \approx \frac{N\phi}{i}. \quad (9.2.3)$$

(iii) Na základě Faradayova indukčního zákona

$$u = \frac{d}{dt} L i \approx L \frac{di}{dt}. \quad (9.2.4)$$

(iv) Na základě energie uložené v elektromagnetickém poli cívky

$$W_{\text{mag}} = \int i d\Psi \approx \frac{1}{2} L i^2. \quad (9.2.5)$$

Všechny čtyři definice indukčnosti dávají totožný výsledek pro lineární magnetické obvody.

⁵Na pravých částech rovnic je uveden tvar platný pouze pro lineární magnetický obvod.

Nejvhodnější způsob výpočtu indukčnosti cívky je na základě magnetické energie uložené v jejím magnetickém obvodu. Tuto energii je možné definovat vztahem

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} Li^2. \quad (9.2.6)$$

Z takto definovaného pojmu indukčnosti je zřejmé, že indukčnost je čistě soustředěným parametrem, protože její velikost je dána celkovou energií magnetického obvodu a procházejícím proudem. Není tedy nijak možné určit, jak vypadá budicí cívka, nebo celé budicí vinutí.

Na základě [23] lze určit celkovou energii ze znalosti rozložení elektromagnetického pole

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}_i dV, \quad (9.2.7)$$

což je možné přepsat do známějšího tvaru

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV. \quad (9.2.8)$$

Dosazením (9.2.8) do (9.2.6) a s využitím (9.1.9) lze určit vztah pro výpočet indukčnosti cívky, ze znalosti rozložení elektromagnetického pole a proudu cívkou, který toto pole vyvolal, pomocí vztahu

$$L = \frac{\int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV}{\left(\int_S \mathbf{J}_i \cdot d\mathbf{S}\right)^2} N^2. \quad (9.2.9)$$

Tento vztah lze použít i pro dvourozměrné výpočty při použití vztahu $\int_V (\cdot) dV = l \int_S (\cdot) dS$. Z čehož je zřejmé, že i pro výpočet indukčnosti cívky ve 2D platí obdobná omezení jako při výpočtu elektrického odporu.

Je dobré si uvědomit rozdíly mezi výpočtem energie soustavy pomocí vztahů (9.2.7) a (9.2.8). V případě integrálu $\int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}_i dV$ nemá smysl počítat v oblastech, kde je nulová proudová hustota, tj. integruje se pouze přes objem vodičů protékaných proudem⁶. V případě integrálu $\int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV$ je integrovaná oblast celý elektromagnetický systém, tj. vodiče, magnetické jádro i okolní vzduch. Z tohoto je zřejmé, že je výhodnější počítat energie pomocí první definice než druhé z důvodu jednodušší integrace, a tím i možnosti snížení možných numerických chyb než v případě druhého integrálu.

Pro případ výpočtu indukčnosti cívky ve dvojrozměrném prostoru je třeba vztah (9.2.7) chápat

$$L = \frac{\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}_i dS}{\left(\int_S \mathbf{J}_i \cdot d\mathbf{S}\right)^2} l N^2, \quad (9.2.10)$$

kde plocha S přes kterou se integruje ohraničuje všechny závit cívky.

Z předchozího je zřejmé, že na základě magnetické energie je možné vypočítat pouze vlastní indukčnost cívky nikoli vzájemnou indukčnost.

Při výpočtu vzájemné indukčnosti je možné vycházet ze vztahu pro spřažený magnetický tok (9.2.3). Za předpokladu, že všemi závity cívky prochází magnetický tok ϕ , tj. $\Psi = N\phi$, je možné s použitím Stokesovy věty, viz Dodatek B.1.7, získat vztah

$$\Psi = N \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = N \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = N \oint_1 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \quad (9.2.11)$$

⁶Pod pojmem vodiče může být chápán i magnetický plech, pokud jsou v něm uvažovány vířivé proudy.

což je možné přepsat pro případ dvojrozměrné plochy na

$$\Psi = IN (A_{z1} - A_{z2}), \quad (9.2.12)$$

kde A_z je střední hodnota magnetického vektorového potenciálu pro danou cívku

$$A_z = \frac{\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\int_S dS}. \quad (9.2.13)$$

Z čehož je snadné vyjádřit vztah pro výpočet indukčnosti

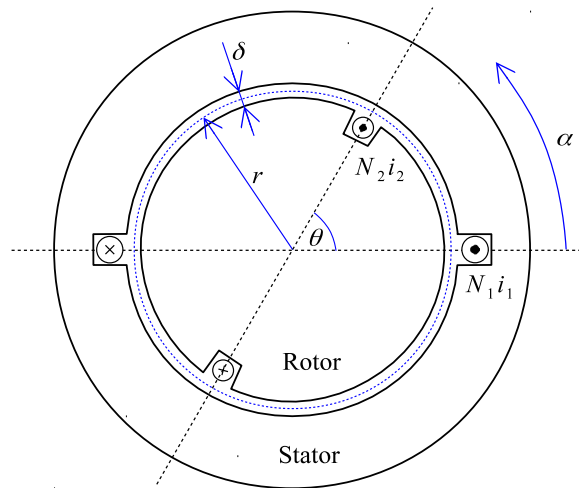
$$L = \left(\frac{\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\int_S \mathbf{J}_i \cdot d\mathbf{S}} \frac{IN}{\int_S dS} \right)^+ - \left(\frac{\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\int_S \mathbf{J}_i \cdot d\mathbf{S}} \frac{IN}{\int_S dS} \right)^-, \quad (9.2.14)$$

kde integrace probíhá pro horní index + přes plochu obklopující vodič s kladnou proudovou hustotu a index – se zápornou. V případě symetrického vinutí je postačující počítat tok pouze pro jednu zvolenou polaritu, protože obě musí být totožné. Při výpočtu vzájemné indukčnosti pomocí vztahu (9.2.14) je $\int_S \mathbf{J}_i \cdot d\mathbf{S}$ proud budícího (prvního) vinutí a $\frac{\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\int_S dS}$ tok druhého vinutí.

V následujících podkapitolách je na jednoduchých příkladech ukázána aplikace předešlé teorie.

9.2.1 Výpočet vlastní a vzájemné indukčnosti elementárního dvoupólového stroje

Pro příklad výpočtu indukčností podle výše uvedených vztahů je uvažován elementární dvoupólový stejnosměrný stroj, viz Obr. 9.4. Vinutí statoru a rotoru mají každé N_1 , resp. N_2 závitů.



Obr. 9.4: Znázornění elementárního dvoupólového stroje.

Analytický výpočet je proveden za předpokladu, že relativní permeabilita statoru i rotoru jde limitně k nekonečnu. A pro vzájemné natočení rotoru a statoru platí, že $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$. Potom na základě Ampérova zákona, tj. vztahu (B.2.2), lze snadno určit průběh radiální složky

magnetické indukce podél vzduchové mezery

$$\frac{B}{\mu_0} = \begin{cases} \frac{N_1 i_1 - N_2 i_2}{\delta} & 0 \leq \alpha < \theta, \\ \frac{N_1 i_1 + N_2 i_2}{\delta} & \theta \leq \alpha < \pi, \\ -\frac{N_1 i_1 - N_2 i_2}{\delta} & \pi \leq \alpha < \pi + \theta, \\ -\frac{N_1 i_1 + N_2 i_2}{\delta} & \pi + \theta \leq \alpha < 2\pi. \end{cases} \quad (9.2.15)$$

Fyzikální realizovatelnost zkonstruované funkce lze ověřit přímým použitím vztahu (B.2.6).

Spřažený magnetický tok statorového a rotorového vinutí je

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= N_1 l r \int_0^{\pi} B \, d\alpha = L_1 i_1 + M_{12} i_2, \\ \Psi_2 &= N_2 l r \int_{\theta}^{\pi+\theta} B \, d\alpha = M_{12} i_1 + L_2 i_2, \end{aligned} \quad (9.2.16)$$

kde vlastní a vzájemné indukčnosti jsou definovány následovně

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\mu_0 \pi l r}{\delta} N_1^2, \\ L_2 &= \frac{\mu_0 \pi l r}{\delta} N_2^2, \\ M_{12} &= \frac{\mu_0 \pi l r}{\delta} N_1 N_2 \left(1 - \frac{2\theta}{\pi}\right). \end{aligned} \quad (9.2.17)$$

Je zřejmé, že vzájemná indukčnost je přímo úměrná vzájemnému natočení rotorového a statorového vinutí. V případě potřeby harmonické závislosti je nutnou podmínkou, aby magnetická indukce ve vzduchové mezeře stroje vytvořená vinutím statoru, nebo rotoru měla alespoň lichoběžníkový průběh, v ideálním případě čistě harmonický.

Z rovnic (9.2.17) je možné určit činitel vazby⁷ jako

$$\begin{aligned} k &= \frac{M_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}} \\ &= 1 - \frac{2\theta}{\pi}. \end{aligned} \quad (9.2.18)$$

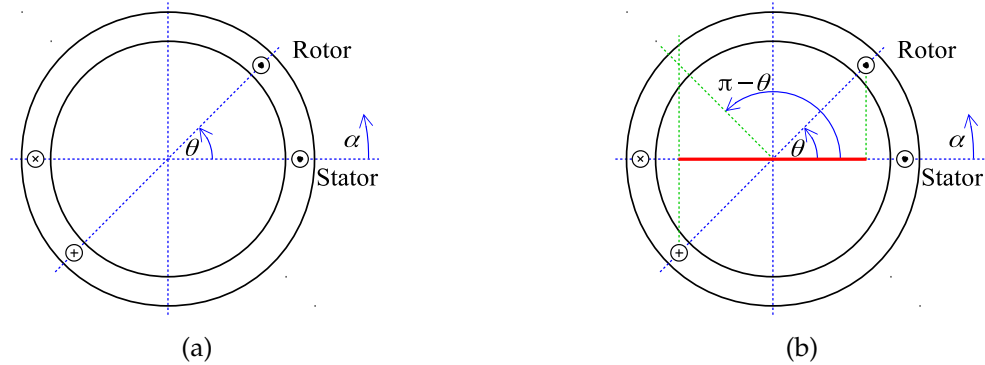
9.2.1.1 Výpočet vazby dvou vinutí – geometrický přístup

V předešlé kapitole je ukázáno, že činitel vazby mezi dvěma elementárními cívkami je dán vztahem $1 - \frac{2\theta}{\pi}$. V případě třífázového elementárního stroje je úhel θ roven $\frac{2}{3}\pi$ a vazba mezi cívkami je $-\frac{1}{3}$. Vazba je záporná což plyne z toho, že magnetické toky vytvořené oběma vinutími působí proti sobě. V této kapitole je ukázána méně exaktní metoda určení vazby dvou vinutí oproti předchozí kapitole.

Obdobně jako v předešlé kapitole je uvažováno elementární vinutí, které je schematicky zobrazeno na Obr. 9.5 a). Zjednodušující podmínky jsou obdobné jako v předchozí kapitole. Je zřejmé, že statorové vinutí vytvoří ve vzduchové mezeře stroje obdélníkové magnetické pole, tj. i tok. Proto musí platit, že velikost magnetického toku elementárního pólu první cívky je úměrná $\phi_1 \propto \int_0^{\pi} B(\alpha) \, d\alpha \propto \pi B$. Část tohoto magnetického toku prochází druhou cívkou a tuto

⁷Klasická definice činitele vazby je uváděna ve tvaru $|M| = k\sqrt{L_1 L_2}$ tak, aby jeho hodnota byla v rozsahu $\langle 0, 1 \rangle$.

část je možné vypočítat jako průmět plochy druhé cívky do plochy cívky první, viz Obr. 9.5 b), tj. jde o skalární součin dvou funkcí.



Obr. 9.5: K výpočtu činitele vazby elementárního dvupólového stroje.

Lineární závislost mezi magnetickým tokem první cívky a magnetickou indukcí je možné definovat vztahem

$$\phi_1 \propto \begin{cases} B_1 & 0 \leq \alpha < \pi, \\ -B_1 & \pi \leq \alpha < 2\pi. \end{cases} \quad (9.2.19)$$

Závislost mezi magnetickým tokem druhé cívky a magnetickou indukcí pro úhel $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$ je dán vztahem

$$\phi_2 \propto \begin{cases} -B_2 & 0 \leq \alpha < \theta, \\ B_2 & \theta \leq \alpha < \theta + \pi, \\ -B_2 & \theta + \pi \leq \alpha < 2\pi. \end{cases} \quad (9.2.20)$$

Na základě předchozí diskuze je možné činitel vazby vypočítat pomocí vztahu

$$k = \frac{\int_0^{2\pi} \phi_1 \phi_2 d\alpha}{\int_0^{2\pi} \phi_1^2 d\alpha}. \quad (9.2.21)$$

Uvedený vztah je též možné odvodit na základě vztahu (D.3.6) z dodatku D.3.

Za předpokladu, že ve vztazích (9.2.19) a (9.2.20) jsou magnetické indukce $B_1 = B_2 = 1 \text{ T}$, lze snadno přímým výpočtem určit činitel vazby těchto dvou vinutí $k = 1 - \frac{2\theta}{\pi}$, což je totožný výraz jako v rovnici (9.2.17) z předchozí kapitoly.

Výše uvedené vinutí není v praxi zcela běžné, proto je zde vypočítán činitel vazby pro následující dvě uspořádání vinutí:

- (i) První vinutí je harmonicky rozloženo podél vzduchové mezery a druhé vinutí je tvořeno jediným závitem pootočeným o úhel θ

$$\begin{aligned} \phi_1 &\propto B_1 \sin \alpha, \\ \phi_2 &\propto \begin{cases} -B_2 & 0 \leq \alpha < \theta, \\ B_2 & \theta \leq \alpha < \theta + \pi, \\ -B_2 & \theta + \pi \leq \alpha < 2\pi. \end{cases} \end{aligned} \quad (9.2.22)$$

Činitel vazba vychází $k = \frac{4}{\pi} \cos \theta$, což v případě úhlu $\frac{2\pi}{3}$ je $-\frac{2}{\pi} \approx -0,637$.

- (ii) První i druhé vinutí je harmonicky rozložené podél vzduchové mezery a vzájemně jsou pootočena o úhel θ

$$\begin{aligned}\phi_1 &\propto B_1 \sin \alpha, \\ \phi_2 &\propto B_2 \sin (\alpha - \theta).\end{aligned}\quad (9.2.23)$$

Činitel vazby vychází $k = \frac{\pi}{4} \cos \theta$, což v případě úhlu $\frac{2\pi}{3}$ je $-\frac{1}{2}$.

9.2.2 Vlastní indukčnost statorového vinutí a vliv drážkování

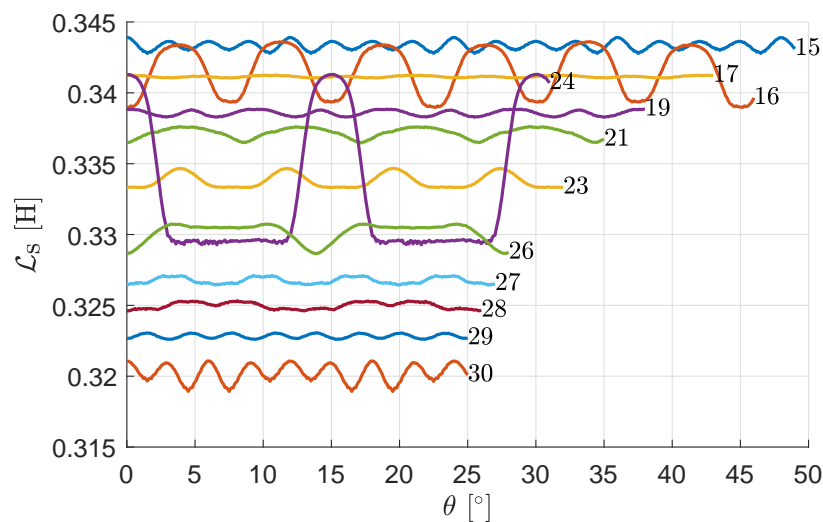
Jestliže matematické modely asynchronních strojů jsou odvozeny za předpokladu, že není uvažován vliv drážkování statoru ani rotoru, pak v této kapitole jsou provedeny simulace v programu ANSYS Maxwell za účelem výpočtu indukčností stroje právě při jeho zohlednění. Je zde ukázáno, že pokud je zvolená vhodná kombinace počtu statorových a rotorových drážek, potom jednotlivé indukčnosti jsou téměř konstantní a nezávislé na pootočení rotoru vůči statoru.

Simulace v programu ANSYS Maxwell jsou provedeny za následujících podmínek:

- (i) Stator i rotor je z lineárních magnetických plechů o relativní permeabilitě 1500.
- (ii) Při změně počtu rotorových drážek zůstává zachován jejich rozměr.
- (iii) Vlastní a vzájemné indukčnosti jsou počítány na základě vztahu (9.2.14).

Pro jednoduchost je uvažován rotor i stator bez zkosených drážek, potom na základě [27] pro stator mající 24 drážek je vhodné volit rotor s 15, 16, 17, 19, nebo 32 drážkami s ohledem na vyšší harmonické a hluk. Pro tyto a další kombinace, kromě 32 drážek⁸, jsou vypočítány vlastní a vzájemné indukčnosti statorového vinutí.

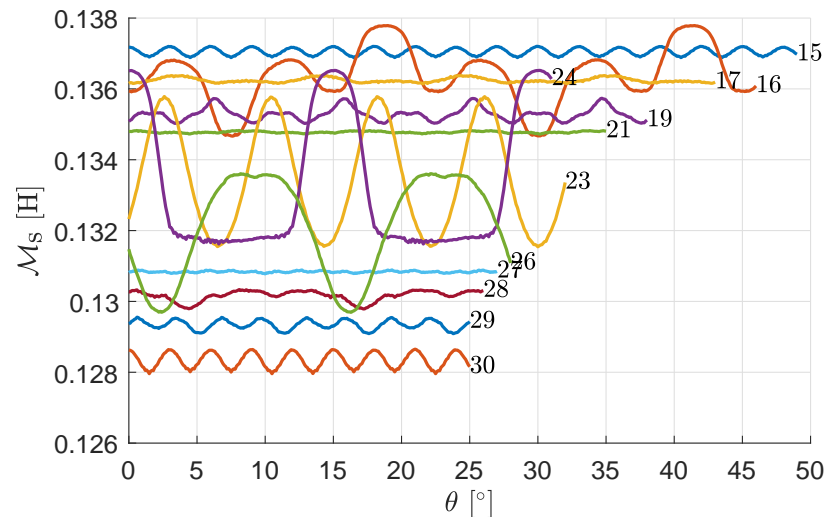
Vlastní indukčnost jedné fáze statoru je zobrazena na Obr. 9.6. Kde z pohledu změny indukčnosti na natočení rotoru nejlépe vychází 17 rotorových drážek, tj. i tyčí.



Obr. 9.6: Závislost vlastní indukčnosti jedné fáze na natočení rotoru.

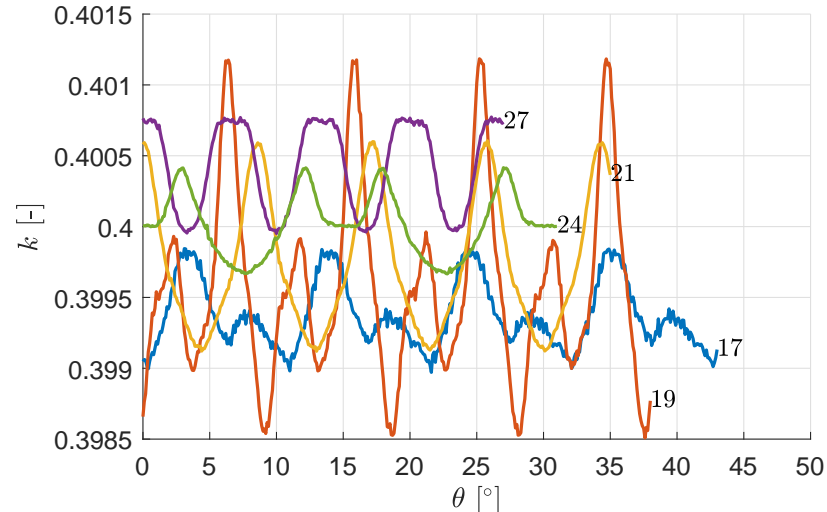
Vzájemná indukčnost mezi dvěma statorovými fázemi je zobrazena na Obr. 9.7. Kde z pohledu změny indukčnosti na natočení rotoru nejlépe vychází 21 a 27 rotorových drážek.

⁸32 rotorových drážek nebylo možné použít z geometrických důvodů, viz bod (ii).



Obr. 9.7: Závislost vzájemné indukčnosti dvou statorových fází natočení rotoru.

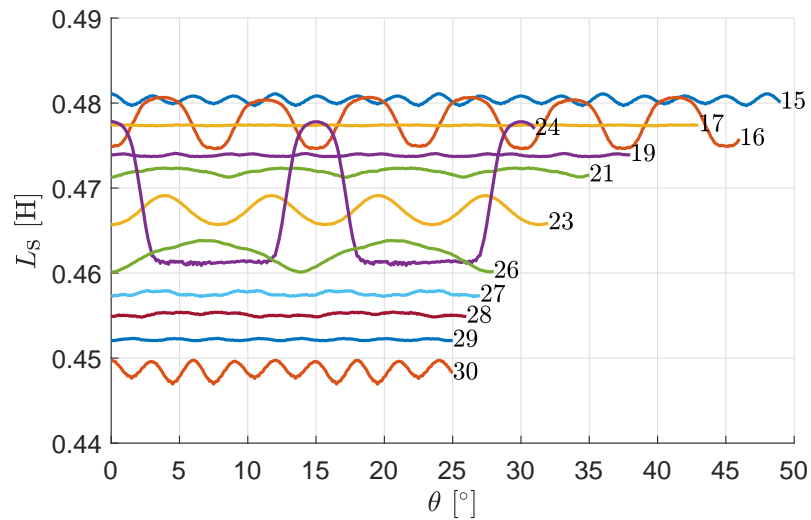
Na následujícím Obr. 9.8 je zobrazena závislost absolutní hodnoty činitele vazby mezi dvěma statorovými fázemi. Je zřejmé, že pro všechny uvažované kombinace vychází činitel vazby přibližně 0,4, což je v nesouladu s běžně uvažovanou hodnotou $\frac{1}{2}$. Tento rozdíl není způsoben drážkovaním rotoru, ale diskretním uložením vinutí do statorových drážek, což lze snadno ukázat na příkladu bez-drážkového rotoru, kdy vlastní indukčnost vychází 364,3 mH, vzájemná indukčnost dvou fází 145,2 mH, čemuž odpovídá činitel vazby 0,399.



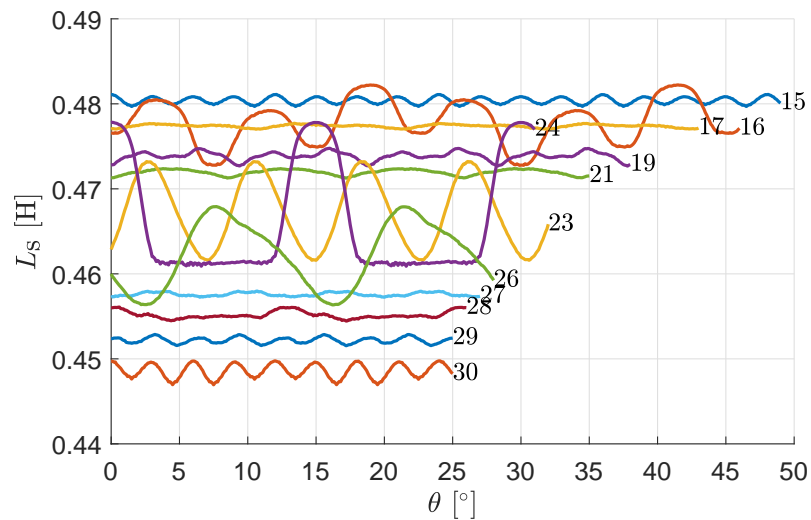
Obr. 9.8: Závislost činitele vazby na natočení rotoru.

9.2.2.1 Celková indukčnost jedné fáze

Vlastní indukčnost jedné fáze statoru je zobrazena na Obr. 9.9 a na Obr. 9.10 pro dva různé časové okamžiky, přesněji v případě kdy uvažovanou fází protéká maximální proud a pro proud poloviční. Kde z pohledu změny indukčnosti na natočení rotoru nejlépe vychází 17 rotorových drážek.



Obr. 9.9: Celková indukčnost jedné fáze při maximálním proudu.



Obr. 9.10: Celková indukčnost jedné fáze při polovičním proudu.

Z porovnání průběhů na Obr. 9.6 a Obr. 9.9 je zřejmé, že přibližně platí dříve odvozený vztah (3.1.36) pro ekvivalentní statorové indukčnosti. Odchyly jsou převážně způsobeny rozptylovými toky, které není snadné přesně zohlednit.

10 | Identifikace parametrů asynchronních strojů

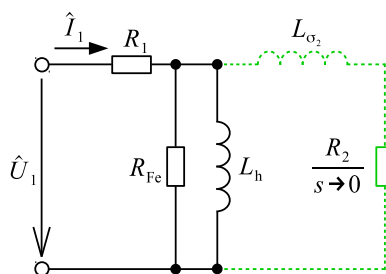
10.1 Zkouška naprázdno a nakrátko

Jedná se o nejobvyklejší způsob určení parametrů náhradního zapojení asynchronních strojů. Tyto zkoušky jsou popsány v normách ČSN 35 0010, ČSN 35 0301 a IEEE standardu 112-2004. Zde uvedené modifikace zkoušky naprázdno a nakrátko se předchozích norem striktně nedrží a to už jenom z důvodu, že identifikace probíhá pro náhradní zapojení ve tvaru Γ -článku.

Principem identifikace je porovnání změřené a vypočtené vstupní impedance náhradního zapojení asynchronního stroje, kdy jediný rozdíl mezi měřením naprázdno a nakrátko prakticky spočívá v tom, jakým způsobem je uvažován tvar náhradního zapojení. Během těchto zkoušek se obvykle měří pouze elektrické veličiny, tj. statorové napětí, proud a fázový posun mezi napětím a proudem.

10.1.1 Zkouška naprázdno

Při zkoušce naprázdno se rotor stroje volně otáčí, tj. $s \approx 0$, v ideálním případě je stroj roztačen na synchronní rychlost externím pohonem, např. pomocí dynamometru, potom je skluz nulový. Náhradní zapojení asynchronního stroje je v tomto případě možné zjednodušit podle Obr. 10.1, tj. paralelní větev s $L_{\sigma 2}$ a R_2 není do náhradního zapojení zahrnuta. V případě, že rychlost rotoru není synchronní, tj. otáčky jsou nižší než synchronní vlivem mechanických ztrát, potom vypočtené parametry jsou zatíženy chybou, viz Tab. 10.1 a Tab. 10.2.



Obr. 10.1: Náhradní zapojení při zkoušce naprázdno.

Při zkoušce naprázdno jsou nastaveny a měřeny následující veličiny:

- (i) $U_{1f,0}$ fázová hodnota napětí naprázdno – hodnota je nastavena.
- (ii) $I_{1f,0}$ fázová hodnota proudu naprázdno.

- (iii) $\varphi_{1,0}$ fázový posun¹ mezi napětím a proudem.
 (iv) R_1 velikost odporu jedné fáze statorového vinutí.

Vstupní impedance jedné fáze podle Obr. 10.1 má velikost

$$\tilde{Z}_{1,0} = R_1 + \frac{R_{Fe} X_h^2}{R_{Fe}^2 + X_h^2} + j \frac{R_{Fe}^2 X_h}{R_{Fe}^2 + X_h^2}. \quad (10.1.1)$$

Na druhou stranu z měřených veličin je možné vypočítat vstupní impedanci

$$\tilde{Z}_{1,0} = \underbrace{\frac{U_{1f,0}}{I_{1f,0}} \cos \varphi_{1,0}}_{Z_{1re,0}} + j \underbrace{\frac{U_{1f,0}}{I_{1f,0}} \sin \varphi_{1,0}}_{Z_{1im,0}}. \quad (10.1.2)$$

Porovnáním (10.1.1) a (10.1.2) lze určit velikost odporu R_{Fe} a reaktance X_h

$$\begin{aligned} R_{Fe} &= Z_{1re,0} + \frac{Z_{1im,0}^2}{Z_{1re,0} - R_1} - R_1 \\ X_h &= Z_{1im,0} + \frac{(Z_{1re,0} - R_1)^2}{Z_{1im,0}}. \end{aligned} \quad (10.1.3)$$

Tento vztah lze zjednodušit zanedbáním statorového odporu R_1 tak, jak se to při identifikaci parametrů ze zkoušky naprázdno běžně děje

$$\begin{aligned} R_{Fe} &= Z_{1re,0} + \frac{Z_{1im,0}^2}{Z_{1re,0}} = \frac{U_{1f,0}}{I_{1f,0} \cos \varphi_{1,0}}, \\ X_h &= Z_{1im,0} + \frac{Z_{1re,0}^2}{Z_{1im,0}} = \frac{U_{1f,0}}{I_{1f,0} \sin \varphi_{1,0}}. \end{aligned} \quad (10.1.4)$$

V Tab. 10.1 je provedeno porovnání vypočtených hodnot L_h a R_{Fe} na základě vztahů (10.1.3) a (10.1.4).

Tab. 10.1: Příklad hodnot parametrů při zkoušce naprázdno.

Parametr	$U_{1f,0} = 230 \text{ V}, I_{1f,0} = 1,90 \text{ A}$ $\varphi_{1,0} = 81,6^\circ$ a $R_1 = 2,91 \Omega$	
	s R_1	bez R_1
L_h [H]	0,387	0,390
R_{Fe} [Ω]	985,484	828,656

V Tab. 10.2 jsou uvedeny vypočtené parametry příčné větve Γ -článku v případě, že rychlost je $2995 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1}$ a skluz je $s = 0,01667$. V tomto případě je stále s dostatečnou přesností možné identifikovat hlavní indukčnost, ale totéž se nedá říci o odporu R_{Fe} .

¹Místo fázového posunu je běžnější měřit celkový příkon, pro který platí

$$P_{1,0} = 3 U_{1f,0} I_{1f,0} \cos \varphi_{1,0}.$$

Z tohoto lze snadno vypočítat fázový posun

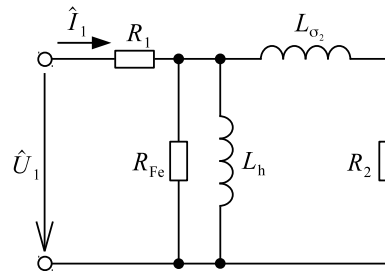
$$\varphi_{1,0} = \arccos \frac{P_{1,0}}{3 U_{1f,0} I_{1f,0}}.$$

Tab. 10.2: Příklad hodnot parametrů při zkoušce naprázdno s nenulovým skluzem.

Parametr	$U_{1f,0} = 230 \text{ V}, I_{1f,0} = 1,94 \text{ A}$ $\varphi_{1,0} = 76,7^\circ$ a $R_1 = 2,91 \Omega$	
	s R_1	bez R_1
L_h [H]	0,384	0,388
R_{Fe} [Ω]	570,738	515,352

10.1.2 Zkouška nakrátko

Při zkoušce nakrátko je rotor zabrzděn, tj. $s = 1$, a je napájen takovým napětím, aby statovým vinutím tekla jmenovitý proud. Náhradní zapojení asynchronního stroje má tvar podle Obr. 10.2.



Obr. 10.2: Náhradní zapojení při zkoušce nakrátko.

Při zkoušce nakrátko jsou nastaveny a měřeny následující veličiny:

- (i) $U_{1f,k}$ fázová hodnota napětí nakrátko.
- (ii) $I_{1f,k}$ fázová hodnota proudu nakrátko – hodnota je nastavena.
- (iii) $\varphi_{1,k}$ fázový posun mezi napětím a proudem.

Vstupní impedance jedné fáze podle Obr. 10.2 má velikost

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{1,k} = & R_1 + \frac{R_{Fe} X_h^2 [R_2 (R_2 + R_{Fe}) + X_{\sigma 2}^2]}{R_2^2 (R_{Fe}^2 + X_h^2) + 2R_2 R_{Fe} X_h^2 + R_{Fe}^2 (X_h + X_{\sigma 2})^2 + X_h^2 X_{\sigma 2}^2} \\ & + j \frac{R_{Fe}^2 X_h [R_2^2 + X_{\sigma 2} (X_h + X_{\sigma 2})]}{R_2^2 (R_{Fe}^2 + X_h^2) + 2R_2 R_{Fe} X_h^2 + R_{Fe}^2 (X_h + X_{\sigma 2})^2 + X_h^2 X_{\sigma 2}^2}. \end{aligned} \quad (10.1.5)$$

Na druhou stranu z měřených veličin je možné vypočítat vstupní impedanci nakrátko

$$\tilde{Z}_{1,k} = \underbrace{\frac{U_{1f,k}}{I_{1f,k}} \cos \varphi_{1,k}}_{Z_{1re,k}} + j \underbrace{\frac{U_{1f,k}}{I_{1f,k}} \sin \varphi_{1,k}}_{Z_{1im,k}}. \quad (10.1.6)$$

Porovnáním (10.1.5) a (10.1.6) lze určit velikost odporu R_2 a reaktance $X_{\sigma 2}$

$$\begin{aligned}
 R_2 = & \left\{ R_{Fe} X_h^2 (2R_1 Z_{1re,k} + R_{Fe} Z_{1re,k}) \right. \\
 & \left. - R_{Fe} X_h^2 (Z_{1im,k}^2 + Z_{1re,k}^2 + R_1^2 + R_1 R_{Fe}) \right\} / \\
 & \left\{ R_1^2 R_{Fe}^2 + R_1^2 X_h^2 - 2R_1 R_{Fe}^2 Z_{1re,k} + 2R_1 R_{Fe} X_h^2 - 2R_1 X_h^2 Z_{1re,k} \right. \\
 & + R_{Fe}^2 X_h^2 - 2R_{Fe}^2 X_h Z_{1im,k} + R_{Fe}^2 Z_{1im,k}^2 + R_{Fe}^2 Z_{1re,k}^2 - 2R_{Fe} X_h^2 Z_{1re,k} \\
 & \left. + X_h^2 Z_{1im,k}^2 + X_h^2 Z_{1re,k}^2 \right\}, \quad (10.1.7) \\
 X_{\sigma 2} = & \left\{ R_{Fe}^2 X_h [Z_{1im,k} (X_h - Z_{1im,k}) - (R_1 - Z_{1re,k})^2] \right\} / \\
 & \left\{ R_1^2 R_{Fe}^2 + R_1^2 X_h^2 - 2R_1 R_{Fe}^2 Z_{1re,k} + 2R_1 R_{Fe} X_h^2 - 2R_1 X_h^2 Z_{1re,k} \right. \\
 & + R_{Fe}^2 X_h^2 - 2R_{Fe}^2 X_h Z_{1im,k} + R_{Fe}^2 Z_{1im,k}^2 + R_{Fe}^2 Z_{1re,k}^2 - 2R_{Fe} X_h^2 Z_{1re,k} \\
 & \left. + X_h^2 Z_{1im,k}^2 + X_h^2 Z_{1re,k}^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

Zanedbáním odporu R_{Fe} a magnetizační indukčnosti L_h lze tyto vztahy zjednodušit na

$$\begin{aligned}
 R_2 &= Z_{1re,k} - R_1, \\
 X_{\sigma 2} &= Z_{1im,k}.
 \end{aligned} \quad (10.1.8)$$

V Tab. 10.3 je provedeno porovnání vypočtených hodnot $L_{\sigma 2}$ a R_2 na základě vztahů (10.1.7) a (10.1.8).

Tab. 10.3: Příklad hodnot parametrů při zkoušce nakrátko.

Parametr	$U_{1f,k} = 230 \text{ V}, I_{1f,k} = 30,4 \text{ A a } \varphi_{1,0} = 48,9^\circ$ $R_1 = 2,91 \Omega, R_{Fe} = 982 \Omega \text{ a } L_h = 0,387 \text{ H}$	
	s R_{Fe} a L_h	bez R_{Fe} a L_h
$L_{\sigma 2}$ [H]	0,019	0,019
R_2 [Ω]	2,240	2,063

10.1.2.1 Zkouška při jmenovitém zatížení

Určení rozptylové reaktance a rotorového odporu je na místo zkoušky nakrátko též možné provést z měřených hodnot při jmenovitém zatížení². Výhodou tohoto způsobu identifikace je, že je možné ji provádět při jmenovitých podmínkách bez nutnosti zablokovat rotor. Nevýhoda může spočívat v nutnosti měření otáček stroje.

Při zkoušce jmenovitým zatížením jsou nastaveny a měřeny následující veličiny:

- (i) $U_{1f,n}$ fázová hodnota jmenovitého napětí – hodnota je nastavena.
- (ii) $I_{1f,n}$ fázová hodnota jmenovitého proudu.

²Prakticky není nutné, aby toto zatížení bylo právě jmenovité. Výhodou měření v okolí jmenovitého zatížení oproti zkoušce nakrátko je, že identifikované parametry mnohem lépe odpovídají parametrům stroje během jeho chodu.

(iii) $\varphi_{1,n}$ fázový posun mezi napětím a proudem.

Vstupní impedance jedné fáze podle Obr. 10.2 má velikost

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{1,n} = & R_1 + \frac{R_{Fe} X_h^2 (R_2^2 + R_2 R_{Fe} s + s^2 X_{\sigma 2})}{2R_2 R_{Fe} X_h^2 s + R_2^2 (R_{Fe}^2 + X_h^2) + [X_h^2 X_{\sigma 2}^2 + R_{Fe}^2 (X_h + X_{\sigma 2})^2] s^2} \\ & + j \frac{R_{Fe}^2 X_h [R_2^2 + s^2 X_{\sigma 2} (X_h + X_{\sigma 2})]}{2R_2 R_{Fe} X_h^2 s + R_2^2 (R_{Fe}^2 + X_h^2) + [X_h^2 X_{\sigma 2}^2 + R_{Fe}^2 (X_h + X_{\sigma 2})^2] s^2}. \end{aligned} \quad (10.1.9)$$

Na druhou stranu z měřených veličin je možné vypočítat vstupní jmenovitou impedanci

$$\tilde{Z}_{1,n} = \underbrace{\frac{U_{1f,n}}{I_{1f,n}} \cos \varphi_{1,n}}_{Z_{1re,n}} + j \underbrace{\frac{U_{1f,n}}{I_{1f,n}} \sin \varphi_{1,n}}_{Z_{1im,n}}. \quad (10.1.10)$$

Porovnáním (10.1.9) a (10.1.10) lze určit velikost odporu R_2 a reaktance $X_{\sigma 2}$

$$\begin{aligned} R_2 = & \frac{- [Z_{1im,n}^2 + (Z_{1re,n} - R_1)(Z_{1re,n} - R_1 - R_{Fe})] R_{Fe} s X_h^2}{[Z_{1im,n}^2 + (Z_{1re,n} - R_1)^2] R_{Fe}^2 - 2Z_{1im,n} R_{Fe}^2 X_h + [Z_{1im,n}^2 + (Z_{1re,n} - R_1 - R_{Fe})^2] X_h^2}, \\ X_{\sigma 2} = & \frac{R_{Fe}^2 X_h [Z_{1im,n} (X_h - Z_{1im,n}) - (Z_{1re,n} - R_1)^2]}{[Z_{1im,n}^2 + (Z_{1re,n} - R_1)^2] R_{Fe}^2 - 2Z_{1im,n} R_{Fe}^2 X_h + [Z_{1im,n}^2 + (Z_{1re,n} - R_1 - R_{Fe})^2] X_h^2}. \end{aligned} \quad (10.1.11)$$

Z těchto rovnic je zřejmé, že rotorový odpor je velmi nesnadné určit v blízkosti stavu naprázdno, toto mimo jiné vyplývá i z jeho závislosti na skluzu $\frac{R_2}{s}$.

Zanedbáním odporu R_{Fe} a magnetizační indukčnosti L_h lze tyto vztahy zjednodušit na

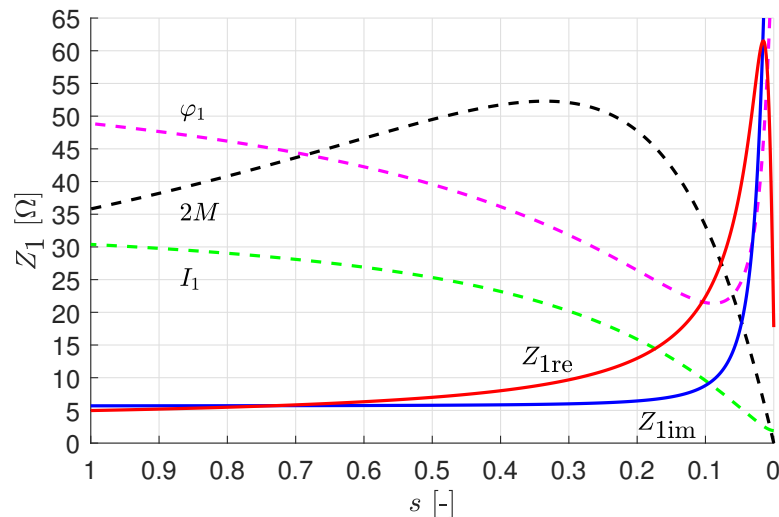
$$\begin{aligned} R_2 &= (Z_{1re,n} - R_1) s, \\ X_{\sigma 2} &= Z_{1im,n}. \end{aligned} \quad (10.1.12)$$

Je zřejmé, že dosazením za skluz jedničku se tyto vztahy transformují do již dříve uvedených rovnic (10.1.8) platných pro zkoušku nakrátko.

Tab. 10.4: Příklad hodnot parametrů při zkoušce jmenovitým zatížením.

Parametr	$U_{1f,n} = 230 \text{ V}, I_{1f,n} = 5,1 \text{ A a } \varphi_{1,0} = 25,3^\circ$ $R_1 = 2,91 \Omega, R_{Fe} = 981 \Omega \text{ a } L_h = 0,387 \text{ H}$	
	s R_{Fe} a L_h	bez R_{Fe} a L_h
$L_{\sigma 2}$ [H]	0,019	0,061
R_2 [Ω]	2,221	1,704

V Tab. 10.4 jsou uvedeny vypočtené hodnoty $L_{\sigma 2}$ a R_2 na základě vztahů (10.1.11) a (10.1.12) v případě skluzu $s = 0,045$. Je zřejmé, že pro velmi hrubý odhad velikosti rotorového odporu je možné využít zjednodušeného vztahu (10.1.12), v případě rozptylové indukčnosti toto neplatí. V případě měření kolem skluzu zvratu nebo vyššího jsou i tyto vztahy použitelné, protože rozptylová indukčnost je přímo dána imaginární částí měřené impedance. Při takto vysokých skluzech je imaginární část impedance v podstatě dána výhradně rozptylovou indukčností stroje. Tato situace je shrnuta na Obr. 10.3, kde je zobrazen průběh reálné a imaginární části impedance stroje pro různé pracovní stavy.



Obr. 10.3: Zobrazení impedance asynchronního stroje pro různé zatížení.

10.2 Identifikace s konstantními parametry

Hlavním nedostatkem předchozích způsobů identifikace je, že jednotlivé parametry jsou identifikovány pouze z elektrických měření. Nejlépe je možné tento problém ukázat u náhradního zapojení ve tvaru T-článku, který se skládá ze šesti neznámých parametrů R_1 , R_2 , R_{Fe} , X_h , $X_{\sigma 1}$ a $X_{\sigma 2}$. V kapitole 7.1.2 je ukázáno, že těchto šest parametrů není možné jednoznačně identifikovat. Prakticky to tedy znamená, že pokud se tyto parametry identifikují pouze na základě elektrických veličin, mohou nastat situace, kdy průběh statorového proudu je pro identifikované parametry v naprosté shodě s měřeným průběhem proudu, ale vypočtené a změřené momentové charakteristiky si absolutně neodpovídají.

V případě Γ -článku je náhradní zapojení popsáno pomocí pěti parametrů, které je možné jednoznačně identifikovat pouze na základě elektrických měření. Ale obdobně jako v případě T-článku je vhodnější provádět identifikaci nejenom z elektrických, ale i z mechanických veličin. Protože představené nahradí zapojení a i modely jsou pouze první aproximací popisu dějů v asynchronním stroji. Proto je vhodné identifikovat parametry z vícero charakteristik tak, aby se vypočtené hodnoty co nejvíce blížily hodnotám měřeným.

Prakticky je možné identifikaci provádět z porovnání jak statických charakteristik, tak i z charakteristik dynamických. Výhodou porovnání identifikace pomocí statických modelů oproti dynamickým modelům spočívá v rychlosti identifikace, protože není nutné řešit diferenciální rovnice dynamického modelu a statický model nemůže divergovat³. Na druhou stranu, ze statických modelů není obvykle možné identifikovat dynamické části modelu, např. moment setrvačnosti.

Princip identifikace je zde ukázán v případě identifikace pomocí momentové a proudové charakteristiky. V Dodatku J.1 je ukázáno, že identifikace pouze pomocí momentové charakteristiky je prakticky nerealizovatelná, protože tuto momentovou charakteristiku je možné vyjádřit

³V případě dynamických modelů je třeba vždy ošetřit rozsah a fyzikální realizovatelnost identifikovaných parametrů, např. nesmí nastat situace, kdy $M_{sr} > L_s$ a zároveň $M_{sr} > L_r$. Takovéto situace obvykle vedou k velmi vysokému nárůstu potřebného času na výpočet modelu a v nejhorším případě k divergenci celého modelu a následně ke zhroucení celého identifikačního algoritmu.

pouze pomocí tří parametrů a skluzu, tj. ani parametry Γ -článku není možné určit jednoznačně. V Dodatku J.2 jsou uvedeny vztahy použitelné pro identifikaci na základě frekvenčních charakteristik.

Pro zjednodušení dalšího zápisu je vhodné jednotlivé změřené hodnoty proudové a momentové charakteristiky zapsat ve formě vektorů

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= [s_1, s_2, \dots, s_{N_{\text{mer}}}]^T, \\ \mathbf{I}_1 &= [I_{1,1}, I_{1,2}, \dots, I_{1,N_{\text{mer}}}]^T, \\ \mathbf{M} &= [M_1, M_2, \dots, M_{N_{\text{mer}}}]^T, \end{aligned} \quad (10.2.1)$$

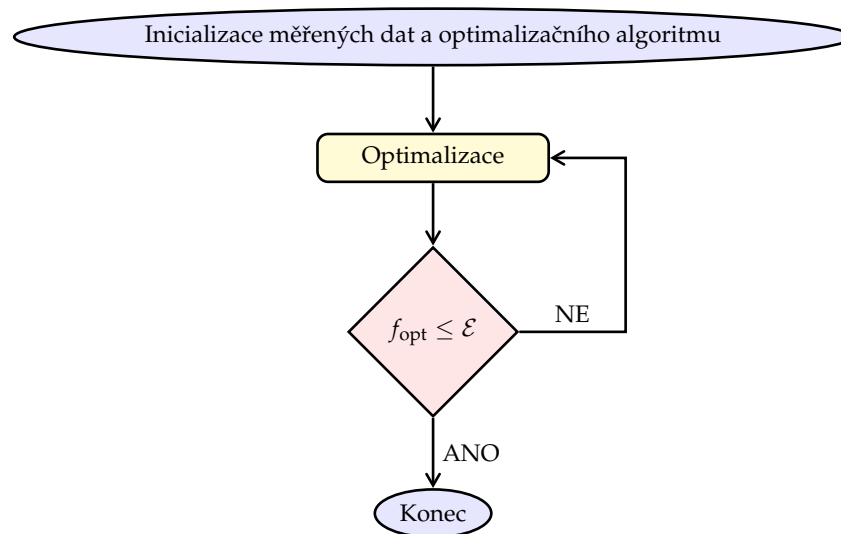
kde N_{mer} je celkový počet měřených hodnot.

Identifikace spočívá v nalezení takových parametrů náhradního zapojení, pro které je rozdíl mezi spočítanými a změřenými charakteristikami minimální. Pro rozdíl měřených a vypočtených hodnot je vhodné zavést tzv. optimalizační funkci f_{opt} , která má tvar

$$f_{\text{opt}} = \sum_{k=1}^{N_{\text{mer}}} \frac{|\mathbf{I}_{1,k} - I_{1,\text{vyp}}(s_k, R_1, R_2, \dots)|}{|\mathbf{I}_{1,k}|} + \sum_{k=1}^{N_{\text{mer}}} \frac{|\mathbf{M}_k - M_{\text{vyp}}(s_k, R_1, R_2, \dots)|}{|\mathbf{M}_k|}, \quad (10.2.2)$$

kde $I_{1,\text{vyp}}$ a M_{vyp} jsou vypočtené hodnoty statorového proudu, resp. momentu podle vztahů (7.2.10) a (7.2.24).

Velmi často je místo prostého rozdílu brán kvadrát tohoto rozdílu. Výhody a nevýhody rozdílně definovaných optimalizačních funkcí je možné nalézt např. v [36]. Cílem identifikace je minimalizace této funkce s ohledem na jednotlivé parametry, nebo-li optimalizace funkce f_{opt} . Popis různých optimalizačních algoritmů je možné nalézt např. v [37,38]. V principu, viz Obr. 10.4, algoritmus provádí variaci parametrů tak dlouho, dokud není velikost f_{opt} menší nebo rovna pevně zvolené hodnotě \mathcal{E} . Mezi další ukončovací podmínky obvykle patří překročení maximálního času běhu optimalizačního algoritmu a překročení maximálního počtu optimalizačních iterací.



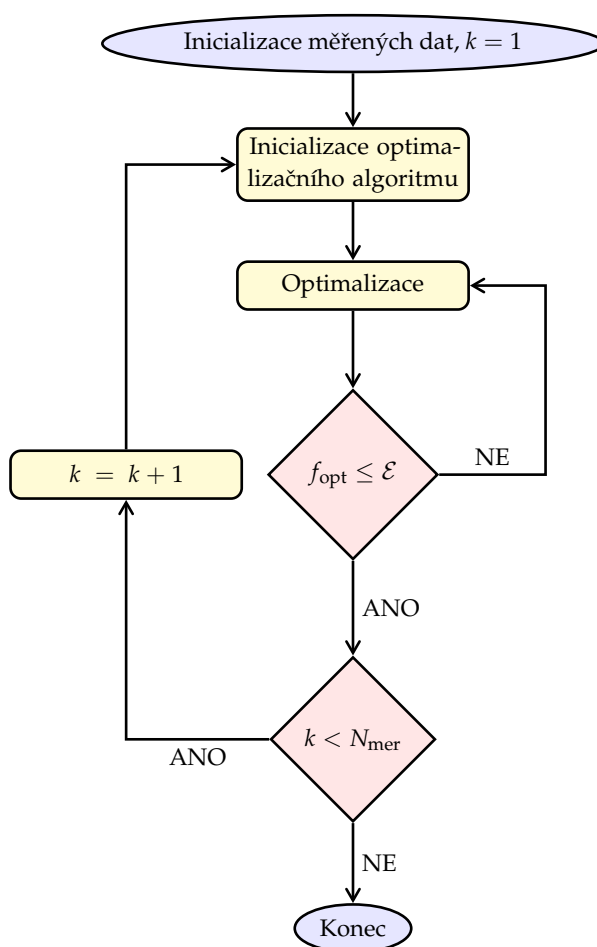
Obr. 10.4: Algoritmus identifikace parametrů s konstantními hodnotami.

10.2.1 Statická identifikace s proměnnými parametry

Drobnou modifikací identifikačního algoritmu z minulé kapitoly je možné vytvořit nový algoritmus, pomocí kterého je možné identifikovat nejen efektivní⁴ hodnoty parametrů, ale i jejich závislosti na daném pracovním stavu.

Modifikovaný identifikační algoritmus je zobrazen na Obr. 10.5. Úprava algoritmu spočívá v tom, že pro každý jednotlivý měřený bod se hledají takové velikosti parametrů⁵ R_2 a $L_{\sigma 2}$, aby odchylka mezi měřenými a spočtenými body jednotlivých charakteristik k -tého měření byla menší než zvolená hodnota \mathcal{E} . Optimalizační funkce má pro k -té měření tvar

$$f_{\text{opt}} = \frac{1}{|I_{1,k}|} |I_{1,k} - I_{1,\text{vyp}}(s_k, R_2, L_{\sigma 2})| + \frac{1}{|M_k|} |M_k - M_{\text{vyp}}(s_k, R_2, L_{\sigma 2})|. \quad (10.2.3)$$



Obr. 10.5: Algoritmus identifikace parametrů ze statických charakteristik.

⁴Pod pojmem efektivní hodnota parametru je myšlena taková velikost daného parametru, která dobře vystihuje daný parametr v celé pracovní oblasti stroje, ale přitom je konstantní.

⁵Pro tuto identifikaci jsou zvoleny parametry R_2 a $L_{\sigma 2}$. Ostatní parametry jsou považovány za konstantní, protože na základě kapitoly 8 je zřejmé, že variace parametrů R_{Fe} a X_h ovlivňuje tvar statických charakteristik velmi málo. Změnu statorového odporu R_1 vlivem teploty je možné eliminovat měřením proudové a momentové charakteristiky při známé teplotě statorového vinutí.

Opět je možné identifikovat na libovolné charakteristiky a libovolné parametry. Je zde ovšem nutné upozornit, že výsledné závislosti, např. $L_{\sigma 2}(s)$, musí být fyzikálně dobře interpretovatelné a neměly by obsahovat nespojitosti. Tento typ identifikace závislosti identifikovaných parametrů na stavu stroje není příliš vhodný pro dynamické systémy popsané diferenciálními rovnicemi. Pro identifikaci proměnných parametrů na základě dynamických modelů jsou vhodnější metody, např. pomocí Kalmanova filtru, viz následující kapitola.

10.3 Dynamická identifikace s proměnnými parametry

Pro identifikaci proměnných parametrů na základě dynamických charakteristik je zvolena metoda vycházející z rozšířeného Kalmanova filtru, viz [39–42] a Dodatku K.

Tento způsob estimace je možné použít jak v případě off-line identifikace, tak i v případě on-line identifikace. Zde je použit pouze pro první případ. Při jeho použití je nutné znát stavový popis systému, tj. je nutné vytvořit stavový model asynchronního stroje ve formě

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_c \mathbf{x} + \mathbf{B}_c \mathbf{u} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{C}_c \mathbf{x} + \mathbf{D}_c \mathbf{u},\end{aligned}\quad (10.3.1)$$

kde \mathbf{x} je stavový vektor, \mathbf{u} je vektor vstupů, \mathbf{y} je vektor výstupů, \mathbf{A}_c je matice soustavy, \mathbf{B}_c je matice vstupu, \mathbf{C}_c je matice výstupu, \mathbf{D}_c je matice vazeb vstupu na výstup. Pro další postup je zvolen dynamický model transformovaný do statorového souřadnicového systému popsaný rovnicemi (5.1.7).

Pro estimaci jsou uvažovány následující předpoklady⁶:

- (i) Vstupní/měřené veličiny jsou: statorové napětí, statorové proudy a mechanické otáčky.
- (ii) Výstupní veličiny jsou: statorové proudy.
- (iii) Estimované parametry jsou: statorový odpor a rotorový odpor.
- (iv) Stavové veličiny jsou: statorový a rotorový proud⁷.

Z předchozího je tedy zřejmé, že člen $\mathbf{D}_c \mathbf{u}$ není třeba uvažovat a stavový vektor je

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_{s,d} & i_{s,q} & i_{r,d} & i_{r,q} \end{bmatrix}^T, \quad (10.3.2)$$

vektor vstupů je

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{s,d} \\ u_{s,q} \end{bmatrix}, \quad (10.3.3)$$

a matice \mathbf{C}_c je ve formě

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.3.4)$$

Úpravou rovnic (5.1.7) a to tak, že jsou na levých stranách ponechány derivace jednotlivých proudů a na pravých stranách kombinace těchto proudů s parametry stroje, vychází stavová matice ve formě

$$\mathbf{A}_c = \frac{1}{L_\Delta} \begin{bmatrix} -L_r R_s & \omega_s L_\Delta + \omega_r M_{sr}^2 & M_{sr} R_r & \omega_r L_r M_{sr} \\ -\omega_s L_\Delta + \omega_r M_{sr}^2 & -L_r R_s & -\omega_r L_r M_{sr} & M_{sr} R_r \\ M_{sr} R_s & -\omega_r L_s M_{sr} & -L_s R_r & \omega_s L_\Delta - \omega_r L_s L_r \\ \omega_r L_s M_{sr} & M_{sr} R_s & -\omega_s L_\Delta - \omega_r L_s L_r & -L_s R_r \end{bmatrix}, \quad (10.3.5)$$

⁶Samozřejmě, že měřené a estimované parametry je možné téměř libovolně měnit.

⁷V případě využití stavového modelu pro řízení asynchronního stroje je vhodnější zvolit místo rotorových proudů spřažené magnetické toky.

kde je z důvodu velikosti matice zavedena konstanta $L_\Delta = L_s L_r - M_{sr}^2$.

Matice vstupu má tvar

$$\mathbf{B}_c = \frac{1}{L_s L_r - M_{sr}^2} \begin{bmatrix} L_r & 0 \\ 0 & L_r \\ -M_{sr} & 0 \\ 0 & -M_{sr} \end{bmatrix}. \quad (10.3.6)$$

Takto definovaný stavový model je možné použít pro estimaci statorových a rotorových proudů ze znalosti elektrické rychlosti rotoru, statorového napětí a statorového proudu. Zde je třeba upozornit, že obvykle měřené veličiny jsou zatíženy různými chybami měření, proto je vhodné estimovat i samotné měřené veličiny.

V případě estimace samotných parametrů stavového modelu je nutné tento model dále modifikovat. V tomto konkrétním případě jsou zvoleny pro estimaci statorový a rotorový odpor. Nový stavový vektor je dán vztahem

$$\mathbf{x}^* = [i_{s,d} \ i_{s,q} \ i_{r,d} \ i_{r,q} \ R_s \ R_r]^T, \quad (10.3.7)$$

matice výstupu

$$\mathbf{C}_c^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.3.8)$$

matice soustavy

$$\mathbf{A}_c^* = \frac{1}{L_\Delta} \begin{bmatrix} -L_r R_s & \omega_s L_\Delta + \omega_r M_{sr}^2 & M_{sr} R_r & \omega_r L_r M_{sr} & 0 & 0 \\ -\omega_s L_\Delta + \omega_r M_{sr}^2 & -L_r R_s & -\omega_r L_r M_{sr} & M_{sr} R_r & 0 & 0 \\ M_{sr} R_s & -\omega_r L_s M_{sr} & -L_s R_r & \omega_s L_\Delta - \omega_r L_s L_r & 0 & 0 \\ \omega_r L_s M_{sr} & M_{sr} R_s & -\omega_s L_\Delta - \omega_r L_s L_r & -L_s R_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.3.9)$$

a matice vstupu

$$\mathbf{B}_c^* = \frac{1}{L_s L_r - M_{sr}^2} \begin{bmatrix} L_r & 0 \\ 0 & L_r \\ -M_{sr} & 0 \\ 0 & -M_{sr} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.3.10)$$

Pro využití Kalmanova filtru je nutné spojitý stavový systém převést do diskrétního tvaru s konstantním vzorkovacím časem T_s . Diskrétní tvar matice soustavy je

$$\mathbf{A}_d \cong \mathbf{I}_6 + \mathbf{A}_c^* T_s, \quad (10.3.11)$$

kde \mathbf{I}_6 je čtvercová jednotková matice o šesti řádcích a šesti sloupcích. Diskrétní tvar matice vstupu je

$$\mathbf{B}_d \cong \mathbf{B}_c^* T_s. \quad (10.3.12)$$

V tomto konkrétním případě je kovarianční matice uvažována jako jednotková

$$\mathbf{P} = \mathbf{I}_6, \quad (10.3.13)$$

a taktéž matice reprezentující chyby měření

$$\mathbf{R} = \mathbf{I}_2. \quad (10.3.14)$$

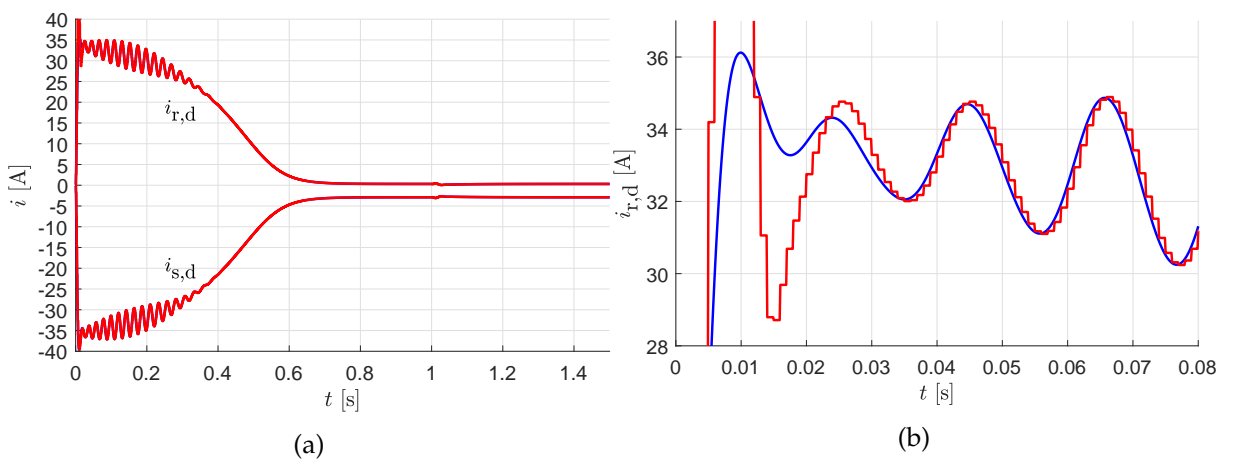
Matice reprezentující nepřesnost modelu je následující

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 \end{bmatrix}. \quad (10.3.15)$$

Vhodnou volbou koeficientů jednotlivých matic je do značné míry možné kontrolovat rychlost konvergence estimace, viz např. změna komponenty $Q_{6,6}$ matice \mathbf{Q} na Obr. 10.7 b), c) a d). Taktéž odolnost celého algoritmu na zarušený vstupní signál, jeho filtrační schopnost a obecně stabilitu celého algoritmu.

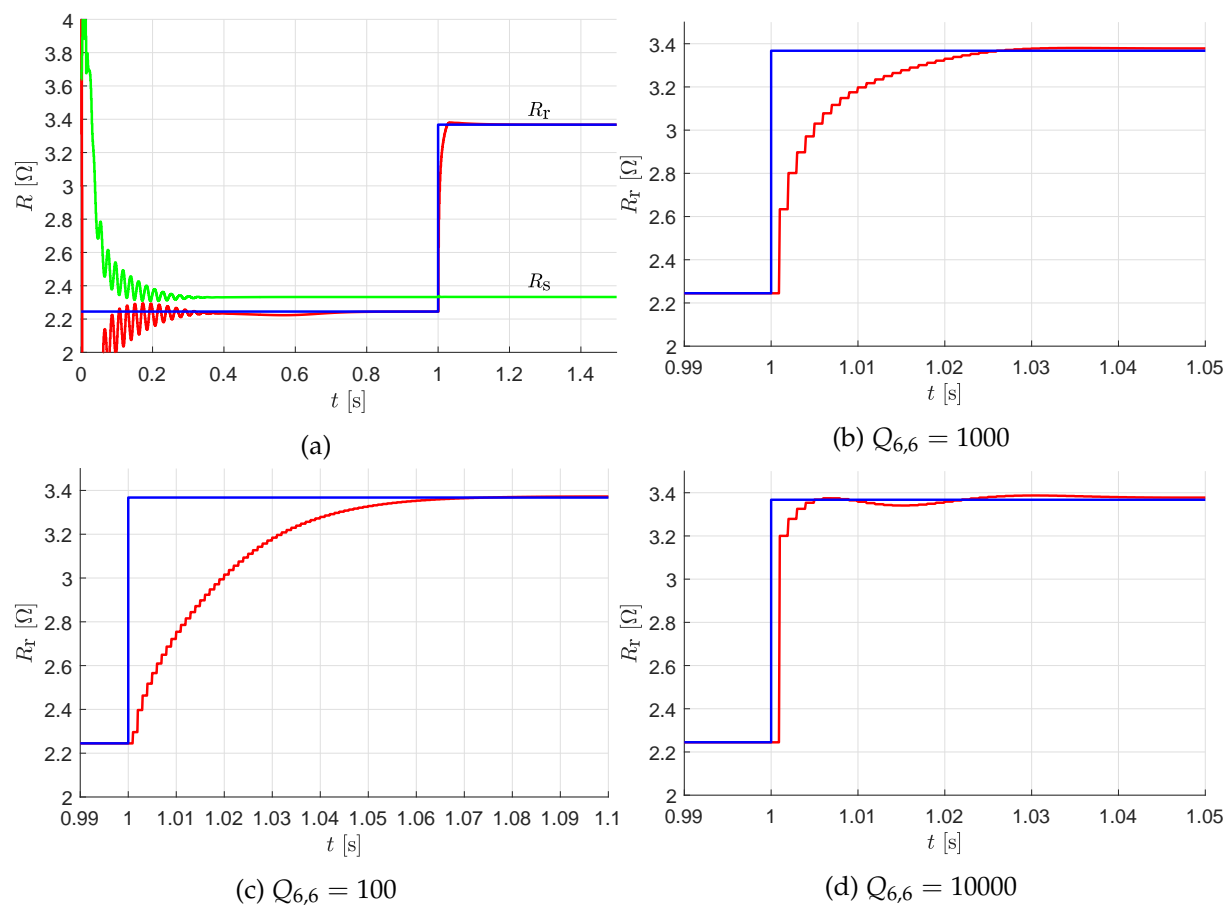
Pro ukázkou schopností Kalmanova filtru při estimaci statorových a rotorových proudů a odporů byla provedena simulace rozběhu zatíženého asynchronního stroje. Vzorkovací čas byl zvolen $T_s = 1$ ms, což je relativně vysoká hodnota a v praxi by měla být nižší. Dále v čase $t = 1$ s došlo ke skokovému zvýšení rotorového odporu na hodnotu $\frac{3}{2}R_r$. Prvotní hodnoty estimovaných odporů byly položeny rovny nule, z pohledu rychlosti a stability estimace je výhodnější inicializovat je s co nejvíce reálnou hodnotou.

Na Obr. 10.6 jsou zobrazeny skutečné průběhy statorového a rotorového proudu v ose d modrou barvou a průběhy estimované barvou červenou. Z průběhů je zřejmé, že algoritmu trvá přibližně 40 ms než se plně ustálí a skutečné a estimované hodnoty jsou s přihlédnutím ke vzorkování shodné.



Obr. 10.6: Časový průběh hodnot estimovaných proudů $i_{s,d}$ a $i_{r,d}$.

Na Obr. 10.7 jsou zobrazeny průběhy hodnot estimovaných odporů R_s a R_r . Dále je zde ukázán vliv velikosti prvku $Q_{6,6}$ matice \mathbf{Q} , který odpovídá chybě modelu pro výpočet rotorového odporu. Z průběhů je zřejmé, že prvotní estimace správných hodnot odporů trvá přibližně 0,3 s. Rychlost estimace je možné do značné míry ovlivnit velikostí jednotlivých komponent matice \mathbf{Q} . Je ale třeba mít na paměti, že příliš agresivní volba jednotlivých komponent může vést k nestabilitě samotného algoritmu.

Obr. 10.7: Časový průběh hodnot estimovaných odporů R_s a R_r .

Část IV

Závěr

Práce se zabývá konstrukcí matematických modelů trojfázových asynchronních strojů. Z důvodu rozsahu práce je na asynchronní stroj pohlíženo jako na ideální symetrické trojfázové zařízení, které není nijak ovlivněno nelinearitami magnetického obvodu, vlivy diskrétního umístění statorového a rotorového vinutí do drážek, nesymetrií jednotlivých vinutí a ani možným nesymetrickým napájecím napětím. Na druhou stranu jsou jednotlivé modely odvozeny v podstatě krok za krokem a je možné je dalšími způsoby různě modifikovat.

Nejdříve je zde ukázána část modelu využívající řešení rozložení elektromagnetického pole ve stroji pro výpočet indukovaných napětí ve vinutí na základě vztahu $\frac{d\Psi}{dt}$. Takto sestavené rovnice modelu jsou dále zjednodušeny za předpokladu, že během chodu stroje jsou indukčnosti jednotlivých vinutí konstantní a tato reálná vinutí je možné nahradit harmonickým, resp. diskrétním vinutím. Je zde ukázáno, že za předpokladu, že statorové vinutí je harmonicky rozložené podél vzduchové mezery a rotorové vinutí je také harmonicky, resp. diskrétně rozloženo podél vzduchové mezery, potom dynamické modely pro oba typy uvažovaných rotorových vinutí jsou formálně identické. Jediný rozdíl spočívá v rozdílné interpretaci jednotlivých parametrů, tj. odporů a indukčností.

Pro dynamické modely je zde ukázána celá řada transformací pro převod obvykle velkého počtu diferenciálních rovnic modelu až v krajním případě pouze na pět, tj. čtyři diferenciální rovnice napěťové a jedna pohybová. Mezi tyto transformace se dá řadit i popis asynchronního stroje pomocí sdružených veličin v zapojení do hvězdy, kdy tento model je vhodný při analýze chování stroje při nesymetrickém napájení, nebo při nesymetrii samotných vinutí stroje. Toto je velká výhoda využití modelu se sdruženými veličinami oproti modelu využívající pouze fázové veličiny.

Následně jsou dynamické modely asynchronních strojů transformovány na statické modely. Je zde ukázáno, že je možné zkonstruovat nekonečně mnoho statických modelů takových, aby všechny měly shodné vstupně-výstupní parametry, tj. velikost statorového proudu a velikost vnitřního mechanického momentu. V práci se nejvíce pracuje s náhradním zapojení asynchronního stroje ve tvaru Γ -článku. Toto zapojení je zvoleno z důvodu relativně snadné identifikovatelnosti a možnosti transformovat jej do podoby T , či T -článku. Dále je zde ukázáno, že pokud existuje nekonečné množství variant parametrů náhradních zapojení, potom existuje také nekonečný počet variant parametrů dynamických modelů asynchronního stroje.

Druhá část práce se zabývá možnostmi identifikace parametrů náhradních zapojení. Jsou zde ukázány dva základní způsoby identifikace. Mezi první způsob patří určení parametrů na základě porovnání změřené vstupní impedance asynchronního stroje se vstupní impedancí náhradního zapojení. Tato identifikace je v podstatě modifikací běžného určení parametrů ze zkoušky naprázdno a ze zkoušky nakrátko. Druhý typ identifikace spočívá v porovnání měřených veličin s veličinami spočtenými na základě modelu stroje. Kdy je možné identifikovat nejenom ekvivalentní parametry stroje, ale i závislosti jednotlivých parametrů na pracovním stavu stroje.

Literatura

- [1] Vestas: Vestas V90-3.0 MW. © 2017.
URL https://www.vestas.com/en/products/turbines/v90%203_0_mw
- [2] Wilson, E.: The induction motor. *Journal of the Institution of Electrical Engineers*, ročník 28, č. 139, 1899: s. 321–356, ISSN 2054-0612, doi:10.1049/jiee-1.1899.0014.
URL <http://digital-library.theiet.org/content/journals/10.1049/jiee-1.1899.0014>
- [3] Steinmetz, C. P.: The Alternating Current Induction Motor. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, ročník XIV, č. 1, 1897: s. 183–217, ISSN 0096-3860, doi:10.1109/T-AIEE.1897.5570186.
URL <http://ieeexplore.ieee.org/document/5570186/>
- [4] Zhang, D.; An, R.; He, C.; aj.: Electromagnetic design of a megawatt high efficiency high speed solid rotor induction motor. In *2017 IEEE International Electric Machines and Drives Conference (IEMDC)*, IEEE, 2017, ISBN 978-1-5090-4281-4, s. 1–8, doi:10.1109/IEMDC.2017.8002095.
URL <http://ieeexplore.ieee.org/document/8002095/>
- [5] Bašta, J.; Kucevalov, V. M.: *Elektrické stroje s plnými rotory*. Praha: Academia, první vydání, 1980.
- [6] Fudeh, H.; Ong, C.: Modeling and Analysis of Induction Machines Containing Space Harmonics Part I. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, ročník PAS-102, č. 8, 1983: s. 2608–2615, ISSN 0018-9510, doi:10.1109/TPAS.1983.317781.
URL <http://ieeexplore.ieee.org/lpdocs/epic03/wrapper.htm?arnumber=4112255>
- [7] Fudeh, H.; Ong, C.: Modeling and Analysis of Induction Machines Containing Space Harmonics Part II. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, ročník PAS-102, č. 8, 1983: s. 2616–2620, ISSN 0018-9510, doi:10.1109/TPAS.1983.317782.
URL <http://ieeexplore.ieee.org/document/4112256/>
- [8] Fudeh, H.; Ong, C.: Modeling and Analysis of Induction Machines Containing Space Harmonics Part III. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, ročník PAS-102, č. 8, 1983: s. 2621–2628, ISSN 0018-9510, doi:10.1109/TPAS.1983.317783.
URL <http://ieeexplore.ieee.org/document/4112257/>
- [9] Novotny, D. W.; Lipo, T. A.: *Vector control and dynamics of AC drives*. New York: Oxford University Press, 1996, ISBN 01-985-6439-2.
- [10] Pyrhönen, J.; Hrabovcová, V.; Semken, R. S.: *Electrical machine drives control*. Chichester, West Sussex, United Kingdom: John Wiley, první vydání, 2016, ISBN 11-192-6045-0.

- [11] Ong, C.-M.: *Dynamic simulation of electric machinery*. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall PTR, první vydání, 1998, ISBN 01-372-3785-5.
- [12] Umans, S. D.; Fitzgerald, A. E.: *Fitzgerald and Kingsley's Electric Machinery*. New York: McGraw-Hill Companies, sedmé vydání vydání, 2014, ISBN 978-0073380469.
- [13] Chapman, S. J.: *Electric machinery fundamentals*. New York: McGraw-Hill, páté vydání, 2012, ISBN 00-735-2954-0.
- [14] Chiasson, J. N.: *Modeling and high performance control of electric machines*. Hoboken, NJ: John Wiley, první vydání, 2005, ISBN 04-716-8449-X.
- [15] Bianchi, N.: *Electrical machine analysis using finite elements*. Boca Raton, FL: Talor, 2005, ISBN 08-493-3399-7.
- [16] Salon, S.: *Finite element analysis of electrical machines*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1995, ISBN 07-923-9594-8.
- [17] Sadiku, M. N. O.: *Numerical techniques in electromagnetics with MATLAB*. Boca Raton, Fla.: CRC Press, třetí vydání, 2009, ISBN 14-200-6309-X.
- [18] Rylander, T.; Ingelstrom, P.: *Computational electromagnetics*. Springer, druhé vydání vydání, 2012, ISBN 14-614-5350-X.
- [19] Dziwniel, P.; Piriou, F.; Ducreux, J.-P.; aj.: A time-stepped 2D-3D finite element method for induction motors with skewed slots modeling. *IEEE Transactions on Magnetics*, ročník 35, č. 3, 1999: s. 1262–1265, ISSN 00189464, doi:10.1109/20.767180.
URL <http://ieeexplore.ieee.org/document/767180/>
- [20] Lai, H.; Rodger, D.: Modelling rotor skew in induction machines using 2D and 3D finite element schemes. In *1997 IEEE International Electric Machines and Drives Conference Record*, IEEE, 1997, ISBN 0-7803-3946-0, s. WB3/5.1–WB3/5.3, doi:10.1109/IEMDC.1997.604325.
URL <http://ieeexplore.ieee.org/document/604325/>
- [21] Boldea, I.; Nasar, S.: *The induction machines design handbook*. Boca Raton, FL: CRC Press/Taylor, druhé vydání, 2010, ISBN 14-200-6668-4.
- [22] Zorbas, N.; Neyland, B. A.: Derivation of Induction Motor Equivalent Circuit Using Space-Phasor Concepts. *IEEE Transactions on Education*, ročník E-30, č. 2, 1987: s. 90–97, ISSN 0018-9359, doi:10.1109/TE.1987.5570527.
URL <http://ieeexplore.ieee.org/lpdocs/epic03/wrapper.htm?arnumber=5570527>
- [23] Griffiths, D. J.: *Introduction to electrodynamics*. Boston: Pearson, čtvrté vydání vydání, 2013, ISBN 03-218-5656-2.
- [24] Press, W. H.: *Numerical recipes*. New York: Cambridge University Press, třetí vydání, 2007, ISBN 978-0-521-88068-8.
- [25] Měříčka, J.; Zoubek, Z.: *Obecná teorie elektrického stroje*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, první vydání, 1973.
- [26] Munoz, A.; Lipo, T.: Complex vector model of the squirrel-cage induction machine including instantaneous rotor bar currents. *IEEE Transactions on Industry Applications*, ročník 35, č. 6, 1999: s. 1332–1340, ISSN 00939994, doi:10.1109/28.806047.
URL <http://ieeexplore.ieee.org/document/806047/>

- [27] Kopylov, I. P.: *Stavba elektrických strojů*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, první vydání, 1988.
- [28] Krause, P. C.; Wasynczuk, O.; Sudhoff, S. D.; aj.: *Analysis of electric machinery and drive systems*. New York: IEEE Press, druhé vydání, 2002, ISBN 04-711-4326-X.
- [29] Petrov, G. N.: *Elektrické stroje 2*. Praha: Academia, první vydání, 1982.
- [30] Cigánek, L.; Bauer, M.: *Elektrické stroje a přístroje*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, druhé vydání, 1957.
- [31] Cochran, P. L.: *Polyphase induction motors*. New York: M. Dekker, první vydání, 1989, ISBN 08-247-8043-4.
- [32] Patočka, M.: *Magnetické jevy a obvody ve výkonové elektronice, měřicí technice a silnoproudé elektrotechnice*. V Brně: VUTIUM, první vydání, 2011, ISBN 978-80-214-4003-6.
- [33] Lindenmeyer, D.; Dommel, H.; Moshref, A.; aj.: An induction motor parameter estimation method. *International Journal of Electrical Power*, ročník 23, č. 4, 2001: s. 251–262, ISSN 01420615, doi:10.1016/S0142-0615(00)00060-0.
URL <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0142061500000600>
- [34] Bašta, J.; Mayer, I.; Chládek, J.: *Teorie elektrických strojů*. Praha: SNTL, první vydání, 1968.
- [35] Rader, L. T.; Litscher, E. C.: Some Aspects of Inductance When Iron Is Present. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, ročník 63, č. 3, 1944: s. 133–139, ISSN 0096-3860, doi:10.1109/T-AIEE.1944.5058908.
URL <http://ieeexplore.ieee.org/lpdocs/epic03/wrapper.htm?arnumber=5058908>
- [36] Wang, P.; Zhang, J.; Feng, S.: A new measure on adaptation complexity— fitness function classes, their integration and case study. In *2008 Chinese Control and Decision Conference*, Yantai, Shandong, China: IEEE, 2008, ISBN 978-1-4244-1733-9, s. 130–134, doi:10.1109/CCDC.2008.4597284.
URL <http://ieeexplore.ieee.org/document/4597284/>
- [37] Baldick, R.: *Applied optimization*. Cambridge: Cambridge University Press, první vydání, 2009, ISBN 05-211-0028-3.
- [38] Simon, D.: *Evolutionary optimization algorithms*. Wiley: Hoboken, první vydání, 2013, ISBN 04-709-3741-6.
- [39] Simon, D.: *Optimal state estimation*. Hoboken, N.J.: Wiley-Interscience, první vydání, 2006, ISBN 978-0-471-70858-2.
- [40] Kalman, R. E.: A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Journal of Basic Engineering*, ročník 82, č. 1, 1960: s. 35–45, ISSN 00219223, doi:10.1115/1.3662552.
URL <http://FluidsEngineering.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1430402>
- [41] Grewal, M. S.; Andrews, A. P.: *Kalman filtering*. Wiley-IEEE Press, čtvrté vydání vydání, 2015, ISBN 978-1-118-85121-0.
- [42] Kim, P.: *Kalman filter for beginners*. Charleston: CreateSpace, 2011, ISBN 978-1-463648350.

- [43] Rektorys, K.: *Přehled užití matematiky*. Praha: Prometheus, šesté vydání vydání, 1995, ISBN 80-858-4992-5.
- [44] Melkebeek, J.; Willems, J.: Reciprocity relations for the mutual inductances between orthogonal axis windings in saturated salient-pole machines. *IEEE Transactions on Industry Applications*, ročník 26, č. 1, 2002: s. 107–114, ISSN 00939994, doi:10.1109/28.52681.
URL <http://ieeexplore.ieee.org/document/52681/>
- [45] Patočka, M.; Cipín, R.: 2017. *Rozložení vodičů ve statorovém/rotorovém vinutí trojfázových střídavých točivých strojů*. Česká republika. CZ 306464 B6 Patentový spis. Uděleno 21. 12. 2016. Zapsáno 01. 02. 2017.
- [46] Cipín, R.: *Moderní matematické metody syntézy a analýzy střídavých strojů*. Dizertační práce, Vysoké učení technické v Brně, 2011/2012.
- [47] White, D. C.; Woodson, H. H.: *Electromechanical Energy Conversion*. New York: John Wiley, 1959.
- [48] Figueroa, J.; Cros, J.; Viarouge, P.: Generalized Transformations for Polyphase Phase-Modulation Motors. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, ročník 21, č. 2, 2006: s. 332–341, ISSN 0885-8969, doi:10.1109/TEC.2005.859965.
URL <http://ieeexplore.ieee.org/document/1634579/>
- [49] Kowalczyk, Z.: On discretization of continuous-time state-space models. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, ročník 38, č. 12, 1991: s. 1460–1477, ISSN 00984094, doi:10.1109/31.108500.
URL <http://ieeexplore.ieee.org/document/108500/>
- [50] Squire, W.; Trapp, G.: Using Complex Variables to Estimate Derivatives of Real Functions. *SIAM Review*, ročník 40, č. 1, 1998: s. 110–112, ISSN 0036-1445, doi:10.1137/S003614459631241X.
URL <http://epubs.siam.org/doi/10.1137/S003614459631241X>

Část V

Dodatky

A | Parametry analyzovaného stroje

V tomto dodatku jsou uvedeny základní parametry třífázového asynchronního stroje AOM 060L02-016, na kterém je použita veškeré uvedené teorie.

V Tab. A.1 jsou uvedeny základní štítkové údaje tohoto stroje. V Tab. A.2 jsou uvedeny změřené a identifikované parametry tohoto stroje platné pro náhradní zapojení ve tvaru Γ -článku. V Tab. A.3 a Tab. A.4 jsou uvedeny základní konstrukční údaje statorového a rotorového svazku.

Tab. A.1: Štítkové údaje.

Parametr	Hodnota
Výkon	2,2 kW
Jmenovité napětí	400 V – Y
Jmenovitý proud	4,5 A
Otáčky	2865 min ⁻¹
Frekvence	50 Hz
Účinnost	81 %

Tab. A.2: Změřené a identifikované parametry motoru AOM 060L02-016.

Parametr	Hodnota
Statorový odpor R_s	2,91 Ω
Rotorový odpor R_r	2,245 Ω
Odpor reprezentující ztráty v železe R_{Fe}	982 Ω
Hlavní indukčnost L_h	0,387 H
Rotorová rozptylová indukčnost $L_{\sigma 2}$	0,019 H

Tab. A.3: Konstrukční údaje statorového svazku.

Parametr	Hodnota
Vnější průměr	131 mm
Vnitřní průměr	74 mm
Délka svazku bez ventilačních kanálů	98 mm
Počet drážek	24
Materiál	M700-50a
Vodiče v drážce	47

Tab. A.4: Konstrukční údaje rotorového svazku.

Parametr	Hodnota
Vnější průměr	73,4 mm
Vnitřní průměr	30 mm
Délka svazku bez ventilačních kanálů	98 mm
Střední průměr kruhu nakrátko	53 mm
Průřez kruhu nakrátko	206 mm ²
Vzduchová mezera	0,3 mm
Délka tyče rotoru	118 mm
Materiál	M700-50a
Počet drážek	19

B | Základní vztahy elektromagnetického pole

V tomto dodatku jsou stručně uvedeny základní vztahy elektromagnetismu použité v kapitolách 2 a 9. Uvedené vztahy jsou převážně převzaty z knihy [23].

B.1 Základní vektorové operace

B.1.1 Skalární součin

Skalární součin v kartézské souřadnicové soustavě dvou vektorů F a G je definován

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{G} &= |\mathbf{F}||\mathbf{G}| \cos \alpha = FG \cos \alpha \\ &= (F_x \hat{x} + F_y \hat{y} + F_z \hat{z}) \cdot (G_x \hat{x} + G_y \hat{y} + G_z \hat{z}) = F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z, \end{aligned} \quad (\text{B.1.1})$$

kde α je úhel sevřený vektory F a G .

B.1.2 Vektorový součin

Vektorový součin dvou vektorů v kartézské souřadnicové soustavě je definovaný výrazem

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \times \mathbf{G} &= F|\mathbf{G}| \sin \alpha = FG \sin \alpha \hat{n} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix} = (F_y G_z - F_z G_y) \hat{x} + (F_z G_x - F_x G_z) \hat{y} + (F_x G_y - F_y G_x) \hat{z}, \end{aligned} \quad (\text{B.1.2})$$

kde \hat{n} je jednotkový vektor kolmý k rovině vymezené vektory F a G .

B.1.3 Gradient

Definice gradientu v kartézské souřadnicové soustavě je

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right), \quad (\text{B.1.3})$$

kde symbol ∇ se nazývá nabla operátor.

B.1.4 Divergence

Divergence je diferenciální operátor udávající zřídlovost vektorového pole. Výsledkem této operace je skalár. Definice divergence v kartézské souřadnicové soustavě je

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \quad (\text{B.1.4})$$

Důležitou vlastností divergence je, že divergence rotace vektoru \mathbf{F} je rovna nule

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0. \quad (\text{B.1.5})$$

B.1.5 Rotace

Rotace je diferenciální operátor udávající v každém bodě lokální míru rotace pole. Výsledkem této operace je vektor. Definice rotace v kartézské souřadnicové soustavě je

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right). \quad (\text{B.1.6})$$

Důležitou vlastností rotace je, že rotace gradientu je nulový vektor

$$\nabla \times \nabla f = 0. \quad (\text{B.1.7})$$

B.1.6 Gaussova věta

Plošný integrál normálové složky libovolného vektoru přes uzavřenou plochu je roven integrálu divergence tohoto vektoru přes vnitřní objem ohraničený touto plochou

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV. \quad (\text{B.1.8})$$

B.1.7 Stokesova věta

Křivkový integrál tečné složky libovolného vektoru po uzavřené křivce je roven plošnému integrálu normálové složky rotace tohoto vektoru po jakékoliv ploše, která je touto křivkou ohraničena

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (\text{B.1.9})$$

B.2 Maxwellovy rovnice

B.2.1 Ampérův zákon

Ampérův zákon v integrální podobě má tvar

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}_i \cdot d\mathbf{S} + \epsilon_0 \epsilon_r \int_S \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (\text{B.2.1})$$

Pro stacionární elektromagnetické pole, tj. $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$, lze tuto rovnici přepsat na

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}_i \cdot d\mathbf{S} = I_{\text{celk}}, \quad (\text{B.2.2})$$

kde I_{celk} je celkový proud procházející plochou S , jenž je ohraničena tzv. Ampérovou křivkou Γ . Veličina $H \cdot l$ je běžně označena jako magnetické napětí \mathcal{F} s jednotkou Ampér.

V diferenciálním tvaru má Ampérův zákon tvar

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_i + \frac{\partial \epsilon \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (\text{B.2.3})$$

kde v případě stacionárního stavu a za použití magnetické indukce je možné tento vztah přepsat na

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \mathbf{B} = \mathbf{J}_i, \quad (\text{B.2.4})$$

kde je dále využit vztah mezi magnetickou indukcí a intenzitou magnetického pole

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (\text{B.2.5})$$

který je platný za předpokladu, že magnetické pole je uvažované v homogenním izotropním prostředí s konstantní permeabilitou μ .

B.2.2 Zákon spojitosti indukčního toku

Zákon spojitosti indukčního toku v integrální podobě má tvar

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (\text{B.2.6})$$

V diferenciálním tvaru má podobu

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (\text{B.2.7})$$

Zde je nutné potknout, že divergence intenzity magnetického pole \mathbf{H} je obecně nenulová, protože

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{B} \right) = \frac{1}{\mu} \nabla \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\mu} \right) = \mathbf{B} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\mu} \right), \quad (\text{B.2.8})$$

tj. má nenulovou velikost v oblastech, kde se μ mění. Teoreticky může hodnota divergence jít až k nekonečnu. Tato situace obvykle nastává na hranici mezi dvěma materiály s různou relativní permeabilitou, např. při přechodu ze vzduchové mezery elektrického stroje do železného jádra statoru, nebo rotoru.

B.2.3 Faradayův indukční zákon

Faradayův indukční zákon v integrální podobě má tvar

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\phi}{dt}. \quad (\text{B.2.9})$$

Integrál $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ vyjadřuje napětí indukované ve vodiči/cívce vlivem časové změny magnetického toku

$$\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (\text{B.2.10})$$

V diferenciálním tvaru má podobu

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \epsilon \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (\text{B.2.11})$$

B.2.4 Gaussův zákon elektrostatiky

Gaussův zákon elektrostatiky v integrální podobě má tvar

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} Q. \quad (\text{B.2.12})$$

V diferenciálním tvaru má podobu

$$\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} = \rho_q. \quad (\text{B.2.13})$$

B.3 Doplnkové rovnice

B.3.1 Magnetický vektorový potenciál

Magnetický vektorový potenciál A je podle [23] definován

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (\text{B.3.1})$$

Takto definovaný magnetický potenciál A automaticky splňuje (B.2.7), protože pro libovolný vektor F platí, že divergence rotace tohoto vektoru je rovna nule, viz (B.1.5).

B.3.2 Elektrický potenciál

Elektrický potenciál je definován vztahem

$$\Phi = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (\text{B.3.2})$$

kde integrace probíhá mezi dvěma body A a B v prostoru, mezi kterými je potenciál počítán.

Tento vztah je možné přepsat v diferenciálním tvaru

$$\nabla \Phi = -\mathbf{E}. \quad (\text{B.3.3})$$

B.3.3 Ohmův zákon

Ohmův zákon v diferenciálním tvaru platný pro vodič pohybující se v magnetickém poli má tvar

$$\mathbf{J}_i = \sigma_r (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (\text{B.3.4})$$

V případě absence magnetického pole je možné tento vztah modifikovat na

$$\mathbf{J}_i = \sigma_r \mathbf{E}, \quad (\text{B.3.5})$$

což je v integrálním tvaru

$$u = Ri. \quad (\text{B.3.6})$$

B.4 Výpočet síly

Sílu působící na náboj q pohybující se rychlostí \mathbf{v} v elektromagnetickém poli, tzv. Lorentzovu sílu, je možné vypočítat pomocí vztahu

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (\text{B.4.1})$$

Tento vztah je možné upravit v případě vodiče délky l protékaného proudem i o konstantní proudové hustotě a pohybujícího se pouze v magnetickém poli na tvar

$$\mathbf{F} = i d\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \quad (\text{B.4.2})$$

Tyto vztahy jsou velmi vhodné pro výpočet sil mezi částmi stroje protékanými proudem, selhávají ovšem v případech, kdy proudové hustoty jsou nulové, tj. např. při výpočtu síly působící mezi dvěma permanentními magnety. Pro tyto případy je vhodné vztah (B.4.1) upravit, viz následující podkapitola, a síly elektromagnetického původu počítat na základě tzv. Maxwellova napěťového tenzoru.

B.4.1 Maxwellův napěťový tenzor

Odvození Maxwellova napěťového tenzoru vychází ze vztahu (B.4.1), kde elektrický náboj q je nahrazen jeho objemovou hustotou, tj. $q = \int_V \rho_q dV$ a platí

$$\mathbf{F} = \int_V (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \rho_q dV. \quad (\text{B.4.3})$$

Na základě tohoto vztahu je možné definovat objemovou hustotu síly

$$\mathbf{f} = \rho_q \mathbf{E} + \mathbf{J}_i \times \mathbf{B}. \quad (\text{B.4.4})$$

Pro další výpočet je vhodné v této rovnici vyjádřit objemovou hustotou náboje ρ_q pomocí vztahu (B.2.13) a proudovou hustotu pomocí (B.2.3)¹

$$\mathbf{f} = \epsilon_0 (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \times \mathbf{B}. \quad (\text{B.4.5})$$

¹Při odvození je předpokládáno, že síla elektromagnetického původu působí na těleso obklopené vzduchem o relativní permeabilitě rovné jedna, resp. je obklopené prostředím s konstantní relativní permeabilitou.

Vztah $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B}$ je možné přepsat za pomoci identity $\frac{\partial(\mathbf{E} \times \mathbf{B})}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ a Faradayova indukčního zákona (B.2.11) na

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}). \quad (\text{B.4.6})$$

Potom objemová hustota síly má tvar

$$\mathbf{f} = \epsilon_0 [(\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] - \frac{1}{\mu_0} [\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (\text{B.4.7})$$

Další zjednodušení lze provést zavedením nulového členu $(\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}$ a s uvážením identity $\nabla (E^2) = 2(\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} + 2\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})$, která vede na $\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \frac{1}{2} \nabla (E^2) - (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E}$. Obdobně lze postupovat i pro magnetickou indukci. Výsledný vztah pro výpočet objemovou hustotu síly je

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = & \epsilon_0 [(\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E}] + \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}] \\ & - \frac{1}{2} \nabla \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (\text{B.4.8})$$

Pro zjednodušenější zápisu lze zavést tzv. Maxwellův napěťový tenzor

$$T_{ij} = \epsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right), \quad (\text{B.4.9})$$

kde indexy i a j odpovídají souřadnicím x, y a z , tzn. tenzor T_{ij} má celkem devět komponent: T_{xx}, T_{xy}, T_{xz} atd. Symbol δ_{ij} označuje tzv. Kroneckerovo delta, kde pro $i = j$ platí $\delta_{xx} = \delta_{yy} = \delta_{zz} = 1$ a pro $i \neq j$ platí $\delta_{xy} = \delta_{yz} = \delta_{xz} = 0$.

Divergenci tenzoru T_{ij} lze vypočítat

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot T_{ij})_j = & \epsilon_0 \left[(\nabla \cdot \mathbf{E}) E_j + (\mathbf{E} \cdot \nabla) E_j - \frac{1}{2} \nabla_j E^2 \right] \\ & + \frac{1}{\mu_0} \left[(\nabla \cdot \mathbf{B}) B_j + (\mathbf{B} \cdot \nabla) B_j - \frac{1}{2} \nabla_j B^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.4.10})$$

S použitím (B.4.10) se dá vztah (B.4.8) přepsat do finálního tvaru

$$\mathbf{f} = \nabla \cdot T_{ij} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t}, \quad (\text{B.4.11})$$

kde \mathcal{P} je Poyntingův vektor

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (\text{B.4.12})$$

Zpětnou integrací (B.4.11) a použitím Gaussovy věty (B.1.8) vyjde finální vztah pro výpočet elektromagnetické síly

$$\mathbf{F} = \oint_S T_{ij} \cdot d\mathbf{S} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \mathcal{P} dV. \quad (\text{B.4.13})$$

Pro výpočtu elektromagnetické síly ve statickém případě se tento vztah dá dále zjednodušit na

$$\mathbf{F} = \oint_S T_{ij} \cdot d\mathbf{S}. \quad (\text{B.4.14})$$

Fyzikální význam Maxwellova tenzoru T_{ij} je následující: je to síla působící na plochu, tj. tlak. Přesněji, T_{ij} je síla v i -tém směru působící na plošný element orientovaný v j -tém směru. Diagonální komponenty T_{xx}, T_{yy} a T_{zz} představují tlak a nediagonální komponenty T_{xy}, T_{xz}, \dots představují střížnou sílu působící na plochu.

Při přibližném výpočtu magnetické síly se zanedbáním elektrického pole a tečných složek magnetické indukce je možné tento vztah přepsat do známějšího tvaru

$$F = \frac{1}{2\mu_0} \oint_S B_n^2 \hat{n} dS, \quad (\text{B.4.15})$$

kde S je plocha ohraničující objekt, pro který je síla počítána, a \hat{n} je normálový vektor k hraniční křivce ohraničující uvažovanou plochu.

C | O rovnosti vzájemných indukčností magneticky vázaných obvodů

Rovnost vzájemných indukčností M_{ab} a M_{ba} dvou vzájemně vázaných magnetických obvodů lze ukázat, např. za použití principu reciprocity, viz [32]. Jiný způsob, který je ukázán zde, vychází z rovnosti energií vázaných v magnetických obvodech soustavy dvou cívek.

Pro soustavu dvou cívek a a b je možné v obecném případě napsat napěťové rovnice

$$\begin{aligned} u_a &= R_a i_a + \frac{d\Psi_a}{dt}, \\ u_b &= R_b i_b + \frac{d\Psi_b}{dt}, \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

kde jednotlivé odpory R představují odpory vodičů cívek. Spřažené magnetické toky jsou dány jako funkce proudů cívkami protékajícími

$$\begin{aligned} \Psi_a &= f_a(i_a, i_b), \\ \Psi_b &= f_b(i_a, i_b). \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Za předpokladu, že cívky jsou bezztrátové, resp. je možné ztráty separovat do externích obvodů, tj. v rovnicích (C.1) jsou odpory $R_a = R_b = 0$, je možné vyjádřit energii této soustavy cívek jako $\int (i_a d\Psi_a + i_b d\Psi_b)$. Takto vypočtená energie, např. pro stav, kdy proudy tekoucí cívkami jsou ustálené a mají velikost $i_a = I_a$ a $i_b = I_b$, musí být zcela nezávislá na způsobu jakým je proud do cívek vnucen. Nutnou podmínkou, aby tento energetický integrál nezávisel na integrační cestě, viz např. [43], ale byl závislý pouze na počátečních a konečných hodnotách proudů a spřažených toků je

$$\frac{\partial f_a(i_a, i_b)}{\partial i_b} = \frac{\partial f_b(i_a, i_b)}{\partial i_a}. \quad (\text{C.3})$$

Provedením naznačené derivace v (C.1) pro $R_a = R_b = 0$, lze rozepsat napěťové rovnice

$$\begin{aligned} u_a &= \frac{\partial f_a(i_a, i_b)}{\partial i_a} \frac{di_a}{dt} + \frac{\partial f_a(i_a, i_b)}{\partial i_b} \frac{di_b}{dt}, \\ u_b &= \frac{\partial f_b(i_a, i_b)}{\partial i_a} \frac{di_a}{dt} + \frac{\partial f_b(i_a, i_b)}{\partial i_b} \frac{di_b}{dt}, \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

kde jednotlivé partiální derivace představují vlastní a vzájemné indukčnosti cívek.

Pokud vztah (C.3) platí, potom jsou vzájemné indukčnosti totožné

$$M(i_a, i_b) = \frac{\partial f_a(i_a, i_b)}{\partial i_b} = \frac{\partial f_b(i_a, i_b)}{\partial i_a}. \quad (\text{C.5})$$

Pro lineární magnetické obvody jsou vlastní i vzájemná indukčnost konstantní, v případě nelineárních obvodů jsou indukčnosti závislé na velikosti proudů protékajících cívkami. V článku [44], je dále ukázáno, že obdobné vlastnosti mají i soustavy rotujících cívek.

Z předešlého vyplývá, že při uvažování hystereze magnetického obvodu, nelze vzájemné indukčnosti považovat za identické, tj. neplatí (C.5), protože magnetické toky nejsou jednoznačně určeny procházejícími proudy.

V případě lineárních cívek se separovanými odpory lze velmi snadno určit rovnost vzájemných indukčností na základě energetické bilance. Výpočet celkové energie soustavy dvou cívek pomocí integrálu $\int (i_a d\Psi_a + i_b d\Psi_b)$ je proveden dvěma způsoby ve dvou krocích a to tak, že:

- (i) nejdříve je zvýšen proud i_a z nulové hodnoty na hodnotu I_a , zatímco proud $i_b = 0$ a v dalším kroce je zvýšen proud i_b na hodnotu I_b , zatímco je $i_a = I_a$. Tímto způsobem je možné určit celkovou energii soustavy

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2}L_a I_a^2 + L_{ab} I_a I_b + \frac{1}{2}L_b I_b^2. \quad (\text{C.6})$$

- (ii) nejdříve je zvýšen proud i_b z nulové hodnoty na hodnotu I_b , zatímco proud $i_a = 0$ a v dalším kroce je zvýšen proud i_a na hodnotu I_a , zatímco je $i_b = I_b$. Tímto způsobem je možné určit celkovou energii soustavy

$$W'_{\text{mag}} = \frac{1}{2}L_a I_a^2 + L_{ba} I_a I_b + \frac{1}{2}L_b I_b^2. \quad (\text{C.7})$$

Protože se energie W_{mag} a W'_{mag} musí rovnat, musí platit

$$L_{ab} = L_{ba}. \quad (\text{C.8})$$

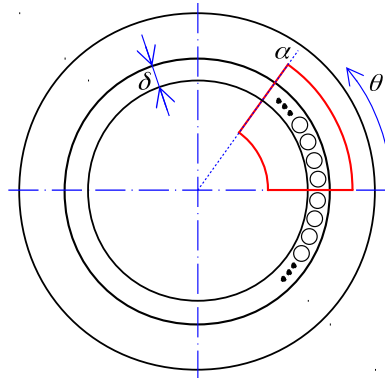
D | Vinutí

D.1 Harmonické vinutí

Pod pojmem harmonické vinutí se rozumí takové vinutí, které ve vzduchové mezeře stroje vytvoří harmonické magnetické pole, tj. pole které má tvar

$$B(\alpha) = B_m \sin \alpha, \quad (\text{D.1.1})$$

kde B_m je amplituda magnetického pole a α je úhel podél vzduchové mezery, viz Obr. D.1.



Obr. D.1: Znárodnění integrační křivky pro výpočet rozložení vinutí.

Použitím Ampérova zákona na červenou křivku v Obr. D.1 je možné napsat, za předpokladu nekonečně velké relativní permeability železných částí statoru a rotoru

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\delta [H(\alpha) - H(0)] \quad (\text{D.1.2})$$

a za předpokladu, že rozložení vinutí podél vzduchové mezery je popsáno pomocí funkce $\frac{N}{2}n(\theta)$, potom pro celkový proud ohraničený červenou křivkou platí

$$I_{\text{celk}} = I_m \frac{N}{2} \int_0^\alpha n(\theta) d\theta, \quad (\text{D.1.3})$$

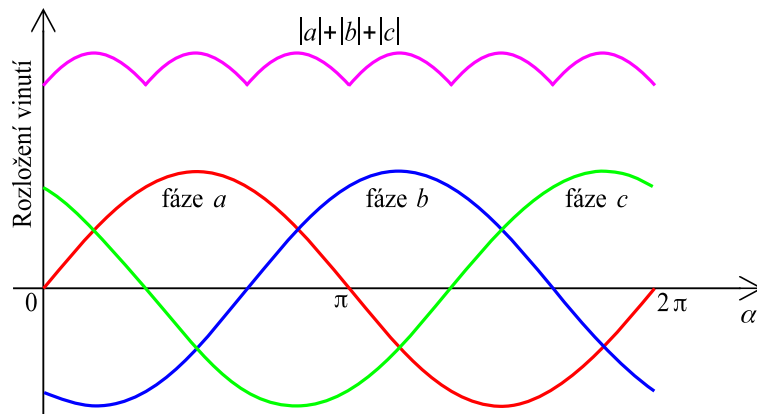
kde N je celkový počet vodičů jednoho pólu stroje, viz Dodatek D.3, a I_m je amplituda proudu tekoucího daným vinutím.

Po zderivování vztahů (D.1.2) a (D.1.3) podle úhlu α , potom z jejich porovnáním vychází vztah pro hustotu vodičů

$$n(\alpha) = \frac{4\delta}{NI_m\mu} B_m \cos(\alpha). \quad (\text{D.1.4})$$

Je tedy zřejmé, že pokud je požadováno harmonické magnetické pole ve vzduchové mezeře, musí být rozložení vinutí podél ní také harmonické. V případě trojfázového harmonického vinutí napájeného trojfázovým harmonickým napětím toto vytvoří ve vzduchové mezeře magnetická pole o amplitudě $\frac{3}{2}$ krát větší, než je pole vytvořené jednou fází.

Pod pojmem harmonické vinutí je tedy možné též rozumět takové vinutí, které je rozloženo podél vzduchové mezery stroje harmonicky. Takovému harmonické trojfázové vinutí je zobrazeno na Obr. D.2



Obr. D.2: Znárodnění rozložení trojfázového harmonického vinutí podél vzduchové mezery.

Je zřejmé, že aby toto vinutí bylo možné fyzicky realizovat, je nutné ho umístit přímo do vzduchové mezery stroje mimo statorové, nebo rotorové drážky. Potom toto vinutí vytvoří ve vzduchové mezeře vrstvu $|N_0 \sin p\alpha| + |N_0 \sin (p\alpha - \frac{2}{3}\pi)| + |N_0 \sin (p\alpha - \frac{4}{3}\pi)|$ vodičů, její průběh je zobrazen na Obr. D.2. Při konstrukci vinutí s konstantním počtem vodičů, které vytvoří ve vzduchové mezeře stroje harmonické pole, je možné postupovat podle [45].

D.2 Magnetické napětí ve vzduchové mezeře m -fázového stroje

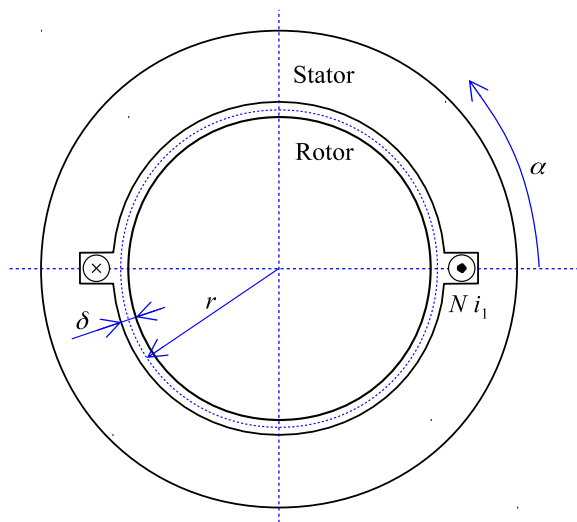
V této kapitole je stručně pojednáno o vzniku točivého magnetického pole třífázového asynchronního stroje ve vzduchové mezeře a možnosti nahrazení obecné m -fázové soustavy soustavou dvoufázovou.

Při odvození jsou uvažovány následující zjednodušující předpoklady:

- (i) Magnetický obvod je lineární s velmi vysokou relativní permeabilitou statoru a rotoru, tj. je možné zanedbat úbytky magnetického napětí v železných částech stroje.
- (ii) Vinutí je umístěné v drážce s nulovou šířkou, tj. má podobu Diracových impulzů.

Na základě Obr. D.3 je možné odvodit, že vinutí protékané proudem i_1 vytvoří ve vzduchové mezeře na základě Ampérova zákona magnetické napětí

$$\mathcal{F} = \begin{cases} Ni_1 & 0 \leq \alpha < \pi \\ -Ni_1 & \pi \leq \alpha \leq 2\pi \end{cases} \quad (\text{D.2.1})$$



Obr. D.3: Znázornění jednoho závitu statorového vinutí.

které je možné rozvinout do Fourierovy řady

$$\mathcal{F} = \frac{4}{\pi} N i_1 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n}. \quad (\text{D.2.2})$$

Z tohoto je zřejmé, že jeden závit s plným krokem vytvoří ve vzduchové mezeře stroje magnetické napětí mající pouze liché harmonické.

Za předpokladu, že vinutí jedné fáze je tvořeno N závity uloženými ve dvou drážkách, pak magnetické napětí každé jednotlivé fáze trojfázového vinutí vzájemně posunutých o 120° lze zapsat jako

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \frac{4}{\pi} N i_1 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n}, \\ \mathcal{F}_2 &= \frac{4}{\pi} N i_2 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \left(n\alpha - \frac{2}{3}\pi n \right)}{n}, \\ \mathcal{F}_3 &= \frac{4}{\pi} N i_3 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \left(n\alpha + \frac{2}{3}\pi n \right)}{n}. \end{aligned} \quad (\text{D.2.3})$$

Za předpokladu, že trojfázová soustava vinutí je napájena harmonickým a symetrickým napětím začnou tímto vinutím protékat proudy

$$\begin{aligned} i_1 &= I \sin \omega t, \\ i_2 &= I \sin \left(\omega t - \frac{2}{3}\pi \right), \\ i_3 &= I \sin \left(\omega t + \frac{2}{3}\pi \right), \end{aligned} \quad (\text{D.2.4})$$

potom po dosazení (D.2.4) do (D.2.3) a po úpravě lze určit výsledné magnetické napětí trojfázového vinutí pro n -tou harmonickou

$$\mathcal{F}^{(n)} = \pm \frac{4}{\pi} \frac{3}{2n} N I \cos (n\alpha \mp \omega t), \quad (\text{D.2.5})$$

kde horní znaménka náleží harmonickým řádu $n = 1, 7, 13, 19, \dots$ a spodní harmonickým řádu $n = 5, 11, 17, 23, \dots$. Harmonické násobků tří jsou v symetrické trojfázové soustavě nulové. První skupina harmonických vytváří ve vzduchové mezeře magnetické pole, které rotuje

sousledně s první harmonickou, ale s rozdílnou rychlostí. Druhá skupina vytváří rotující magnetické pole, které se pohybuje proti směru první harmonické, tzn. jedná se o zpětné harmonické.

Obdobným způsobem lze postupovat pro soustavu dvoufázovou, kde magnetické osy jednotlivých vinutí jsou vzájemně posunuty o 90° a výsledný vztah pro magnetické napětí je

$$\mathcal{F}^{(n)} = \pm \frac{4}{\pi} \frac{1}{n} NI \cos(n\alpha \mp \omega t), \quad (\text{D.2.6})$$

kde horní znaménka náleží harmonickým řádu $n = 1, 5, 13, 17, \dots$ a spodní harmonickým řádu $n = 3, 7, 11, 19, 23, \dots$

V případě obecné symetrické m -fázové soustavy se magnetické napětí vypočte

$$\mathcal{F}^{(n)} = \frac{4}{\pi} NI \sum_{k=0}^{m-1} \left[\frac{1}{n} \sin\left(n\alpha - nk \frac{m-1}{m} \pi\right) \sin\left(\omega t - k \frac{m-1}{m} \pi\right) \right], \quad (\text{D.2.7})$$

kde k je pořadové číslo fáze. Součet výše uvedené řady je

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(n)} \cdot \left[\frac{\frac{4}{\pi} NI}{4n \cos \frac{\pi}{m} + 4n \cos \frac{(m-1)n\pi}{m}} \right]^{-1} &= \cos\left(\frac{\pi}{m} + n\alpha - \omega t\right) - \cos\left(\frac{\pi}{m} - n\alpha - \omega t\right) \\ &+ \cos\left[n\left(\pi - \frac{\pi}{m} + \alpha\right) - \omega t\right] \\ &- \cos\left[n\left(\pi - \frac{\pi}{m} + \alpha\right) + \omega t\right] \\ &- \cos\left[\frac{\pi}{m} + m(n+1)\pi - n(\pi + \alpha) - \omega t\right] \\ &+ \cos\left[\frac{\pi}{m} - m(n-1)\pi + n(\pi + \alpha) - \omega t\right] \\ &- \cos\left[\frac{n\pi}{m} + m(n+1)\pi - n(2\pi + \alpha) - \omega t\right] \\ &+ \cos\left[\frac{n\pi}{m} + m(n-1)\pi - n(2\pi + \alpha) + \omega t\right]. \end{aligned} \quad (\text{D.2.8})$$

Z porovnání vztahů (D.2.5) a (D.2.6) je zřejmé, že obecná trojfázová soustava není zcela nahraditelná dvoufázovou soustavou vinutí. Na druhou stranu lze říci, že pokud je m -fázová soustava vinutí harmonická, potom je vždy možné ji nahradit harmonickou dvoufázovou soustavou. Při přepočtu proudů z m -fázové soustavy do dvoufázové je nutné použít vztahů (D.2.6) a (D.2.8).

D.3 Analýza spřažené magnetického toku vinutí

Zde uvedené rovnice jsou podrobně odvozeny v [46], proto jsou zde uvedeny jen podstatné výsledky.

Libovolně složité vinutí je možné popsat pomocí tzv. hustoty vodičů $n(\alpha)$. Přesněji, hustota vodičů popisuje rozložení vinutí v drážkách stroje. A platí pro ni definiční vztah

$$n(\alpha) = \frac{dN(\alpha)}{d\alpha}. \quad (\text{D.3.1})$$

Aby vinutí, resp. hustota vinutí byla realizovatelná je nutné, aby splňovala následující podmínky:

(i) Integrál hustoty vodičů po celém obvodu vzduchové mezeře má nulovou hodnotu

$$\int_0^{2\pi} n(\alpha) d\alpha = 0. \quad (\text{D.3.2})$$

(ii) Integrál absolutní hodnoty hustoty vodičů po celém obvodu vzduchové mezeře udává dvojnásobek vodičů jednoho pólu daného vinutí, nebo též celkový počet závitů

$$\int_0^{2\pi} |n(\alpha)| d\alpha = 2N. \quad (\text{D.3.3})$$

Na základě hustoty vodičů lze vypočítat magnetickou indukci v obecné poloze α ve vzduchové mezeře

$$B(\alpha) = \frac{I_\mu \mu_0}{\delta_e} \int_0^\alpha n(\alpha) d\alpha, \quad (\text{D.3.4})$$

kde I_μ je magnetizační proud a δ_e je ekvivalentní délka vzduchové mezeře.

Dále je možné ukázat, že spřažený magnetický tok mezi vinutími popsanými hustotami n_1 a n_2 lze vypočítat na základě vztahu

$$\Psi_{1,2} = \frac{I_{\mu,1} \mu_0 l r}{\delta_e} \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\int n_1(\alpha) d\alpha - \langle n_1(\alpha) \rangle \right] \left[\int n_2(\alpha) d\alpha - \langle n_2(\alpha) \rangle \right] \right\} d\alpha, \quad (\text{D.3.5})$$

nebo též

$$\Psi_{1,2} = \frac{I_{\mu,1} \mu_0 l r}{\delta_e} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_\alpha^{2\pi} \left[\int n_1(\alpha) d\alpha - \langle n_1(\alpha) \rangle \right] d\alpha \right\} n_2(\alpha) d\alpha, \quad (\text{D.3.6})$$

kde $\langle n(\alpha) \rangle$ je střední hodnota neurčitého integrálu funkce $n(\alpha)$

$$\langle n(\alpha) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\int n(\alpha) d\alpha \right] d\alpha. \quad (\text{D.3.7})$$

Tato střední hodnota je pro většinu hustot vinutí nulová, protože splňují (D.3.2). Nenulová může být v případě, kdy je vinutí nesymetrické, viz např. kapitola 4.2.1.

Použitím vztahů (D.3.5) a (D.3.6), lze velmi snadno zjistit vlastní indukčnost vinutí i vzájemnou indukčnost libovolných dvou vinutí. Při praktických výpočtech je vhodné přepsat hustotu vodičů ve formě Fourierovy trigonometrické řady

$$n(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} [n_{a,k} \cos k\alpha + n_{b,k} \sin k\alpha], \quad (\text{D.3.8})$$

kde jednotlivé koeficienty Fourierova rozvoje jsou

$$n_{a,k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} n(\alpha) \cos(k\alpha) d\alpha, \quad (\text{D.3.9})$$

$$n_{b,k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} n(\alpha) \sin(k\alpha) d\alpha.$$

Pro k -tou harmonickou amplitudy hustoty vodičů platí

$$n_k = \sqrt{n_{a,k}^2 + n_{b,k}^2}. \quad (\text{D.3.10})$$

Na základě (D.3.10) a vztahu (D.3.6) lze ukázat, že indukčnost vinutí se skládá ze dvou částí a to vlastní indukčnosti pro první harmonickou a indukčnosti diferenciálního rozptylu pro všechny vyšší harmonické

$$L = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Psi_k}{I_{\mu}} = \pi \frac{\mu_0 l r}{\delta_e} n_1^2 + \pi \frac{\mu_0 l r}{\delta_e} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{n_k^2}{k^2}. \quad (\text{D.3.11})$$

Dále, je možné snadno ukázat, že činitel vinutí pro k -tou harmonickou je dán vztahem

$$k_{v,k} = \frac{\pi n_k}{2 N}. \quad (\text{D.3.12})$$

E | Prostorový vektor a jeho transformace

V tomto dodatku je pojednáno o prostorovém vektoru, o jeho základních vlastnostech a o jeho transformacích.

E.1 Prostorový vektor

Prostorovým vektorem se rozumí vektor v Gaussově rovině vzniklý jako algebraický součet okamžitých hodnot obecné veličiny \mathcal{X}^1 m -fázové soustavy promítnuté do do bázových souřadnic této soustavy

$$\hat{\mathcal{X}} = \mathcal{X}_1 + \tilde{a}\mathcal{X}_2 + \dots + \tilde{a}^{m-1}\mathcal{X}_m, \quad (\text{E.1.1})$$

kde komplexní číslo \tilde{a} reprezentuje fázový posun mezi dvěma fázemi v Gaussově komplexní rovině a je definováno výrazem

$$\tilde{a} = e^{j\frac{2\pi}{m}}. \quad (\text{E.1.2})$$

Pro takto definované komplexní číslo \tilde{a} platí:

- (i) $\sum_{i=1}^m \tilde{a}^{i-1} = 0$.
- (ii) $\tilde{a}^i = \tilde{a}^{-j}$, kde $i + j = m$ a $i, j \in \mathbb{Z}$.
- (iii) $\tilde{a}^{im} = 1$, kde $i \in \mathbb{Z}$.
- (iv) $(\tilde{a}^i)^* = \tilde{a}^{-i}$, kde symbol $*$ značí komplexní sdružení a $i \in \mathbb{Z}$.

V dalším textu je předpokládána symetrická m -fázová soustava², tzn. soustava kde součet okamžitých hodnot veličiny \mathcal{X} přes všechny fáze je nulový, tj. $\sum_m \mathcal{X}_m = 0$ a v ustáleném stavu má veličina \mathcal{X} ve všech fázích stejnou amplitudu, tj. $|\mathcal{X}_1| = |\mathcal{X}_2| = \dots = |\mathcal{X}_m|$.

E.2 Transformace do různých souřadnicových soustav

Obecný prostorový vektor $\hat{\mathcal{X}}$ definovaný vztahem (E.1.1) mající okamžitou polohu danou úhlem $\omega_s t$ je možné zobrazit v Gaussově rovině podle Obr. E.1 a). Je zřejmé, že tento vektor je možné formálně matematicky přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{X}} &= \mathcal{X}e^{j\omega_s t} \\ &= \underbrace{\mathcal{X} \cos \omega_s t}_{\Re_s} + j \underbrace{\mathcal{X} \sin \omega_s t}_{\Im_s}, \end{aligned} \quad (\text{E.2.1})$$

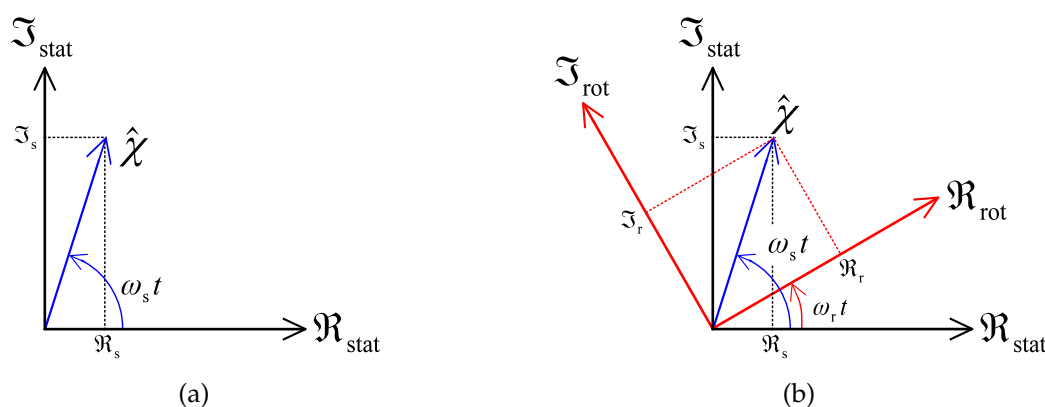
¹Tato může být např. napětí, proud, spřažený magnetický tok apod.

²Symetrická m -fázová soustava je každá m -fázová soustava napájená ze symetrického zdroje a mající ve všech fázích stejné parametry.

kde \mathcal{X} je velikost vektoru $\hat{\mathcal{X}}$. tj. $\mathcal{X} = |\hat{\mathcal{X}}|$, \mathfrak{R}_s a \mathfrak{S}_s reprezentují okamžité velikosti reálné a imaginární části prostorového vektoru $\hat{\mathcal{X}}$ promítnutých do statické³ souřadnicové soustavy s osami $\mathfrak{R}_{\text{stat}}$ a $\mathfrak{S}_{\text{stat}}$.

POZNÁMKA 7.

V dalším textu práce se předpokládá, že pokud je prostorový vektor bez jakéhokoliiv označení, potom je uvažován ve statorovém souřadnicovém systému, tj. $\hat{\mathcal{X}}^s \stackrel{!}{=} \hat{\mathcal{X}}$.



Obr. E.1: Transformace vektoru mezi dvěma souřadnicovými systémy.

Na základě Obr. E.1 b) lze zavést nový rotující⁴ souřadnicový systém mající absolutní rychlost ω_r vůči statickému souřadnicovému systému. Prostorový vektor v této nové souřadnicové soustavě je dán

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{X}}^r &= \mathcal{X} \cos(\omega_s t - \omega_r t) + j\mathcal{X} \sin(\omega_s t - \omega_r t) \\ &= \mathcal{X} e^{j(\omega_s t - \omega_r t)} \\ &= \hat{\mathcal{X}} e^{-j\omega_r t}. \end{aligned} \quad (\text{E.2.2})$$

Na Obr. E.2 jsou zobrazeny běžně používané souřadnicové systémy pro popis veličin v asynchronních strojích. Tyto systémy jsou:

- (i) Statorový souřadnicový systém – tento je obvykle statický a pevně spojený s reálnou osou v Gaussově rovině.
- (ii) Rotorový souřadnicový systém – tento systém se pohybuje rychlostí⁵ ω_r oproti statoru.
- (iii) Obecný souřadnicový systém – tento se pohybuje obecnou rychlostí ω_K oproti statoru.

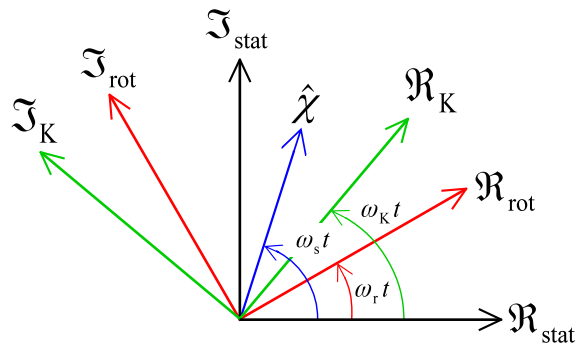
³Místo statické lze též uvažovat statorovou.

⁴Místo rotující lze též uvažovat rotorový.

⁵Toto platí jen v případě ustáleného stavu, kdy je možné vzájemnou polohu mezi státorem a rotorem zapsat

$$\theta_r = \int \omega_r dt + \theta_0,$$

kde θ_0 je počáteční poloha. Je zřejmé, že v ustáleném stavu a za předpokladu nulové počáteční polohy platí $\theta_r = \omega_r t$.



Obr. E.2: Souřadnicové systémy pro asynchronní stroj.

Na základě (E.2.2) je možné vektor $\hat{\mathcal{X}}$ vyjádřit v obecné souřadnicové soustavě

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{X}}^K &= \mathcal{X}e^{j(\omega_s t - \omega_K t)} \\ &= \hat{\mathcal{X}}e^{-j\omega_K t}.\end{aligned}\tag{E.2.3}$$

A porovnáním (E.2.2) a (E.2.3) je možné určit převodní vztah mezi reprezentacemi vektoru $\hat{\mathcal{X}}$ v obecném a rotorovém souřadnicovém systému

$$\hat{\mathcal{X}}^r = \hat{\mathcal{X}}^K e^{j(\omega_K - \omega_r)t}.\tag{E.2.4}$$

E.3 Zpětný výpočet složek prostorového vektoru

Ze vztahu (E.1.1) plyne, že libovolnou veličinu \mathcal{X} symetrické m -fázové soustavy je možné v Gaussově rovině zobrazit jedním prostorovým vektorem $\hat{\mathcal{X}}$. Tato kapitola se stručně zabývá možností zpětné transformace prostorového vektoru $\hat{\mathcal{X}}$ na jednotlivé složky m -fázové soustavy.

Libovolnou m -fázovou soustavu je vždy možné transformovat do jiné soustavy mající stejný počet fází a taktéž je možné vždy najít inverzní transformaci. Ve zvláštních případech je možné transformovat m -fázovou soustavu do soustavy mající méně než m fází. Např. pomocí Clarkovy transformace lze převést trojfázovou soustavu do soustavy dvoufázové a zpět. V případě symetrické soustavy je možné provést transformace $(a, b, c) \leftrightarrow (\alpha, \beta)$. Pokud soustava není symetrická, již nelze provést zpětnou transformaci $(a, b, c) \leftarrow (\alpha, \beta)$ a je nutné transformovat trojfázovou soustavu opět do soustavy trojfázové, tj. $(a, b, c) \leftrightarrow (\alpha, \beta, 0)$.

Na základě [47, 48] lze libovolnou m -fázovou soustavu transformovat

$$\hat{\mathcal{X}} = T\mathcal{X},\tag{E.3.1}$$

kde \mathcal{X} reprezentuje transformovanou veličinu např. napětí a jednotlivé vektory, resp. matice jsou

$$\mathcal{X} = (\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \dots, \mathcal{X}_m)^\top, \quad (\text{E.3.2})$$

$$\hat{\mathcal{X}} = (\mathcal{X}'_1, \mathcal{X}'_2, \mathcal{X}'_3, \dots, \mathcal{X}'_m)^\top, \quad (\text{E.3.3})$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \tilde{a} & \tilde{a}^2 & \dots & \tilde{a}^{m-2} & \tilde{a}^{m-1} \\ 1 & \tilde{a}^2 & \tilde{a}^4 & \dots & \tilde{a}^{2(m-2)} & \tilde{a}^{2(m-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \tilde{a}^{m-1} & \tilde{a}^{2(m-1)} & \dots & \tilde{a}^{(m-1)(m-2)} & \tilde{a}^{(m-1)(m-1)} \end{pmatrix}. \quad (\text{E.3.4})$$

Zpětná transformace je na základě (E.3.1) dána

$$\mathcal{X} = T^{-1} \hat{\mathcal{X}}, \quad (\text{E.3.5})$$

kde inverzní matice T^{-1} se určí jako komplexně sdružená matice k matici T

$$T^{-1} = \frac{1}{m} T^*. \quad (\text{E.3.6})$$

V případě symetrické m -fázové soustavy, je možné ukázat, že vektor $\hat{\mathcal{X}}$ má pouze dva nenulové členy

$$\hat{\mathcal{X}} = (0, \hat{\mathcal{X}}, 0, \dots, \hat{\mathcal{X}}^*)^\top. \quad (\text{E.3.7})$$

Těmito členy jsou vždy druhý a poslední prvek vektoru $\hat{\mathcal{X}}$ reprezentující prostorový vektor $\hat{\mathcal{X}}$ a jeho komplexně sdruženou hodnotu $\hat{\mathcal{X}}^*$.

Inverzní transformaci symetrické m -fázové soustavy je potom možné provést pouze ze znalosti \mathcal{X} a jeho komplexně sdružené hodnoty

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{X}_2 \\ \mathcal{X}_3 \\ \vdots \\ \mathcal{X}_m \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \tilde{a}^{-1} & \tilde{a}^{1-m} \\ \tilde{a}^{-2} & \tilde{a}^{2(1-m)} \\ \vdots & \vdots \\ \tilde{a}^{1-m} & \tilde{a}^{-(1-m)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{X}} \\ \hat{\mathcal{X}}^* \end{pmatrix}, \quad (\text{E.3.8})$$

z čehož s využitím vlastností komplexního čísla \tilde{a} lze snadno určit k -tý prvek vektoru \mathcal{X}

$$\mathcal{X}_k = \frac{2}{m} \Re \{ \tilde{a}^{1-k} \hat{\mathcal{X}} \}. \quad (\text{E.3.9})$$

E.4 Běžně používané transformace

Mezi nejvíce používané transformace patří: transformace Clarkové sloužící k převodu trojfázové soustavy do soustavy dvoufázové a transformace Parkova sloužící k převodu dvoufázové soustavy do dvoufázové rotující soustavy.

Tyto transformace je možné dále dělit na:

- (i) Napěťově a proudově invariantní, tj. elektrické veličiny v trojfázové soustavě mají shodné velikosti jako jejich transformované hodnoty ve dvoufázové soustavě, zatímco výkony v obou soustavách jsou rozdílné.
- (ii) Výkonově invariantní, tj. výkon v trojfázové soustavě je shodný s výkonem ve dvoufázové soustavě, zatímco napětí a proudy mají v obou soustavách rozdílné hodnoty.

POZNÁMKA 8.

Pokud nebude řečeno jinak, výše uvedené transformace jsou uvažovány jako napěťově invariantní.

E.4.1 Clarkové transformace

Po pojmem Clarkové transformace je chápána transformace m -fázové soustavy do soustavy dvoufázové. V případě trojfázové soustavy je často označovaná též jako $(a, b, c) \leftrightarrow (\alpha, \beta)$. Tato transformace v podstatě transformuje m -fázovou soustavu pomocí prostorového vektoru, který je násoben konstantou v závislosti na tom, která invariantnost je požadována

- (i) pro napěťově invariantní

$$\hat{\mathcal{X}} = \frac{2}{m} (\mathcal{X}_1 + \tilde{a}\mathcal{X}_2 + \dots + \tilde{a}^{m-1}\mathcal{X}_m). \quad (\text{E.4.1})$$

- (ii) pro výkonově invariantní

$$\hat{\mathcal{X}} = \sqrt{\frac{2}{m}} (\mathcal{X}_1 + \tilde{a}\mathcal{X}_2 + \dots + \tilde{a}^{m-1}\mathcal{X}_m). \quad (\text{E.4.2})$$

Zpětnou transformaci lze na základě předešlé teorie definovat

- (i) pro napěťově invariantní

$$\mathcal{X}_k = \Re \{ \tilde{a}^{1-k} \hat{\mathcal{X}} \}. \quad (\text{E.4.3})$$

- (ii) pro výkonově invariantní

$$\mathcal{X}_k = \sqrt{\frac{2}{m}} \Re \{ \tilde{a}^{1-k} \hat{\mathcal{X}} \}. \quad (\text{E.4.4})$$

Vypočítaný výkon, popřípadě moment je nutné násobit konstantou $\frac{m}{2}$ při napěťově invariantní transformaci. V případě výkonově invariantní transformace má vypočtený výkon skutečnou velikost a není jej nutné přepočítávat.

E.4.2 Parkova transformace

Pod pojmem Parkova transformace je chápána transformace obecné dvoufázové soustavy do nového souřadnicového systému, který obvykle synchronně rotuje s transformovanými veličinami. Obvyklé značení je $(\alpha, \beta) \leftrightarrow (d, q)$. Za předpokladu, že symetrická m -fázová soustava má kmitočet ω , pak prostorový vektor vypočtený podle E.4.1 též rotuje v Gaussově rovině rychlostí ω . Parkovu transformaci je možné potom provést prostým vynásobením $e^{-j\omega t} \hat{\mathcal{X}}$, čímž dojde k odstranění časové závislosti transformované veličiny.

E.5 Vzájemné převody soustav s různými počty fází

Pro symetrickou m_1 -fázovou soustavu v zapojení do hvězdy, viz. Obr. E.3, je napětí k -té fáze

$$u_{k,1} = \sqrt{2}U_1 \sin \left[\omega t - (k-1) \frac{2\pi}{m_1} \right] \quad (\text{E.5.1})$$

a proud k -tou fází je

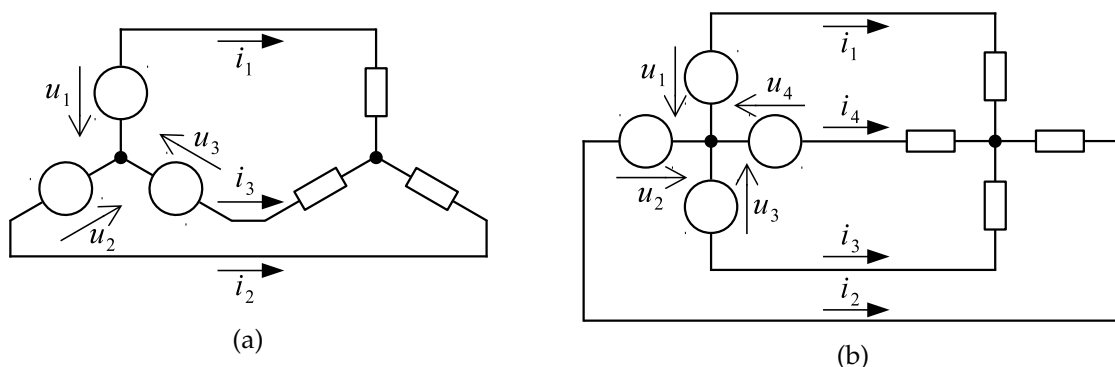
$$i_{k,1} = \sqrt{2}I_1 \sin \left[\omega t - (k-1) \frac{2\pi}{m_1} - \varphi \right]. \quad (\text{E.5.2})$$

Obdobně pro m_2 -fázovou soustavu je napětí

$$u_{k,2} = \sqrt{2}U_2 \sin \left[\omega t - (k-1) \frac{2\pi}{m_2} \right] \quad (\text{E.5.3})$$

a proud je

$$i_{k,2} = \sqrt{2}I_2 \sin \left[\omega t - (k-1) \frac{2\pi}{m_2} - \varphi \right]. \quad (\text{E.5.4})$$



Obr. E.3: Znázornění třífázové a čtyřfázové soustavy zapojené do hvězdy.

Prakticky je možné nalézt nekonečně mnoho způsobů pomocí kterých je možné transformovat m_2 -fázovou soustavu na m_1 -fázovou. Zde je vybrána transformace na konstantní výkon, tj. okamžitý výkon m_1 -fázové a m_2 -fázové soustavy je stejný,

$$\sum_{k=1}^{m_1} u_{k,1} i_{k,1} \stackrel{!}{=} \sum_{k=1}^{m_2} u_{k,2} i_{k,2} \quad (\text{E.5.5})$$

a dále se předpokládá, že napětí jednotlivých soustav je úměrné⁶ podle vztahu

$$U_1 = k_U U_2. \quad (\text{E.5.6})$$

Je snadné ukázat, že výkon v libovolné symetrické m -fázové soustavě se dá vyjádřit

$$\sum_{k=1}^m u_k i_k = mUI \cos \varphi. \quad (\text{E.5.7})$$

Potom pro čistě činnou zátěž z rovnosti výkonů (E.5.5) vychází vzájemný vztah mezi odpory obou soustav

$$R_1 = R_2 k_U^2 \frac{m_1}{m_2}, \quad (\text{E.5.8})$$

⁶Při odvozování napěťových rovnic asynchronního stroje je předpokládáno, že obě napětí jsou totožné.

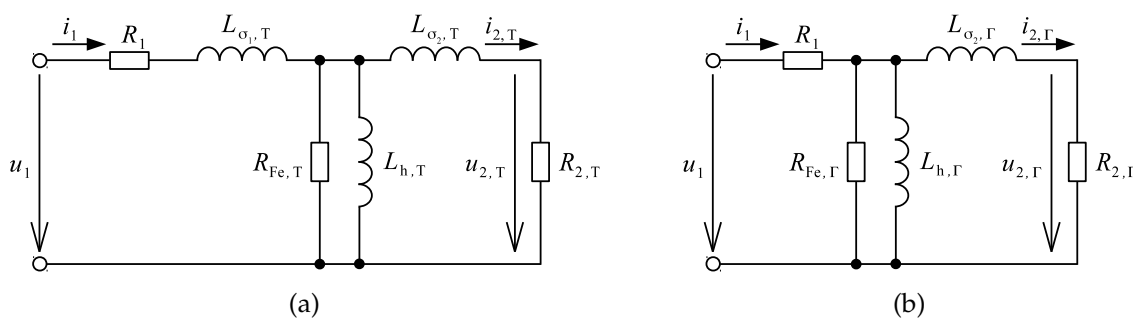
obdobně vychází i převod mezi indukčnostmi. Převod proudů vychází z Ohmova zákona a vztahů (E.5.6) a (E.5.8)

$$I_1 = I_2 \frac{1}{k_U} \frac{m_2}{m_1}. \quad (\text{E.5.9})$$

F | Nemožnost přepočtu T-článku na Γ -článek s uvážením R_{Fe}

V kapitole 7.1.2 je odvozen přepočet parametrů mezi libovolnými dvěma náhradními zapojeními jedné fáze asynchronního stroje, pokud je odpor reprezentující ztráty v železe R_{Fe} uvažován za odporem statorového vinutí R_1 , viz Obr. 7.4.

V případě, že odpor R_{Fe} je v náhradním zapojení zařazen paralelně s hlavní indukčností L_h podle Obr. F.1, potom takovýto přepočet není proveditelný.



Obr. F.1: Náhradní zapojení ASM ve tvaru T a Γ -článku s R_{Fe} .

Postup důkazu je obdobný jako v kapitole 7.1.2, tzn. jsou vypočteny vstupní impedance obou náhradních zapojení podle Obr. F.1 a) a b) a následně jsou porovnány výrazy pro jednotlivé mocniny $p_{\mathcal{L}}$. V případě přepočtu T-článku na Γ -článek je postačující určit vztah pro nejvyšší mocninu $p_{\mathcal{L}}$

$$p_{\mathcal{L}}^5 : L_{h,T} L_{h,\Gamma} L_{\sigma_1,T} L_{\sigma_2,T} L_{\sigma_2,\Gamma} = 0. \quad (F.1)$$

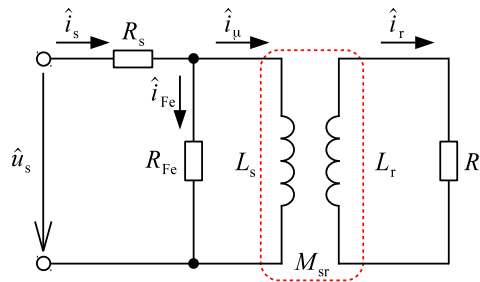
Z čehož je zřejmé, že v případě nenulových náhradních parametrů v T-článku musí být alespoň jeden z parametrů $L_{h,\Gamma}$, nebo $L_{\sigma_2,\Gamma}$ nulový. Toto řešení by ve finálním tvaru neodpovídalo Γ -článku. Tudíž neexistuje přepočet mezi T-článkem a Γ -článkem takový, aby byly zachovány veškeré proudové a výkonové poměry u obou zapojení. Příмым důsledkem je, že náhradní zapojení ve tvaru T-článku s uvážením R_{Fe} podle Obr. F.1 a) nelze převést na jiné libovolné ekvivalentní zapojení, tj. neexistuje ani vzájemný převod mezi Γ -článkem a T-článkem.

G | Dynamické modely s uvážením ztrát v železe

V kapitole 7.1.1 je ukázáno, že pro modelování ztrát v železe je dostatečné zařadit odpor respektující ztráty v železe těsně za satorový odpor. V dalších podkapitolách jsou ukázány varianty dynamických modelů asynchronních strojů s respektováním ztrát v železe.

G.1 Dynamický model popsaný prostorovým vektorem

Na základě kapitoly 7.1.1 je možné zcela formálně zkonstruovat schematické zapojení dynamického modelu podle Obr. G.1.



Obr. G.1: Schematické zobrazení dynamického modelu s respektováním ztrát v železe.

Podle Obr. G.1 je možné definovat nové proudy dynamického modelu. Nově se satorový proud i_s skládá z proudu odpovídající ztrátám v železe i_{Fe} a pracovnímu proudu i_μ dodávajícího do stroje potřebný proud na jeho magnetizaci a na pokrytí požadovaného výstupního výkonu. Při sestavování napěťových rovnic si je třeba uvědomit, že již neplatí, že satorový proud je čistě tokotvorný a momentotvorný, tuto roli má nově definovaný pracovní proud i_μ . Základní napěťové rovnice satoru a rotoru je možné napsat ve formě

$$\begin{aligned} \hat{u}_s &= R_s \hat{i}_s + \frac{dL_s \hat{i}_\mu}{dt} + \frac{d}{dt} M_{sr} e^{j\theta_r} \hat{i}_r, \\ \hat{u}_r &= R_r \hat{i}_r + \frac{dL_r \hat{i}_r}{dt} + \frac{d}{dt} M_{sr} e^{-j\theta_r} \hat{i}_\mu. \end{aligned} \quad (G.1.1)$$

K těmto rovnicím je třeba doplnit vztah mezi jednotlivými proudy satoru a pohybovou rovnicí

$$\begin{aligned} \hat{u}_s &= R_s \hat{i}_s + R_{Fe} \hat{i}_{Fe}, \\ \hat{i}_s &= \hat{i}_{Fe} + \hat{i}_\mu, \\ \frac{J}{p} \frac{d\omega_r}{dt} &= \frac{3}{2} p M_{sr} \Im \left\{ e^{-j\theta_r} \hat{i}_\mu \hat{i}_r^* \right\} - m_z. \end{aligned} \quad (G.1.2)$$

Tyto vztahy je vhodné dále upravit eliminací proudů \hat{i}_{Fe} a \hat{i}_s na tvar

$$\begin{aligned} \frac{R_{Fe}}{R_{Fe} + R_s} \hat{u}_s &= \frac{R_{Fe} R_s}{R_{Fe} + R_s} \hat{i}_\mu + \frac{dL_s \hat{i}_\mu}{dt} + \frac{d}{dt} M_{sr} e^{j\theta_r} \hat{i}_r, \\ \hat{u}_r &= R_r \hat{i}_r + \frac{dL_r \hat{i}_r}{dt} + \frac{d}{dt} M_{sr} e^{-j\theta_r} \hat{i}_\mu, \\ \frac{J}{p} \frac{d\omega_r}{dt} &= \frac{3}{2} p M_{sr} \Im \left\{ e^{-j\theta_r} \hat{i}_\mu \hat{i}_r^* \right\} - m_z, \end{aligned} \quad (G.1.3)$$

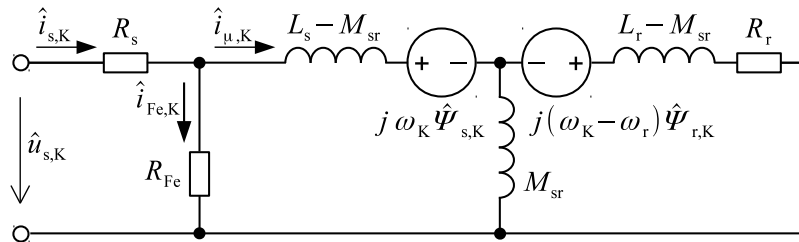
kde je možné zpětně eliminované proudy dopočítat

$$\begin{aligned} \hat{i}_s &= \frac{1}{R_{Fe} + R_s} \hat{u}_s + \frac{R_{Fe}}{R_{Fe} + R_s} \hat{i}_\mu, \\ \hat{i}_{Fe} &= \frac{1}{R_{Fe} + R_s} \hat{u}_s - \frac{R_s}{R_{Fe} + R_s} \hat{i}_\mu. \end{aligned} \quad (G.1.4)$$

Je zřejmé, že struktura dynamických rovnic asynchronního stroje s respektováním ztrát v železe je totožná s již dříve odvozenými vztahy v kapitole 3, tj. (3.1.35) a (3.1.48). Došlo pouze ke změně velikosti napájecího statorového napětí a velikosti statorového odporu podle známé Théveninovy věty.

G.2 Dynamický model v obecné rotující soustavě

Ze vztahů (G.1.4) a použitím postupu z kapitoly 5 je možné získat dynamický model trojfázového asynchronního stroje s respektováním ztrát v železe. Ekvivalentní zapojení asynchronního stroje s respektováním ztrát v železe je zobrazeno na Obr. G.2.



Obr. G.2: Ekvivalentní zapojení asynchronního stroje s respektováním ztrát v železe v obecné rotující souřadnicové soustavě.

Odpovídající dynamické rovnice mají tvar

$$\begin{aligned} \frac{R_{Fe}}{R_{Fe} + R_s} \hat{u}_{s,K} &= \frac{R_{Fe} R_s}{R_{Fe} + R_s} \hat{i}_{s,K} + L_s \frac{d\hat{i}_{\mu,K}}{dt} + M_{sr} \frac{d\hat{i}_{r,K}}{dt} + j\omega_K \hat{\Psi}_{\mu,K}, \\ \hat{0} &= R_r \hat{i}_{r,K} + L_r \frac{d\hat{i}_{r,K}}{dt} + M_{sr} \frac{d\hat{i}_{\mu,K}}{dt} + j(\omega_K - \omega_r) \hat{\Psi}_{r,K}, \end{aligned} \quad (G.2.1)$$

kde jednotlivé sprážené toky jsou

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_{s,K} &= L_s \hat{i}_{\mu,K} + M_{sr} \hat{i}_{r,K}, \\ \hat{\Psi}_{r,K} &= L_r \hat{i}_{r,K} + M_{sr} \hat{i}_{\mu,K} \end{aligned} \quad (G.2.2)$$

a pohybová rovnice má tvar

$$\frac{J}{p} \frac{d\omega_r}{dt} = \frac{3}{2} p M_{sr} \Im \left\{ \hat{i}_{\mu,K} \hat{i}_{r,K}^* \right\} - m_z. \quad (G.2.3)$$

Pro zpětný výpočet statorového proudu a proudu odpovídajícímu ztrátám v železe je možné využít již dříve uvedené vztahy (G.1.4).

G.3 Dynamický model asynchronního stroje se zapojeným vinutím do hvězdy

Obdobně jako v předchozích případech je i model asynchronního stroje se zapojenými statorovými a rotorovými vinutími do hvězdy, viz kapitola 3.3, možné upravit tak, aby respektoval ztráty v železe.

Napěťové rovnice mají tvar

$$\begin{aligned} \frac{R_{Fe}}{R_{Fe} + R_s} u_{ab} &= \frac{R_{Fe} R_s}{R_{Fe} + R_s} (i_a - i_b) + \frac{d\Psi_{ab}}{dt}, \\ \frac{R_{Fe}}{R_{Fe} + R_s} u_{bc} &= \frac{R_{Fe} R_s}{R_{Fe} + R_s} (i_a + 2i_b) + \frac{d\Psi_{bc}}{dt}, \\ 0 &= R_r (i_A - i_B) + \frac{d\Psi_{AB}}{dt}, \\ 0 &= R_r (i_A + 2i_B) + \frac{d\Psi_{BC}}{dt}, \end{aligned} \quad (G.3.1)$$

kde sprážené magnetické toky jsou

$$\begin{aligned} \Psi_{ab} &= (i_{a,\mu} - i_{b,\mu}) L_s + (i_A - i_B) M_{sr} \cos \theta_r - \sqrt{3} (i_A + i_B) M_{sr} \sin \theta_r, \\ \Psi_{bc} &= (i_{a,\mu} + 2i_{b,\mu}) L_s + (i_A + 2i_B) M_{sr} \cos \theta_r + \sqrt{3} i_A M_{sr} \sin \theta_r, \\ \Psi_{AB} &= (i_A - i_B) L_r + (i_{a,\mu} - i_{b,\mu}) M_{sr} \cos \theta_r + \sqrt{3} (i_{a,\mu} + i_{b,\mu}) M_{sr} \sin \theta_r, \\ \Psi_{BC} &= (i_A + 2i_B) L_r + (i_{a,\mu} + 2i_{b,\mu}) M_{sr} \cos \theta_r - \sqrt{3} i_{a,\mu} M_{sr} \sin \theta_r \end{aligned} \quad (G.3.2)$$

a rovnice vnitřního elektromagnetického momentu má tvar

$$m_i = \sqrt{3} (i_A i_{b,\mu} - i_{a,\mu} i_B) M_{sr} \cos \theta_r - [i_{a,\mu} (2i_A + i_B) + i_{b,\mu} (i_A + 2i_B)] M_{sr} \sin \theta_r. \quad (G.3.3)$$

Zpětný dopočet jednotlivých proudů je možné za použití následujících vztahů

$$\begin{aligned} \hat{i}_k &= \frac{1}{R_{Fe} + R_s} \hat{u}_k + \frac{R_{Fe}}{R_{Fe} + R_s} \hat{i}_{k,\mu}, \\ \hat{i}_{k,Fe} &= \frac{1}{R_{Fe} + R_s} \hat{u}_k - \frac{R_s}{R_{Fe} + R_s} \hat{i}_{k,\mu}, \end{aligned} \quad (G.3.4)$$

kde k odpovídá jednotlivým statorovým fázím.

H | Analýza magnetické indukce v rotoru

Při výpočtu rozložení magnetické indukce v rotoru, resp. magnetického vektorového potenciálu v rotoru se vychází ze vztahu (B.2.4), kde proudová hustota J_i je nulová a magnetická indukce je nahrazena magnetickým vektorovým potenciálem (B.3.1). Rozepsáním tohoto vztahu vyjde tzv. Laplaceova rovnice v kartézských souřadnicích

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z(x, y)}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z(x, y)}{\partial y} \right] = 0, \quad (\text{H.1})$$

s ohledem na geometrii rotoru je vhodnější tento vztah převést do polárních souřadnic

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r}{\mu} \frac{\partial A_z(r, \varphi)}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z(r, \varphi)}{\partial \varphi} \right] = 0 \quad (\text{H.2})$$

s okrajovou podmínkou

$$A_z(r, \varphi) = A_k \cos k\varphi, \quad (\text{H.3})$$

kde A_z je magnetický vektorový potenciál v podélném směru stroje, A_k je amplituda magnetického vektorového potenciálu odpovídající k -té harmonické, k je řád harmonické, x a y jsou kartézské souřadnice, r a φ jsou polární souřadnice a R je poloměr rotoru.

Při uvážení lineárního magnetického materiálu má řešení (H.2) v polárních souřadnicích tvar

$$A_z(r, \varphi) = A_k \left(\frac{r}{R} \right)^2 \cos k\varphi. \quad (\text{H.4})$$

Z řešení (H.2), tj. z velikosti A_z v celém prostoru řešeného problému, lze snadno zjistit prostorové rozložení magnetické indukce

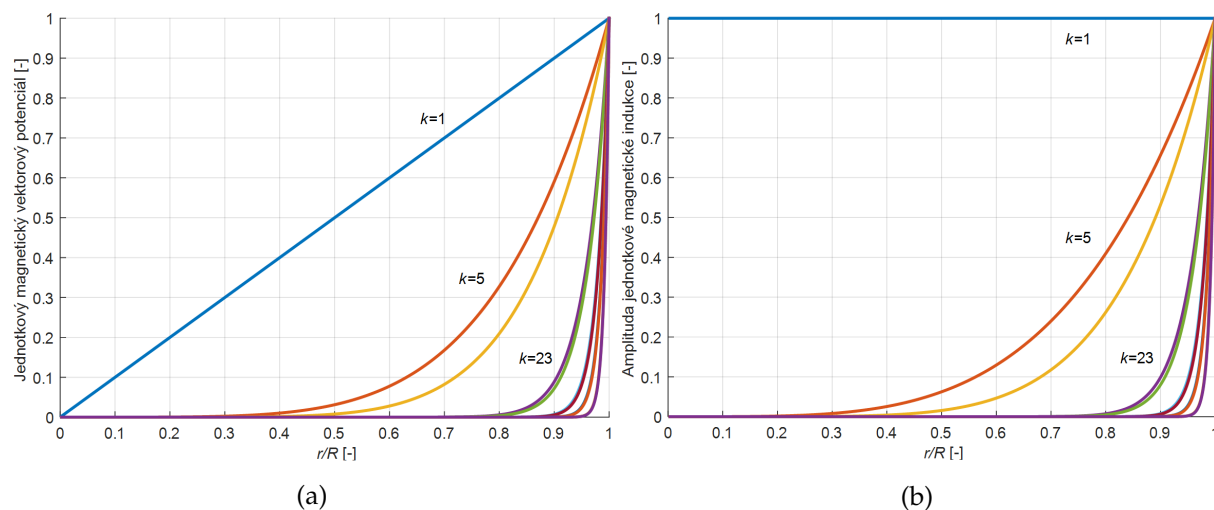
$$\mathbf{B}(r, \varphi) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z(r, \varphi)}{\partial \varphi}, -\frac{\partial A_z(r, \varphi)}{\partial r} \right). \quad (\text{H.5})$$

Dosazením (H.4) do (H.5) a po provedení naznačené derivace lze snadno zjistit velikost amplitudy magnetické indukce v polárních souřadnicích

$$|\mathbf{B}(r, \varphi)| = \frac{A_k k}{r} \left(\frac{r}{R} \right)^k. \quad (\text{H.6})$$

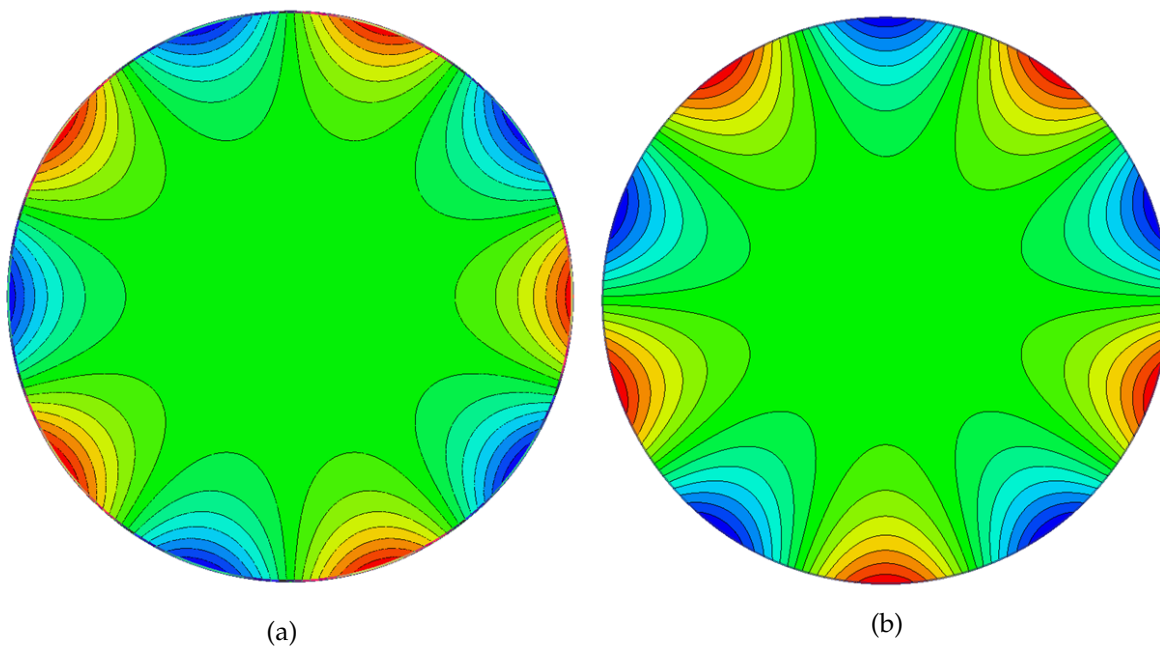
V případě, že permeabilitu feromagnetických plechů nelze považovat za lineární, je nutné rovnici (H.2) řešit numerickými metodami, resp. v softwarech k tomu určených.

Grafické zobrazení rovnic (H.4) a (H.6) je pro jednotkovou velikost amplitudy magnetického vektorového potenciálu a jednotkovou velikost amplitudy magnetické indukce na Obr. H.1.



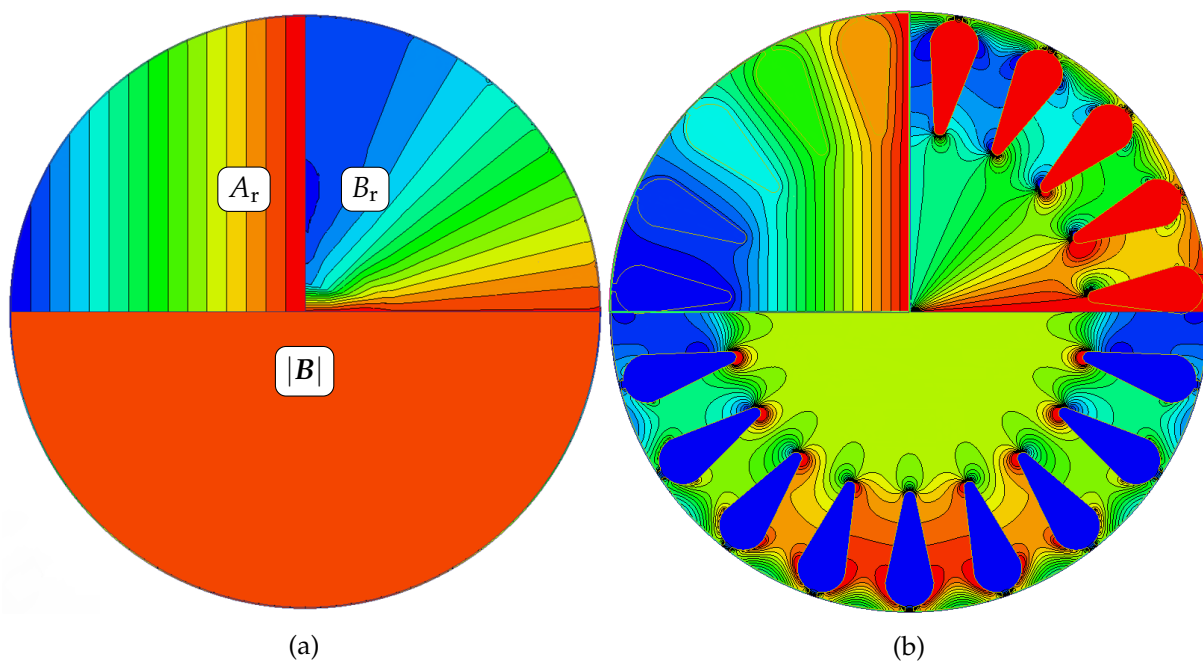
Obr. H.1: Průběh vektorového magnetického potenciálu a amplitudy magnetické indukce o jednotkové velikosti pro $\varphi = 0^\circ$.

Na Obr. H.2 jsou zobrazena rozložení magnetického vektorového potenciálu a radiální složky magnetické indukce v rotoru. Obrázky jsou exportovány z programu ANSYS Maxwell. Z obrázku je zřejmé, že v rotoru se vytvoří $2k$ magnetických pólů, každý o šířce $\frac{\pi}{k}$ radiánů, majících opačnou polaritu než je polarita magnetického pole statoru.

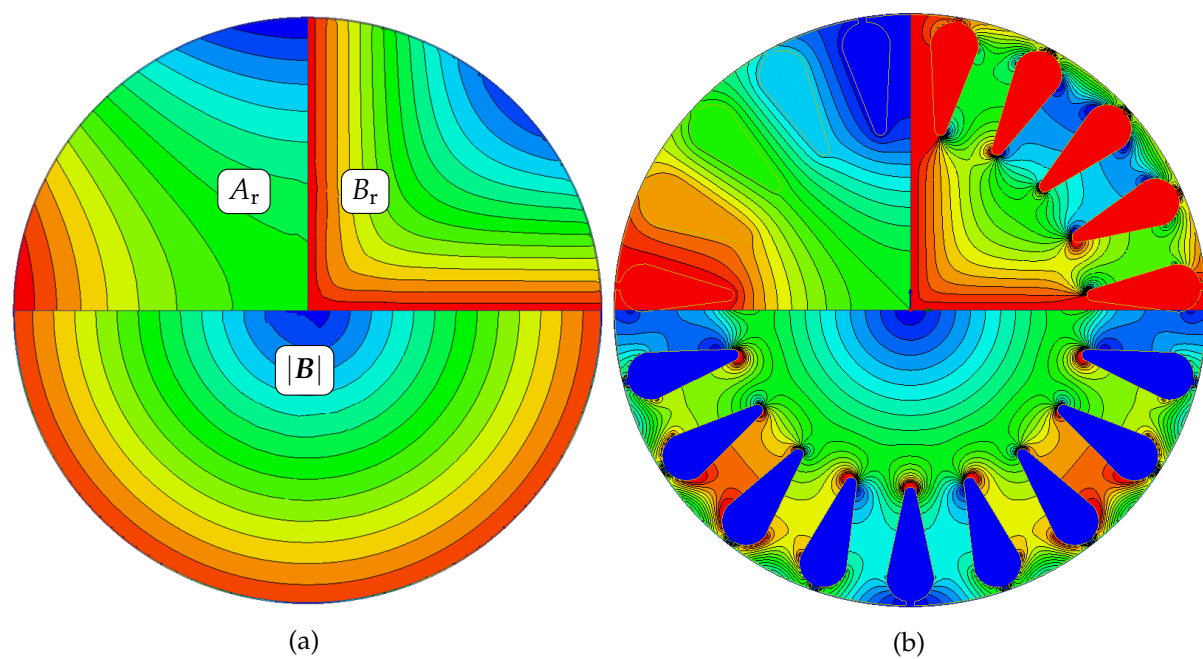


Obr. H.2: Rozložení magnetického vektorového potenciálu a rozložení radiální hodnoty magnetické indukce v rotoru pro pátou harmonickou.

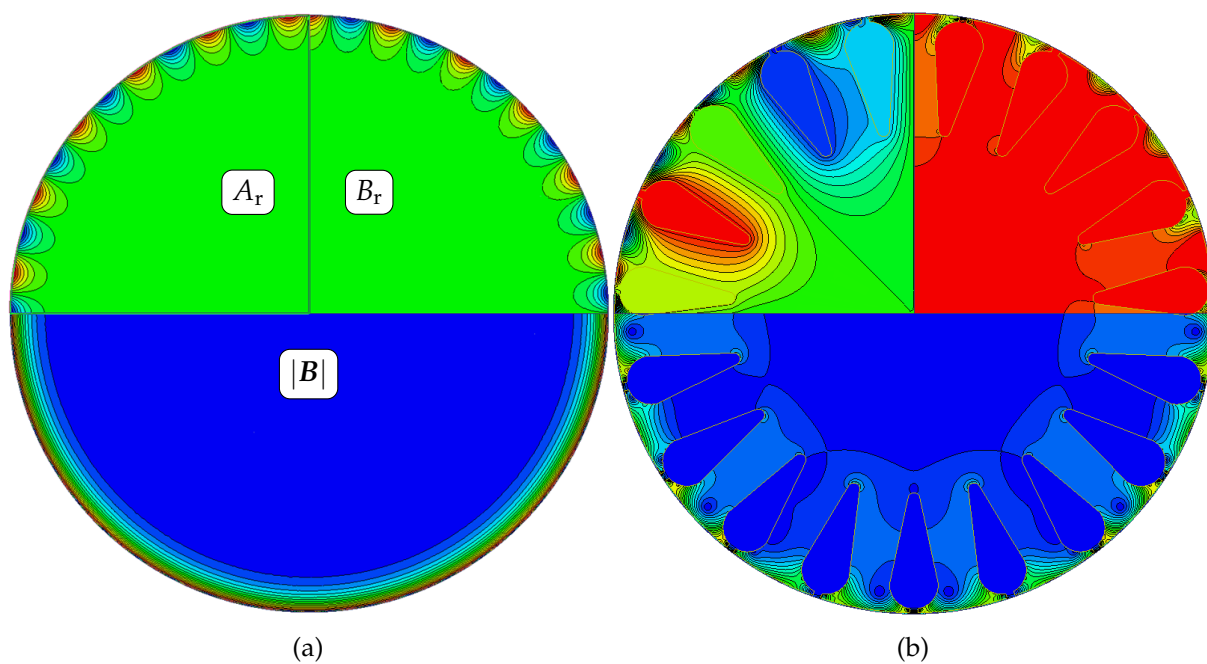
Průběhy radiální složky magnetického vektorového potenciálu a magnetické indukce s uvážením a bez uvážení drážek v rotoru jsou zobrazeny pro první, druhou a dvacátou třetí harmonickou na Obr. H.3, Obr. H.4 a Obr. H.5.



Obr. H.3: Rozložení magnetického vektorového potenciálu a magnetické indukce v rotoru pro první harmonickou.



Obr. H.4: Rozložení magnetického vektorového potenciálu a magnetické indukce v rotoru pro druhou harmonickou.



Obr. H.5: Rozložení magnetického vektorového potenciálu a magnetické indukce v rotoru pro dvacátou třetí harmonickou.

I | Citlivostní analýza – parametry

V tomto dodatku jsou vypsány jednotlivé parametry a_1, a_2, \dots pro výpočet citlivosti momentové charakteristiky na parametru x z kapitoly 8. Citlivost momentové charakteristiky na parametru x je obecně dána vztahem

$$\delta_{M,x} = -\frac{a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4}{a_5 s^4 + a_6 s^3 + a_7 s^2 + a_8 s + a_9} \frac{mpU_1^2}{\omega_s}. \quad (\text{I.0.1})$$

I.1 Statorový odpor

$$\begin{aligned} a_1 &= 2R_2 R_{\text{Fe}}^2 X_{\text{h}}^2 \left[X_{\text{h}}^2 X_{\sigma 2}^2 (R_1 + R_{\text{Fe}}) + R_1 R_{\text{Fe}}^2 (X_{\text{h}} + X_{\sigma 2})^2 \right], \\ a_2 &= 2R_2^2 R_{\text{Fe}}^3 X_{\text{h}}^4 (2R_1 + R_{\text{Fe}}), \\ a_3 &= 2R_2^3 R_{\text{Fe}}^2 X_{\text{h}}^2 \left[R_1 R_{\text{Fe}}^2 + X_{\text{h}}^2 (R_1 + R_{\text{Fe}}) \right], \\ a_4 &= 0, \\ a_5 &= [X_{\text{h}}^4 X_{\sigma 2}^4 (R_1 + R_{\text{Fe}})^4 + 2R_1^2 R_{\text{Fe}}^2 X_{\text{h}}^2 X_{\sigma 2}^2 (R_1 + R_{\text{Fe}})^2 (X_{\text{h}} + X_{\sigma 2})^2 \\ &\quad + R_1^4 R_{\text{Fe}}^4 (X_{\text{h}} + X_{\sigma 2})^4], \\ a_6 &= 4R_1 R_2 R_{\text{Fe}} X_{\text{h}}^2 (R_1 + R_{\text{Fe}}) \\ &\quad \cdot \left[2R_1 R_{\text{Fe}} X_{\text{h}}^2 X_{\sigma 2}^2 + R_{\text{Fe}}^2 X_{\text{h}}^2 X_{\sigma 2}^2 + R_1^2 (X_{\text{h}}^2 X_{\sigma 2}^2 + R_{\text{Fe}}^2 (X_{\text{h}} + X_{\sigma 2})^2) \right], \\ a_7 &= 2R_2^2 \left[R_1^4 R_{\text{Fe}}^4 X_{\text{h}}^2 + 3R_1^2 R_{\text{Fe}}^2 X_{\text{h}}^4 (R_1 + R_{\text{Fe}})^2 + X_{\sigma 2}^2 (R_1^2 R_{\text{Fe}}^2 + (R_1 + R_{\text{Fe}})^2 X_{\text{h}}^2) \right]^2 \\ &\quad + 2R_1^2 R_{\text{Fe}}^2 X_{\text{h}} X_{\sigma 2} (R_1^2 R_{\text{Fe}}^2 + (R_1 + R_{\text{Fe}})^2 X_{\text{h}}^2), \\ a_8 &= 4R_1 R_2^3 R_{\text{Fe}} X_{\text{h}}^2 (R_1 + R_{\text{Fe}}) \left[R_1^2 R_{\text{Fe}}^2 + X_{\text{h}}^2 (R_1 + R_{\text{Fe}})^2 \right], \\ a_9 &= R_2^4 \left[R_1^2 R_{\text{Fe}}^2 + X_{\text{h}}^2 (R_1 + R_{\text{Fe}})^2 \right]^2. \end{aligned} \quad (\text{I.1.1})$$

I.2 Rotorový odpor

$$\begin{aligned}
a_1 &= R_{\text{Fe}}^2 X_{\text{h}}^2 \left[2R_1 R_{\text{Fe}} X_{\text{h}}^2 X_{\sigma 2}^2 + R_{\text{Fe}}^2 X_{\text{h}}^2 X_{\sigma 2}^2 + R_1^2 \left(X_{\text{h}}^2 X_{\sigma 2}^2 + R_{\text{Fe}}^2 (X_{\text{h}} + X_{\sigma 2})^2 \right) \right], \\
a_2 &= 0, \\
a_3 &= R_2^2 R_{\text{Fe}}^2 X_{\text{h}}^2 \left[-R_1^2 R_{\text{Fe}}^2 - X_{\text{h}}^2 (R_1 + R_{\text{Fe}})^2 \right], \\
a_4 &= 0, \\
a_5 &= X_{\text{h}}^4 X_{\sigma 2}^4 (R_1 + R_{\text{Fe}})^4 + 2R_1^2 R_{\text{Fe}}^2 X_{\text{h}}^2 X_{\sigma 2}^2 (R_1 + R_{\text{Fe}})^2 (X_{\text{h}} + X_{\sigma 2})^2 \\
&\quad + R_1^4 R_{\text{Fe}}^4 (X_{\text{h}} + X_{\sigma 2})^4, \\
a_6 &= 4R_1 R_2 R_{\text{Fe}} X_{\text{h}}^2 (R_1 + R_{\text{Fe}}) \\
&\quad \cdot \left[2R_1 R_{\text{Fe}} X_{\text{h}}^2 X_{\sigma 2}^2 + R_{\text{Fe}}^2 X_{\text{h}}^2 X_{\sigma 2}^2 + R_1^2 \left(X_{\text{h}}^2 X_{\sigma 2}^2 + R_{\text{Fe}}^2 (X_{\text{h}} + X_{\sigma 2})^2 \right) \right], \\
a_7 &= 2R_2^2 \left[R_1^4 R_{\text{Fe}}^4 X_{\text{h}}^2 + 3R_1^2 R_{\text{Fe}}^2 X_{\text{h}}^4 (R_1 + R_{\text{Fe}})^2 + X_{\sigma 2}^2 \left(R_1^2 R_{\text{Fe}}^2 + (R_1 + R_{\text{Fe}})^2 X_{\text{h}}^2 \right) \right]^2 \\
&\quad + 2R_1^2 R_{\text{Fe}}^2 X_{\text{h}} X_{\sigma 2} \left(R_1^2 R_{\text{Fe}}^2 + X_{\text{h}}^2 (R_1 + R_{\text{Fe}})^2 \right), \\
a_8 &= 4R_1 R_2^3 R_{\text{Fe}} X_{\text{h}}^2 (R_1 + R_{\text{Fe}}) \left[R_1^2 R_{\text{Fe}}^2 + X_{\text{h}}^2 (R_1 + R_{\text{Fe}})^2 \right], \\
a_9 &= R_2^4 \left[R_1^2 R_{\text{Fe}}^2 + X_{\text{h}}^2 (R_1 + R_{\text{Fe}})^2 \right]^2
\end{aligned} \tag{I.2.1}$$

I.3 Odpor reprezentující ztráty v železe

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2R_1 R_2 R_{\text{Fe}} X_{\text{h}}^4 X_{\sigma 2}^2 (R_1 + R_{\text{Fe}}), \\
a_2 &= 2R_1^2 R_2^2 R_{\text{Fe}}^2 X_{\text{h}}^4, \\
a_3 &= 2R_1 R_2^3 R_{\text{Fe}} X_{\text{h}}^4 (R_1 + R_{\text{Fe}}), \\
a_4 &= 0, \\
a_5 &= \left[2R_1 R_{\text{Fe}} X_{\text{h}}^2 X_{\sigma 2}^2 + R_{\text{Fe}}^2 X_{\text{h}}^2 X_{\sigma 2}^2 + R_1^2 \left(X_{\text{h}}^2 X_{\sigma 2}^2 + R_{\text{Fe}}^2 (X_{\text{h}} + X_{\sigma 2})^2 \right) \right]^2, \\
a_6 &= 4R_1 R_2 R_{\text{Fe}} (R_1 + R_{\text{Fe}}) X_{\text{h}}^2 \\
&\quad \cdot \left[2R_1 R_{\text{Fe}} X_{\text{h}}^2 X_{\sigma 2}^2 + R_{\text{Fe}}^2 X_{\text{h}}^2 X_{\sigma 2}^2 + R_1^2 \left(X_{\text{h}}^2 X_{\sigma 2}^2 + R_{\text{Fe}}^2 (X_{\text{h}} + X_{\sigma 2})^2 \right) \right], \\
a_7 &= 2R_2^2 \left[R_1^4 R_{\text{Fe}}^4 X_{\text{h}}^2 + 3R_1^2 R_{\text{Fe}}^2 X_{\text{h}}^4 (R_1 + R_{\text{Fe}})^2 + X_{\sigma 2}^2 \left(R_1^2 R_{\text{Fe}}^2 + X_{\text{h}}^2 (R_1 + R_{\text{Fe}})^2 \right) \right]^2 \\
&\quad + 2R_1^2 R_{\text{Fe}}^2 X_{\text{h}} X_{\sigma 2} \left(R_1^2 R_{\text{Fe}}^2 + X_{\text{h}}^2 (R_1 + R_{\text{Fe}})^2 \right), \\
a_8 &= 4R_1 R_2^3 R_{\text{Fe}} X_{\text{h}}^2 (R_1 + R_{\text{Fe}}) \left[R_1^2 R_{\text{Fe}}^2 + X_{\text{h}}^2 (R_1 + R_{\text{Fe}})^2 \right], \\
a_9 &= R_2^4 \left[R_1^2 R_{\text{Fe}}^2 + X_{\text{h}}^2 (R_1 + R_{\text{Fe}})^2 \right]^2.
\end{aligned} \tag{I.3.1}$$

I.4 Rotorová rozptylová indukčnost

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2R_2 R_{\text{Fe}}^2 X_h^2 \left[2R_1 R_{\text{Fe}} X_h^2 X_{\sigma 2} + R_{\text{Fe}}^2 X_h^2 X_{\sigma 2} + R_1^2 (X_h^2 X_{\sigma 2} + R_{\text{Fe}}^2 (X_h + X_{\sigma 2})) \right], \\
a_2 &= 0, \\
a_3 &= 0, \\
a_4 &= 0, \\
a_5 &= X_h^4 X_{\sigma 2}^4 (R_1 + R_{\text{Fe}})^4 + 2R_1^2 R_{\text{Fe}}^2 X_h^2 X_{\sigma 2}^2 (R_1 + R_{\text{Fe}})^2 (X_h + X_{\sigma 2})^2 \\
&\quad + R_1^4 R_{\text{Fe}}^4 (X_h + X_{\sigma 2})^4, \\
a_6 &= 4R_1 R_2 R_{\text{Fe}} X_h^2 (R_1 + R_{\text{Fe}}) \\
&\quad \cdot \left[2R_1 R_{\text{Fe}} X_h^2 X_{\sigma 2}^2 + R_{\text{Fe}}^2 X_h^2 X_{\sigma 2}^2 + R_1^2 (X_h^2 X_{\sigma 2}^2 + R_{\text{Fe}}^2 (X_h + X_{\sigma 2})^2) \right], \\
a_7 &= 2R_2^2 \left[R_1^4 R_{\text{Fe}}^4 X_h^2 + 3R_1^2 R_{\text{Fe}}^2 X_h^4 (R_1 + R_{\text{Fe}})^2 + X_{\sigma 2}^2 (R_1^2 R_{\text{Fe}}^2 + (R_1 + R_{\text{Fe}})^2 X_h^2) \right]^2 \\
&\quad + 2R_1^2 R_{\text{Fe}}^2 X_h X_{\sigma 2} (R_1^2 R_{\text{Fe}}^2 + X_h^2 (R_1 + R_{\text{Fe}})^2), \\
a_8 &= 4R_1 R_2^3 R_{\text{Fe}} X_h^2 (R_1 + R_{\text{Fe}}) \left[R_1^2 R_{\text{Fe}}^2 + X_h^2 (R_1 + R_{\text{Fe}})^2 \right], \\
a_9 &= R_2^4 \left[R_1^2 R_{\text{Fe}}^2 + X_h^2 (R_1 + R_{\text{Fe}})^2 \right]^2.
\end{aligned} \tag{I.4.1}$$

I.5 Magnetizační indukčnost

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2R_1^2 R_2 R_{\text{Fe}}^4 X_h X_{\sigma 2} (X_h + X_{\sigma 2}), \\
a_2 &= 0, \\
a_3 &= 2R_1^2 R_2^3 R_{\text{Fe}}^4 X_h, \\
a_4 &= 0, \\
a_5 &= \left[2R_1 R_{\text{Fe}} X_h^2 X_{\sigma 2}^2 + R_{\text{Fe}}^2 X_h^2 X_{\sigma 2}^2 + R_1^2 (X_h^2 X_{\sigma 2}^2 + R_{\text{Fe}}^2 (X_h + X_{\sigma 2})^2) \right]^2, \\
a_6 &= 4R_1 R_2 R_{\text{Fe}} X_h^2 (R_1 + R_{\text{Fe}}) \\
&\quad \cdot \left[2R_1 R_{\text{Fe}} X_h^2 X_{\sigma 2}^2 + R_{\text{Fe}}^2 X_h^2 X_{\sigma 2}^2 + R_1^2 (X_h^2 X_{\sigma 2}^2 + R_{\text{Fe}}^2 (X_h + X_{\sigma 2})^2) \right], \\
a_7 &= 2R_2^2 s^2 \left[R_1^4 R_{\text{Fe}}^4 X_h^2 + 3R_1^2 R_{\text{Fe}}^2 X_h^4 (R_1 + R_{\text{Fe}})^2 + X_{\sigma 2}^2 (R_1^2 R_{\text{Fe}}^2 + X_h^2 (R_1 + R_{\text{Fe}})^2) \right]^2 \\
&\quad + 2R_1^2 R_{\text{Fe}}^2 X_h X_{\sigma 2} (R_1^2 R_{\text{Fe}}^2 + X_h^2 (R_1 + R_{\text{Fe}})^2), \\
a_8 &= 4R_1 R_2^3 R_{\text{Fe}} X_h^2 (R_1 + R_{\text{Fe}}) \left[R_1^2 R_{\text{Fe}}^2 + X_h^2 (R_1 + R_{\text{Fe}})^2 \right], \\
a_9 &= R_2^4 \left[R_1^2 R_{\text{Fe}}^2 + X_h^2 (R_1 + R_{\text{Fe}})^2 \right]^2.
\end{aligned} \tag{I.5.1}$$

J | Identifikace

J.1 Neurčitost parametrů při identifikaci pouze na momentovou charakteristiku

Tato identifikace vychází z předpokladu, že měřená a teoretická momentová charakteristika asynchronního stroje má tvar podle vztahu (7.2.24). Potom snahou identifikace je nalézt takové parametry asynchronního stroje, aby obě charakteristiky měly totožný tvar.

V kapitole 7.2.2 je ukázáno, že momentovou charakteristiku asynchronního stroje s konstantními parametry lze přepsat do tvaru

$$M = \frac{1}{a_2 s + a_1 s^{-1} + a_0}, \quad (7.2.24)$$

kde jednotlivé pomocné koeficienty v případě Γ -článku jsou

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2R_1\omega_s(R_1 + R_{Fe})}{R_{Fe}mpU_1^2}, \\ a_1 &= \frac{R_2\omega_s [R_1^2R_{Fe}^2 + X_h^2(R_1 + R_{Fe})^2]}{R_{Fe}^2mpU_1^2X_h^2}, \\ a_2 &= \frac{\omega_s R_1^2 [R_{Fe}^2(X_h + X_{\sigma 2})^2 + X_h^2X_{\sigma 2}^2] + 2\omega_s R_1 R_{Fe} X_h^2 X_{\sigma 2}^2 + R_{Fe}^2 X_h^2 X_{\sigma 2}^2}{R_2 R_{Fe}^2 mp U_1^2 X_h^2}. \end{aligned} \quad (J.1.1)$$

Z rovnice (7.2.24) plyne, že analyticky je možné určit právě tři parametry a_0 , a_1 a a_2 ze tří různých nenulových bodů¹ měřené momentové charakteristiky. Prakticky to znamená, že není možné identifikovat nezávisle všechny parametry libovolného náhradního zapojení, protože takových parametrů existuje nekonečně mnoho. V případě Γ -článku je nutné zvolit dva parametry jako známé, nebo je zanedbat a zbylé dopočítat.

Skluz zvratu lze snadno vypočítat

$$s_{zv} = \pm \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \quad (J.1.2)$$

a tomu odpovídá moment zvratu

$$M_{zv} = \frac{1}{a_0 \pm 2\sqrt{a_1 a_2}}. \quad (J.1.3)$$

Kladné znaménko odpovídá motorickému chodu a záporné generátorovému.

¹Měřeným bodem se rozumí hodnota skluzu a jemu odpovídající moment.

Za předpokladu, že odpor R_{Fe} a magnetizační indukčnost L_h mají dostatečně vysokou hodnotu oproti ostatním parametrům², je možné z (J.1.1) odhadnout parametry R_1 , R_2 a $X_{\sigma 2}$

$$\begin{aligned} R_1 &= a_0 \frac{mpU_1^2}{2\omega_s}, \\ R_2 &= a_1 \frac{mpU_1^2}{\omega_s}, \\ X_{\sigma 2} &= \sqrt{4a_1a_2 - a_0^2} \frac{mpU_1^2}{2\omega_s}. \end{aligned} \quad (J.1.4)$$

Takto vypočtené parametry jsou velmi dobrým prvotním odhadem parametrů asynchronního motoru.

Obvykle je hodnota statorového odporu známá, resp. je možné ji velmi snadno změřit a parametr a_0 je tedy možné považovat za známý. Pro prvotní estimaci velikosti R_2 a $X_{\sigma 2}$ je možné využít změřenou hodnotu momentu zvratu M_{zV} a skluzu zvratu s_{zV} . Výsledné vztahy mají tvar

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{1}{2} s_{zV} \left(\frac{mpU_1^2}{M_{zV}\omega_s} - 2R_1 \right), \\ X_{\sigma 2} &= \frac{\sqrt{(mpU_1^2 - 2M_{zV}R_1\omega_s)^2 - 4M_{zV}^2R_1^2\omega_s^2}}{2M_{zV}\omega_s}. \end{aligned} \quad (J.1.5)$$

Poslední, nejméně přesnou metodou odhadu pouze velikosti $X_{\sigma 2}$ je ze štítkových hodnot asynchronního motoru pro jmenovitý výkon a otáčky, tj. jmenovitý moment a skluz, za předpokladu, že velikost R_2 je známá³. Vztah pro odhad $X_{\sigma 2}$ má tvar

$$X_{\sigma 2} = s_n \sqrt{\frac{mp s_n R_2 U_1^2}{M_n \omega_s} - (s_n R_1 + R_2)^2}. \quad (J.1.6)$$

V Tab. J.1 jsou uvedeny hodnoty vypočtených parametrů asynchronního stroje na základě vztahů (J.1.4), (J.1.5) a (J.1.6). Je vidět, že takto odhadnuté parametry relativně dobře korespondují s parametry identifikovaného stroje vyjma identifikace z jmenovitého bodu stroje. Takováto identifikace je extrémně závislá na dobrém odhadu rotorového odporu.

Tab. J.1: Příklad hodnot parametrů z momentové charakteristiky.

Parametr	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_{Fe} [Ω]	L_h [H]	$L_{\sigma 2}$ [H]
Vypočteno z (J.1.4)	2,91	2,26	–	–	0,023
Vypočteno z (J.1.5)	(2,91)	2,16	–	–	0,018
Vypočteno z (J.1.6)	(2,91)	(2,91)	–	–	0,023

Čísla uvedená v závorce jsou známá při dané identifikaci

²V kapitole 8 je ukázáno, že tyto parametry nemají výrazný vliv na tvar momentové charakteristiky a proto je toto zjednodušení použitelné.

³Velikost R_2 se dá velmi hrubě aproximovat pomocí známe hodnoty R_1 .

J.2 Identifikace porovnáním přenosových funkcí

Je obecně známo, že přenosové funkce jsou definovány pouze pro lineární systémy s konstantními parametry, resp. s parametry nezávislými na kmitočtu. Z dřívějších kapitol je zřejmé, že asynchronní stroj představuje vysoce nelineární systém, ale i přesto je vhodné se zabývat jeho popisem pomocí přenosových funkcí⁴.

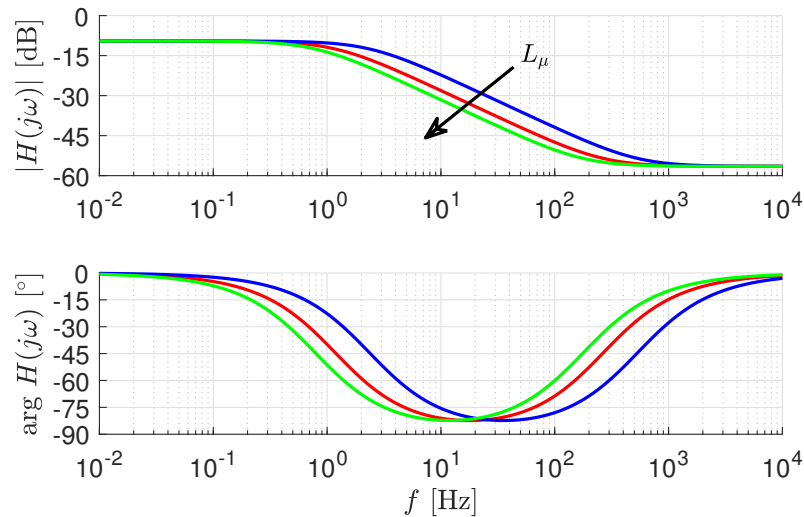
Na základě náhradního zapojení asynchronního stroje ve tvaru Γ -článku je snadné zkonstruovat přenosovou funkci mezi napájecím napětím a napájecím proudem ve stavu naprázdno při synchronních otáčkách

$$H(p_{\mathcal{L}}) = \frac{I_1}{U_1} = \frac{1}{R_s} \frac{1 + p_{\mathcal{L}}\tau_1}{1 + p_{\mathcal{L}}\tau_2}, \quad (\text{J.2.1})$$

kde jednotlivé časové konstanty jsou

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{L_h}{R_{Fe}}, \\ \tau_2 &= L_h \frac{R_{Fe} + R_s}{R_{Fe}R_s}. \end{aligned} \quad (\text{J.2.2})$$

Z těchto vztahů je zřejmé, že pro harmonické napětí v případě velmi nízkých kmitočtů, tj. $f \rightarrow 0$, má přenos tvar $\frac{1}{R_s}$ a v případě velmi vysokých kmitočtů, tj. $f \rightarrow \infty$, má přenos tvar $\frac{1}{R_s + R_{Fe}}$. Na Obr. J.1 jsou zobrazeny frekvenční charakteristiky asynchronního stroje ve stavu naprázdno při synchronní rychlosti. Dále je v obrázku zobrazen vliv změny magnetizační indukčnosti L_h při změně o $\pm 50\%$.



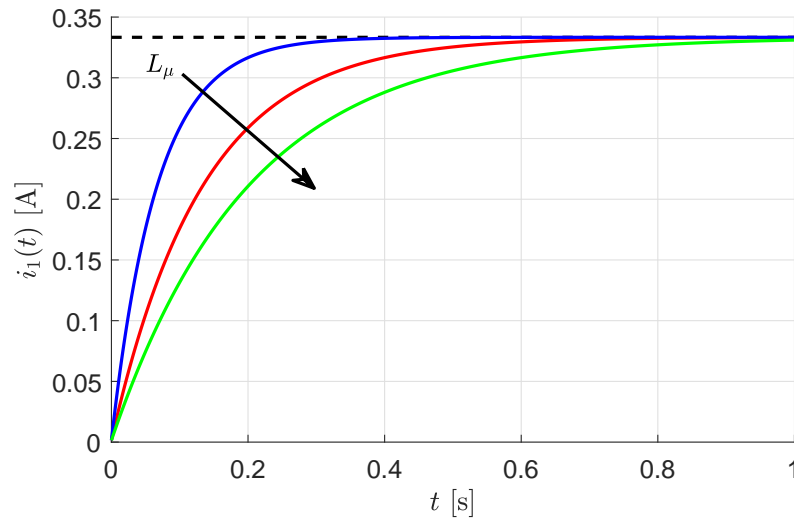
Obr. J.1: Přenos naprázdno.

Přechodovou charakteristiku, tj. odezvu na jednotkový skok, je snadné určit pomocí zpětné Laplaceovy transformace vztahu (J.2.1) vynásobeného výrazem $\frac{1}{p_{\mathcal{L}}}$. Výsledkem je

$$i_1(t) = \frac{1}{R_s} \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_2} \right) \right], \quad (\text{J.2.3})$$

⁴Vždy je možné daný pracovní stav a parametry stroje linearizovat pro daný kmitočet a sestavit přenosovou funkci. Takto sestavená přenosová funkce je sice platná pouze v jistém okolí linearizovaného bodu, ale vždy je možné sestavit těchto funkcí více a následně je aproximovat jedinou dostatečně přesnou přenosovou funkcí.

kde její grafický průběh je na Obr. J.2.



Obr. J.2: Odezva na jednotkový skok napájecího napětí ve stavu naprázdno.

Při znalosti velikostí časových konstant τ_1 a τ_2 je možné z (J.2.1) snadno vyjádřit výrazy pro výpočet L_h a R_{Fe}

$$\begin{aligned} L_h &= R_s (\tau_2 - \tau_1), \\ R_{Fe} &= R_s \left(\frac{\tau_2}{\tau_1} - 1 \right). \end{aligned} \quad (J.2.4)$$

Přenosovou funkci zatíženého⁵ stroje, resp. stroje nakrátko je možné vyjádřit

$$H(p_{\mathcal{L}}) = \frac{p_{\mathcal{L}}^2 L_h L_{\sigma 2} + p_{\mathcal{L}} [L_{\sigma 2} R_{Fe} + L_h (R_{Fe} + R_r)] + R_{Fe} R_r}{p_{\mathcal{L}}^2 L_h L_{\sigma 2} (R_{Fe} + R_s) + p_{\mathcal{L}} [L_h R_{Fe} R_r + L_{\sigma 2} R_{Fe} R_s + L_h R_s (R_{Fe} + R_r)] + R_{Fe} R_r R_s}. \quad (J.2.5)$$

Tento vztah je možné přepsat ve formě

$$H(p_{\mathcal{L}}) = \frac{\left(p_{\mathcal{L}} + \frac{1}{\tau_1}\right) \left(p_{\mathcal{L}} + \frac{1}{\tau_2}\right)}{\left(p_{\mathcal{L}} + \frac{1}{\tau_3}\right) \left(p_{\mathcal{L}} + \frac{1}{\tau_4}\right)}, \quad (J.2.6)$$

kde jednotlivé póly a nuly jsou

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_1} &= -\frac{L_{\sigma 2} R_{Fe} + L_h (R_{Fe} + R_r) + \sqrt{[L_{\sigma 2} R_{Fe} + L_h (R_{Fe} + R_r)]^2 - 4L_h L_{\sigma 2} R_{Fe} R_r}}{2L_h L_{\sigma 2}}, \\ \frac{1}{\tau_2} &= -\frac{L_{\sigma 2} R_{Fe} + L_h (R_{Fe} + R_r) - \sqrt{[L_{\sigma 2} R_{Fe} + L_h (R_{Fe} + R_r)]^2 - 4L_h L_{\sigma 2} R_{Fe} R_r}}{2L_h L_{\sigma 2}}, \\ \frac{1}{\tau_3} &= -\frac{a_1 + \sqrt{a_2}}{2L_h L_{\sigma 2} (R_{Fe} + R_s)}, \\ \frac{1}{\tau_4} &= -\frac{a_1 - \sqrt{a_2}}{2L_h L_{\sigma 2} (R_{Fe} + R_s)} \end{aligned} \quad (J.2.7)$$

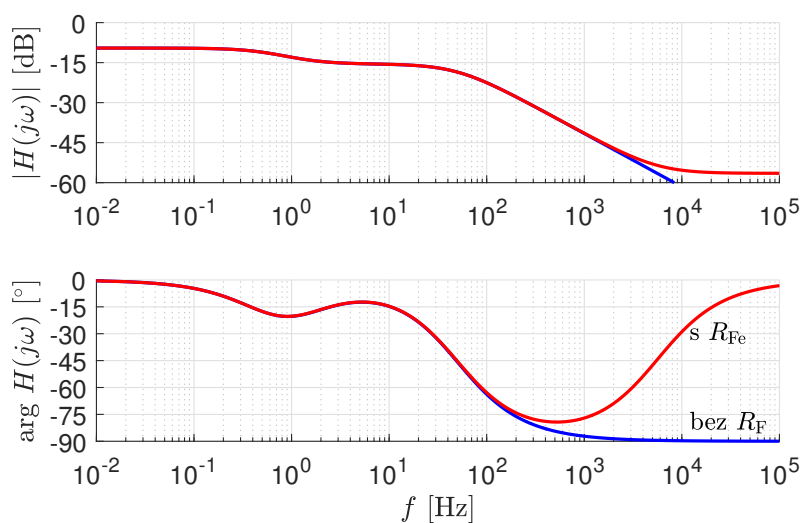
⁵V případě zatíženého stroje je třeba nahradit odpor R_r odporem $\frac{R_r}{s}$.

a kde jednotlivé pomocné proměnné jsou

$$\begin{aligned} a_1 &= L_h R_{Fe} R_r + L_h R_{Fe} R_s + L_{\sigma 2} R_{Fe} R_s + L_h R_r R_s, \\ a_2 &= [L_h R_{Fe} R_r + L_{\sigma 2} R_{Fe} R_s + L_h R_s (R_{Fe} + R_r)]^2 - 4L_h L_{\sigma 2} R_{Fe} R_r R_s (R_{Fe} + R_s). \end{aligned} \quad (J.2.8)$$

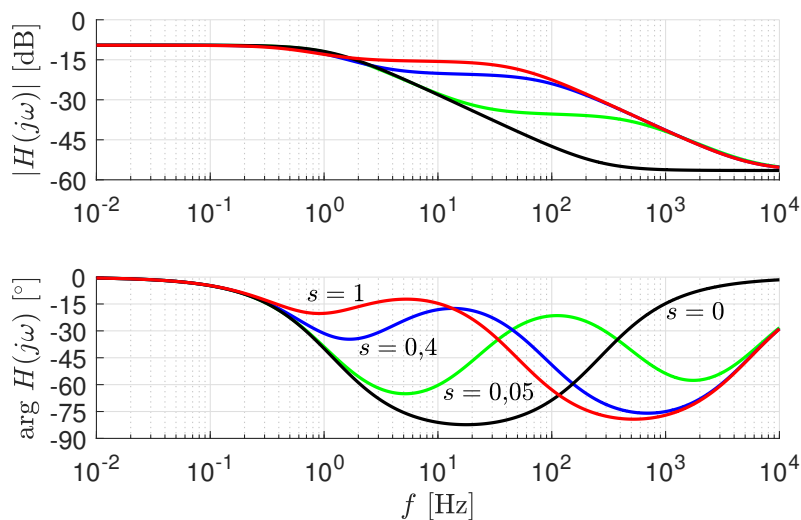
Na Obr. J.3 jsou zobrazeny frekvenční charakteristiky s respektováním a taktéž i zanedbáním odporu R_{Fe} . Přenosová funkce při zanedbání odporu R_{Fe} má tvar

$$H(p_{\mathcal{L}}) = \frac{p_{\mathcal{L}} (L_h + L_{\sigma 2}) + R_r}{p_{\mathcal{L}}^2 L_h L_{\sigma 2} + p_{\mathcal{L}} [L_{\sigma 2} R_s + L_h (R_r + R_s)] + R_r R_s}. \quad (J.2.9)$$



Obr. J.3: Porovnání přenosu nakrátko s a bez respektování R_{Fe} .

Na Obr. J.4 jsou zobrazeny frekvenční charakteristiky pro různé hodnoty skluzu, tj. pro různé zatížení asynchronního motoru.



Obr. J.4: Porovnání přenosů pro různé hodnoty skluzu.

K | Kalmanův filtr

K.1 Algoritmus Kalmanova filtru

Obecný diskretní nelineární systém lze popsat následujícími rovnicemi

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}[\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k] + \mathbf{w}_k, \quad (\text{K.1.1})$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}[\mathbf{x}_k] + \mathbf{v}_k, \quad (\text{K.1.2})$$

kde \mathbf{x} je vektor stavových veličin, \mathbf{u} je vektor vstupních veličin, $\mathbf{f}[\cdot]$ je funkce přechodu ze stavu v čase t_k do stavu v čase t_{k+1} , \mathbf{w} je kovarianční matice šumu modelu, \mathbf{z} je matice měřených veličin, $\mathbf{h}[\cdot]$ je funkce převádějící stav systému na měřitelné veličiny a \mathbf{v} je kovarianční matice šumu měření. V případě lineárního modelu platí následující identity

$$\mathbf{f}[\mathbf{x}] = \mathbf{A}_d \mathbf{x} + \mathbf{B}_d \mathbf{u}, \quad (\text{K.1.3})$$

$$\mathbf{h}[\mathbf{x}] = \mathbf{C}_c \mathbf{x}. \quad (\text{K.1.4})$$

Základní algoritmus rozšířeného Kalmanova filtru se podle [39,41,42] skládá z těchto kroků:

(i) Inicializace $\hat{\mathbf{x}}_0$, \mathbf{P}_0 , \mathbf{Q} a \mathbf{R} , kde \mathbf{P}_0 je kovarianční matice odhadu chyby, \mathbf{Q} je matice reprezentující chyby modelu a \mathbf{R} je matice reprezentující chyby měření.

(ii) Predikce stavu $\hat{\mathbf{x}}_k^-$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{f}[\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^-, \mathbf{u}_k]. \quad (\text{K.1.5})$$

(iii) Predikce kovarianční matice \mathbf{P}_k^-

$$\mathbf{F} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_k^-}, \quad (\text{K.1.6})$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{F} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{F}^T + \mathbf{Q}. \quad (\text{K.1.7})$$

(iv) Výpočet Kalmanova zesílení \mathbf{K}

$$\mathbf{H} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_k^-}, \quad (\text{K.1.8})$$

$$\mathbf{K}_k = \frac{\mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T}{\mathbf{H} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R}}. \quad (\text{K.1.9})$$

(v) Estimace stavu $\hat{\mathbf{x}}_k$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}[\hat{\mathbf{x}}_k^-]). \quad (\text{K.1.10})$$

(vi) Výpočet kovarianční matice \mathbf{P}_k

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{H} \mathbf{P}_k^-. \quad (\text{K.1.11})$$

K.1.1 Diskretizace spojitého systému

Stavové rovnice lineárního spojitého systému

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_c \mathbf{x} + \mathbf{B}_c \mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_c \mathbf{x} + \mathbf{D}_c \mathbf{u}\end{aligned}\quad (\text{K.1.12})$$

je nutné převést do diskrétního tvaru pro použití v Kalmanově filtru.

Matici soustavy je možné zdiskretizovat, viz např. [49], pomocí vztahu

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}_c T_s} = \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}_c^k T_s^k}{k!}, \quad (\text{K.1.13})$$

kde \mathbf{I} je jednotková matice. V praxi je často postačující využít při diskretizaci pouze prvního členu sumy, tj. $\mathbf{A}_d \cong \mathbf{I} + \mathbf{A}_c T_s$.

Matici vstupu je možné zdiskretizovat pomocí vztahu

$$\mathbf{B}_d = \left(e^{\mathbf{A}_c T_s} - \mathbf{I} \right) \mathbf{B}_c \mathbf{A}_c^{-1}, \quad (\text{K.1.14})$$

kde je opět možné použít pro výpočet \mathbf{B}_d přibližný vztah $\mathbf{B}_d \cong \mathbf{B}_c T_s$.

K.1.2 Numerický výpočet první derivace funkce $f(x)$

Velmi snadno je možné numericky vypočítat první derivace funkce $f(x)$, tj. i jednotlivé prvky Jacobiho matice, v programu MATLAB použitím komplexních čísel, viz [50].

Běžný numerický výpočet první derivace funkce $f(x)$ je možné provést pomocí známého vztahu

$$f'(x) \cong \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}, \quad (\text{K.1.15})$$

kde h reprezentuje číslo limitně se blížíící k nule. V MATLABu je toto reprezentováno konstantou *eps*. Nevýhoda tohoto způsobu výpočtu první derivace spočívá v nutnosti rozdílu obvykle velmi malých hodnot a následným podělením číslem h , tyto operace mohou být numericky nestabilní.

Podle výše citovaného článku je možné uvedeným nedostatkům předejít použitím komplexních čísel. Ve funkci $f(x)$ se zamění x ve smyslu $x \rightarrow x + jh$, a následně se tato funkce rozvine do Fourierovy řady kolem bodu x

$$\begin{aligned}f(x + jh) &= \sum_{k=0}^{\infty} (jh)^k \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \\ &= f(x) + jh f'(x) - h^2 \frac{f''(x)}{2!} - \dots\end{aligned}\quad (\text{K.1.16})$$

Zanedbáním druhých a vyšších mocnin h je možné tento vztah zjednodušit na

$$f(x + jh) = f(x) + jh f'(x). \quad (\text{K.1.17})$$

Uvážením pouze imaginární části vztahu

$$\Im \{f(x + jh)\} = h f'(x), \quad (\text{K.1.18})$$

je okamžitě možné vyjádřit vztah pro numerický výpočet první derivace

$$f'(x) = \frac{\Im \{f(x + jh)\}}{h}. \quad (\text{K.1.19})$$

Při praktické implementaci v MATLABu je vhodné h definovat alespoň jako $h = 10 \text{ eps}$.

Rejstřík

Činitel vazby, 33, 68

Ampérův zákon, 128

Divergence, 127

Dynamický model v
rotujících
souřadnicích, 40

Elektrická úhlová
rychlostí ω_r , 30, 38

Elektrický potenciál, 129

Faradayův indukční
zákon, 129

Gaussova věta, 127

Gradient, 126

Indukčnost \mathcal{L}_r , 33

Indukčnost \mathcal{L}_s , 32

Indukčnost L_h , 69

Indukčnost L_r , 38

Indukčnost $L_{\sigma 1}$, 69

Indukčnost $L_{\sigma 2}$, 69

Indukčnost L_s , 38

Indukčnost \mathcal{M}_{sr} , 34

Indukčnost \mathcal{M}_r , 34

Indukčnost \mathcal{M}_s , 33

Indukčnost \mathcal{M}_{sr} , 38

Indukované napětí, 129

Kalmanův filtr, 164

Lorentzova síla, 130

Magnetického tok, 129

Magnetický vektorový
potenciál, 129

Odpor R_2 , 69

Odpor R_r , 35

Odpor R_s , 35

Ohmův zákon, 130

Pohybová rovnice, 27

Rotace, 127

Skalární součin, 126

Stokesova věta, 127

Trojfázová napájecí
soustava, 29

Vektorový součin, 126