



## HABILITAČNÍ PRÁCE

RNDr. JITKA MACHALOVÁ, Ph.D.

*Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky  
Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci*

### Řešení úloh ohybu a kontaktu nelineárního nosníku

2018

# ANOTACE

Název práce: Řešení úloh ohybu a kontaktu nelineárního nosníku.

Abstrakt: Práce se zabývá dvěma problémy nelineárního nosníku a jejich numerickým řešením. Jde o úlohy ohybu nosníku a jeho kontaktu s deformovatelným podložím. Modelem nosníku, který je zde uvažován, je Gaův nelineární model, přičemž v práci se omezíme pouze na stacionární úlohy bez vlivu tření a s axiální silou nezpůsobující vybočování. Přístup, který zde byl zvolen, je založen na tzv. řízené variační metodě (control variational method). Ta byla svými autory M. Sofoneou a D. Tibou použita k řešení kontaktu lineárního Euler–Bernoulliho nosníku a pouze pro jeden speciální případ okrajových podmínek. Podstatou metody je převod problému na ekvivalentní úlohu optimálního řízení. Předložená práce tento postup zobecňuje a navíc uvádí vhodné numerické řešení, které je ilustrované řadou příkladů realizovaných na počítači.

Klíčová slova: Gaův nosník, kontaktní úlohy s normálovou poddajností, řízená variační metoda, úloha optimálního řízení, metoda konečných prvků.

Thesis title: Solutions of bending and contact problems for nonlinear beam.

Abstract: The thesis deals with two problems for a nonlinear beam and their numerical solution. These include problems regarding beam bending and contact problems with deformable foundation. The beam model under consideration is the Gao nonlinear model and here we restrict ourselves only to the stationary problems without friction and with axial force which does not cause buckling. The approach that was chosen here is based on the so-called control variational method. Its authors M. Sofonea and D. Tiba used it to solve contact problem of linear Euler–Bernoulli beam and only for one special case of boundary conditions. The idea of the method is to transform the original problem to an equivalent optimal control problem. Submitted thesis generalizes this method and additionally provides a suitable numerical solution which is illustrated by a number of examples implemented on a computer.

Keywords: Gao beam, contact problems with normal compliance, control variational method, optimal control problem, finite element method.

# Obsah

Úvod	3
<b>1 Řešení ohybu nelineárního nosníku</b>	<b>4</b>
1.1 Klasický Euler–Bernoulliho nosník . . . . .	4
1.2 Matematicko-fyzikální model Gaova nosníku . . . . .	9
1.3 Řízená variační metoda – CVM . . . . .	18
1.4 Ohyb Gaova nosníku pomocí CVM . . . . .	21
1.4.1 Problém (P1) s oboustranným vetknutím . . . . .	23
1.4.2 Problém (P2) s vetknutím na jednom a podepřením na druhém konci . . . . .	28
1.4.3 Problém (P3) s volným koncem . . . . .	29
1.4.4 Problém (P4) s prostým podepřením na obou koncích . . . . .	35
1.4.5 Závěr odstavce 1.4 . . . . .	38
<b>2 Kontaktní úlohy pro Gaův nosník</b>	<b>39</b>
2.1 Kontakt nosníku s překážkou . . . . .	39
2.1.1 Klasická formulace úloh pro standardní nosník . . . . .	39
2.1.2 Kontaktní podmínky . . . . .	41
2.1.3 Variační formulace úloh pro standardní nosník . . . . .	43
2.1.4 Formulace kontaktních úloh pro Gaův nosník . . . . .	45
2.2 Kontaktní úlohy pro Gaův nosník a deformovatelné podloží pomocí CVM . . . . .	48
2.2.1 Problém (P1) s oboustranným vetknutím . . . . .	49
2.2.2 Problém (P2) s vetknutím na jednom a podepřením na druhém konci . . . . .	51
2.2.3 Problém (P3) s volným koncem . . . . .	52
2.2.4 Problém (P4) s prostým podepřením na obou koncích . . . . .	54
2.2.5 Závěr odstavce 2.2 . . . . .	56
<b>3 Aproximace a numerická realizace jednotlivých úloh</b>	<b>57</b>
3.1 Aproximace úloh optimálního řízení . . . . .	57
3.2 Algebraická formulace úloh optimálního řízení . . . . .	58
3.3 Řešení stavových úloh pomocí MKP . . . . .	60
3.3.1 Řešení úlohy (SP(1)) . . . . .	60
3.3.2 Řešení úloh (SP(2)) a (SP(3)) . . . . .	64
3.4 Algoritmy pro minimalizaci funkcionalů . . . . .	65
<b>4 Příklady</b>	<b>67</b>
4.1 Výpočty úloh ohybu Gaova nosníku . . . . .	67
4.2 Výpočty kontaktních úloh s Gaovým nosníkem . . . . .	77
<b>Závěr</b>	<b>91</b>

<b>5</b>	<b>Dodatek 1</b>	
	Úloha optimálního řízení	<b>93</b>
<b>6</b>	<b>Dodatek 2</b>	
	Adjungovaný problém	<b>98</b>
<b>7</b>	<b>Dodatek 3</b>	
	<b>Transformace</b>	<b>101</b>
	7.1 Transformace T1 . . . . .	101
	7.2 Transformace T2 . . . . .	104
	7.3 Transformace T3 . . . . .	108
	<b>Seznam použité literatury</b>	<b>111</b>
	<b>Seznam některých značení</b>	<b>115</b>

# Úvod

Předložená habilitační práce se zabývá úlohami ohybu nosníku a jeho kontaktu s deformovatelným podložím. Taková problematika má četné aplikace, např. se jedná o různé části strojních zařízení, železniční a tramvajové koleje, vzpěry, mostní konstrukce, schodiště nebo střechy.

Nejčastěji používaným matematicko-fyzikálním modelem nosníku je klasický Euler–Bernoulliho model, jehož stáří přesahuje 260 let. Jeho výhodou je, že jde o jednoduchý lineární model, který přibližně vyhovuje v případech, kdy délka nosníku zřetelně převyšuje zbývající rozměry a kdy jeho průhyb není příliš velký. S rozvojem náročnějších konstrukcí je však někdy třeba zabývat se i složitějšími nelineárními modely. Mezi nimi patří dnes k neúspěšnějším model prof. Davida Y. Gaa z roku 1996 (viz [8], [12], [9]), který dokázal zachovat jednodimenzionální rozměr. Protože však obsahuje nelineární člen, nelze jeho průhyb vypočítat pomocí lineární soustavy rovnic, jak je tomu u klasického modelu při použití metody konečných prvků. Na tento model nosníku zde chceme zaměřit svoji pozornost.

Pro aplikace mají značnou důležitost i kontaktní úlohy, které jsou již z principu nelineárními úlohami. Jejich řešení v případě Gaova nosníku není jednoduché, jelikož se zde setkávají materiálová i geometrická nelinearita. Poznamenejme, že zde budeme uvažovat pouze statické problémy a nebudeme uvažovat vliv tření. Protože Gaův model obsahuje i axiální sílu, práce se z důvodu jednoduchosti omezuje na případ, kdy ještě nedochází k vybočování nosníku.

Jako zajímavý a perspektivní nástroj k řešení uvedených nelineárních problémů se jeví tzv. řízená variační metoda (control variational method). Její autoři M. Sofonea a D. Tiba ji použili při řešení kontaktu lineárního Euler–Bernoulliho nosníku s podložím, avšak pouze pro případ nosníku s volným koncem (viz [3], [45]). Další použití metody je obsažené v článcích [46] a [51]. Princip metody spočívá v tom, že se původní úloha převede na ekvivalentní úlohu optimálního řízení, která je příhodnější pro numerické řešení. Za zmínku jistě stojí i to, že autoři svoji metodu považují za vhodnou nejen pro výpočetní ale i analytické účely.

Prvním z cílů této práce bylo rozšířit a zobecnit postupy z uvedených článků na zbývající okrajové podmínky a zejména na Gaův nelineární model nosníku.

Druhým cílem bylo prověřit vhodnost tohoto přístupu pro numerickou realizaci na počítači.

Práce je rozčleněna do čtyř částí, přičemž v prvních dvou kapitolách je obsažena formulace úloh ohybu a kontaktu Gaova nosníku založená na zobecnění řízené variační metody. Toto zobecnění se opírá o transformace variačních principů (viz [18]). Použité transformace jsou kvůli přehlednosti umístěné v dodatku 3. Základy teorie k problematice úloh optimálního řízení, včetně podmínek optimality, jsou sepsané v dodatku 1. Dodatek 2 obsahuje krátký výklad o adjungovaných úlohách.

Druhá část práce je zaměřená na výpočetní aspekty uvažované problematiky. V kapitole 3 lze nalézt pojednání o aproximaci zkoumaných problémů se zaměřením na použití metody konečných prvků pro stavové úlohy. Algebraická formulace úloh je umožňuje implementovat na počítači. Vyřešené příklady obsahuje čtvrtá kapitola.

Některé výsledky již byly publikovány v článcích [29], [30], [31] a [36].

# 1. Řešení ohybu nelineárního nosníku

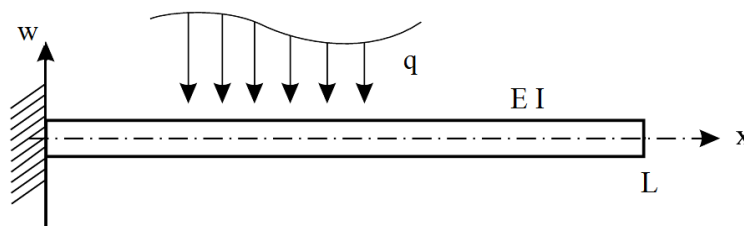
## 1.1 Klasický Euler–Bernoulliho nosník

Přibližně od roku 1750 je díky společnému úsilí *Leonharda Eulera* (1707–1783) a *Daniela Bernoulliho* (1700–1782) známé, že ohyb nosníku délky  $L$  lze popsat v rámci lineární teorie rovnicí

$$(EI w'')'' = q \quad \text{v } (0, L), \quad (1.1)$$

kde  $E$  značí Youngův modul pružnosti,  $I$  moment setrvačnosti průřezu (vzhledem k ose  $x$ ),  $w$  velikost průhybu a  $q$  je vertikální zatížení nosníku. Hodnota  $E$  tedy vyjadřuje materiálové vlastnosti nosníku, zatímco  $I$  jeho vlastnosti geometrické.

Tento matematický popis je vhodný pro tenké nosníky (tj. délka výrazně převyšuje nad zbylými rozměry) a malé hodnoty průhybu (tj. v porovnání s rozměry nosníku). Předpokládá se splnění tzv. Euler–Bernoulliho hypotézy: průřez, který je rovinný a kolmý na střednici nosníku před deformací musí zůstat rovinný a kolmý na střednici i po deformaci.



Obrázek 1.1: Euler–Bernoulliho nosník

Uvedený model důmyslně redukuje 3D objekt na jednorozměrnou strukturu prostřednictvím momentu setrvačnosti  $I(x)$ . Ten je obecně dán vztahem

$$I(x) = \int_{A(x)} y^2 dydz, \quad (1.2)$$

kde  $A(x)$  je plocha příčného průřezu nosníku v bodě  $x$ . Pro jednoduché typy průřezů lze získat jednoduché vztahy, v nichž vystupuje tloušťka nosníku  $h$  (měřená od jeho osy) a jeho šířka  $b$ , např. pro obdélníkový průřez je

$$I = \frac{2}{3} h^3 b, \quad (1.3)$$

pro nosník s kruhovým průřezem, jehož poloměr je  $r$ , máme  $I = \frac{1}{4} \pi r^4$ .

Tato redukce je ovšem limitovaná tím, že jak působící zatížení tak i výsledný průhyb nosníku se musí nacházet v téže vertikální rovině kolmé k ose  $z$ .

K rovnici (1.1) připojujeme ještě okrajové podmínky, které jsou vzhledem k tomu, že se jedná o diferenciální rovnici čtvrtého řádu, celkem čtyři, vždy po dvou v každém krajním bodě. Zároveň je nelze libovolně kombinovat, takže nakonec připadají do úvahy pouze následující kombinace:

(P1):  $w(0) = w'(0) = 0$ ,  $w(L) = w'(L) = 0$ ,  
nosník oboustranně vetknutý.

(P2):  $w(0) = w'(0) = 0$ ,  $w(L) = M(L) = 0$ ,  
nosník s vetknutím na jednom a podepřením na druhém konci.

(P3):  $w(0) = w'(0) = 0$ ,  $M(L) = V(L) = 0$ ,  
nosník s volným koncem  
(nazývaný také *konzolový* nebo *krakorcový* nosník).

(P4):  $w(0) = M(0) = 0$ ,  $w(L) = M(L) = 0$ ,  
nosník na dvou podporách.

Symbolem  $M$  zde značíme *ohybový moment* a symbolem  $V$  *posouvající sílu* v daném bodě:

$$M(x) = EIw''(x), \quad V(x) = (EIw''(x))'. \quad (1.4)$$

**Poznámka 1.1** Pro přesnost dodejme, že termínem „podpora“ zde rozumíme buďto *prosté podepření*, kdy se nosník o podporu pouze opírá, nebo *kloubovou podporu*, kdy je s ní pevně spojen. Typ podpory závisí na směru výslednice působícího zatížení v příslušném koncovém bodě.

Další využití tohoto modelu nosníku vyžaduje variační formulaci. Potenciální energie nosníku je dána výrazem

$$\Pi_{EB}(v) = \frac{1}{2} \int_0^L EI(v'')^2 dx - \int_0^L qv dx, \quad v \in V, \quad (1.5)$$

kde  $V$  je prostor kinematicky přípustných posunutí, tj. prostor funkcí z  $H^2((0, L))$ , doplněný v závislosti na zadané okrajové úloze o zápis stabilních okrajových podmínek. V dalším textu budeme pak používat následující označení těchto prostorů:

(P1):  $V_1 = \{v \in H^2((0, L)) : v(0) = v'(0) = 0, v(L) = v'(L) = 0\}$   
pro nosník oboustranně vetknutý.

(P2):  $V_2 = \{v \in H^2((0, L)) : v(0) = v'(0) = 0, v(L) = 0\}$   
pro nosník s vetknutím na jednom a podepřením na druhém konci.

(P3):  $V_3 = \{v \in H^2((0, L)) : v(0) = v'(0) = 0\}$   
pro nosník s volným koncem.

(P4):  $V_4 = \{v \in H^2((0, L)) : v(0) = 0, v(L) = 0\}$   
pro nosník na dvou podporách.

V případech, kdy nebudou okrajové podmínky s určitostí vymezeny, budeme používat symbol  $V$ , který bude zastupovat některý z výše uvedených podprostorů prostoru  $H^2((0, L))$  (jeho definice viz např. [13], [16]).

**Poznámka 1.2** Protože zde budeme pracovat se Sobolevovými prostory definovanými na jednorozměrném intervalu  $(0, L)$ , poznamenejme, že prostory  $H^2((0, L))$  obsahují absolutně spojitě funkce. To znamená, že jsou tyto funkce spojitě, jejich první derivace existují a jsou rovněž absolutně spojitě v  $(0, L)$  a jejich druhé derivace existují skoro všude v  $(0, L)$  a patří do  $L^2((0, L))$ , viz např. [1] nebo [7]. Pro funkce  $v \in H^2((0, L))$  pak v důsledku toho okrajové hodnoty

$$v(0), v(L), v'(0), v'(L)$$

mají dobrý smysl i bez zavedení pojmu stopa funkce. V případě dostatečně hladké pravé strany pak lze pomýšlet i na vyšší regularitu řešení a tedy i na existenci okrajových hodnot  $v''(0), v''(L)$ . K této otázce se vrátíme v následujícím paragrafu.

Zápisy můžeme dále zjednodušit pomocí následujícího značení:

$$a(w, v) = \int_0^L EI w'' v'' dx, \quad w, v \in V, \quad (1.6)$$

$$(q, v) = \int_0^L qv dx, \quad v \in V. \quad (1.7)$$

Zde  $a(., .)$  je bilineární forma na  $V \times V$  a  $(., .)$  značí skalární součin v Lebesgueově prostoru  $L^2((0, L))$ . Funkcionál (1.5) můžeme pak psát takto

$$\Pi_{EB}(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - (q, v), \quad v \in V. \quad (1.8)$$

Symbolem  $\Pi'_{EB}(w, v)$  budeme značit *diferenciál Gâteaux* funkcionálu  $\Pi_{EB}$  v bodě  $w$  ve směru  $v$  (viz [4]). Dle (1.8) je tedy stacionární bod  $w$  tohoto funkcionálu dán vztahem

$$\Pi'_{EB}(w, v) = a(w, v) - (q, v) = 0 \quad \forall v \in V. \quad (1.9)$$

Variační formulace úlohy ohybu Euler–Bernoulliho nosníku má následující tvar

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Nalézt } w \in V \text{ tak, že} \\ \Pi_{EB}(w) = \min_{v \in V} \Pi_{EB}(v), \end{array} \right. \quad (1.10)$$

přičemž je třeba ověřit, že tato úloha má řešení.

Další pasáž bude proto věnována problematice existence a jednoznačnosti řešení variační formulace (1.10) a to pro všechny čtyři výše uvedené okrajové úlohy (P1) až (P4).

Z variačního počtu je známé, že minimum spojitěho funkcionálu existuje, pokud je tento funkcionál konvexní a koercivní, viz např. [7] nebo [27]. Ukážeme, že tyto vlastnosti funkcionál (1.8) má za přirozených předpokladů, že

1.  $E$  je konstanta,
2. existují čísla  $I_m, I_M > 0$  tak, že

$$0 \leq EI_m \leq EI(x) \leq EI_M \quad \forall x \in (0, L). \quad (1.11)$$



Dále připomeňme definici normy v prostoru  $H^2((0, L))$ :

$$\|v\|_{H^2} = \left( \int_0^L ((v)^2 + (v')^2 + (v'')^2) dx \right)^{1/2}, \quad v \in H^2((0, L)). \quad (1.12)$$

Spojitosť resp. omezenost bilineární formy  $a(., .)$  plyne pak snadno z Hölderovy nerovnosti a definice normy (1.12)

$$\begin{aligned} |a(w, v)| &= \left| \int_0^L EI w'' v'' dx \right| \leq EI_M \left( \int_0^L (w'')^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_0^L (v'')^2 dx \right)^{1/2} \leq \\ &\leq EI_M \|w\|_{H^2} \|v\|_{H^2} \quad \forall w, v \in V, \end{aligned}$$

kde  $V$  je některý z prostorů  $V_1, \dots, V_4$ .

Konvexita a koercivita funkcionálu (1.8) plyne z  $V$ -elipticity formy  $a(., .)$ . Tu dokážeme pomocí následujícího lematu.

**Lemma 1.1** *Existuje konstanta  $c > 0$  taková, že platí*

$$\|v\|_{L^2} \leq c \|v'\|_{L^2} \quad \forall v \in H^1((0, L)): v(0) = 0. \quad (1.13)$$

*Důkaz:* Na základě předpokladů lze psát

$$v(x) = \int_0^x v'(t) dt = \int_0^x 1 \cdot v'(t) dt.$$

Užitím Cauchy–Schwarzovy nerovnosti odtud obdržíme

$$(v(x))^2 \leq x \int_0^x (v'(t))^2 dt \leq x \|v'\|_{L^2}^2$$

a integrováním přes  $x$  v mezích od 0 do  $L$  dostaneme  $\|v\|_{L^2}^2 \leq \frac{L^2}{2} \|v'\|_{L^2}^2$ .  $\square$

**Důsledek 1.1** *Nechť  $V$  je podprostor prostoru  $H^1((0, L))$ , v němž je předepsaná podmínka  $v(0) = 0$ . Potom v něm lze definovat normu vztahem*

$$\|v\|_V = \sqrt{(v', v')} \quad (1.14)$$

*a tato norma je na  $V$  ekvivalentní se standardní normou  $\|v\|_{H^1}$ .*

*Důkaz:* Připomeňme, že dvě normy  $\|v\|_V$  a  $[v]_V$  jsou na normovaném prostoru  $V$  ekvivalentní, existují-li čísla  $c_1, c_2 > 0$  tak, že platí

$$c_1 \|v\|_V \leq [v]_V \leq c_2 \|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

Důkaz pak plyne ihned z definice normy na  $H^1((0, L))$

$$\|v\|_{H^1} = \left( \int_0^L ((v)^2 + (v')^2) dx \right)^{1/2} \quad (1.15)$$

a lematu 1.1.  $\square$

**Důsledek 1.2** *Nechť  $V$  je podprostor prostoru  $H^2((0, L))$ , v němž jsou předepsané podmínky  $v(0) = v'(0) = 0$ . Potom v něm lze definovat normu vztahem*

$$\|v\|_V = \sqrt{(v'', v'')} \quad (1.16)$$

*a tato norma je na  $V$  ekvivalentní se standardní normou  $\|v\|_{H^2}$ .*

*Důkaz:* plyne z jedné strany z definice normy  $\|v\|_{H^2}$  a z druhé z dvojnásobného použití lemmatu 1.1, kdy dostaneme

$$\|v\|_{L^2}^2 \leq c \|v''\|_{L^2}^2 \quad \forall v \in V. \quad (1.17)$$

□

K tvrzení lemmatu poznamenejme, že z porovnání úloh (P1)–(P4) je zřejmé, že podmínka  $v(0) = 0$  je zastoupená ve všech čtyřech případech.

Nyní přejdeme k důkazu  $V$ -elipticity bilineární formy, přičemž se nejprve zaměříme na úlohy (P1)–(P3).

Z důsledku 1.2 a (1.11) ihned dostaneme

$$a(v, v) = \int_0^L EI(v'')^2 dx \geq c \|v\|_{H^2}^2 \quad \forall v \in V. \quad (1.18)$$

Navíc funkcionál (1.5) je i ryze konvexní na  $V$ , neboť dle (1.18)

$$\Pi''_{EB}(w, v, v) = a(v, v) > 0 \quad \forall v \in V, v \neq 0, \quad (1.19)$$

přičemž symbolem  $\Pi''_{EB}(w, v, v)$  značíme druhý diferenciál  $\Pi_{EB}$  v bodě  $w$  ve směrech  $v$  a  $v$ .

Pro úlohu (P4) nelze takovýto jednoduchý postup použít, neboť nemáme k dispozici podmínku  $v'(0) = 0$ . Východiskem bude následující tvrzení a jeho důsledek.

**Lemma 1.2** *Existuje konstanta  $c > 0$  taková, že platí*

$$\|v'\|_{L^2} \leq c \|v''\|_{L^2} \quad \forall v \in H^2((0, L)): v(0) = v(L) = 0. \quad (1.20)$$

*Důkaz:* Na základě předpokladů můžeme užitím Greenovy formule v 1D a následně Cauchy–Schwarzovy nerovnosti psát

$$\|v'\|_{L^2}^2 = \int_0^L (v')^2 dx = - \int_0^L v'' v dx \leq \|v\|_{L^2} \|v''\|_{L^2}.$$

Nyní aplikujeme lemma 1.1 a po zkrácení obdržíme vztah (1.20). □

**Důsledek 1.3** *Nechť  $V$  je podprostor prostoru  $H^2((0, L))$ , v němž jsou předepsané podmínky  $v(0) = v(L) = 0$ . Potom v něm lze definovat normu vztahem*

$$\|v\|_V = \sqrt{(v'', v'')} \quad (1.21)$$

*a tato norma je na  $V$  ekvivalentní se standardní normou  $\|v\|_{H^2}$ .*

*Důkaz:* plyne ihned z definice normy  $\|v\|_{H^2}$  a lemmat 1.1 a 1.2. □

Důsledky 1.1 a 1.3 shrneme do jediného tvrzení:

**Lemma 1.3** *Na každém podprostoru  $V_1, \dots, V_4$  lze definovat normu vztahem*

$$\|v\|_V = \sqrt{(v'', v'')} \quad (1.22)$$

*a tato norma je zde ekvivalentní se standardní normou  $\|v\|_{H^2}$ .*

Důkaz  $V$ -elipticity bilineární formy a ryzí konvexity funkcionálu  $\Pi_{EB}$  na prostoru  $V = V_4$  nyní proběhne stejně jako u předcházejících okrajových úloh.

Předcházející výsledky spolu s vyjádřením (1.9) nyní shrneme do závěrečného tvrzení.

**Věta 1.1** *Řešení úlohy (1.10) existuje pro všechny typy okrajových podmínek (P1) až (P4), je jediné a lze ho charakterizovat jako funkci  $w$  z příslušného prostoru testovacích funkcí  $V$  splňující variační rovnici*

$$\int_0^L EI w'' v'' dx = \int_0^L q v dx \quad \forall v \in V, \quad (1.23)$$

*kteřou můžeme stručně zapsat jako*

$$a(w, v) = (q, v) \quad \forall v \in V. \quad (1.24)$$

Další analýzy k Euler–Bernoulliho modelu nosníku je možné nalézt např. v [40], [41] nebo [47].

**Poznámka 1.3** Kromě tohoto klasického modelu existuje ještě druhý lineární matematický model nosníku, který nese jméno známého zakladatele moderní inženýrské mechaniky *Stephena Timoshenka* (1878–1972) a který je vhodný, narozdíl od klasického modelu, pro kratší a silnější nosníky. Je popsán soustavou dvou lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu. První publikace o tomto modelu pochází z roku 1921. Podrobnosti k tomuto tématu jsou uvedeny např. v knihách [40], [41] nebo i v článku [32].

## 1.2 Matematicko-fyzikální model Gaova nosníku

Lineární modely jsou sice snadněji analyzovatelné i řešitelné, avšak nedovolují větší deformace nosníku a mají i další nevýhody, které se projeví např. při studiu tzv. vybočování nosníků (*buckling*). Přesněji: větší průhyby sice pro větší zatížení vypočítáme, tyto hodnoty však nejsou fyzikálně relevantní.

Existuje řada nelineárních modelů nosníku, z nichž jedním z nejzajímavějších je matematický model publikovaný poprvé v roce 1996 *Davidem Y. Gaem* v [8] a s rozšířením na dynamické chování později v [9]. Významnou předností tohoto modelu je jeho relativní jednoduchost a dobré modelování procesu vybočování resp. boulení

nosníku, což je důležité pro aplikace. V dalším textu ukážeme hlavní kroky jeho odvození.

Standardní matematický popis obecných výchylek nosníku vychází zpravidla z následujícího pole posunutí

$$u_x(x, y) = u(x) - y\theta(x), \quad u_y(x, y) = w(x), \quad u_z(x, y) = 0, \quad (1.25)$$

viz např. [53]. Zde  $u_x$  a  $u_y$  jsou axiální a vertikální komponenty posunutí libovolného hmotného bodu nosníku, přičemž v jejich vyjádřeních  $w$  představuje vertikální průhyb,  $u$  horizontální posuv bodů osy nosníku  $y = 0$  a  $\theta$  je úhel jejího ohybu. Pro něj platí

$$\theta = \tan^{-1}(w') \approx w'. \quad (1.26)$$

Posuvy ve směru osy  $z$  nebudeme uvažovat.

Než přistoupíme k odvození vztahů pro Gaův nosník, provedeme nejprve analýzu výchozí situace. Předpokládejme, že

- platí Euler–Bernoulli hypotéza,
- materiál nosníku je izotropní, tj.  $E = konst.$ ,
- osa  $x$  prochází geometrickou středovou osou nosníku.

Pak lze odtud odvodit (detaily viz např. [40], [53]) následující rovnice

$$-(EA[u' + \frac{1}{2}(w')^2])' = p, \quad (1.27)$$

$$(EIw'')'' - (EA[u' + \frac{1}{2}(w')^2]w')' = q, \quad (1.28)$$

kde  $E$ ,  $A$  a  $I$  značí totéž, co dříve, a  $p(x)$  je spojitě rozložené axiální zatížení (podél celé osy nosníku) a  $q(x)$  je vertikální zatížení.

Na rovnice (1.27)–(1.28) můžeme pohlížet jako na soustavu von Kármánových rovnic v 1D. Obecně je soustava von Kármánových rovnic v 2D soustavou dvou partiálních diferenciálních rovnic s nelineárními členy, která popisuje rovnovážný stav pevně vetknuté desky. Jedná se o nelineární matematický model, který se používá v případech, kdy velikost příčného průhybu desky není malá ve srovnání s její tloušťkou. Pro složky tenzoru napětí v takovém případě platí

$$\sigma_x \neq 0, \quad \sigma_y = 0. \quad (1.29)$$

Jelikož zpravidla je  $p \equiv 0$ , dostaneme z (1.27)–(1.28) po rozepsání druhé rovnice a dosazení z první následující rovnici

$$(EIw'')'' - (EA[u' + \frac{1}{2}(w')^2])w'' = q \quad \text{v } (0, L). \quad (1.30)$$

Avšak výraz v závorce u  $w''$  má konstantní hodnotu, neboť dle (1.27) je

$$(EA[u' + \frac{1}{2}(w')^2])' = 0. \quad (1.31)$$

V důsledku toho je (1.30) pouze lineární a nikoliv nelineární rovnice.

Z této analýzy vyvodil v roce 1996 D.Y. Gao závěr, že k tomu, abychom získali nelineární model nosníku, je nutné revidovat předpoklady (1.29) a vycházet z toho, že bude

$$\sigma_x \neq 0, \quad \sigma_y \neq 0, \quad (1.32)$$

což pro klasický nosník (1.1) neplatí. Naopak zachována zůstane v dalším tzv. *Euler–Bernoulliho hypotéza* podle níž musí platit, že průřez, který je rovinný a kolmý na střednici (tj. k vodorovné ose) nosníku před deformací, musí zůstat rovinný a kolmý ke střednici i po deformaci.

**Poznámka 1.4** Euler–Bernoulliho hypotéza vylučuje vznik smykové deformace, kterou umožňuje až Timoshenkův nosník. Gao ve svých pozdějších pracích [12] a [9] odvodil zobecnění Timoshenkova modelu, zde se jím však nebudeme zabývat.

Abychom splnili předpoklad  $\sigma_y \neq 0$ , musíme uvažovat podélný řez nosníkem v rovině  $(x, y)$ . Pro nosník délky  $L$  a tloušťky  $2h$  ho definujeme jakožto obdélník  $\Omega = [0, L] \times [-h, h]$ . V rovině  $(y, z)$  nechť je příčný řez dán obdélníkem  $[-h, h] \times [0, b]$ , kde  $b$  je šířka nosníku. Tu budeme v dalším (bez újmy na obecnosti) považovat za jednotkovou.

V teorii nosníků jsou posunutí daná pomocí vztahů (1.25). Green–St Venantův tenzor deformace (viz např. [34])

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} ((\nabla \mathbf{u})^T + \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \cdot \nabla \mathbf{u})$$

má pak následující nenulové komponenty (položíme  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ )

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' - y\theta' + \frac{1}{2}(u' - y\theta')^2 + \frac{1}{2}(w')^2 & \frac{1}{2}(w' - \theta) - \frac{1}{2}(u' - y\theta')\theta \\ \frac{1}{2}(w' - \theta) - \frac{1}{2}(u' - y\theta')\theta & \frac{1}{2}\theta^2 \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

Na základě analýzy provedené v [8] zanedbáme malé členy

$$(u' - y\theta')^2, \quad (u' - y\theta')\theta,$$

a po dosazení  $\theta = w'$  obdržíme

$$\varepsilon_{11} \equiv \epsilon_x = u' - yw'' + \frac{1}{2}(w')^2, \quad (1.34)$$

$$\varepsilon_{22} \equiv \epsilon_y = \frac{1}{2}(w')^2, \quad (1.35)$$

$$\varepsilon_{12} = 0, \quad (1.36)$$

přičemž jsme použili zkrácené značení pro komponenty tenzoru deformace. Nenulové složky tenzoru napětí nyní obdržíme z následujících konstitutivních vztahů pro rovinnou napjatost (při započtení vztahu (1.36))

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{pmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \end{pmatrix}, \quad (1.37)$$

kde  $\nu$  značí Poissonovu konstantu.

V dalším uvažujme, že na nosník působí vertikální zatížení  $q(x)$  a v koncovém bodě  $x = L$  ještě i axiální síla  $P$ , kterou budeme považovat za kladnou v případě, že působí namáháním tlakem, a za zápornou, pokud působí namáháním tahem. Celková potenciální energie nosníku je pak dána jeho deformační energií a prací vnějších sil, tedy

$$\begin{aligned}\Pi(u, w) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y) dx dy - \int_0^L q w dx + P u(L) = \\ &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_{\Omega} (\epsilon_x^2(x, y) + 2\nu \epsilon_x(x, y) \epsilon_y(x) + \epsilon_y^2(x)) dx dy - \\ &\quad - \int_0^L q w dx + P u(L).\end{aligned}\quad (1.38)$$

Pokud k úvodním předpokladům dodáme, že

- průřez nosníku má konstantní obdélníkový tvar (takže pro  $I$  platí vztah (1.3)),

pak pomocí techniky variačního počtu lze po řadě propočtů uvedených v [8] dojít k soustavě dvou nelineárních rovnic na  $(0, L)$  charakterizujících stacionární bod funkcionálu  $\Pi$ :

$$u'' + (1 + \nu) w' w'' = 0, \quad (1.39)$$

$$EI w'''' - 2hbE [(1 + \nu)(2(w')^2 + u') w'' + \nu w' u''] = f, \quad (1.40)$$

kde

$$f(x) = (1 - \nu^2) q(x) \quad \forall x \in (0, L). \quad (1.41)$$

Tuto soustavu můžeme dále upravit integrováním její první rovnice (1.39). Obdržíme

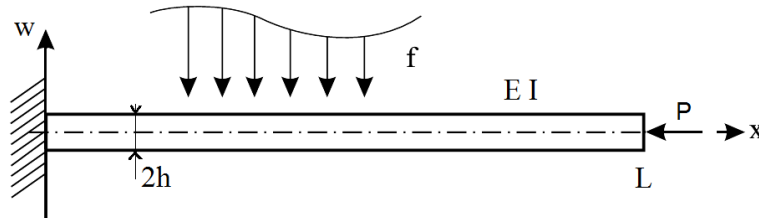
$$u' = -\frac{1}{2} (1 + \nu) (w')^2 - \frac{(1 - \nu^2) P}{2hbE} \quad (1.42)$$

a po dosazení za  $u'$  do (1.40) dostaneme finální rovnici pro Gaův nosník

$$EI w'''' - E\alpha (w')^2 w'' + P\mu w'' = f \quad \text{v } (0, L), \quad (1.43)$$

když jsme označili

$$\alpha = 3hb(1 - \nu^2), \quad \mu = (1 + \nu)(1 - \nu^2). \quad (1.44)$$



Obrázek 1.2: Nelineární nosník D.Y. Gaa

K rovnici (1.43) ještě přiřadíme funkcionál celkové potenciální energie. Tento funkcionál mějme definován na vhodném prostoru  $V \subset H^2((0, L))$ , který je určen zadanými okrajovými podmínkami. Jeho jednotlivé komponenty stanovíme takto

$$\Pi_0(v) = \frac{1}{2} \int_0^L EI(v'')^2 dx - \int_0^L f v dx = \frac{1}{2} a(v, v) - (f, v), \quad (1.45)$$

$$\Pi_N(v) = \frac{1}{12} \int_0^L E\alpha(v')^4 dx = \frac{1}{4} \pi(v, v), \quad (1.46)$$

$$\Pi_P(v) = -\frac{1}{2} \int_0^L P\mu(v')^2 dx = -\frac{1}{2} d(v, v), \quad (1.47)$$

přičemž jsme pro další účely zavedli bilineární formu

$$d(w, v) = \int_0^L P\mu w' v' dx, \quad w, v \in V, \quad (1.48)$$

a nelineární formu

$$\pi(w, v) = \Pi'_N(w, v) = \frac{1}{3} \int_0^L E\alpha(w')^3 v' dx, \quad w, v \in V, \quad (1.49)$$

kde  $\Pi'_N(w, v)$  značí Gâteauxův diferenciál funkcionálu  $\Pi_N$  v bodě  $w$  ve směru  $v$ .

**Poznámka 1.5** Výrazy pro funkcionály  $\Pi_0$  a  $\Pi_P$  jsou dobře definované, jelikož  $H^2((0, L)) \subset L^2((0, L))$ . Integrál v  $\Pi_N$  existuje vzhledem k tomu, že prostor  $H^1((0, L))$  je vnořen do  $L^4((0, L))$ , viz [1].

Nyní lze funkcionál celkové potenciální energie  $\Pi_G$  pro Gaův nosník vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} \Pi_G(v) &= \Pi_0(v) + \Pi_N(v) + \Pi_P(v) = \\ &= \frac{1}{2} b(v, v) + \frac{1}{4} \pi(v, v) - (f, v) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L EI(v'')^2 dx + \frac{1}{12} \int_0^L E\alpha(v')^4 dx - \frac{1}{2} \int_0^L P\mu(v')^2 dx - \int_0^L f v dx, \end{aligned} \quad (1.50)$$

když jsme pro stručnost zavedli novou bilineární formu vztahem

$$b(w, v) = a(w, v) - d(w, v), \quad w, v \in V. \quad (1.51)$$

Dále k funkcionálu (1.50) přiřadíme variační úlohu

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Nalézt } w \in V \text{ tak, že} \\ \Pi_G(w) = \min_{v \in V} \Pi_G(v). \end{array} \right. \quad (1.52)$$

Snadno se lze přesvědčit, že každý stacionární bod  $w$  funkcionálu  $\Pi_G$ , tj. funkce  $w \in V$  splňující

$$\Pi'_G(w, v) = 0 \quad \forall v \in V,$$

vyhovuje následující nelineární rovnici

$$b(w, v) + \pi(w, v) = (f, v) \quad \forall v \in V. \quad (1.53)$$

V případě, že je tato funkce  $w$  dostatečně hladká, splňuje i rovnici (1.43).

Pro čtyři základní úlohy z odstavce 1.1 zůstávají jejich okrajové podmínky stejné s výjimkou úlohy (P3), která představuje nosník s pravým volným koncem. Pro nelineární rovnici (1.43) obdržíme v tomto případě

$$\mathbf{(P3)}: w(0) = w'(0) = 0, \quad M(L) = 0, \quad V(L) = \frac{1}{3} E\alpha(w'(L))^3 - P\mu w'(L),$$

což lze ověřit např. pomocí slabé formulace. Zatímco první tři podmínky zůstávají stejné jako u Euler–Bernoulliho nosníku, poslední podmínka

$$EIw'''(L) - \frac{1}{3} E\alpha(w'(L))^3 + P\mu w'(L) = 0 \quad (1.54)$$

je nelineární. Vyjádření pro prostor  $V_3$  zůstává nezměněné.

**Poznámka 1.6** Stejná podmínka (1.54) vychází i pro Reddyho nelineární model uvedený v [40].

Zbývá ještě stanovit, zda je podmínka (1.54) realizovatelná s ohledem na to, že dosud jsme předpokládali pro řešení problému (P3) pouze to, že je z  $V_3 \subset H^2((0, L))$ . Navíc výraz  $EIw'''$  se objevuje i při integraci per partes. Platí zde dle [31] následující tvrzení.

**Lemma 1.4** *Nechť  $E, I, \alpha, P, \mu$  jsou konstanty a  $f \in L^2((0, L))$ . Potom jakékoliv řešení úlohy (1.52) kromě toho, že náleží prostoru  $V$ , který je určen zadanými okrajovými podmínkami, leží také v prostoru  $H^4((0, L))$ . Tedy  $w \in V \cap H^4((0, L))$ .*

*Důkaz:* Předně poznamenejme, že první předpoklad je v Gaově modelu nosníku splněn automaticky. Nechť je tedy  $f \in L^2((0, L))$ .

V dalším využijeme fakt, že pro  $k = 1, 2, \dots$ , lze Sobolevův prostor  $H^k((0, L))$  spojitě vnořit do prostoru spojitých funkcí  $C^{k-1}([0, L])$ , viz [1]. Odtud plyne existence konstanty  $c > 0$  takové, že

$$\max_{x \in [0, L]} |v'(x)| \leq c \|v\|_{H^2} \quad \forall v \in H^2((0, L)). \quad (1.55)$$

Diferenciální rovnici Gaova nosníku

$$EIw'''' - E\alpha(w')^2 w'' + P\mu w'' = f, \quad (1.56)$$

kterou jsme získali z podmínky pro stacionární bod funkcionálu (1.38), je možné interpretovat jako rovnici obsahující distribuce.

Dle předpokladů  $f$  a  $w''$  náleží do  $L^2((0, L))$ . Z nerovnosti (1.55) plyne, že rovněž součin  $(w')^2 w'' \in L^2((0, L))$ . Odtud plyne, že také  $w'''' \in L^2((0, L))$ , což však znamená, že  $w \in H^4((0, L))$ .  $\square$



Zatím jsme se nedotkli otázky řešitelnosti úlohy (1.52). Nechť tedy  $V$  je libovolný z prostorů  $V_1$  až  $V_4$ . Funkcionál  $\Pi_G$  není v obecném případě konvexní. To je zřejmé z toho, že bychom potřebovali, aby platilo

$$\Pi_G''(w, v, v) \geq 0 \quad \forall v \in V, \quad (1.57)$$

přičemž

$$\begin{aligned} \Pi_G''(w, v, v) &= b(v, v) + \Pi_N''(w, v, v) \\ &= b(v, v) + \int_0^L E\alpha(w')^2(v')^2 dx, \quad w, v \in V. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Evidentně je

$$\Pi_N''(w, v, v) = \int_0^L E\alpha(w')^2(v')^2 dx \geq 0 \quad \forall w, v \in V, \quad (1.59)$$

neboť  $E\alpha > 0$  je kladná konstanta. Splnění podmínky (1.57) je tím vázáno na výraz

$$b(v, v) = \int_0^L EI(v'')^2 dx - \int_0^L P\mu(v')^2 dx, \quad v \in V. \quad (1.60)$$

Z teorie stability lineárního Euler–Bernoulliho nosníku je známé, že definujeme mezní hodnotu pomocí *Eulerovy rovnice stability nosníku*

$$EIw'''' + Pw'' = 0 \quad \text{v } (0, L). \quad (1.61)$$

Její slabá formulace má tvar

$$\int_0^L EIw''v'' dx - \int_0^L Pw'v' dx = 0 \quad \forall v \in V. \quad (1.62)$$

Položíme-li v rovnici (1.62)  $v = w$ , obdržíme vyjádření pro tzv. Rayleighův podíl a definujeme pak *Eulerovu kritickou sílu* jako minimum Rayleighova podílu přes všechny funkce uvažovaného prostoru  $V$

$$P_{cr}^E = \min_{v \in V} \frac{\int_0^L EI(v'')^2 dx}{\int_0^L (v')^2 dx}. \quad (1.63)$$

Tento výraz zároveň představuje nejmenší vlastní hodnotu diferenciální rovnice (1.61) (viz např. [42]).

Analogicky s (1.63) definujeme pro Gaův nosník modifikovanou Eulerovu sílu

$$\bar{P} = \min_{v \in V} \frac{\int_0^L EI(v'')^2 dx}{\int_0^L \mu(v')^2 dx}. \quad (1.64)$$

Z (1.64) ihned plyne, že platí

$$\int_0^L EI(v'')^2 dx \geq P \int_0^L \mu(v')^2 dx \quad \forall v \in V, \forall P \leq \bar{P}. \quad (1.65)$$

Odtud pak, pokud je  $P \leq \bar{P}$ , dostáváme

$$b(v, v) = a(v, v) - d(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in V, \quad (1.66)$$

příčemž pro  $P < \bar{P}$  platí

$$b(v, v) = a(v, v) - d(v, v) > 0 \quad \forall v \in V, v \neq 0. \quad (1.67)$$

Celkem tedy můžeme s ohledem na (1.57)–(1.59) zformulovat následujícím tvrzení.

**Věta 1.2** *Za výše uvedených předpokladů je funkcionál  $\Pi_G$  pro libovolné axiální zatížení  $P$  nepřevyšující mezní sílu  $\bar{P}$  konvexní na  $V$ , přičemž ryze konvexní je v případě, že  $P < \bar{P}$ .*

Abychom dokázali existenci řešení úlohy (1.52), potřebujeme ještě ověřit koercivitu funkcionálu (1.50). S ohledem na nerovnost (1.18) dostáváme

$$\frac{1}{2} \int_0^L EI(v'')^2 dx - \int_0^L f v dx \geq c_1 \|v\|_{H^2}^2 - \|f\| \|v\|_{H^2} \quad \forall v \in H^2((0, L)), \quad (1.68)$$

kde  $c_1$  je kladná konstanta.

Dále si dokážeme následující lemma.

**Lemma 1.5** *Existuje konstanta  $c > 0$  taková, že platí*

$$\|(v')^2\|_{L^2} \geq c \|v'\|_{L^2}^2 \quad \forall v \in H^1((0, L)). \quad (1.69)$$

*Důkaz:* Užitím Cauchy–Schwarzovy nerovnosti máme pro libovolnou  $v \in H^1((0, L))$

$$\|v\|_{L^2}^2 = \int_0^L v^2 dx = \int_0^L 1 \cdot v^2 dx \leq \|1\|_{L^2} \|v^2\|_{L^2} = (L)^{1/2} \|v^2\|_{L^2}.$$

Požadovanou nerovnost získáme aplikováním tohoto vztahu na funkci  $v'$ . □

Nyní lze s pomocí lemmatu 1.5 psát

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} \int_0^L E\alpha(v')^4 dx - \frac{1}{2} \int_0^L P\mu(v')^2 dx &= C_2 \|(v')^2\|_{L^2}^2 + c_3 \|v'\|_{L^2}^2 \geq \\ &\geq c_2 \|v'\|_{L^2}^4 + c_3 \|v'\|_{L^2}^2 \quad \forall v \in H^1((0, L)), \end{aligned} \quad (1.70)$$

kde  $c_2$  je kladná konstanta a konstanta  $c_3$  má opačné znaménko jako působící axiální síla  $P$ . Spolu s (1.68) pak máme

$$\Pi_G(v) \geq (c_1 \|v\|_{H^2} - \|f\|) \|v\|_{H^2} + (c_2 \|v'\|_{L^2}^2 + c_3) \|v'\|_{L^2}^2 \quad \forall v \in H^2((0, L)), \quad (1.71)$$

kde  $c_1, c_2 > 0$ . Ať je nyní znaménko  $c_3$  jakékoliv, v obou případech je zřejmé, že

$$\|v\|_{H^2} \rightarrow +\infty \Rightarrow \Pi_G(v) \rightarrow +\infty. \quad (1.72)$$

Poznamenejme, že s ohledem na lemma 1.3 toto platí pro všechny čtyři problémy (P1)–(P4).

**Věta 1.3** Za výše uvedených předpokladů je funkcionál  $\Pi_G$  pro libovolné axiální i vertikální zatížení koercivní na  $V$ .

Přímým důsledkem předcházejících dvou vět je pak následující tvrzení.

**Věta 1.4** Necht' jsou splněny všechny výše uvedené předpoklady a necht'  $P \leq \bar{P}$ . Potom má úloha (1.52) řešení pro všechny okrajové problémy (P1)–(P4), přičemž toto řešení je jediné, pokud je  $P < \bar{P}$ . Totéž platí i pro úlohu (1.53), jejíž řešení je pro  $P \leq \bar{P}$  shodné s řešením úlohy (1.52).

*Důkaz:* Podle známé věty o existenci minima konvexního funkcionálu, viz např. [7], odst. 26.8., potřebujeme kromě koercivity i spojitost funkcionálu  $\Pi_G$ . Ta je však evidentní. Jednoznačnost je dána ryzí konvexitou.  $\square$

Pokud je nosník namáhán tahem silou  $P < 0$ , má úloha ohybu evidentně jediné řešení. V případě  $P > 0$ , kdy je nosník stlačován, je vše složitější a rovnice (1.53) nemusí mít jediné řešení. Analogicky k Euler–Bernoulliho modelu existuje kritická hodnota  $P_{cr}^G > 0$  taková, že pro  $P \in (0, P_{cr}^G)$  je funkcionál energie  $\Pi_G$  ryze konvexní, avšak pro  $P > P_{cr}^G$  je již nekonvexní s dvěma lokálními minimy a jedním lokálním maximem, jak ukazují analýzy D.Y. Gaa (např. [11]).

Pro Euler–Bernoulliho nosník odvodil roku 1757 hodnotu kritické síly  $P_{cr}^E$  sám Euler. Jeho formule pro tuto sílu má tvar (viz [41])

$$P_{cr}^E = \pi^2 \frac{EI}{(L_{ef})^2}, \quad (1.73)$$

přičemž tzv. efektivní délka  $L_{ef}$  je pro jednotlivé okrajové problémy dána takto

- (P1) :  $L_{ef} = 0.5L$ ,
- (P2) :  $L_{ef} = 0.699157L$ ,
- (P3) :  $L_{ef} = 2L$ ,
- (P4) :  $L_{ef} = L$ .

Pokud jde o Gaův nosník, lze konstatovat následující:

- s ohledem na tvar podmínky pro konvexitu (1.58) nelze stanovit analytickou formuli pro hodnotu kritické síly  $P_{cr}^G$ , neboť v (1.58) vystupuje řešení  $w$ ,
- hodnotu  $P_{cr}^G$  lze odhadnout zdola pomocí Eulerovy kritické síly  $P_{cr}^E$ . Dle (1.63) a (1.64) totiž platí

$$P_{cr}^G \geq \bar{P} = \frac{1}{\mu} P_{cr}^E, \quad (1.74)$$

- kritické hodnoty pro jednotlivé okrajové úlohy je možné stanovit pouze pomocí numerických experimentů, jejichž přibližné výsledky jsou pro vstupní data  $L = 1 \text{ m}$ ,  $h = 0.1 \text{ m}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $E = 21 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ , (která budou použita i pro řešení příkladů v kapitole 4) uvedeny v následující tabulce:

	$P_{cr}^E$	$P_{cr}^G$
(P1)	$4.672\,002 \cdot 10^9$	$5.507 \cdot 10^9$
(P2)	$2.389\,435 \cdot 10^9$	$3.575 \cdot 10^9$
(P3)	$2.920\,001 \cdot 10^8$	$2.243 \cdot 10^9$
(P4)	$1.168\,000 \cdot 10^9$	$1.235 \cdot 10^9$

Výpočtový model řešení ohybu Gaova nosníku musí počítat s tím, že variační rovnice (1.53) může mít více řešení. V této práci se však zaměříme pouze na konvexní případ, kdy se hodnota osového zatížení bude pohybovat v intervalu  $(-\infty, P_{cr}^G]$ . V dalším textu se pokusíme situaci analyzovat a řešit pomocí metody, kterou popíšeme v následujícím odstavci.

### 1.3 Řízená variační metoda – CVM

Další úvahy se zaměří na vhodnou metodiku řešení úloh zformulovaných v předcházejícím textu. Námi zvolený postup se bude zakládat na formulaci a řešení *úloh optimálního řízení*. Takový přístup byl v článcích [45], [46], [3], [51] použit k řešení kontaktní problematiky. Jeho autoři jej nazvali *řízená variační metoda*, anglicky *Control Variational Method - CVM*. My ji v této kapitole zobecníme pro řešení ohybu nelineárního Gaova nosníku.

**Poznámka 1.7** Úlohy optimálního řízení jsou popsány v dodatku 1. Podrobněji o nich pojednávají klasické publikace [21] a [22] nebo nejnovější monografie [52].

Pro lineární Euler–Bernoulliho nosník s volným koncem je podstata této metody vyložena v [45] a [3]. Spočívá v zásadě ve třech postupně prováděných krocích:

- Transformace funkce zatížení.
- Redukce rovnice nosníku.
- Transformace funkcionálu celkové potenciální energie.

Pomocí těchto tří kroků se pak provede závěrečný krok:

- Transformace daného problému na úlohu optimálního řízení.

V úloze optimálního řízení provádíme minimalizaci transformovaného funkcionálu při současném splnění stavové úlohy založené na redukované rovnici nosníku.

Nakonec je třeba formulovat tvrzení o ekvivalenci původní úlohy a této úlohy optimálního řízení.

K uvedenému je nutné poznamenat, že

(a) Převod jednoduché úlohy (1.23) ohybu lineárního nosníku na úlohu optimálního řízení nemá praktický význam a proto ho zde nehodláme podrobně předvést. Užitečnost takového postupu se ukáže teprve u nelineárních problémů, tj. u Gaova nosníku, kde vystupuje materiálová nelinearita, nebo u kontaktních úloh, kde máme co do činění s geometrickou nelinearitou.

(b) V [45] a [3] užitá redukce stavové rovnice o 2 řády není použitelná obecně pro libovolnou okrajovou úlohu. Navíc se mohou vyskytnout problémy při numerické realizaci takové úlohy.

(c) Ve zdrojových člancích [45] a [3] se již nic nekonstatuje o zbývajících okrajových úlohách a není zde tudíž navržen postup jejich řešení pomocí CVM.

Pro účely této práce budeme chtít zobecnit postup řízené variační metody tak, aby byl použitelný pro nelineární Gaův model, všechny čtyři klasické okrajové úlohy a kontaktní úlohy. Nejprve si vše ilustrujme na jedné z úloh ohybu Gaova nosníku.

Uvažujme Gaův nosník s okrajovými podmínkami typu (P2). Podle odstavce 1.2 lze klasický problém ohybu tohoto nosníku zformulovat následovně

$$\begin{cases} EI w'''' - E\alpha (w')^2 w'' + P\mu w'' = f & \text{v } (0, L), \\ w(0) = w'(0) = 0, \\ w(L) = w''(L) = 0. \end{cases} \quad (1.75)$$

Variační formulace této úlohy zní takto

$$\begin{cases} \text{Nalézt } w \in V_2 = \{v \in H^2((0, L)) : v(0) = v'(0) = 0, v(L) = 0\} : \\ \Pi_G(w) = \min_{v \in V_2} \Pi_G(v), \end{cases} \quad (1.76)$$

kde funkcionál  $\Pi_G$  je dle (1.50)

$$\Pi_G(v) = \frac{1}{2} \int_0^L EI (v'')^2 dx + \frac{1}{12} \int_0^L E\alpha (v')^4 dx - \frac{1}{2} \int_0^L P\mu (v')^2 dx - \int_0^L f v dx.$$

Pro použití CVM musíme nejprve určit stavový problém, který by měl být jednoduchý a lineární. V našem případě ho definujme takto

$$\begin{cases} \text{Nalézt funkci } w := w(u) \text{ tak, že} \\ EI w'''' = f + u & \text{v } (0, L), \\ w(0) = w'(0) = 0, \\ w(L) = w''(L) = 0, \end{cases} \quad (1.77)$$

resp. ve slabé formulaci

$$\begin{cases} \text{Nalézt funkci } w := w(u) \in V_2 \text{ tak, že} \\ a(w, v) = (f + u, v) & \forall v \in V_2. \end{cases} \quad (1.78)$$

Za povšimnutí stojí, že nelineární člen Gaovy rovnice se (stejně jako člen s axiálním zatížením) nyní „schoval“ do proměnné  $u$ . To je jeden ze stěžejních znaků CVM.

Proměnná  $u$  zde bude vystupovat jako tzv. *řídící proměnná*, jejím prostřednictvím bude ovlivňována jak hodnota cenového funkcionálu, tak i hodnota průhybu  $w$  daného stavovým problémem. Hodnoty  $u$  budeme vybírat z množiny, kterou označíme  $U_{ad}$  a kterou budeme zpravidla definovat vztahem

$$U_{ad} = \{u \in L^2((0, L)) : |u(x)| \leq C \text{ sk.vš. v } (0, L)\}, \quad (1.79)$$

kde  $C > 0$  je daná konstanta.

Nechť  $\widehat{w} \in V_2$  je řešení stavové úlohy (1.78) pro  $u = 0$ , tj.  $\widehat{w}$  splňuje

$$a(\widehat{w}, v) = (f, v) \quad \forall v \in V_2. \quad (1.80)$$

Pak z (1.45) užitím (1.78) a (1.80) obdržíme

$$\begin{aligned} \Pi_0(w) &= \frac{1}{2} a(w, w) - (f, w) = \frac{1}{2} (u, w) - \frac{1}{2} (f, w) = \frac{1}{2} (u, w) - \frac{1}{2} a(\widehat{w}, w) = \\ &= \frac{1}{2} (u, w) - \frac{1}{2} (f + u, \widehat{w}) = \frac{1}{2} (u, w - \widehat{w}) - \frac{1}{2} (f, \widehat{w}). \end{aligned} \quad (1.81)$$

Protože poslední člen v (1.81) je konstanta, můžeme ji v optimalizačních úlohách vynechat a máme

$$\Pi_0(w) \rightarrow \frac{1}{2} (u, w - \widehat{w}) = \frac{1}{2} \int_0^L u(w - \widehat{w}) dx.$$

Dosazením tohoto výsledku do  $\Pi_G$  získáme transformovaný funkcionál ve tvaru

$$J(w, u) = \frac{1}{2} \int_0^L u(w - \widehat{w}) dx + \frac{1}{12} \int_0^L E\alpha (w')^4 dx - \frac{1}{2} \int_0^L P\mu (w')^2 dx.$$

Nyní jsme schopni sestavit výslednou úlohu optimálního řízení tak, jak je zavedena v dodatku 1:

$$\begin{cases} \text{Nalézt } u^* \in U_{ad} \text{ tak, že} \\ J(w(u^*), u^*) = \min_{u \in U_{ad}} J(w(u), u), \\ \text{kde } w(u) \text{ řeší stavovou úlohu (SP),} \end{cases} \quad (1.82)$$

přičemž stavový problém (SP) je definován takto

$$\begin{cases} \text{Nalézt } w := w(u) \in V_2 \text{ tak, že} \\ a(w, v) = (f + u, v) \quad \forall v \in V_2. \end{cases} \quad (1.83)$$

Zbývá ukázat vztah mezi původní variační formulací (1.52), a novou formulací pomocí optimálního řízení (1.82)–(1.83).

**Věta 1.5** *Nechť  $f \in L^2((0, L))$ ,  $V = V_2$  a necht' platí předpoklady o koeficientech rovnice uvedené v odstavcích 1.1 a 1.2.*

*Pak řešení úlohy (1.82)–(1.83) existuje, je jediné a funkce  $w^* := w(u^*)$  splňuje (1.53) resp. (1.52) za předpokladu, že konstanta  $C$  v (1.79) je dostatečně velká.*

Důkaz je podrobně uveden v [29].

Naším cílem je, jak již bylo uvedeno výše, zobecnění ideje CVM. Půjde tedy o to, převést daný nelineární problém na úlohu optimálního řízení tak, aby nově vzniklá úloha byla

i) konsistentní s původní úlohou - tj. aby stavový problém umožňoval splnění zadaných okrajových podmínek (a to i po diskretizaci) a aby pomocí řešení úlohy optimálního řízení bylo možné získat řešení původního problému,

ii) efektivněji řešitelná, nežli původní úloha - to lze zajistit zejména v případě, že je možné redukovat řád stavové úlohy, nebo alespoň vhodným numerickým řešením minimalizačního problému, které by mělo být výhodnější než řešení nelineárních soustav rovnic.

Základním nástrojem, který bude sloužit tomuto cíli, budou transformace, jež jsou uvedené v dodatku 3.

V zásadě lze koncept zobecněného postupu shrnout do následujících sedmi bodů:

1. Transformace proměnných: např.  $v' \rightarrow z$ .
2. Transformace funkce zatížení:  $f \rightarrow g$ .
3. Sestavení lagrangiánu:  $\Pi \rightarrow \mathcal{L}$ .
4. Odvození soustavy rovnic pro jeho sedlový bod:  $\nabla \mathcal{L} = 0$ .
5. Definování kontrolní proměnné  $u$  a formulace stavového problému.
6. Transformace funkcionálu celkové potenciální energie:  $\Pi(w) \rightarrow J(w, u)$ .
7. Formulace úlohy optimálního řízení.

**Poznámka 1.8** U transformací proměnných budeme vycházet z kapitoly 5 knihy [18]. Při takovéto transformaci musíme ovšem zaměnit původní funkcionál za lagrangián, jak uvádí bod 3. Tento lagrangián sestává z původního funkcionálu, v němž jsou provedeny uvažované záměny proměnných a z členů, které obsahují provedené záměny jakožto vazbové podmínky s odpovídajícími multiplikátory.

V dalším textu budeme předchozí koncept realizovat, a to nejprve na úlohách ohybu Gaova nosníku a později na kontaktních problémech.

Ve shodě s autory metody D. Tibou a M. Sofoneou budeme brát do úvahy i fakt, že CVM může sloužit nejen jako způsob, jak nově zformulovat a tudíž i vyřešit uvažované úlohy, ale rovněž jako *prostředek analýzy* těchto úloh. Tím, že např. kontaktní úlohy zformulujeme ekvivalentně jako úlohy optimálního řízení, dostaneme možnost posoudit z jiného úhlu pohledu např. otázky existence a jednoznačnosti jejich řešení nebo zformulovat podmínky optimality pro tyto problémy.

## 1.4 Ohyb Gaova nosníku pomocí CVM

Postupně zde probereme čtyři okrajové úlohy uvedené v odstavci 1.1 a u každé nově zformulujeme úlohu ohybu Gaova nosníku zatíženého vertikálně a axiálně. Poznamenejme, že standardní formulací těchto problémů je obecně variační úloha (1.52) resp. (1.53).

Nové formulace budou představovat úlohy optimálního řízení, jejichž popis a základní vlastnosti jsou uvedeny v dodatku 1. Cestu, jak se to vše provede, ukazují transformace z dodatku 3. Těmito transformacemi jsou určeny i jednotlivé stavové úlohy (7.13), (7.53) a (7.83), jež můžeme souhrnně vypsát takto (číslo v závorce odpovídá číslu použité transformace):

$$\begin{array}{l}
\text{(SP(1))}: \left\{ \begin{array}{l} \text{Nalézt funkci } w := w(u) \in V \text{ takovou, že} \\ a(w, v) = (f + u, v) \quad \forall v \in V \end{array} \right. \\
\text{(SP(2))}: \left\{ \begin{array}{l} \text{Nalézt funkci } z := z(u) \in Z \text{ takovou, že} \\ e(z, v) = (g + u, v) \quad \forall v \in Z \\ \text{Nalézt funkci } w \in V \text{ takovou, že} \\ w' = z \\ w(0) = 0 \\ g \in L^2((0, L)): (g, v') = (f, v) \quad \forall v \in V \end{array} \right. \\
\text{(SP(3))}: \left\{ \begin{array}{l} \text{Nalézt funkci } w := w(u) \in V \text{ takovou, že} \\ e(w, v) = (g + u, v) \quad \forall v \in V \\ g \in L^2((0, L)): (g, v'') = -(f, v) \quad \forall v \in V \end{array} \right.
\end{array}$$

Zde jsme použili pro stručnost označení (1.6) a (1.7) spolu s novým symbolem

$$e(w, v) = \int_0^L EI w' v' dx, \quad w, v \in V. \quad (1.84)$$

Je tedy zřejmé, že (SP(1)) je v klasické formulaci lineární úloha 4. řádu, kdežto (SP(2)) a (SP(3)) jsou lineární úlohy 2. řádu, přičemž (SP(2)) je problém složený ze dvou dílčích úloh.

**Poznámka 1.9** V případě problému (P3) sice transformacemi obdržíme (jako důsledek nelineární okrajové podmínky na volném konci) nelineární stavovou úlohu, tu však v souladu s ideou metody CVM pomocí úprav převedeme na lineární tvar (SP(1)) popř. (SP(2)).

Jednodušší stavová úloha, tj. úloha nižšího řádu než čtyři, vede k rychlejšímu i snadnějšímu řešení problému. Transformace jednotlivých okrajových úloh však musíme volit tak, aby byly stavové úlohy konzistentní s původními úlohami.

Nelze tedy např. u úlohy (P2) použít transformaci T3, jelikož by vedla ke stavové úloze (SP(3)). Potom bychom nedokázali zajistit splnění tří stabilních okrajových podmínek předepsaných v prostoru  $V_2$ , neboť (SP(3)) je problém druhého řádu.

V souladu se zvolenou podobou stavového problému pak musí být i transformace funkcionálu potenciální energie na funkcionál, který bude použit k optimálnímu řízení. Tyto úpravy jsou zpracovány v odstavcích 7.1 až 7.3 a jejich výsledné tvary  $J_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , jsou dány vztahy (7.20), (7.56) a (7.86).

Označíme-li  $k = 1, 2, 3$  číslo použité transformace, pak transformovaný funkcionál  $J_k$  spolu se stavovým problémem (SP(k)), prostorem funkcí  $V_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , a množinou přípustných hodnot řízení  $U_{ad}$  definují úlohu optimálního řízení tvaru

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Nalézt } u^* \in U_{ad} \text{ tak, že} \\ J_k(w(u^*), u^*) = \min_{u \in U_{ad}} J_k(w(u), u), \\ \text{kde } w(u) \in V_i \text{ řeší na } V_i \text{ úlohu (SP(k)).} \end{array} \right. \quad (1.85)$$



**Poznámka 1.10** V úloze (1.85) nelze volit indexy  $k$  a  $i$  zcela libovolně. Jak bude zřejmé z dalšího rozboru jednotlivých okrajových úloh, smysl zde mají jen kombinace

$$\begin{aligned} k = 1, i = 1, 2, 3, 4, \\ k = 2, i = 3, \\ k = 3, i = 4. \end{aligned}$$

O nové formulaci ve tvaru úlohy optimálního řízení musíme následně dokázat, že dává tytéž výsledky, jako původní variační formulace. Neméně důležitá je rovněž otázka existence a jednoznačnosti řešení úlohy (1.85). V obecné rovině na ni odpovídá následující tvrzení.

**Věta 1.6** *Nechť  $k \in \{1, 2, 3\}$  a  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  jsou čísla zvolená ve smyslu poznámky 1.10. Úloha optimálního řízení (1.85) má za předpokladu  $P < \bar{P}$  právě jedno řešení.*

*Důkaz:* provedeme pro  $k = 1, i = 2$ , což představuje případ, který jsme uvažovali v předcházejícím odstavci.

Stavová úloha (SP(1)) má existenci a jednoznačnost řešení garantované větou 1.1. Vyjádříme z ní  $u$  vztahem

$$(u, v) = a(w, v) - (f, v) \quad \forall v \in V_2, \quad (1.86)$$

dosadíme do funkcionálu  $J_1$  a s využitím vztahu (7.17) dostaneme

$$\begin{aligned} J_1(w, u) &= \frac{1}{2}(u, w) - \frac{1}{2}(u, \hat{w}) + \frac{1}{4}\pi(w, w) - \frac{1}{2}d(w, w) \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{2}a(w, w) + \frac{1}{4}\pi(w, w) - \frac{1}{2}d(w, w) - (f, w) + \frac{1}{2}(f, \hat{w}). \end{aligned} \quad (1.87)$$

To je až na poslední člen, který je konstantní, funkcionál  $\Pi_G$ , o němž jsme dokázali v odstavci 1.2, že je za předpokladu  $P < \bar{P}$  ryze konvexní a koercivní. Úloha minimalizace má proto jediné řešení  $w^* \in V_2$ . Této funkci přísluší řízení  $u^*$  dané dle (1.86) vztahem

$$(u^*, v) = a(w^*, v) - (f, v) \quad \forall v \in V_2. \quad (1.88)$$

Optimální dvojice  $(w^*, u^*) \in V \times U_{ad}$  tedy existuje a je dána jednoznačně.

Ve zbývajících případech se postupuje zcela analogicky.  $\square$

**Poznámka 1.11** Důležitým aspektem, který zůstane prozatím v pozadí, je realizovatelnost jednotlivých úloh na počítači. Tím se budeme podrobněji zabývat v třetí kapitole.

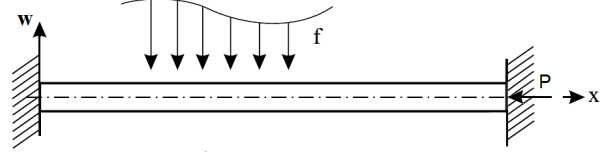
Konečně připomeňme, že všechny následující úvahy se budou týkat ryze konvexního případu, kdy máme axiální sílu  $P < \bar{P}$ .

### 1.4.1 Problém (P1) s oboustranným vetknutím

V tomto odstavci budeme uvažovat následující zadání:

(i) okrajové podmínky tvaru:

$$\begin{aligned} w(0) = w'(0) &= 0, \\ w(L) = w'(L) &= 0, \end{aligned}$$



Obrázek 1.3: Oboustranně vetknutý nosník

(ii) prostor testovacích funkcí:

$$V = V_1 = \{v \in H^2((0, L)) : v(0) = v'(0) = 0, v(L) = v'(L) = 0\}.$$

V tomto případě jsme vázaní maximálním počtem stabilních okrajových podmínek. Jedinou vhodnou stavovou úlohou je tedy (SP(1)). Použijeme proto transformaci T1, v níž položíme

- $V = V_1$ ,
- $Z = \{z \in H^1((0, L)) : z(0) = z(L) = 0\}$ .

Výsledky odstavce 7.1 pro okrajovou úlohu (P1) jsou následující:

$$\mathbf{T1}: J_1(w, u) = \frac{1}{2} \int_0^L u(w - \hat{w}) dx + \frac{1}{12} \int_0^L EI \alpha (w')^4 dx - \frac{1}{2} \int_0^L P \mu (w')^2 dx$$

$$(\text{SP}(1)): \begin{cases} \text{Nalézt funkci } w := w(u) \in V_1 \text{ takovou, že} \\ a(w, v) = (f + u, v) \quad \forall v \in V_1 \end{cases}$$

$$\hat{w} \in V_1 \text{ je řešením (SP}(1)) \text{ pro } u = 0$$

Stavovou úlohu (SP(1)) lze v klasické formulaci zapsat takto:

$$\begin{cases} \text{K danému } u \text{ nalézt funkci } w := w(u) \text{ tak, že} \\ EI w'''' = f + u \quad \text{v } (0, L), \\ w(0) = w'(0) = 0, \\ w(L) = w'(L) = 0. \end{cases} \quad (1.89)$$

Funkce  $\hat{w}$  je zřejmě řešením úlohy

$$\hat{w} \in V_1 : a(\hat{w}, v) = (f, v) \quad \forall v \in V_1. \quad (1.90)$$

Definujme ještě množinu přípustných hodnot řízení  $u$  vztahem (1.79)

$$U_{ad} = \{u \in L^2((0, L)) : |u(x)| \leq C \text{ sk.vš. v } (0, L)\},$$

kde  $C > 0$  je „vhodně“ zvolená konstanta. Ta by měla být dostatečně velká, ale jen natolik, aby nedošlo k destrukci nosníku, jelikož hodnoty z  $U_{ad}$  představují fyzikálně jeho dodatečné vertikální zatížení. Fakticky bude tedy  $C$  záviset na tuhosti nosníku a my zde budeme vždy předpokládat, že vypočítané průhyby jsou v mezích fyzikální teorie použité v 1.2.

Výsledná úloha optimálního řízení bude pak následující

$$\begin{cases} \text{Nalézt } u^* \in U_{ad} \text{ tak, že} \\ J_1(w(u^*), u^*) = \min_{u \in U_{ad}} J_1(w(u), u), \\ \text{kde } w(u) \in V_1 \text{ řeší úlohu (SP(1)).} \end{cases} \quad (1.91)$$

O vztahu mezi touto úlohou optimálního řízení a úlohou o ohybu Gaova nosníku (1.52) s okrajovými podmínkami (P1) vypovídá následující věta.

**Věta 1.7** *Nechť  $f \in L^2((0, L))$  a necht' platí předpoklady o koeficientech rovnice uvedené v odstavcích 1.1 a 1.2.*

*Pak řešení úlohy (1.91) existuje, je jediné a funkce  $w^* := w(u^*)$  je řešením příslušné variační úlohy (1.52) na prostoru  $V = V_1$  za předpokladu, že konstanta  $C$  v (1.79) je dostatečně velká.*

*Důkaz:* Existence optimální dvojice  $(w^*, u^*) \in V_1 \times U_{ad}$  úlohy (1.91) plyne pro libovolnou kladnou konstantu  $C$  z věty 1.6. V důkazu ji budeme uvažovat tak velkou, aby bylo možné provést všechny úkony s veličinami, které mají náležet do  $U_{ad}$ .

Uvažujme nyní přípustnou dvojici tvaru

$$(w, u) = (w^* + t(y - w^*), u^* + t(z - u^*)) \quad (1.92)$$

pro nějaké  $t \in [-1, 1]$ ,  $z \in U_{ad}$  a  $y \in V_1$  splňující stavovou rovnici (SP(1)):

$$a(w^* + t(y - w^*), v) = (f + u^* + t(z - u^*), v) \quad \forall v \in V_1.$$

Jelikož platí

$$a(w^*, v) = (f + u^*, v) \quad \forall v \in V_1, \quad (1.93)$$

dostaneme srovnáním, že dvojice  $(y, z)$  musí splňovat rovnici

$$a(y - w^*, v) = (z - u^*, v) \quad \forall v \in V_1, \quad (1.94)$$

což po dosazení z (1.93) dává

$$a(y, v) = (f + z, v) \quad \forall v \in V_1. \quad (1.95)$$

Z optimality dvojice  $(w^*, u^*)$  plyne, že

$$J_1(w^*, u^*) \leq J_1(w, u) \quad \forall (w, u) \in V_1 \times U_{ad}$$

a tedy

$$\frac{1}{2}(u^*, w^* - \widehat{w}) + \Pi_N(w^*) + \Pi_P(w^*) \leq \frac{1}{2}(u, w - \widehat{w}) + \Pi_N(w) + \Pi_P(w). \quad (1.96)$$

Dosazením (1.92) za  $w$  a  $u$  pak po úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} \Pi_N(w^*) + \Pi_P(w^*) &\leq \frac{t}{2}(z - u^*, w^*) + \frac{t}{2}(u^*, y - w^*) - \frac{t}{2}(z - u^*, \widehat{w}) + \\ &\quad + \frac{t^2}{2}(z - u^*, y - w^*) + \Pi_N(w^* + t(y - w^*)) + \\ &\quad + \Pi_P(w^* + t(y - w^*)). \end{aligned} \quad (1.97)$$

Převedením výrazů na pravou stranu, dělením této nerovnosti  $t > 0$  a provedením  $t \rightarrow 0+$  obdržíme pomocí (1.93), (1.94), (1.90), (1.48) a (1.49) následující

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2}(z - u^*, w^*) + \frac{1}{2}(u^*, y - w^*) - \frac{1}{2}(z - u^*, \widehat{w}) + \\ &\quad + \Pi'_N(w^*, y - w^*) + \Pi'_P(w^*, y - w^*) = \\ &= a(w^*, y - w^*) - (f, y - w^*) + \pi(w^*, y - w^*) - d(w^*, y - w^*) \end{aligned} \quad (1.98)$$

pro libovolnou dvojici  $(y, z) \in V_1 \times U_{ad}$  splňující (1.95). Jelikož totéž můžeme provést i pro  $t < 0$ , jako výsledek obdržíme variační rovnici (1.53), která je ekvivalentní s minimalizačním problémem (1.52).

Tím je tvrzení věty dokázáno.  $\square$

Nakonec uvedeme podmínky optimality pro úlohu optimálního řízení (1.91). Aplikováním obecných výsledků z dodatku 1 obdržíme následující podmínky pro optimální dvojici  $(w^*, u^*) \in V_1 \times U_{ad}$ :

$$a(w^*, v) = (f + u^*, v) \quad \forall v \in V_1, \quad (1.99)$$

$$a(p^*, v) = \frac{1}{2}(u^*, v) + \pi(w^*, v) - d(w^*, v) \quad \forall v \in V_1, \quad (1.100)$$

$$(w^* - \widehat{w} + 2p^*, u - u^*) \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}. \quad (1.101)$$

Připomeňme, že funkce  $p^* \in V_1$  představuje adjungovaný stav a je řešením adjungované rovnice (1.100). Rovnice (1.99) odpovídá stavové úloze (SP(1)).

**Poznámka 1.12** Použití transformace proměnných T1 má zajímavý „vedlejší efekt“. V rovnici pro stacionární bod (7.11) je vztah pro proměnnou  $z$  kubická rovnice bez kvadratického členu, kterou můžeme psát ve formalizovaném tvaru

$$z^3 + pz + q = 0, \quad (1.102)$$

když jsme označili

$$p = -\frac{3P\mu}{E\alpha}, \quad q = -\frac{3\lambda}{E\alpha}. \quad (1.103)$$

Zavedeme nové proměnné  $r$  and  $s$  splňující

$$r + s = z.$$

Po substituci do (1.102) obdržíme

$$r^3 + s^3 + (3rs + p)(r + s) + q = 0.$$

Nyní předepíšeme pro  $r$  a  $s$  druhou podmínku

$$rs = -\frac{p}{3}.$$

Dostaneme

$$r^3 + s^3 = -q, \quad r^3 s^3 = -\frac{p^3}{27}.$$

Na základě těchto vztahů plyne z Vietovy věty (viz [20]), že  $r^3$  a  $s^3$  jsou kořeny kvadratické rovnice

$$x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0$$

s diskriminantem rovným  $4\Delta$ , kde

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3. \quad (1.104)$$

Dle známých formulek pak je

$$r^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}, \quad s^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}$$

a odtud ihned plyne Cardanův vzorec pro rovnici (1.102) ve tvaru

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}. \quad (1.105)$$

Pro další úvahy má zásadní význam diskriminant kubické rovnice (1.102), který má tvar (viz [20])

$$D = -4p^3 - 27q^2 = -108\Delta. \quad (1.106)$$

Lze totiž dokázat následující tvrzení (viz např. [20], §38).

**Věta 1.8** *Kubická rovnice s reálnými koeficienty ve tvaru (1.102) má:*

- tři různé reálné kořeny, je-li  $D > 0$ ,
- všechny kořeny reálné, přičemž jeden z nich je dvojnásobný, je-li  $D = 0$ ,
- jeden kořen reálný a dva komplexně sdružené, je-li  $D < 0$ .

Aplikace těchto výsledků nám umožní diskutovat velikost a směr axiální síly  $P$ . V našem případě je

$$D = \frac{108}{(E\alpha)^2} \left( \frac{P^3\mu^3}{E\alpha} - \frac{9}{4}\lambda^2 \right). \quad (1.107)$$

Dle věty 1.8 můžeme pak rozlišit následující tři alternativy:

1.  $P < 0$  (tahové axiální zatížení)  $\Rightarrow D < 0 \Rightarrow$  1 reálné řešení.
2.  $P = 0$  (žádné axiální zatížení)  $\Rightarrow D < 0 \Rightarrow$  1 reálné řešení.
3.  $P > 0$  (tlakové axiální zatížení)

$$1) \quad P^3 < \frac{9E\alpha}{4\mu^3} \lambda^2 \quad \Rightarrow D < 0 \Rightarrow 1 \text{ reálné řešení,}$$

$$2) \quad P^3 > \frac{9E\alpha}{4\mu^3} \lambda^2 \quad \Rightarrow D > 0 \Rightarrow 3 \text{ reálná řešení.}$$

Závěr: Nalezli jsme tedy analogii Eulerovy kritické síly, výsledek však má hlavně existenční charakter, neboť nedokážeme nezávisle vypočítat multiplikátor  $\lambda$ . Ukazuje ale na to, že *uvažovaný nelineární model nosníku je schopný explicitně modelovat jeho vybočování.*

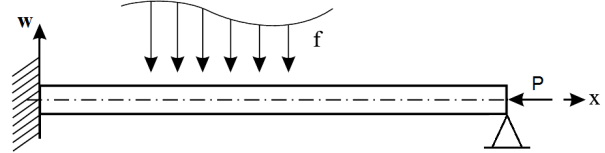
Jelikož transformaci T1 můžeme aplikovat i na zbývající okrajové úlohy, platí tento závěr pro všechny úlohy (P1)–(P4).

## 1.4.2 Problém (P2) s vetknutím na jednom a podepřením na druhém konci

V tomto odstavci budeme uvažovat následující zadání:

(i) okrajové podmínky tvaru:

$$\begin{aligned} w(0) &= w'(0) = 0, \\ w(L) &= w''(L) = 0. \end{aligned}$$



(ii) prostor testovacích funkcí: Obrázek 1.4: Nosník s vetknutím a podepřením

$$V = V_2 = \{v \in H^2((0, L)) : v(0) = v'(0) = 0, v(L) = 0\}.$$

Zde je situace velmi podobná, jako v předcházející úloze (P1). Abychom splnili tři stabilní okrajové podmínky, musíme pracovat se stavovým problémem (SP(1)) a proto použijeme opět transformaci T1, v níž položíme

- $V = V_2$ ,
- $Z = \{z \in H^1((0, L)) : z(0) = 0\}$ .

Souhrn výsledků odstavce 7.1 pro okrajovou úlohu (P2) je následující:

**T1:**  $J_1(w, u) = \frac{1}{2} \int_0^L u(w - \hat{w}) dx + \frac{1}{12} \int_0^L E\alpha(w')^4 dx - \frac{1}{2} \int_0^L P\mu(w')^2 dx$

(SP(1)):  $\begin{cases} \text{Nalézt funkci } w := w(u) \in V_2 \text{ takovou, že} \\ a(w, v) = (f + u, v) \quad \forall v \in V_2 \end{cases}$

$\hat{w} \in V_2$  je řešením (SP(1)) pro  $u = 0$

Stavovou úlohu (SP(1)) v klasické formulaci lze zapsat takto:

$$\begin{cases} \text{K danému } u \text{ nalézt funkci } w := w(u) \text{ tak, že} \\ EIw'''' = f + u \quad \text{v } (0, L), \\ w(0) = w'(0) = 0, \\ w(L) = 0. \end{cases} \quad (1.108)$$

Funkce  $\hat{w}$  je řešením úlohy

$$\hat{w} \in V_2 : \quad a(\hat{w}, v) = (f, v) \quad \forall v \in V_2. \quad (1.109)$$

Množinu  $U_{ad}$  definujme stejně jako výše pomocí (1.79).

Výsledná úloha optimálního řízení má pak následující tvar:

$$\begin{cases} \text{Nalézt } u^* \in U_{ad} \text{ tak, že} \\ J_1(w(u^*), u^*) = \min_{u \in U_{ad}} J_1(w(u), u), \\ \text{kde } w(u) \in V_2 \text{ řeší úlohu (SP(1)).} \end{cases} \quad (1.110)$$

Formálně se tedy neliší od úlohy přiřazené problému (P1), prostory funkcí jsou však v obou případech jiné.

Analogicky k větě 1.7 se pak dokáže tvrzení o vztahu úlohy (1.110) a úlohy o ohybu Gaova nosníku (1.52) s okrajovými podmínkami (P2).

**Věta 1.9** *Nechť  $f \in L^2((0, L))$  a necht' platí předpoklady o koeficientech rovnice uvedené v odstavcích 1.1 a 1.2.*

*Pak řešení úlohy (1.110) existuje, je jediné a funkce  $w^* := w(u^*)$  je řešením příslušné variační úlohy (1.52) na prostoru  $V = V_2$  za předpokladu, že konstanta  $C$  v (1.79) je dostatečně velká.*

Ještě si uvedeme podmínky optimality pro úlohu optimálního řízení (1.110). Z obecných výsledků z dodatku 1 obdržíme pro optimální dvojici  $(w^*, u^*) \in V_2 \times U_{ad}$  podmínky, které jsou formálně shodné s podmínkami optimality pro úlohu (P1), liší se ovšem výběrem prostoru funkcí, kterým zde je  $V_2$ :

$$a(w^*, v) = (f + u^*, v) \quad \forall v \in V_2, \quad (1.111)$$

$$a(p^*, v) = \frac{1}{2}(u^*, v) + \pi(w^*, v) - d(w^*, v) \quad \forall v \in V_2, \quad (1.112)$$

$$(w^* - \hat{w} + 2p^*, u - u^*) \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}. \quad (1.113)$$

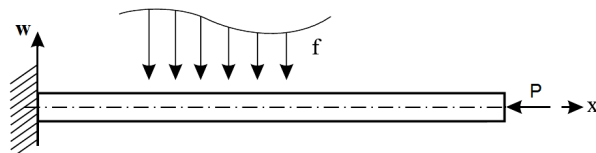
Také zde funkce  $p^* \in V_2$  představuje adjungovaný stav a je řešením adjungované rovnice (1.112). Rovnice (1.111) opět odpovídá stavové úloze (SP(1)).

### 1.4.3 Problém (P3) s volným koncem

V tomto odstavci budeme uvažovat následující zadání:

(i) okrajové podmínky tvaru:

$$\begin{aligned} w(0) &= w'(0) = 0, \\ w''(L) &= 0, \\ EIw'''(L) - \frac{1}{3}E\alpha(w'(L))^3 + \\ &+ P\mu w'(L) = 0. \end{aligned}$$



Obrázek 1.5: Nosník s volným koncem

(ii) prostor testovacích funkcí:

$$V = V_3 = \{v \in H^2((0, L)) : v(0) = v'(0) = 0\}.$$

V této úloze stačí splnit jen dvě stabilní okrajové podmínky, problém však představuje nelineární nestabilní podmínka na volném konci nosníku.

I nyní zkusíme použít transformaci T1. Výsledky jsou dle odstavce 7.1 následující:

$$\mathbf{T1}: J_1(w, u) = \frac{1}{2} \int_0^L u(w - \widehat{w}) dx + \frac{1}{12} \int_0^L E\alpha(w')^4 dx - \frac{1}{2} \int_0^L P\mu(w')^2 dx$$

$$(\text{SP}(1)^*): \quad \begin{cases} \text{Nalézt funkci } w := w(u) \in V_3 \text{ takovou, že} \\ a(w, v) = (f + u, v) - \lambda(L)v(L) \quad \forall v \in V_3 \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{1}{3} E\alpha(w')^3 - P\mu w'$$

$$\widehat{w} \in V_3 \text{ je řešením } (\text{SP}(1)^*) \text{ pro } u = 0 \text{ a } \lambda(L) = 0$$

V porovnání s předcházejícími úlohami (P1) a (P2) zde dostáváme nelineární stavovou úlohu (SP(1)\*), která má stejné okrajové podmínky jako uvažovaná úloha (P3). Avšak ideou metody CVM je řešení jednoduché stavové úlohy, která představuje omezení v úloze optimálního řízení a která by proto měla být (nejlépe) lineární.

Jako východisko se nabízí zavést okrajovou podmínku do stavové úlohy jako parametr, přičemž v optimu budeme požadovat splnění nelineární podmínky (1.54). Definujme proto pro zadanou dvojici  $\{u, r\} \in U_{ad} \times \mathbb{R}$  následující stavový problém

$$(\text{SP}(1)+): \quad \begin{cases} \text{Nalézt funkci } w := w(u, r) \in V_3 \text{ takovou, že} \\ a(w, v) = (f + u, v) - rv(L) \quad \forall v \in V_3. \end{cases} \quad (1.114)$$

To v klasické formulaci značí řešení úlohy

$$\begin{cases} EIw'''' = f + u, \\ w(0) = w'(0) = 0, \\ EIw''(L) = 0, EIw'''(L) = r. \end{cases} \quad (1.115)$$

**Poznámka 1.13** Existence hodnoty  $w'''(L)$  je zde i v dalším textu garantovaná tvrzením lemmatu 1.4.

Máme tedy k dispozici lineární okrajový problém, který však nespĺňuje požadovanou podmínku

$$EIw'''(L) = \lambda(L) = \frac{1}{3} E\alpha(w'(L))^3 - P\mu w'(L) \quad (1.116)$$

z (SP(1)\*). Toho dosáhneme optimálním řízením, když označíme  $\tilde{u} = \{u, r\} \in U_{ad} \times \mathbb{R}$  rozšířenou řídicí proměnnou.

Úloha optimálního řízení pak bude mít tvar:

$$\begin{cases} \text{Nalézt } \tilde{u}^* = \{u^*, r^*\} \in U_{ad} \times \mathbb{R} \text{ tak, že} \\ J_1(w(\tilde{u}^*), \tilde{u}^*) = \min_{\tilde{u} \in U_{ad} \times \mathbb{R}} J_1(w(\tilde{u}), \tilde{u}) \\ \text{za podmínky } r^* = \frac{1}{3} E\alpha((w(\tilde{u}^*))'(L))^3 - P\mu(w(\tilde{u}^*))'(L), \\ \text{přičemž } w = w(\tilde{u}) \in V_3 \text{ řeší úlohu } (\text{SP}(1)+) \\ \text{a } w^* = w(\tilde{u}^*) \in V_3 \text{ řeší úlohu } (\text{SP}(1)^*). \end{cases} \quad (1.117)$$

Platí zde



**Věta 1.10** *Nechť  $f \in L^2((0, L))$  a necht' platí předpoklady o koeficientech rovnice uvedené v odstavcích 1.1 a 1.2.*

*Pak řešení úlohy (1.117) existuje, je jediné a funkce  $w^* := w(\tilde{u}^*)$  je řešením příslušné variační úlohy (1.52) na prostoru  $V = V_3$  za předpokladu, že konstanta  $C$  v (1.79) je dostatečně velká.*

*Důkaz:* se vede analogicky jako u věty 1.7 s tím, že pracujeme s rozšířenou řídicí proměnnou  $\tilde{u} = \{u, r\} \in U_{ad} \times \mathbb{R}$ .  $\square$

Podmínky optimality jsou pro úlohu (1.117) shodné s podmínkami (1.99)–(1.101) pro úlohu (1.91), liší se výběrem prostoru funkcí, kterým je nyní prostor  $V_3$ , a okrajovou podmínkou (1.116).

Jednodušší řešení úlohy (P3) získáme, pokud nebudeme trvat na použití transformace T1. Abychom však mohli zvolit jinou transformaci, musí existovat funkce  $g$  transformovaného zatížení. Pokud ji budeme definovat vztahem (viz (7.31)):

$$\int_0^L g v' dx = \int_0^L f v dx \quad \forall v \in V_3, \quad (1.118)$$

lze za tohoto předpokladu použít transformaci T2, v níž položíme

- $V = V_3$ ,
- $Z = \{z \in H^1((0, L)) : z(0) = 0\}$ .

Podle výsledků z odstavce 7.2 pak dostaneme

$$\mathbf{T2}: J_2(w, u) = \frac{1}{2} \int_0^L u(w' - \hat{w}') dx + \frac{1}{12} \int_0^L E\alpha(w')^4 dx - \frac{1}{2} \int_0^L P\mu(w')^2 dx$$

$$(\text{SP}(2)): \begin{cases} \text{Nalézt funkci } z := z(u) \in Z \text{ takovou, že} \\ e(z, v) = (g + u, v) \quad \forall v \in Z \\ \text{Nalézt funkci } w \in V_3 \text{ takovou, že} \\ w' = z \\ w(0) = 0 \end{cases}$$

$$g \in L^2((0, L)): (g, v') = (f, v) \quad \forall v \in V_3$$

$$\hat{w} \in V_3 \text{ je řešením (SP}(2)) \text{ pro } u = 0$$

Zvolený postup umožňuje redukci stavové úlohy. To je dáno tím, že v transformaci T2 se rovnice (1.43) pro průhyb Gaova nosníku převádí na *Ginzburg–Landauovu rovnici* (7.46):

$$-EIz'' - P\mu z + \frac{1}{3}E\alpha z^3 = g + c, \quad (1.119)$$

kde se transformovaná pravá strana skládá z funkce  $g$  dané vztahem (1.118) a konstanty  $c$ , jež je přesněji definována v odstavci 7.2.

Úloha (SP(2)) je ovšem dvojitý problém pro neznámé  $z$  a  $w$ . Vyjmeme-li z něj první část, obdržíme dle (7.49) v klasické formulaci

$$\begin{cases} \text{K danému } u \text{ nalézt funkci } z := z(u) \text{ tak, že} \\ -EI z'' = g + u \quad \text{v } (0, L), \\ z(0) = 0, \\ z'(L) = 0, \end{cases} \quad (1.120)$$

přičemž jsme úlohu doplnili o příslušné okrajové podmínky. Slabá formulace této úlohy je

$$\begin{cases} \text{Nalézt funkci } z := z(u) \in Z \text{ takovou, že} \\ e(z, v) = (g + u, v) \quad \forall v \in Z. \end{cases} \quad (1.121)$$

Transformované zatížení  $g$ , které v úloze vystupuje, je určeno vztahem (1.118). Z praktického hlediska je nejvhodnější cesta k jeho určení na základě vztahů (7.32) a (7.34), neboť tak zajistíme i splnění okrajových podmínek na volném konci nosníku. Funkci  $g$  pak získáme řešením počátečního problému

$$\begin{cases} g' = -f, \\ g(L) = 0. \end{cases} \quad (1.122)$$

Zbývá ověřit splnění okrajových podmínek, což bylo u problémů (P1) a (P2) s ohledem na volbu stavové úlohy triviální. Zde stavová úloha pracuje s proměnnými  $z \in Z$ , takže máme zaručenou podmínku  $w'(0) = z(0) = 0$  zápisem v prostoru  $Z$ , zatímco podmínka  $w''(L) = z'(L) = 0$  bude splněna variačně. K původní proměnné  $w \in V_3$  se vrátíme pomocí druhé části stavové úlohy (SP(2)), kde uplatníme zbývající stabilní okrajovou podmínku:

$$\begin{cases} w' = z, \\ w(0) = 0. \end{cases} \quad (1.123)$$

Poslední okrajovou podmínku pro hodnotu  $V(L) = EI w'''(L)$  jsme schopni splnit explicitně, jelikož dle lemmatu 1.4 máme garantované, že  $w'''' \in L^2((0, L))$ . Pak v rovnici (1.120) na pravé straně pro  $x = L$  stojí dle (1.122) a (7.50) výraz

$$g(L) + u(L) = -\frac{1}{3} E\alpha (w'(L))^3 + P\mu w'(L), \quad (1.124)$$

což implikuje splnění okrajové podmínky (1.54), neboť  $EI z''(L) = EI w'''(L)$ .

Pro úlohu optimálního řízení použijeme funkcionál (7.56), takže s množinou přípustných hodnot řízení definovanou pomocí (1.79) pak bude výsledná úloha následující

$$\begin{cases} \text{Nalézt } u^* \in U_{ad} \text{ tak, že} \\ J_2(w(u^*), u^*) = \min_{u \in U_{ad}} J_2(w(u), u), \\ \text{kde } w(u) \in V_3 \text{ řeší úlohu (SP(2)).} \end{cases} \quad (1.125)$$

**Věta 1.11** *Nechť  $f \in L^2((0, L))$  a necht' platí předpoklady o koeficientech rovnice uvedené v odstavcích 1.1 a 1.2. Necht' existuje funkce  $g \in L^2((0, L))$  vlastnosti (1.118).*

*Pak řešení úlohy (1.125) existuje, je jediné a funkce  $w^* := w(u^*)$  je řešením příslušné variační úlohy (1.52) na prostoru  $V = V_3$  za předpokladu, že konstanta  $C$  v (1.79) je dostatečně velká.*

*Důkaz:* Existence optimální dvojice  $(w^*, u^*) \in V_3 \times U_{ad}$  úlohy (1.125) plyne pro libovolnou kladnou konstantu  $C$  z věty 1.6. V důkazu ji budeme uvažovat tak velkou, aby bylo možné provést veškeré úkony s veličinami, které mají náležet do  $U_{ad}$ .

Dále pro účely tohoto důkazu přepíšeme funkcionál  $J_2$  na tvar

$$J_2(z, u) = \frac{1}{2} \int_0^L u(z - \widehat{z}) dx + \frac{1}{12} \int_0^L E\alpha z^4 dx - \frac{1}{2} \int_0^L P\mu z^2 dx, \quad (1.126)$$

přičemž funkce  $\widehat{z}$  je definovaná (v souladu s definicí funkce  $\widehat{w}$ ) rovnicí

$$e(\widehat{z}, \varphi) = (g, \varphi) \quad \forall \varphi \in Z. \quad (1.127)$$

Necht'  $(w^*, u^*) \in V_3 \times U_{ad}$  je optimální dvojice úlohy (1.125) a necht'  $(z^*, u^*) \in Z \times U_{ad}$  je odpovídající optimum funkcionálu (1.126), tj. platí  $z^* = (w^*)'$ . Dále uvažujme přípustnou trojici tvaru

$$(w^* + t(v - w^*), u^* + t(s - u^*), z^* + t(y - z^*)) \quad (1.128)$$

pro nějaké  $t \in [-1, 1]$ ,  $s \in U_{ad}$ ,  $v \in V_3$ ,  $y \in Z$  a splňující stavovou rovnici (1.121)

$$e(z^* + t(y - z^*), \varphi) = (g + u^* + t(s - u^*), \varphi) \quad \forall \varphi \in Z \quad (1.129)$$

a rovnici (1.123)

$$(w^* + t(v - w^*))' = z^* + t(y - z^*). \quad (1.130)$$

Jelikož v optimu dle (1.121) platí

$$e(z^*, \varphi) = (g + u^*, \varphi) \quad \forall \varphi \in Z, \quad (1.131)$$

musí dle (1.129) dvojice  $(y, s)$  splňovat rovnici

$$e(y - z^*, \varphi) = (s - u^*, \varphi) \quad \forall \varphi \in Z, \quad (1.132)$$

což po dosazení z (1.131) dává

$$e(y, \varphi) = (g + s, \varphi) \quad \forall \varphi \in Z. \quad (1.133)$$

Podobně dle (1.123) máme v optimu

$$(w^*)' = z^* \quad (1.134)$$

a porovnáním s (1.130) obdržíme

$$(v - w^*)' = y - z^*. \quad (1.135)$$

Z optimality dvojice  $(z^*, u^*)$  plyne, že

$$J_2(z^*, u^*) \leq J_2(z^* + t(y - z^*), u^* + t(s - u^*)).$$

Po úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12} \int_0^L E\alpha(z^*)^4 dx - \frac{1}{2} \int_0^L P\mu(z^*)^2 dx \leq \\ & \leq \frac{t}{2}(s - u^*, z^*) + \frac{t}{2}(u^*, y - z^*) - \frac{t}{2}(s - u^*, \widehat{z}) + \frac{t^2}{2}(s - u^*, y - z^*) + \\ & + \frac{1}{12} \int_0^L E\alpha(z^* + t(y - z^*))^4 dx - \frac{1}{2} \int_0^L P\mu(z^* + t(y - z^*))^2 dx. \end{aligned}$$

Převedením výrazů na pravou stranu, dělením této nerovnosti  $t > 0$  a provedením  $t \rightarrow 0+$  obdržíme pomocí (1.131), (1.132) a (1.127)

$$\begin{aligned} 0 & \leq \frac{1}{2}(s - u^*, z^*) + \frac{1}{2}(u^*, y - z^*) - \frac{1}{2}(s - u^*, \widehat{z}) + \frac{1}{3} \int_0^L E\alpha(z^*)^3(y - z^*) dx - \\ & - \int_0^L P\mu z^*(y - z^*) dx = \\ & = e(z^*, y - z^*) - (g, y - z^*) + \frac{1}{3} \int_0^L E\alpha(z^*)^3(y - z^*) dx - \int_0^L P\mu z^*(y - z^*) dx \end{aligned}$$

pro libovolnou dvojici  $(y, s) \in Z \times U_{ad}$  splňující (1.133). Jelikož totéž můžeme provést také pro  $t < 0$ , jako výsledek získáme rovnici

$$e(z^*, y - z^*) - (g, y - z^*) + \frac{1}{3} \int_0^L E\alpha(z^*)^3(y - z^*) dx - \int_0^L P\mu z^*(y - z^*) dx = 0.$$

Sem dosadíme z (1.134), (1.135) a z definice (1.118) funkce  $g$ . S ohledem na to, že platí

$$a(w, \varphi) = e(w', \varphi') = e(z, \varphi') \quad \forall \varphi \in V_3,$$

pak obdržíme

$$\begin{aligned} & a(w^*, v - w^*) - (f, v - w^*) + \\ & + \frac{1}{3} \int_0^L E\alpha((w^*)')^3(v - w^*)' dx - \int_0^L P\mu(w^*)'(v - w^*)' dx = 0. \end{aligned} \quad (1.136)$$

Nakonec použijeme definiční vztahy (1.48), (1.49) a (1.51), čímž převedeme rovnici (1.136) na tvar (1.53), který představuje ekvivalentní formulaci minimalizačního problému (1.52) pro případ  $V = V_3$ .

Tím je tvrzení věty dokázáno.  $\square$

Zbývá ještě doplnit podmínky optimality pro úlohu (1.125). S ohledem na transformační vztahy se jako účelné jeví uvažovat funkcionál (1.126) a optimální dvojici  $(z^*, u^*) \in Z \times U_{ad}$ . Obdržíme následující podmínky:

$$e(z^*, \varphi) = (g + u^*, \varphi) \quad \forall \varphi \in Z, \quad (1.137)$$

$$e(p^*, \varphi) = \frac{1}{2}(u^*, \varphi) + \frac{1}{3}(E\alpha(z^*)^3, \varphi) - (P\mu z^*, \varphi) \quad \forall \varphi \in Z, \quad (1.138)$$

$$(z^* - \widehat{z} + 2p^*, u - u^*) \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}. \quad (1.139)$$

Funkce  $p^* \in Z$  je řešením adjungované rovnice (1.138),  $z^* \in Z$  je řešením rovnice (1.137), která odpovídá stavové úloze (SP(2)), a  $\hat{z}$  je řešením (1.127). Optimální hodnotu  $w^* \in V_3$  pak získáme pomocí (1.123):

$$(w^*)' = z^*, \quad w^*(0) = 0. \quad (1.140)$$

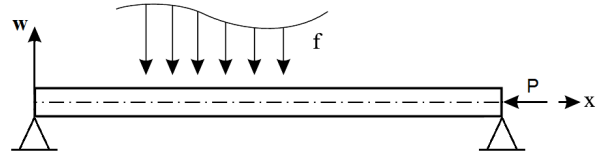
**Poznámka 1.14** Řešením úlohy optimálního řízení (1.125) určíme rovněž řešení nelineární Ginzburg–Landauovy rovnice (1.119), která je „ukrytá“ ve stavové úloze (SP(2)).

#### 1.4.4 Problém (P4) s prostým podepřením na obou koncích

V tomto odstavci budeme uvažovat následující zadání:

(i) okrajové podmínky tvaru:

$$\begin{aligned} w(0) &= w''(0) = 0, \\ w(L) &= w''(L) = 0. \end{aligned}$$



(ii) prostor testovacích funkcí:

$$V = V_4 = \{v \in H^2((0, L)) : v(0) = 0, v(L) = 0\}.$$

Obrázek 1.6: Nosník prostě podepřený

V tomto případě lze navázat na původní ideu řešení z článků [45] a [3]. V předchozích úlohách tomu bránila realizace příslušných okrajových podmínek.

Zde máme opět jen dvě stabilní okrajové podmínky. Abychom však mohli zvolit transformaci T3, musí existovat funkce  $g$  transformovaného zatížení definovaná vztahy (viz (7.67)):

$$\int_0^L gv'' dx = - \int_0^L fv dx \quad \forall v \in V_4. \quad (1.141)$$

Za tohoto předpokladu použijeme transformaci T3, v níž položíme

- $V = V_4$ ,
- $Z = H^1((0, L))$ ,

což opět umožňuje redukcí stavové úlohy. Ta je analogická tomu, co lze nalézt ve člancích [45] a [3] a co bylo stručně připomenuto v odstavci 1.3.

Výsledné vztahy pro transformaci okrajového problému (P4) pomocí transformace T3 jsou následující

$$\mathbf{T3}: J_3(w, u) = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{1}{EI} u^2 dx + \frac{1}{12} \int_0^L E\alpha (w')^4 dx - \frac{1}{2} \int_0^L P\mu (w')^2 dx$$

$$\begin{aligned} (\text{SP}(3)): \quad & \left\{ \begin{array}{l} \text{Nalézt funkci } w := w(u) \in V_4 \text{ takovou, že} \\ e(w, v) = (g + u, v) \quad \forall v \in V_4 \\ g \in L^2((0, L)): (g, v'') = -(f, v) \quad \forall v \in V_4 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Stavová úloha (SP(3)) má v klasické formulaci tvar

$$\begin{cases} \text{K danému } u \text{ nalézt funkci } w := w(u) \text{ tak, že} \\ -EI w'' = g + u \quad \text{v } (0, L), \\ w(0) = 0, \\ w(L) = 0. \end{cases} \quad (1.142)$$

Transformované zatížení  $g$ , které zde vystupuje, je definované vztahem (1.141). Z praktických důvodů ho budeme určovat na základě vztahů (7.68) a (7.69). Odtud plyne, že funkci  $g$  získáme řešením okrajového problému

$$\begin{cases} -g'' = f, \\ g(0) = g(L) = 0. \end{cases} \quad (1.143)$$

Podobně jako u úlohy (P3) zbývá ověřit splnění okrajových podmínek. Z formulace stavové úlohy máme garantované podmínky  $w(0) = w(L) = 0$  zápisem v prostoru funkcí. Z definičního vztahu (7.76) pro  $u$  a z podmínek (7.78) pro multiplikátor  $\lambda_2$  dostaneme

$$u(0) = u(L) = 0. \quad (1.144)$$

Na základě toho zbývající podmínky na okrajích intervalu  $(0, L)$  jsme schopni splnit explicitně v případě, že máme garantovanou existenci hodnot  $w''(0)$  a  $w''(L)$ . Pak v rovnici (1.142) na pravé straně pro  $x = 0, L$  máme dle (1.143) a (1.144) výraz rovný nule, což značí splnění obou uvedených okrajových podmínek.

Množinu přípustných hodnot řízení definovanou pomocí (1.79) musíme tedy doplnit o podmínky (1.144) a označíme ji  $U_{ad}^0$ . Protože v prostoru  $L^2((0, L))$  je obecně nelze garantovat, definujeme

$$U_{ad}^0 = \{u \in H^1((0, L)) : |u(x)| \leq C \text{ sk.vš. v } (0, L), u(0) = u(L) = 0\}, \quad (1.145)$$

kde  $C > 0$  je daná konstanta.

Vzhledem k tomu, že z transformace T3 dostáváme funkcionál (7.86), výsledná úloha pak bude mít následující tvar

$$\begin{cases} \text{Nalézt } u^* \in U_{ad}^0 \text{ tak, že} \\ J_3(w(u^*), u^*) = \min_{u \in U_{ad}^0} J_3(w(u), u), \\ \text{kde } w := w(u) \in V_4 \text{ řeší stavovou úlohu (SP(3)).} \end{cases} \quad (1.146)$$

**Věta 1.12** *Nechť  $f \in L^2((0, L))$  a necht' platí předpoklady o koeficientech rovnice uvedené v odstavcích 1.1 a 1.2. Necht' existuje funkce  $g \in L^2((0, L))$  vlastnosti (1.141).*

*Pak řešení úlohy (1.146) existuje, je jediné a funkce  $w^* := w(u^*)$  je řešením příslušné variační úlohy (1.52) na prostoru  $V = V_4$  za předpokladu, že konstanta  $C$  v (1.79) je dostatečně velká.*

*Důkaz:* Existence optimální dvojice  $(w^*, u^*) \in V_4 \times U_{ad}^0$  úlohy (1.146) plyne pro jakoukoliv kladnou konstantu  $C$  z věty 1.6. V důkazu ji budeme uvažovat tak velkou, aby bylo možné provést veškeré úkony s veličinami, které mají náležet do  $U_{ad}^0$ .

Uvažujme možné dvojice tvaru  $(w^* + t(v - w^*), u^* + t(y - u^*)) \in V_4 \times U_{ad}^0$ , přičemž  $t \in [-1, 1]$  je libovolné a  $v \in V_4$ ,  $y \in U_{ad}^0$  jsou prvky takové, že platí

$$\begin{cases} -EIv'' = g + y & \text{v } (0, L), \\ v(0) = 0 \\ v(L) = 0. \end{cases} \quad (1.147)$$

Z toho, že v bodě  $(w^*, u^*)$  je optimum úlohy (1.146), plyne

$$J_3(w^*, u^*) \leq J_3(w^* + t(v - w^*), u^* + t(y - u^*)).$$

Převědeme výrazy na pravou stranu, vydělíme nerovnost číslem  $t > 0$  a provedeme limitu pro  $t \rightarrow 0$ . Tím obdržíme s ohledem na značení (1.48) a (1.49)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^L \frac{1}{EI} u^*(y - u^*) dx + \Pi'_N(w^*, y - w^*) + \Pi'_P(w^*, y - w^*) = \\ &= \int_0^L \frac{1}{EI} u^*(y - u^*) dx + \pi(w^*, y - w^*) - d(w^*, y - w^*). \end{aligned} \quad (1.148)$$

Stejný postup pro  $t < 0$  a limitu pro  $t \rightarrow 0$  dává opačnou nerovnost, takže celkem máme

$$\int_0^L \frac{1}{EI} u^*(y - u^*) dx + \pi(w^*, v - w^*) - d(w^*, v - w^*) = 0 \quad (1.149)$$

pro všechny  $v, y$  splňující (1.147).

První integrál v (1.149) upravíme pomocí substitucí

$$u^* = -EI(w^*)'' - g, \quad y = -EIv'' - g,$$

které jsme získali z (1.142) a (1.147). Po úpravách a s ohledem na definici funkce  $g$  v (1.141) obdržíme

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{1}{EI} u^*(y - u^*) dx &= \int_0^L (EI(w^*)'' + g)(v - w^*)'' dx = \\ &= \int_0^L EI(w^*)''(v - w^*)'' dx - \int_0^L f(v - w^*) dx. \end{aligned} \quad (1.150)$$

To dosadíme do (1.149), použijeme označení (1.6), (1.7) a dostaneme

$$a(w^*, v - w^*) + \pi(w^*, v - w^*) - d(w^*, v - w^*) = (f, v - w^*) \quad \forall v \in V_4.$$

Vzhledem k tomu, že  $V_4$  je podprostor prostoru  $H^2((0, L))$ , lze s použitím definice (1.51) konstatovat, že  $u^*$  řeší variační rovnici (1.53).

Tím je tvrzení věty dokázáno.  $\square$

Na závěr uvedeme podmínky optimality pro úlohu optimálního řízení (1.146). Užitím obecných výsledků z dodatku 1 obdržíme pro optimální dvojici  $(w^*, u^*) \in V_4 \times U_{ad}^0$  následující podmínky:

$$e(w^*, v) = (g + u^*, v) \quad \forall v \in V_4, \quad (1.151)$$

$$e(p^*, v) = \pi(w^*, v) - d(w^*, v) \quad \forall v \in V_4, \quad (1.152)$$

$$(u^* + EI p^*, u - u^*) \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}^0. \quad (1.153)$$

Funkce  $p^* \in V_4$  představuje adjungovaný stav a je řešením adjungované rovnice (1.152). Rovnice (1.151) odpovídá stavové úloze (SP(3)).

Nyní se vrátíme k případu, kdy neexistuje funkce  $g$  požadovaných vlastností (1.141) resp. (1.143). Potom nezbyvá než použít „univerzální“ transformaci T1 s následujícími výsledky:

$$\mathbf{T1}: J_1(w, u) = \frac{1}{2} \int_0^L u(w - \hat{w}) dx + \frac{1}{12} \int_0^L E\alpha(w')^4 dx - \frac{1}{2} \int_0^L P\mu(w')^2 dx$$

$$(\text{SP}(1)): \begin{cases} \text{Nalézt funkci } w := w(u) \in V_4 \text{ takovou, že} \\ a(w, v) = (f + u, v) \quad \forall v \in V_4 \end{cases}$$

$$\hat{w} \in V_4 \text{ je řešením (SP}(1)) \text{ pro } u = 0$$

S ohledem na tvar stavové úlohy a výběr prostoru  $V_4$  máme garantované splnění všech čtyř okrajových podmínek. Úloha optimálního řízení pak bude mít tvar:

$$\begin{cases} \text{Nalézt } u^* \in U_{ad} \text{ tak, že} \\ J_1(w(u^*), u^*) = \min_{u \in U_{ad}} J_1(w(u), u), \\ \text{kde } w(u) \in V_4 \text{ řeší úlohu (SP}(1)). \end{cases} \quad (1.154)$$

**Věta 1.13** *Nechť  $f \in L^2((0, L))$  a necht' platí předpoklady o koeficientech rovnice uvedené v odstavcích 1.1 a 1.2.*

*Pak řešení úlohy (1.154) existuje, je jediné a funkce  $w^* := w(u^*)$  je řešením příslušné variační úlohy (1.52) na prostoru  $V = V_4$  za předpokladu, že konstanta  $C$  v (1.79) je dostatečně velká.*

*Důkaz:* se vede analogicky jako u věty 1.7. □

Podmínky optimality jsou pro úlohu (1.154) shodné s podmínkami (1.99)–(1.101) pro úlohu (1.91), liší se pouze výběrem prostoru funkcí, kterým je nyní prostor  $V_4$ .

## 1.4.5 Závěr odstavce 1.4

V tomto odstavci jsme pomocí řízené variační metody (CVM) zformulovali úlohy optimálního řízení (1.91), (1.110), (1.117), (1.125), (1.146) a (1.154) a ukázali jejich vztah ke klasickým a variačním úlohám ohybu nelineárního nosníku.

Zobecnění uvedených postupů uvedeme v následující kapitole pro případy s možným kontaktem ohýbajícího se nosníku s podloží. Aproximací těchto úloh a jejich algoritmickým zpracováním se budeme zabývat v kapitole 3. Vypočítané příklady zařadíme do kapitoly 4.



## 2. Kontaktní úlohy pro Gaův nosník

Nyní přejdeme ke studiu kontaktu u nosníků. Přestože zde existuje řada styčných bodů, v zásadě lze hovořit jen o značné podobnosti a nikoliv o nějaké redukci kontaktních úloh pružnosti do 1D.

### 2.1 Kontakt nosníku s překážkou

Kvůli snadnějšímu zápisu se v následujících úvahách zaměříme na klasický Euler–Bernoulliho nosník. Zobecnění pro nelineární Gaův model je triviální.

#### 2.1.1 Klasická formulace úloh pro standardní nosník

Vyjdeme z nejjednodušší možné kontaktní úlohy, kdy nosník spočívá na pružném podloží a nepůsobí axiální síla, viz obr. 2.1. Takovou situaci můžeme nalézt v řadě publikací (viz např. [7], [41]) popsanou následující rovnicí

$$(EI w'')'' + k_F w = q \quad \text{v } (0, L), \quad (2.1)$$

přičemž  $k_F > 0$  je koeficient charakterizující podloží a zbývající značení je stejné jako v kapitole 1.

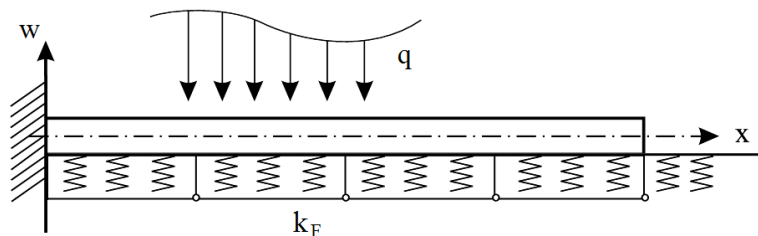
Ve skutečnosti tato rovnice obsahuje dva implicitní předpoklady:

1. člen  $k_F w$  odpovídá tzv. *Winklerovu modelu podloží*,
2. podloží je *pevně spojeno* s nosníkem (jako je tomu např. u železničních kolejí).

Winklerův model je *jednoparametrický*, parametrem je součinitel  $k_F$ . Situaci lze interpretovat jako systém stejných pružin působících v každém bodě podloží (viz obr. 2.1). Samotný součinitel podloží  $k_F$  je u nosníků dán vztahem, viz např. [14],

$$k_F = b k_f, \quad (2.2)$$

přičemž  $b$  značí šířku nosníku (viz odst. 1.1) a  $k_f > 0$  se nazývá koeficient, popř. modul poddajnosti (nebo tuhosti) podloží, udává se v  $N/m^3$  a odpovídá poddajnosti zmíněného systému pružin.



Obrázek 2.1: Schema nosníku na pružném podloží

V případě, kdy je nosník s podložím spojený, hovoříme (v souladu s [15] nebo [43]) o tzv. *bilaterálním podloží*. Pokud nosník na podloží pouze volně spočívá a nelze

tedy uvažovat o pevném spojení, musíme rovnici (2.1) modifikovat, a to speciálně její druhý člen. V takovém případě pak hovoříme o *unilaterálním podloží*.

K jeho popisu použijeme rozklad funkce  $w$  na kladnou a zápornou část ve tvaru

$$w(x) = w^+(x) - w^-(x), \quad (2.3)$$

přičemž

$$w^+(x) = \max\{0, w(x)\} \geq 0, \quad w^-(x) = \max\{0, -w(x)\} \geq 0. \quad (2.4)$$

Nyní je zřejmé, že pokud v některém bodě  $x \in (0, L)$  je  $w(x) = w^+(x) > 0$ , nedochází zde ke kontaktu nosníku s podložím a v důsledku toho je v rovnici (2.1) druhý člen nulový. Pokud naopak  $w(x) = -w^-(x) < 0$ , nosník se do podloží zabořil. Užitím vztahů (2.3), (2.4) a  $w^-(x) = (-w(x))^+$  přejde rovnice (2.1) na tvar

$$(EIw'')'' - k_F(-w)^+ = q \quad \text{v } (0, L). \quad (2.5)$$

Takovýto problém byl analyzován v [23] a [25]. Stejnou problematikou, avšak pro případ nelineárního Gaova nosníku, se zabývaly práce [24] a [10].

S ohledem na to, že člen  $k_F(-w)^+$  má fyzikální rozměr zatížení, můžeme namísto rovnice (2.5) uvažovat rovnici

$$(EIw'')'' = q + T(w) \quad \text{v } (0, L), \quad (2.6)$$

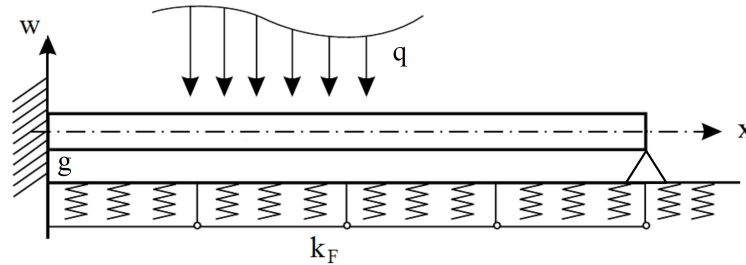
kde

$$T(w) = k_F(-w)^+ \quad \text{v } (0, L) \quad (2.7)$$

je reakce podloží (podle třetího Newtonova zákona), která zde má význam *kontaktní síly*, jež závisí na neznámém průhybu  $w$ .

Tato úvaha definuje tzv. *podmínku normálové poddajnosti*, o níž se ještě bude podrobněji hovořit v odstavci 2.1.2.

V dalším budeme uvažovat situaci, kdy mezi nosníkem a podložím existuje meze-  
zera. Nosník doplníme bez újmy na obecnosti o okrajové podmínky (P2). Mezeru obecně popíšeme pomocí funkce  $g(x) \leq 0$ , ale z důvodu jednoduchosti se zde ome-  
zíme na případ konstantní hodnoty  $g \leq 0$ , viz obr. 2.2.



Obrázek 2.2: Nosník nad pružným podložím

Opět uvažujme elastické Winklerovo podloží s koeficientem  $k_F$ . Analogicky jako výše můžeme nyní určit velikost reakce podloží vztahem

$$T(w) = k_F(g - w)^+ \quad \text{v } (0, L) \quad (2.8)$$

a toto vyjádření opět interpretujeme jako *podmínku normálové poddajnosti*. Klasickou formulaci kontaktní úlohy s podmínkami (P2) pak lze zapsat následovně:

$$\begin{cases} \text{Nalézt funkci } w \text{ tak, že} \\ (EIw'')'' = q + T(w) & \text{v } (0, L), \\ w(0) = w'(0) = 0, \\ w(L) = w''(L) = 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

kde  $T(w)$  je určeno dle (2.8).

**Poznámka 2.1** Je evidentní, že problém s mezerou  $g \leq 0$  je zobecněním úvodního problému, kdy nosník leží na podloží a kdy je  $g \equiv 0$ .

**Poznámka 2.2** Okrajovou podmínku

$$w(L) = w''(L) = 0$$

budeme považovat za splněnou bez ohledu na tvar zatížení  $q$ . Pokud by výslednice sil v bodě  $x = L$  nebyla záporná, pak prosté podepření nosníku zaměníme v tomto místě za kloubové uchycení.

**Poznámka 2.3** V předchozích úvahách jsme se zabývali případem, kdy je podloží *deformovatelné*. Jiná situace nastane, pokud máme *dokonale tuhé podloží*, neboť v rovnici (2.6) pak nelze a priori stanovit hodnotu síly  $T(w)$ . Je však zřejmé, že mohou nastat pouze následující dva případy.

1. Je-li  $w(x) = g$  pro dané  $x \in (0, L)$ , pak nastal kontakt a na základě třetího Newtonova zákona vzniká kontaktní síla  $T(w(x)) \geq 0$ .
2. Je-li  $w(x) > g$  pro dané  $x \in (0, L)$ , pak ke kontaktu nosníku s podložím nedošlo a tudíž  $T(w(x)) = 0$ .

Celkem můžeme z těchto úvah učinit závěr, že v uvažovaném případě platí následující podmínky

$$w \geq g, \quad T(w) \geq 0, \quad (w - g)T(w) = 0 \quad \text{v } (0, L). \quad (2.10)$$

Ty jsou v literatuře dobře známé jako *Signoriniho podmínky* a v této práci se k nim vrátíme v následujícím odstavci. Podmínky (2.10) musí pochopitelně být součástí matematické formulace problému s dokonale tuhým podložím (viz např. [15], [16]).

## 2.1.2 Kontaktní podmínky

Standardní okrajové podmínky úlohy pružnosti předepisují na vymezené části hranice tělesa buďto hodnotu posunutí nebo působící vnější sílu. Zcela jiná situace nastává v případě kontaktních úloh, jelikož na zóně kontaktu neznáme žádnou z těchto veličin a dokonce často není přesně známá ani samotná *kontaktní zóna*, tj. ta část hranice, kde dojde ke kontaktu.

V kontaktních úlohách pro nosník je situace velmi podobná, ale nikoliv identická, protože matematický model nosníku nepředstavuje redukci nějaké reálné 3D struktury, ale „uměle“ vytvořený 1D objekt, který zbývající dva rozměry - za jistých zjednodušujících předpokladů - implicitně obsahuje.

V dalším textu stručně popíšeme kontaktní podmínky teorie pružnosti a porovnáme je s kontaktními podmínkami v úlohách o nosníku.

1. *Podmínky nepronikání* nebo *Signoriniho podmínky*.

Nejnámější kontaktní podmínky popisující nepronikání ve formě komplementarity mezi *normálovou složkou posunutí*  $u_n$  a *kontaktní silou*  $T_n$ :

$$u_n \leq 0, \quad T_n \leq 0, \quad T_n u_n = 0. \quad (2.11)$$

V případě mezery zadané pomocí funkce  $g \geq 0$  pak mají podmínky obecnější tvar:

$$u_n - g \leq 0, \quad T_n \leq 0, \quad T_n(u_n - g) = 0. \quad (2.12)$$

I když vztahy (2.10) a (2.12) vypadají až na znaménko zcela analogicky, ve skutečnosti jsou fyzikálně odlišné. V Signoriniho podmínkách úlohy pružnosti (2.12) vystupuje normálová složka vektoru napětí, která je definovaná na povrchu uvažovaného tělesa. Ve vztazích (2.10) máme reaktivní sílu podloží  $T(w)$ , přesněji její vertikální složku.

2. *Podmínky normálové poddajnosti* (*normal compliance conditions*).

Tyto podmínky jsou vhodné v případě, že překážka není dokonale tuhá. Normálová složka reakce překážky pak závisí na velikosti proniknutí, což lze obecně zapsat takto:

$$-T_n = p_n(u_n - g), \quad (2.13)$$

kde  $p_n(\cdot)$  je nějaká zadaná funkce s vlastnostmi

$$a) \quad p_n(z) \geq 0 \quad \forall z, \quad (2.14)$$

$$b) \quad p_n(z) = 0 \quad \forall z \leq 0. \quad (2.15)$$

Tato funkce se nazývá *funkce normálové poddajnosti*.

Poměrně častou volbou pro funkci  $p_n$  je

$$p_n(z) = k_F z^+, \quad (2.16)$$

kde  $k_F$  je koeficient charakterizující poddajnost překážky a funkce  $z^+$  je definovaná vztahem  $z^+ = \max\{0, z\}$ .

Pro úlohy kontaktu nosníku s deformovatelným podložím je vztah (2.16) přirozenou volbou a vede přímo ke vztahům (2.7) a (2.8). Z analogických důvodů, jako tomu bylo u Signoriniho podmínek, však musíme uvažovat argument s opačným znaménkem, tj.  $g - u_n$ .

**Poznámka 2.4** Poprvé se tyto podmínky objevily v článku [39], samotný název používající pojem *normálová poddajnost* byl poprvé použit v [17]. Podrobnější výklad lze nalézt v monografiích [43] a [44].

**Poznámka 2.5** Uvažujeme-li kontakt pružného tělesa s podložkou, lze na Signoriniho kontaktní podmínky nahlížet jako na speciální případ podmínek normálové poddajnosti, kdy podložka je dokonale tuhá. Formálně pak můžeme odvodit Signoriniho podmínky z podmínek normálové poddajnosti tak, že provedeme limitu pro  $k_F \rightarrow +\infty$  (viz [43]).

### 2.1.3 Variační formulace úloh pro standardní nosník

Po klasické formulaci přejdeme k variační, která je vhodnější i z výpočetního hlediska, přičemž budeme uvažovat bez újmy na obecnosti i nadále úlohu (2.9), viz obr. 2.2. Dobře známou skutečností je, že kontaktní úlohy mohou být formulovány ve tvaru variačních nerovnic (viz např. [15], [16]). Úloha s deformovatelným pružným podložím ale bude mít jinou podobu.

Nejprve definujme prostor testovacích funkcí, jímž s ohledem na zadané okrajové podmínky bude prostor  $V = V_2$ . Rovnici (2.9) vynásobíme skalárně testovacími funkcemi  $v \in V_2$  a při použití Greenovy formule v 1D a značení (1.6), (1.7) obdržíme

$$a(w, v) + (-T(w), v) = (q, v) \quad \forall v \in V_2. \quad (2.17)$$

Rovnici (2.17) lze přepsat pomocí vztahu pro kontaktní sílu (2.8). Zavedeme-li nelineární formu na  $V_2 \times V_2$  předpisem

$$\kappa_E(w, v) = \int_0^L k_F (g - w)^+ v \, dx, \quad (2.18)$$

obdržíme úlohu

$$\begin{cases} \text{Nalézt funkci } w \in V_2 \text{ tak, že} \\ a(w, v) - \kappa_E(w, v) = (q, v) \quad \forall v \in V_2. \end{cases} \quad (2.19)$$

Pro deformovatelné podloží jsme tedy dostali *variační rovnici* namísto nerovnice. Vzhledem k druhému členu v (2.19) se jedná o nelineární problém.

Dále sestavíme funkcionál celkové potenciální energie pro úlohu (2.19). Definujme energii reaktivních sil podloží vztahem

$$\Pi_{EF}(v) = \frac{1}{2} \int_0^L k_F ((g - v)^+)^2 \, dx. \quad (2.20)$$

Celkovou energii pak dostaneme jako součet energie nosníku a (2.20)

$$\begin{aligned} \Pi_{ET}(v) &= \Pi_{EB}(v) + \Pi_{EF}(v) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L EI (v'')^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_0^L k_F ((g - v)^+)^2 \, dx - \int_0^L qv \, dx \end{aligned} \quad (2.21)$$

a můžeme zformulovat úlohu minimalizace

$$\begin{cases} \text{Nalézt } w \in V_2 \text{ tak, že} \\ \Pi_{ET}(w) = \min_{v \in V_2} \Pi_{ET}(v). \end{cases} \quad (2.22)$$

Tato úloha je konvexní a diferencovatelná v Gâteauxově smyslu na každém z prostorů  $V_1, \dots, V_4$ . Konvexita plyne z toho, že uvažovaný funkcionál je dle (2.21) součtem dvou funkcionálů, z nichž  $\Pi_{EB}$  je ryze konvexní s ohledem na (1.19).

Pokud jde o druhý z nich, platí následující tvrzení:

**Lemma 2.1** *Pro libovolné  $k_F > 0$  je funkcionál  $\Pi_{EF}$  konvexní na  $V$ , kde za  $V$  lze volit libovolný z prostorů  $V_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .*

*Důkaz:* Z (2.20) plyne, že

$$\Pi'_{EF}(w, v) = -\kappa_E(w, v) \quad \forall w, v \in V. \quad (2.23)$$

Odsud pak dostáváme s ohledem na (2.18) pro libovolné  $w, v \in V$

$$\begin{aligned} \Pi_{EF}(v) - \Pi_{EF}(w) - \Pi'_{EF}(w, v - w) &= \frac{1}{2} \int_0^L k_F((g - v)^+)^2 dx - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^L k_F((g - w)^+)^2 dx + \int_0^L k_F(g - w)^+(v - w) dx. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Nyní upravíme poslední člen v (2.24) na tvar

$$v - w = (g - w) - (g - v)$$

a s použitím následujících vztahů ( $u$  a  $z$  jsou vhodné funkce)

$$uu^+ \equiv (u^+)^2, \quad (2.25)$$

$$\int_0^L uz^+ dx \leq \int_0^L u^+ z^+ dx \quad \forall z, \quad (2.26)$$

z (2.24) obdržíme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^L k_F((g - v)^+)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L k_F((g - w)^+)^2 dx - \int_0^L k_F(g - w)^+(g - v) dx &\geq \\ &\geq \frac{1}{2} \int_0^L k_F((g - v)^+ - (g - w)^+)^2 dx \geq 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Tím jsme dokázali, že platí

$$\Pi_{EF}(v) \geq \Pi_{EF}(w) + \Pi'_{EF}(w, v - w) \quad \forall w, v \in V, \quad (2.28)$$

což je známá podmínka konvexity pro funkcionály (viz např. [6], [27]).  $\square$

Funkcionál  $\Pi_{EF}$  je konvexní, avšak není koercivní. Uvažujeme-li totiž posloupnost funkcí  $\{v_n\}$  takovou, že  $\|v_n\| \rightarrow +\infty$  a  $v_n \geq g$  pro dostatečně velká  $n$ , dostaneme

$$\|v_n\|_{V_2} \rightarrow +\infty \quad \Rightarrow \quad \Pi_{EF}(v_n) \rightarrow 0.$$

Vzhledem k tomu, že  $\Pi_{EF} \geq 0$ , však tento člen koercivitu celkové potenciální energie  $\Pi_{ET}$  nenaruší.

Z (2.23) plyne ihned ekvivalence úlohy (2.22) a předcházející formulace (2.19). A vzhledem k tomu, že to, že jsme dosud pracovali převážně s prostorem  $V_2$ , bylo v principu nepodstatné, můžeme zformulovat následující obecnou větu.

**Věta 2.1** *Za výše uvedených předpokladů řešení úlohy*

$$\begin{cases} \text{Nalézt } w \in V \text{ tak, že} \\ \Pi_{ET}(w) = \min_{v \in V} \Pi_{ET}(v). \end{cases} \quad (2.29)$$

*existuje pro všechny typy okrajových podmínek (P1)–(P4), je jediné a lze ho charakterizovat jako funkci  $w$  z příslušného prostoru testovacích funkcí  $V$  splňující variační rovnici*

$$\begin{cases} \text{Nalézt funkci } w \in V \text{ tak, že} \\ a(w, v) - \kappa_E(w, v) = (q, v) \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (2.30)$$

**Poznámka 2.6** Pro případ dokonale tuhého podloží definujeme množinu přípustných průhybů

$$K = \{v \in V_2 : v \geq g \text{ v } (0, L)\} \quad (2.31)$$

a rovnici (2.6) vynásobíme skalárně funkcemi  $v - w$ . Pomocí Greenovy formule obdržíme

$$a(w, v - w) = (q, v - w) + (T(w), v - w) \quad \forall v \in K. \quad (2.32)$$

Z (2.10) a (2.31) dále plyne

$$T(w)(v - w) = T(w)(v - g) + T(w)(g - w) = T(w)(v - g) \geq 0 \quad \forall v \in K. \quad (2.33)$$

Tudíž kontaktní úlohu tvaru (2.9), doplněnou o Signoriniho podmínky (2.10), lze nyní zformulovat na základě předchozích výsledků jako variační nerovnici

$$\begin{cases} \text{Nalézt funkci } w \in K \text{ tak, že} \\ a(w, v - w) \geq (q, v - w) \quad \forall v \in K. \end{cases} \quad (2.34)$$

Nerovnici (2.34) lze navíc ekvivalentně zapsat jako minimalizační problém

$$\begin{cases} \text{Nalézt } w \in K \text{ tak, že} \\ \Pi_{EB}(w) = \min_{v \in K} \Pi_{EB}(v). \end{cases} \quad (2.35)$$

Na základě teorie konvexní optimalizace (viz např. [5] nebo [13]), můžeme s ohledem na výsledky odstavce 1.1 a to, že  $K$  je konvexní množina, vyslovit následující tvrzení.

**Věta 2.2** *Úloha (2.35) má za daných předpokladů právě jediné řešení, a to pro všechny typy okrajových podmínek (P1)–(P4).*

## 2.1.4 Formulace kontaktních úloh pro Gaův nosník

Předchozí úvahy rozšíříme na nelineární Gaův nosník, přičemž pro určitost ponecháme v platnosti stejné okrajové podmínky jako v úloze (2.9). Připomeňme, že zatížení  $f$  Gaova nosníku souvisí se zatížením  $q$  Euler–Bernoulliho nosníku vztahem  $f(x) = (1 - \nu^2)q(x)$ . Přejdeme ihned k obecnější úloze s mezerou  $g \leq 0$  mezi nosníkem a podložím a s axiální silou  $P$  působící na pravém konci nosníku.

Je evidentní, že úvahy z předcházejících odstavců, které se týkaly kontaktu nosníku s podložím, zůstávají v platnosti. V důsledku toho pak klasická formulace pro

kontakt Gaova nosníku s okrajovými podmínkami (P2) a deformovatelného podloží má tvar

$$\begin{cases} \text{Nalézt funkci } w \text{ tak, že} \\ EIw'''' - E\alpha(w')^2w'' + P\mu w'' = f + c_F(g - w)^+ & \text{v } (0, L), \\ w(0) = w'(0) = 0, \\ w(L) = w''(L) = 0, \end{cases} \quad (2.36)$$

příčemž jsme položili

$$c_F = (1 - \nu^2)k_F. \quad (2.37)$$

Variační formulaci pro tyto úlohy získáme zcela analogicky jako tomu bylo Euler–Bernoulliho nosníku. Při přechodu od Euler–Bernoulliho nosníku ke Gaově nosníku nesmíme ovšem zapomenout, že budeme používat formálně symbol  $f$  místo  $q$  a obdobně  $c_F$  namísto  $k_F$ .

Definujme funkcionál celkové potenciální energie. Za tím účelem musíme zavést analogicky k (2.20) funkcionál

$$\Pi_F(v) = \frac{1}{2} \int_0^L c_F((g - v)^+)^2 dx \quad (2.38)$$

a nelineární formu

$$\kappa(w, v) = \int_0^L c_F(g - w)^+ v dx, \quad w, v \in V_2. \quad (2.39)$$

Funkcionál  $\Pi_F$  je konvexní na  $V_2$ , neboť stačí zaměnit  $c_F$  a  $k_F$  a použít lemma 2.1.

Funkcionál celkové potenciální energie pro úlohu s deformovatelným podložím pak má tvar

$$\begin{aligned} \Pi_T(v) &= \Pi_G(v) + \Pi_F(v) = \Pi_0(v) + \Pi_N(v) + \Pi_P(v) + \Pi_F(v) = \\ &= \frac{1}{2} b(v, v) + \frac{1}{4} \pi(v, v) + \Pi_F(v) - (f, v). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Za výše uvedených předpokladů a pokud axiální síla  $P < \bar{P}$  (kde  $\bar{P}$  je dáno vztahem (1.64)), je tento funkcionál součtem ryze konvexního funkcionálu  $\Pi_G$  (podle věty 1.2) a konvexního funkcionálu  $\Pi_F$  (podle lemmatu 2.1) a je proto ryze konvexní.

Má tedy smysl zformulovat na prostoru  $V = V_2$  minimalizační problém ve tvaru

$$\begin{cases} \text{Nalézt } w \in V \text{ tak, že} \\ \Pi_T(w) = \min_{v \in V} \Pi_T(v). \end{cases} \quad (2.41)$$

Ten je s ohledem na zmíněnou konvexitu ekvivalentní s následující nelineární variační rovnicí

$$\begin{cases} \text{Nalézt funkci } w \in V \text{ tak, že} \\ b(w, v) + \pi(w, v) - \kappa(w, v) = (f, v) \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (2.42)$$

kde  $V = V_2$ . Přitom jsme použili označení (1.51), (1.49) a (2.39).

Poznamenejme, že výběr prostoru  $V = V_2$ , nebyl v předchozích úvahách podstatný. Lze proto pro každé  $V = V_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , zformulovat analogii vět 1.2 až 1.4, nyní pro funkcionál  $\Pi_T$ .



**Věta 2.3** *Za výše uvedených předpokladů je funkcionál  $\Pi_T$  pro libovolné axiální zatížení nepřevyšující mezní sílu  $\bar{P}$  konvexní na  $V$ , přičemž pro  $P < \bar{P}$  je ryze konvexní.*

Podle věty 1.3 je funkcionál  $\Pi_G$  koercivní na  $V$ . Vzhledem k tomu, že pro  $\Pi_F$  platí stejné závěry, jako pro funkcionál  $\Pi_{EF}$  z odst. 2.1.3, dostáváme následující tvrzení.

**Věta 2.4** *Za výše uvedených předpokladů je funkcionál  $\Pi_T$  pro libovolné axiální zatížení koercivní na  $V$ .*

Jako důsledek dvou předcházejících vět obdržíme tvrzení o existenci a jednoznačnosti řešení.

**Věta 2.5** *Nechť jsou splněny všechny výše uvedené předpoklady a necht'  $P < \bar{P}$ . Potom má úloha (2.41) pro všechny okrajové problémy (P1)–(P4) právě jedno řešení, stejně jako úloha (2.42).*

**Poznámka 2.7** Tvrzení vět 2.3 a 2.5 byla založená na předpokladu, že axiální síla nepřevyší mezní hodnotu  $\bar{P}$  danou pomocí (1.64). V případě kontaktní úlohy bychom však měli tuto hodnotu opravit o vliv podloží. Případ pevného spojení celého nosníku s podložím popisuje rovnice (viz (2.1))

$$EIw'''' - E\alpha(w')^2w'' + P\mu w'' + c_F w = f \quad \text{v } (0, L). \quad (2.43)$$

Hodnotu mezní síly pak musíme upravit na tvar

$$\hat{P} = \min_{v \in V} \frac{\int_0^L EI (v'')^2 dx + \int_0^L c_F v^2 dx}{\int_0^L \mu (v')^2 dx}, \quad (2.44)$$

přičemž zde nepůjde, podobně jako v kapitole 1, o *skutečnou* kritickou resp. mezní sílu, neboť nedokážeme do vzorce zakomponovat nelineární člen.

V obecném případě bude v (2.44) vystupovat integrál

$$\int_{\gamma_C} c_F (g - v)^2 dx,$$

kde  $\gamma_C \subset [0, L]$  představuje kontaktní zónu, kterou ovšem předem neznáme.

Mezní síla pro kontaktní problém (2.42) se proto bude nacházet v intervalu  $[\bar{P}, \hat{P}]$  a bude představovat dolní odhad pro skutečnou kritickou sílu. Tu nelze analyticky odvodit, neboť neznáme předem ani rozsah kontaktní zóny ani řešení úlohy.

**Poznámka 2.8** Klasická formulace pro kontakt Gaova nosníku s okrajovými podmínkami (P2) a dokonale tuhého podloží je následující

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Nalézt funkci } w \text{ tak, že} \\ EIw'''' - E\alpha(w')^2w'' + P\mu w'' = f + (1 - \nu^2)T(w) \quad \text{v } (0, L), \\ w(0) = w'(0) = 0, \\ w(L) = w''(L) = 0, \\ w \geq g, \quad T(w) \geq 0, \quad (w - g)T(w) = 0 \quad \text{v } (0, L). \end{array} \right. \quad (2.45)$$

Analogicky s (2.35) dokážeme pro tento případ zformulovat i variační problém

$$\begin{cases} \text{Nalézt } w \in K \text{ tak, že} \\ \Pi_G(w) = \min_{v \in K} \Pi_G(v), \end{cases} \quad (2.46)$$

kde  $K$  je určeno stejně jako v odstavci 2.1.3. Ekvivalentně lze pak takovou úlohu vyjádřit následující nerovnicí

$$\begin{cases} \text{Nalézt funkci } w \in K \text{ tak, že} \\ b(w, v - w) + \pi(w, v - w) \geq (f, v - w) \quad \forall v \in K. \end{cases} \quad (2.47)$$

V obecném případě se jedná o tzv. *hemivariační nerovnici*, přičemž termín *hemivariační* vyjadřuje v souladu s [33] skutečnost, že výchozí funkcionál potenciální energie  $\Pi_G$  je obecně nekonvexní.

Pokud však přijmeme v poznámce 2.7 uvedený předpoklad ohledně velikosti axiální síly  $P$ , lze považovat funkcionál  $\Pi_G$  s ohledem na odstavec 1.2 za ryze konvexní a koercivní. To pak značí, že výše uvedené kontaktní úlohy mají řešení, které je navíc určeno jednoznačně.

## 2.2 Kontaktní úlohy pro Gaův nosník a deformovatelné podloží pomocí CVM

Podobně jako v odstavci 1.4 zde postupně probereme čtyři okrajové úlohy uvedené v 1.1 a u každé nově zformulujeme úlohu kontaktu Gaova nosníku (zatíženého vertikálně i axiálně) s podložím.

Postup bude formálně shodný s tím, který byl předveden v odstavci 1.4, protože kontaktní člen, který zde bude oproti úlohám o ohybu navíc, neovlivní příliš významně formulování kontaktních úloh. To se projeví až při řešení těchto úloh na počítači.

Všechny kontaktní úlohy budeme uvažovat ve variantě s *deformovatelným podložím*: tj. pro funkcionál  $\Pi_T$  na prostoru  $V_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , uvažujeme úlohu stejného typu, jako je (2.41):

$$\begin{cases} \text{Nalézt } w \in V_i \text{ tak, že} \\ \Pi_T(w) = \min_{v \in V_i} \Pi_T(v), \end{cases} \quad (2.48)$$

k níž lze přirozeně přiřadit variační rovnici

$$\begin{cases} \text{Nalézt funkci } w \in V_i \text{ tak, že} \\ b(w, v) + \pi(w, v) - \kappa(w, v) = (f, v) \quad \forall v \in V_i. \end{cases} \quad (2.49)$$

Transformovaný funkcionál definovaný pomocí dodatku 3 označíme  $\widehat{J}_k$ , kde  $k = 1, 2, 3$ , je číslo transformace, takže úloze (2.48) přiřadíme úlohu optimálního řízení tvaru

$$\begin{cases} \text{Nalézt } u^* \in U_{ad} \text{ tak, že} \\ \widehat{J}_k(w(u^*), u^*) = \min_{u \in U_{ad}} \widehat{J}_k(w(u), u), \\ \text{kde } w(u) \in V_i \text{ řeší úlohu (SP(k)).} \end{cases} \quad (2.50)$$

Pro indexy  $i$  a  $k$  z této formulace platí poznámka 1.10 z předchozí kapitoly 1.

Pokud jde o řešitelnost úlohy (2.50), lze analogicky jako u věty 1.6 dokázat platnost následujícího tvrzení.

**Věta 2.6** *Nechť  $k \in \{1, 2, 3\}$  a  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  jsou čísla zvolená ve smyslu poznámky 1.10. Úloha optimálního řízení (2.50) má za předpokladu  $P < \bar{P}$  právě jedno řešení.*

Cílem analýz prováděných v následujícím textu bude ukázat, že řešením úloh (2.50) získáme rovněž řešení odpovídajících úloh (2.48).

Úlohy s *dokonalě tuhým podložím* zde nebudeme - s ohledem na rozsah práce - analyzovat. Problematika je však řešitelná pomocí postupů metody CVM. Případ s lineárním Euler–Bernoulliho nosníkem a okrajovými podmínkami (P3) je zpracován v článkách [45] a [3], pro nelineární Gaův nosník s okrajovými podmínkami (P2) v článku [29].

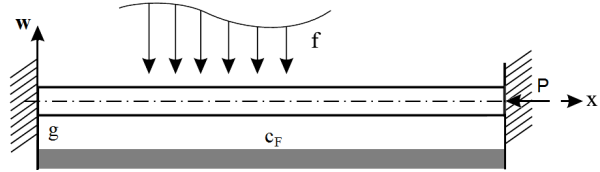
Připomeňme, že všechny následující úvahy se budou týkat ryze konvexního případu, kdy máme axiální sílu  $P < \bar{P}$ .

## 2.2.1 Problém (P1) s oboustranným vetknutím

V tomto odstavci budeme uvažovat následující zadání:

(i) okrajové podmínky tvaru:

$$\begin{aligned} w(0) = w'(0) = 0, \\ w(L) = w'(L) = 0. \end{aligned}$$



Obrázek 2.3: Oboustranně vetknutý nosník

(ii) prostor testovacích funkcí:

$$V = V_1 = \{v \in H^2((0, L)) : v(0) = v'(0) = 0, v(L) = v'(L) = 0\}.$$

Pomocí stejných argumentů jako u problému ohybu nosníku s okrajovými podmínkami (P1) v odstavci 1.4.1 dojdeme k použití transformace T1, v níž položíme

- $V = V_1$ ,
- $Z = \{z \in H^1((0, L)) : z(0) = z(L) = 0\}$ .

Výsledky odstavce 7.1 můžeme přehledně zapsat takto:

$$\mathbf{T1}: J_1(w, u) = \frac{1}{2} \int_0^L u(w - \hat{w}) dx + \frac{1}{12} \int_0^L E\alpha(w')^4 dx - \frac{1}{2} \int_0^L P\mu(w')^2 dx$$

$$\hat{J}_1(w, u) = J_1(w, u) + \frac{1}{2} \int_0^L c_F((g - w)^+)^2 dx$$

$$(\text{SP}(1)): \begin{cases} \text{Nalézt funkci } w := w(u) \in V_1 \text{ takovou, že} \\ a(w, v) = (f + u, v) \quad \forall v \in V_1 \end{cases}$$

$$\hat{w} \in V_1 \text{ je řešením (SP}(1)) \text{ pro } u = 0$$

Funkce  $\widehat{w}$  je tedy řešením úlohy (1.90). Množinu  $U_{ad}$  přípustných hodnot řízení  $u$  definujeme vztahem (1.79).

Pro úlohu optimálního řízení použijeme transformovaný funkcionál  $\widehat{J}_1$ . Výsledná úloha optimálního řízení bude pak následující

$$\begin{cases} \text{Nalézt } u^* \in U_{ad} \text{ tak, že} \\ \widehat{J}_1(w(u^*), u^*) = \min_{u \in U_{ad}} \widehat{J}_1(w(u), u), \\ \text{kde } w(u) \in V_1 \text{ řeší úlohu (SP(1)).} \end{cases} \quad (2.51)$$

O vztahu mezi touto úlohou optimálního řízení a kontaktní úlohou pro Gaův nosník (2.41) s okrajovými podmínkami (P1) vypovídá následující věta.

**Věta 2.7** *Nechť  $u^*$  řeší úlohu (2.51). Potom funkce  $w^* := w(u^*)$  je řešením příslušné variační úlohy (2.41) na prostoru  $V_1$  za předpokladu, že konstanta  $C$  v (1.79) je dostatečně velká.*

*Důkaz:* se vede stejně jako v případě věty 1.7. Ke změnám dochází pouze na následujících místech:

(i) V nerovnosti (1.96), která má nyní tvar

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(u^*, w^* - \widehat{w}) + \Pi_N(w^*) + \Pi_P(w^*) + \Pi_F(w^*) &\leq \\ &\leq \frac{1}{2}(u, w - \widehat{w}) + \Pi_N(w) + \Pi_P(w) + \Pi_F(w) \quad \forall (w, u) \in V_1 \times U_{ad}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

(ii) V nerovnosti (1.97), která nyní bude

$$\begin{aligned} \Pi_N(w^*) + \Pi_P(w^*) + \Pi_F(w^*) &\leq \frac{t}{2}(z - u^*, w^*) + \frac{t}{2}(u^*, y - w^*) - \\ &\quad - \frac{t}{2}(z - u^*, \widehat{w}) + \frac{t^2}{2}(z - u^*, y - w^*) + \\ &\quad + \Pi_N(w^* + t(y - w^*)) + \Pi_P(w^* + t(y - w^*)) + \\ &\quad + \Pi_F(w^* - t(y - w^*)). \end{aligned} \quad (2.53)$$

(iii) Nerovnost (1.98) upravíme na tvar

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2}(z - u^*, w^*) + \frac{1}{2}(u^*, y - w^*) - \frac{1}{2}(z - u^*, \widehat{w}) + \Pi'_N(w^*, y - w^*) + \\ &\quad + \Pi'_P(w^*, y - w^*) + \Pi'_F(w^*, y - w^*) = \\ &= a(w^*, y - w^*) - (f, y - w^*) + \pi(w^*, y - w^*) - d(w^*, y - w^*) - \\ &\quad - \kappa(w^*, y - w^*). \end{aligned} \quad (2.54)$$

(iv) Vzhledem k definici (1.51) bilineární formy  $b(.,.)$  jako výsledek obdržíme variační rovnici (2.42), která je ekvivalentní s minimalizačním problémem (2.41).  $\square$

Nakonec doplníme podmínky optimality pro úlohu optimálního řízení (2.51). Aplikováním obecných výsledků z dodatku 1 obdržíme následující podmínky pro

optimální dvojici  $(w^*, u^*) \in V_1 \times U_{ad}$ :

$$a(w^*, v) = (f + u^*, v) \quad \forall v \in V_1, \quad (2.55)$$

$$a(p^*, v) = \frac{1}{2} (u^*, v) + \pi(w^*, v) - d(w^*, v) - \kappa(w^*, v) \quad \forall v \in V_1, \quad (2.56)$$

$$(w^* - \hat{w} + 2p^*, u - u^*) \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}. \quad (2.57)$$

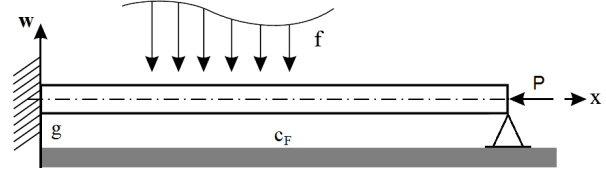
Připomeňme, že funkce  $p^* \in V_1$  představuje adjungovaný stav a je řešením adjungované rovnice (2.56). Rovnice (2.55) odpovídá stavové úloze (SP(1)).

## 2.2.2 Problém (P2) s vetknutím na jednom a podepřením na druhém konci

V tomto odstavci budeme uvažovat následující zadání:

(i) okrajové podmínky tvaru:

$$\begin{aligned} w(0) &= w'(0) = 0, \\ w(L) &= w''(L) = 0. \end{aligned}$$



Obrázek 2.4: Nosník s vetknutím a podepřením

(ii) prostor testovacích funkcí:

$$V = V_2 = \{v \in H^2((0, L)) : v(0) = v'(0) = 0, v(L) = 0\}.$$

Zde je situace velmi podobná, jako v předcházející úloze (P1). Použijeme zde opět transformaci T1, v níž položíme

- $V = V_2$ ,
- $Z = \{z \in H^1((0, L)) : z(0) = 0\}$ .

Dle odstavce 7.1 pak obdržíme následující výsledky

$$\mathbf{T1:} \quad J_1(w, u) = \frac{1}{2} \int_0^L u(w - \hat{w}) dx + \frac{1}{12} \int_0^L E\alpha(w')^4 dx - \frac{1}{2} \int_0^L P\mu(w')^2 dx$$

$$\hat{J}_1(w, u) = J_1(w, u) + \frac{1}{2} \int_0^L c_F((g - w)^+)^2 dx$$

$$(\text{SP}(1)): \quad \begin{cases} \text{Nalézt funkci } w := w(u) \in V_2 \text{ takovou, že} \\ a(w, v) = (f + u, v) \quad \forall v \in V_2 \end{cases}$$

$$\hat{w} \in V_2 \text{ je řešením (SP}(1)) \text{ pro } u = 0$$

Přitom funkce  $\hat{w}$  je řešením úlohy (1.90). Množinu  $U_{ad}$  definujme stejně jako výše vztahem (1.79).

Abychom mohli zformulovat úlohu optimálního řízení, opět použijeme funkcionál  $\widehat{J}_1$ . Výsledná úloha bude pak následující

$$\begin{cases} \text{Nalézt } u^* \in U_{ad} \text{ tak, že} \\ \widehat{J}_1(w(u^*), u^*) = \min_{u \in U_{ad}} \widehat{J}_1(w(u), u), \\ \text{kde } w(u) \in V_2 \text{ řeší úlohu (SP(1)).} \end{cases} \quad (2.58)$$

Formálně se tedy liší od úlohy (2.51) jen volbou prostoru funkcí.

Analogicky k větě 2.7 se dokáže tvrzení o vztahu úlohy (2.58) a úlohy (2.41) o kontaktu Gaova nosníku s deformovatelným podložím pro případ okrajových podmínek (P2).

**Věta 2.8** *Nechť  $u^*$  řeší úlohu (2.58). Potom funkce  $w^* := w(u^*)$  je řešením příslušné variační úlohy (2.41) na prostoru  $V_2$  za předpokladu, že konstanta  $C$  v (1.79) je dostatečně velká.*

Ještě si uvedeme podmínky optimality pro úlohu optimálního řízení (2.58). Z obecných výsledků z dodatku 1 obdržíme pro optimální dvojici  $(w^*, u^*) \in V_2 \times U_{ad}$  podmínky, které jsou formálně shodné s podmínkami optimality pro úlohu (2.51), liší se ovšem výběrem prostoru funkcí, kterým zde je  $V_2$ :

$$a(w^*, v) = (f + u^*, v) \quad \forall v \in V_2, \quad (2.59)$$

$$a(p^*, v) = \frac{1}{2} (u^*, v) + \pi(w^*, v) - d(w^*, v) - \kappa(w^*, v) \quad \forall v \in V_2, \quad (2.60)$$

$$(w^* - \widehat{w} + 2p^*, u - u^*) \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}. \quad (2.61)$$

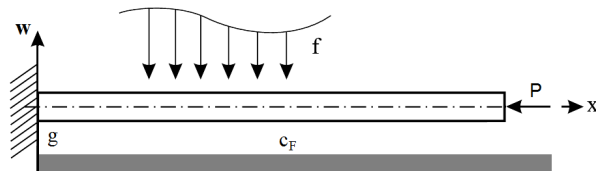
Také zde funkce  $p^* \in V_2$  představuje adjungovaný stav a je řešením adjungované rovnice (2.60). Rovnice (2.59) odpovídá stavové úloze (SP(1)).

### 2.2.3 Problém (P3) s volným koncem

V tomto odstavci budeme uvažovat následující zadání:

(i) okrajové podmínky tvaru:

$$\begin{aligned} w(0) &= w'(0) = 0, \\ w''(L) &= 0, \\ EIw'''(L) - \frac{1}{3} E\alpha(w'(L))^3 + \\ &+ P\mu w'(L) = 0. \end{aligned}$$



Obrázek 2.5: Nosník s volným koncem

(ii) prostor testovacích funkcí:

$$V = V_3 = \{v \in H^2((0, L)) : v(0) = v'(0) = 0\}.$$

Zde platí stejná argumentace jako v odstavci 1.4.3. Pokud existuje funkce  $g$  transformovaného zatížení, jež je definovaná vztahem (1.118), lze použít transformaci T2, v níž položíme

- $V = V_3$ ,
- $Z = \{z \in H^1((0, L)) : z(0) = 0\}$ .

Podle odstavce 7.3 pak dostáváme

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T2}: J_2(w, u) &= \frac{1}{2} \int_0^L u(w' - \widehat{w}') dx + \frac{1}{12} \int_0^L E\alpha(w')^4 dx - \frac{1}{2} \int_0^L P\mu(w')^2 dx \\
 \widehat{J}_2(w, u) &= J_2(w, u) + \frac{1}{2} \int_0^L c_F((g - w)^+)^2 dx \\
 (\text{SP}(2)): &\begin{cases} \text{Nalézt funkci } z := z(u) \in Z \text{ takovou, že} \\ e(z, v) = (g + u, v) \quad \forall v \in Z \\ \text{Nalézt funkci } w \in V_3 \text{ takovou, že} \\ w' = z \\ w(0) = 0 \end{cases} \\
 &g \in L^2((0, L)): (g, v') = (f, v) \quad \forall v \in V_3 \\
 \widehat{w} \in V_3 &\text{ je řešením (SP}(2)) \text{ pro } u = 0
 \end{aligned}$$

Množinu  $U_{ad}$  definujeme opět vztahem (1.79).

Pro úlohu optimálního řízení použijeme funkcionál  $\widehat{J}_2$ . Výsledná úloha optimálního řízení pak má následující tvar

$$\begin{cases} \text{Nalézt } u^* \in U_{ad} \text{ tak, že} \\ \widehat{J}_2(w(u^*), u^*) = \min_{u \in U_{ad}} \widehat{J}_2(w(u), u), \\ \text{kde } w(u) \in V_3 \text{ řeší úlohu (SP}(2)). \end{cases} \quad (2.62)$$

**Věta 2.9** *Nechť existuje funkce  $g \in L^2((0, L))$  vlastnosti (1.118) a nechť  $u^*$  řeší úlohu (2.62). Potom funkce  $w^* := w(u^*)$  je řešením příslušné variační úlohy (2.41) na prostoru  $V_3$  za předpokladu, že konstanta  $C$  v (1.79) je dostatečně velká.*

*Důkaz:* se vede v principu stejně jako u předcházejících vět 1.11 a 2.7.  $\square$

Zbývá ještě doplnit podmínky optimality pro úlohu (2.62). Uvažujme tedy optimální trojici  $(w^*, z^*, u^*) \in V_3 \times Z \times U_{ad}$  a pomocí obecných vztahů z dodatku 1 obdržíme následující podmínky:

$$e(z^*, \varphi) = (g + u^*, \varphi) \quad \forall \varphi \in Z, \quad (2.63)$$

$$a(p^*, v) = \frac{1}{2} (u^*, v) + \pi(w^*, v) - d(w^*, v) - \kappa(w^*, v) \quad \forall v \in V_3, \quad (2.64)$$

$$(z^* - \widehat{z} + 2p^*, u - u^*) \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}. \quad (2.65)$$

Funkce  $z^* \in Z$  je řešením rovnice (2.63), která odpovídá stavové úloze (SP(2)), a  $\widehat{z}$  je řešením (7.54). Přitom mezi optimálními hodnotami  $w^* \in V_3$  a  $z^* \in Z$  platí vztah

$$(w^*)' = z^*, \quad w^*(0) = 0. \quad (2.66)$$

Funkce  $p^* \in Z$  je řešením rovnice (2.64), která je s ohledem na člen  $\kappa(\cdot, \cdot)$  adjungovaná k (2.63) právě prostřednictvím vztahů (2.66), neboť tento člen nelze vyjádřit pomocí proměnné  $z$ .

Nakonec se vrátíme k případu, kdy neexistuje funkce  $g$  požadovaných vlastností (1.118) resp. (1.122). Potom ovšem lze použít transformaci T1. Výsledky jsou dle odstavce 7.1 následující:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T1}: J_1(w, u) &= \frac{1}{2} \int_0^L u(w - \widehat{w}) dx + \frac{1}{12} \int_0^L E\alpha(w')^4 dx - \frac{1}{2} \int_0^L P\mu(w')^2 dx \\
 \widehat{J}_2(w, u) &= J_2(w, u) + \frac{1}{2} \int_0^L c_F((g - w)^+)^2 dx \\
 (\text{SP}(1)^*): &\quad \begin{cases} \text{Nalézt funkci } w := w(u) \in V_3 \text{ takovou, že} \\ a(w, v) = (f + u, v) - \lambda(L)v(L) \quad \forall v \in V_3 \end{cases} \\
 \lambda &= \frac{1}{3} E\alpha(w')^3 - P\mu w' \\
 \widehat{w} \in V_3 &\text{ je řešením (SP}(1)^*) \text{ pro } u = 0 \text{ a } \lambda(L) = 0
 \end{aligned}$$

Ze stejných důvodů, jako tomu bylo v odstavci 1.4.3., zavedeme rozšířenou řídicí proměnnou  $\tilde{u} = \{u, r\} \in U_{ad} \times \mathbb{R}$  a pomocnou stavovou úlohu (SP(1)+).

Úloha optimálního řízení bude mít tvar:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Nalézt } \tilde{u}^* = \{u^*, r^*\} \in U_{ad} \times \mathbb{R} \text{ tak, že} \\ \widehat{J}_1(w(\tilde{u}^*), \tilde{u}^*) = \min_{\tilde{u} \in U_{ad} \times \mathbb{R}} \widehat{J}_1(w(\tilde{u}), \tilde{u}) \\ \text{za podmínky } r^* = \frac{1}{3} E\alpha((w(\tilde{u}^*))'(L))^3 - P\mu(w(\tilde{u}^*))'(L), \\ \text{přičemž } w = w(\tilde{u}) \in V_3 \text{ řeší úlohu (SP}(1)+) \\ \text{a } w^* = w(\tilde{u}^*) \in V_3 \text{ řeší úlohu (SP}(1)^*). \end{array} \right. \quad (2.67)$$

Ohledně úlohy (2.67) platí

**Věta 2.10** *Nechť  $u^*$  řeší úlohu (2.67). Potom funkce  $w^* := w(\tilde{u}^*)$  je řešením příslušné variační úlohy (2.41) na prostoru  $V_3$  za předpokladu, že konstanta  $C$  v (1.79) je dostatečně velká.*

*Důkaz:* se vede analogicky jako u věty 1.7 a 2.7. když namísto proměnné  $u \in U_{ad}$  použijeme  $\tilde{u} \in U_{ad} \times \mathbb{R}$ .  $\square$

Podmínky optimality jsou pro úlohu (2.67) shodné s podmínkami (2.55)–(2.57) pro úlohu (2.51), liší se jen ve výběru prostoru funkcí, kterým je v nyní prostor  $V_3$ .

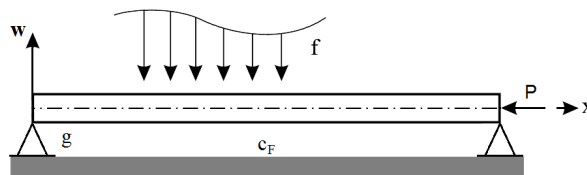
## 2.2.4 Problém (P4) s prostým podepřením na obou koncích

V tomto odstavci budeme uvažovat následující zadání:



(i) okrajové podmínky tvaru:

$$\begin{aligned} w(0) = w''(0) = 0, \\ w(L) = w''(L) = 0. \end{aligned}$$



Obrázek 2.6: Nosník prostě podepřený

(ii) prostor testovacích funkcí:

$$V = V_4 = \{v \in H^2((0, L)) : v(0) = 0, v(L) = 0\}.$$

V tomto případě lze realizovat původní ideu řešení z článků [45] a [3], pochopitelně se zobecněním na nelineární Gaův nosník. V předchozích úlohách tomu bránila realizace příslušných okrajových podmínek.

Za předpokladu, že máme garantovanou existenci funkce  $g$  takové, že pro ni platí (1.141), lze aplikovat transformaci T3, v níž položíme

- $V = V_4$ ,
- $Z = H^1((0, L))$ .

Výsledky odstavce 7.3 uvedeme v následujícím přehledu.

$$\begin{aligned} \mathbf{T3}: J_3(w, u) &= \frac{1}{2} \int_0^L \frac{1}{EI} u^2 dx + \frac{1}{12} \int_0^L E\alpha (w')^4 dx - \frac{1}{2} \int_0^L P\mu (w')^2 dx \\ \widehat{J}_3(w, u) &= J_3(w, u) + \frac{1}{2} \int_0^L c_F ((g - w)^+)^2 dx \\ (\text{SP}(3)): &\begin{cases} \text{Nalézt funkci } w := w(u) \in V_4 \text{ takovou, že} \\ e(w, v) = (g + u, v) \quad \forall v \in V_4 \\ g \in L^2((0, L)) : (g, v'') = -(f, v) \quad \forall v \in V_4 \end{cases} \end{aligned}$$

Množinu přípustných hodnot řízení zde musíme stejně jako v paragrafu 1.4.4 doplnit o podmínky (1.144). Bude tedy daná vztahem (1.145) a označená  $U_{ad}^0$ .

Vzhledem k tomu, že z transformace T3 dostáváme funkcionál  $\widehat{J}_3$ , výsledná úloha pak bude mít následující tvar

$$\begin{cases} \text{Nalézt } u^* \in U_{ad}^0 \text{ tak, že} \\ \widehat{J}_3(w(u^*), u^*) = \min_{u \in U_{ad}^0} \widehat{J}_3(w(u), u), \\ \text{kde } w := w(u) \in V_4 \text{ řeší stavovou úlohu (SP}(3)). \end{cases} \quad (2.68)$$

**Věta 2.11** *Nechť existuje funkce  $g \in L^2((0, L))$  vlastnosti (1.141) a nechť  $u^*$  řeší úlohu (2.68). Potom funkce  $w^* := w(u^*)$  je řešením příslušné variační úlohy (2.41) na prostoru  $V_4$  za předpokladu, že konstanta  $C$  v  $U_{ad}^0$  je dostatečně velká.*

*Důkaz:* se vede v principu stejně jako u předcházejících vět 1.12 a 2.7. □

Nyní uvedeme podmínky optimality pro úlohu optimálního řízení (2.68). Užitím obecných výsledků z dodatku 1 obdržíme pro optimální dvojici  $(w^*, u^*) \in V_4 \times U_{ad}^0$  následující podmínky:

$$e(w^*, v) = (g + u^*, v) \quad \forall v \in V_4, \quad (2.69)$$

$$e(p^*, v) = \pi(w^*, v) - d(w^*, v) - \kappa(w^*, v) \quad \forall v \in V_4, \quad (2.70)$$

$$(u^* + EIp^*, u - u^*) \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}^0. \quad (2.71)$$

Funkce  $p^* \in V_4$  představuje adjungovaný stav a je řešením adjungované rovnice (2.70). Rovnice (2.69) odpovídá stavové úloze (SP(3)).

Zbývá vyšetřit případ, kdy funkce transformovaného zatížení  $g$  požadované vlastnosti (1.141) neexistuje. Potom použijeme transformaci T1, která pracuje s původní funkcí zatížení  $f$ . Z transformace T1 obdržíme následující vztahy.

$$\mathbf{T1}: J_1(w, u) = \frac{1}{2} \int_0^L u(w - \hat{w}) dx + \frac{1}{12} \int_0^L E\alpha(w')^4 dx - \frac{1}{2} \int_0^L P\mu(w')^2 dx$$

$$\hat{J}_1(w, u) = J_1(w, u) + \frac{1}{2} \int_0^L c_F((g - w)^+)^2 dx$$

$$(\text{SP}(1)): \begin{cases} \text{Nalézt funkci } w := w(u) \in V_4 \text{ takovou, že} \\ a(w, v) = (f + u, v) \quad \forall v \in V_4 \end{cases}$$

$$\hat{w} \in V_4 \text{ je řešením (SP}(1)) \text{ pro } u = 0$$

Okrajové podmínky máme zaručeny výběrem stavové úlohy a prostoru funkcí, takže můžeme sestavit úlohu optimálního řízení:

$$\begin{cases} \text{Nalézt } u^* \in U_{ad} \text{ tak, že} \\ \hat{J}_1(w(u^*), u^*) = \min_{u \in U_{ad}} \hat{J}_1(w(u), u), \\ \text{kde } w(u) \in V_4 \text{ řeší úlohu (SP}(1)). \end{cases} \quad (2.72)$$

**Věta 2.12** *Nechť  $u^*$  řeší úlohu (2.72). Potom funkce  $w^* := w(u^*)$  je řešením příslušné variační úlohy (2.41) na prostoru  $V_4$  za předpokladu, že konstanta  $C$  v (1.79) je dostatečně velká.*

*Důkaz:* se vede analogicky jako u věty 1.7 a věty 2.7. □

Podmínky optimality jsou pro úlohu (2.72) shodné s podmínkami (2.55)–(2.57) pro úlohu (2.51), liší se jen ve výběru prostoru funkcí, kterým je nyní prostor  $V_4$ .

## 2.2.5 Závěr odstavce 2.2

V tomto odstavci jsme pomocí metody CVM zformulovali úlohy optimálního řízení (2.51), (2.58), (2.62), (2.67), (2.68) a (2.72) a ukázali jejich vztah ke klasickým a variačním úlohám kontaktu nelineárního nosníku s deformovatelným podložím.

Aproximací těchto úloh a jejich algoritmickým zpracováním se budeme zabývat v kapitole 3. Vypočítané příklady zařadíme do kapitoly 4.

# 3. Aproximace a numerická realizace jednotlivých úloh

V této kapitole stručně popíšeme hlavní postupy, pomocí nichž je možné realizovat na počítačích řešení ohybu nebo kontaktu nelineárního Gaova nosníku pomocí úloh optimálního řízení.

## 3.1 Aproximace úloh optimálního řízení

Úlohy, které jsme zformulovali v předcházejících dvou kapitolách, nedokážeme exaktně vyřešit a proto se musíme uchýlit k nějaké jejich aproximaci. Speciálně pro stavové úlohy budeme uvažovat aproximace založené na použití metody konečných prvků (MKP).

Pro určitost se zaměříme na obecnou úlohu (5.4) se stavovým problémem (5.3) z dodatku 1, kterou můžeme interpretovat např. jako úlohu (1.110) z odstavce 1.4.2 (popř. i jako úlohu (2.58) z odstavce 2.2.2). Uvažujme tedy

$$\begin{cases} \text{Nalézt } u^* \in U_{ad} \text{ tak, že} \\ J(w(u^*), u^*) = \min_{u \in U_{ad}} J(w(u), u), \\ \text{kde } w(u) \in V \text{ řeší úlohu (SP(1)),} \end{cases} \quad (3.1)$$

přičemž

$$J(w(u), u) = \frac{1}{2} \int_0^L u(w - \hat{w}) dx + \frac{1}{12} \int_0^L E\alpha(w')^4 dx - \frac{1}{2} \int_0^L P\mu(w')^2 dx \quad (3.2)$$

a (SP(1)) představuje následující problém:

$$\begin{cases} \text{Nalézt } w := w(u) \in V \text{ tak, že} \\ a(w, v) = \langle f + Bu, v \rangle_{V' \times V} \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (3.3)$$

s možnou volbou prostoru funkcí  $V = V_2$ .

Nechť  $V_h \subset V$  a  $U_h \subset U$  jsou podprostory konečné dimenze a nechť  $U_{ad}^h \subset U^h$  je neprázdná, uzavřená, konvexní a omezená podmnožina  $U$ . Obecně nepředpokládáme, že je  $U_{ad}^h \subset U_{ad}$ . Symbolem  $h > 0$  značíme diskretizační parametr.

Stavový problém (3.3) nyní nahradíme jeho konečně-prvkovou aproximací

$$\begin{cases} \text{Nalézt } w_h := w_h(u_h) \in V_h \text{ tak, že} \\ a(w_h, v_h) = \langle f_h + B_h u_h, v_h \rangle_h \quad \forall v_h \in V_h, \end{cases} \quad (3.4)$$

přičemž  $f_h$  a  $B_h$  jsou aproximace funkce  $f$  a zobrazení  $B \in \mathcal{L}(U, V')$  a  $\langle \cdot, \cdot \rangle_h$  značí dualitu mezi  $V_h'$  a  $V_h$ .

**Poznámka 3.1** Poznamenejme, že v případě, kdy je výraz  $EI$  konstantní na  $(0, L)$ , jsme schopni vyčíslit hodnoty bilineární formy  $a(w_h, v_h)$  exaktně. S ohledem na předpoklady uvedené v odstavci 1.2 proto nepotřebujeme v (3.4) bilineární formu aproximovat.

Nechť  $J_h: V_h \times U_h \mapsto \mathbb{R}$  je zdola spojitý funkcionál na  $V_h \times U_h$ , tj. platí

$$w_h^k \rightarrow w_h, u_h^k \rightarrow u_h \quad \text{pro } k \rightarrow +\infty \quad \Rightarrow \quad \liminf_{k \rightarrow +\infty} J_h(w_h^k, u_h^k) \geq J_h(w_h, u_h). \quad (3.5)$$

Aproximací problému optimálního řízení (3.1) budeme nyní rozumět úlohu

$$\begin{cases} \text{Nalézt } u_h^* \in U_{ad}^h \text{ tak, že} \\ J_h(w_h(u_h^*), u_h^*) = \min_{u_h \in U_{ad}^h} J_h(w_h(u_h), u_h), \\ \text{kde } w_h(u_h) \in V_h \text{ řeší diskrétní stavovou úlohu (3.4).} \end{cases} \quad (3.6)$$

O bilineární formě  $a(.,.)$  můžeme předpokládat, že je spojitá a  $V$ -eliptická (viz odstavec 1.1). Jestliže  $f_h \in V_h'$  a  $B_h \in \mathcal{L}(U_h, V_h')$ , pak diskrétní stavová úloha (3.4) má s ohledem na Lax–Milgramovu větu právě jedno řešení pro libovolně zadané  $u_h \in U_h$ .

Pokud navíc platí i (3.5), potom má úloha optimálního řízení (3.6) alespoň jedno řešení  $u_h^*$ , jak lze dedukovat z tvrzení 5.1.

Nakonec bychom měli vyšetřit vztah mezi řešením spojitého problému (3.1) a řešením diskrétního problému (3.6), a to v případě, že  $h \rightarrow 0+$ . I když je taková analýza důležitá, zde ji vynecháme z důvodu její rozsáhlosti a pouze se odkážeme na monografii [52] a tam uvedené další práce.

## 3.2 Algebraická formulace úloh optimálního řízení

Cílem tohoto odstavce bude nalézt maticovou, resp. algebraickou formulaci úlohy optimálního řízení (3.1).

Za tímto účelem budeme předpokládat, že

- hodnota diskretizačního parametru  $h$  bude libovolná, avšak pevně daná,
- v intervalu  $[0, L]$  máme dané dvě dělení na  $N(h)$  a  $M(h)$  podintervalů,
- platí

$$\dim V_h = N(h) = N, \quad \dim U_h = M(h) = M, \quad (3.7)$$

- platí

$$V_h = \text{span} \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}, \quad U_h = \text{span} \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_M\}. \quad (3.8)$$

Odtud ihned plyne, že  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$  a  $\{\psi_j\}_{j=1}^M$  jsou systémy bázevých funkcí podprostorů  $V_h$  a  $U_h$ . V důsledku toho lze libovolnou funkci  $w_h \in V_h$  vyjádřit takto

$$w_h(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i(x), \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.9)$$

Obdobně můžeme psát

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^M \beta_j \psi_j(x), \quad \beta_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, M. \quad (3.10)$$

Základem MKP je Galerkinova metoda, jejíž idea je následující: dosadíme výrazy (3.9) a (3.10) do (3.4) a pak postupně volíme za testovací funkce  $v_h$  báze funkce  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ . Tak získáme pro daný vektor  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_j)_{j=1}^M \in \mathbb{R}^M$ , který reprezentuje daný parametr řízení, soustavu lineárních algebraických rovnic pro neznámé  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_i)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$ . Tuto soustavu zapíšeme ve tvaru

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{f} + \mathbf{B}\boldsymbol{\beta}, \quad (3.11)$$

když jsme označili

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= (k_{ij})_{i,j=1}^N \in \mathbb{R}^{N \times N}, & k_{ij} &= a(\varphi_j, \varphi_i), \\ \mathbf{B} &= (b_{ij})_{i=1, \dots, N}^{j=1, \dots, M} \in \mathbb{R}^{N \times M}, & b_{ij} &= \langle B_h \psi_j, \varphi_i \rangle_h, \\ \mathbf{f} &= (f_i)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N, & f_i &= \langle f_h, \varphi_i \rangle_h. \end{aligned}$$

Matice  $\mathbf{K}$  je v MKP známá jako matice tuhosti a  $\mathbf{f}$  jako vektor zatížení.

MKP obvykle pracuje s tzv. Courantovými báze funkcemi, pro něž je charakteristická následující vlastnost:

$$\chi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } i = j, \\ 0 & \text{je-li } i \neq j. \end{cases}$$

Aplikujeme-li tento princip na všechny funkce z  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$  a  $\{\psi_j\}_{j=1}^M$ , obdržíme s ohledem na (3.9) a (3.10)

$$\alpha_i = w_h(x_i) \equiv w_i, \quad \beta_j = u_h(x_j) \equiv u_j.$$

Definováním vektorů

$$\mathbf{w} = (w_i)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N, \quad \mathbf{u} = (u_i)_{i=1}^M \in \mathbb{R}^M,$$

pak dosáhneme toho, že soustavu (3.11) můžeme přepsat ve tvaru

$$\mathbf{K}\mathbf{w} = \mathbf{f} + \mathbf{B}\mathbf{u}. \quad (3.12)$$

Řešení, které jsme zde předvedli, je formulováno dosti obecně. Abychom dokázali stavovou úlohu (3.12) realizovat na počítači, potřebujeme konkrétněji definovat báze funkce v rámci MKP. Pokud jde o nosník, podrobný popis postupu řešení bude uveden v odstavci 3.3.1. Na tomto místě se prozatím omezíme na to, že budeme definovat konečně-prvkový prostor vztahem

$$V_h = \{v_h \in C^1((0, L)): v_h|_{K_i} \in P_3(K_i) \quad \forall K_i, v_h(0) = v_h'(0) = 0 = v_h(L)\}, \quad (3.13)$$

kde  $K_i$  značí  $i$ -tý podinterval v  $(0, L)$  a  $P_3(K_i)$  představuje prostor kubických polynomů definovaných na  $K_i$ .

Pro konstrukci podprostoru  $U_h$  zvolíme pro jednoduchost tentýž systém podintervalů jako u  $V_h$ , takže  $M = N$ . Na něm budeme pracovat s lineárními polynomy. Máme tedy

$$U_h = \{u_h \in C^0((0, L)): u_h|_{K_i} \in P_1(K_i) \quad \forall K_i\}. \quad (3.14)$$

K tomu, abychom odvodili algebraickou formu úlohy (3.1) použijeme následující obrat. Definujme následovně dva izomorfismy

$$\mathcal{I}_1: V_h \rightarrow \mathbb{R}^N: \quad \mathcal{I}_1 w_h = \mathbf{w}, \quad (3.15)$$

$$\mathcal{I}_2: U_h \rightarrow \mathbb{R}^M: \quad \mathcal{I}_2 u_h = \mathbf{u}. \quad (3.16)$$

Pak diskrétní řízení  $\mathbf{u}$  náleží do množiny

$$\mathcal{U}_{ad} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^M: \mathcal{I}_2^{-1} \mathbf{u} \in U_{ad}^h\}. \quad (3.17)$$

Podobně můžeme zkonstruovat algebraickou reprezentaci funkcionálu  $J_h$ , jíž je funkce, kterou označíme  $F$ :

$$F(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = J_h(\mathcal{I}_1^{-1} \mathbf{w}, \mathcal{I}_2^{-1} \mathbf{u}). \quad (3.18)$$

Diskrétní úlohu optimálního řízení (3.6) pro pevně zadaný parametr  $h > 0$  pak lze vyjádřit následujícím způsobem

$$\begin{cases} \text{Nalézt vektor } \mathbf{u}^* \in \mathcal{U}_{ad} \text{ tak, že} \\ F(\mathbf{w}(\mathbf{u}^*), \mathbf{u}^*) = \min_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}_{ad}} F(\mathbf{w}(\mathbf{u}), \mathbf{u}), \\ \text{kde } \mathbf{w}(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^N \text{ řeší lineární soustavu (3.12).} \end{cases} \quad (3.19)$$

Taková formulace zřejmě představuje *úlohu nelineárního programování*.

### 3.3 Řešení stavových úloh pomocí MKP

K řešení stavových problémů použijeme metodu konečných prvků. Ze souhrnu uvedeného v odstavci 1.4 je zřejmé, že (SP(1)) je úloha ohybu standardního lineárního nosníku a jde tudíž o eliptickou úlohu 4. řádu. Zbylé dvě stavové úlohy jsou diferenciální rovnice 2. řádu, jež lze řešit stejným postupem.

#### 3.3.1 Řešení úlohy (SP(1))

Bez újmy na obecnosti uvažujme úlohu (SP(1)) pro  $u = 0$ , tj.

$$\begin{cases} \text{Nalézt funkci } w \in V \text{ takovou, že} \\ a(w, v) = (f, v) \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (3.20)$$

Diskrétní formulace této úlohy má obecně tvar

$$\begin{cases} \text{Nalézt funkci } w_h \in V_h \text{ takovou, že} \\ a(w_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \end{cases} \quad (3.21)$$

kde  $V_h$  je vhodný konečnědimenzionální podprostor prostoru  $V$ . Zde položíme

$$X_h = \{v_h \in C^1((0, L)) : v_h|_{K_i} \in P_3(K_i) \quad \forall K_i \in \mathcal{T}_h\}, \quad (3.22)$$

přičemž  $\mathcal{T}_h$  označuje dělení intervalu  $(0, L)$  na podintervaly  $K_i = [x_{i-1}, x_i]$  délky  $h_i$ . Uzly dělení  $\mathcal{T}_h$  jsme očíslovali zleva od 0 do  $N$ , tj.  $x_0 = 0, x_N = L$ . Diskretizační parametr  $h$  definujeme vztahem  $h = \max_i h_i$ .

Zvolíme-li dále pro určitost, a to bez újmy na obecnosti, okrajové podmínky (P2), obdržíme pro podprostor  $V_h$  vyjádření

$$V_h = \{v_h \in X_h : v_h(0) = v_h'(0) = 0, v_h(L) = 0\}. \quad (3.23)$$

Důležité je zde to, že funkce z prostoru  $V_h$  jsou funkce třídy  $C^1((0, L))$ . Podle vět o vnoření je zaručeno, že  $V_h \subset H^2((0, L))$ . Z těchto důvodů musíme použít konečný prvek s hermiteovskými bázovými funkcemi.

Na síti  $\mathcal{T}_h$  nadefinujeme pro  $i = 0, \dots, N$  dva systémy bázových funkcí:

$$\varphi_{2i}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < x_{i-1}, \\ -\frac{2(x-x_{i-1})^2(x-x_i-h_i/2)}{h_i^3} & \text{pro } x \in [x_{i-1}, x_i] = K_i, \\ \frac{2(x-x_{i+1})^2(x-x_i+h_{i+1}/2)}{h_{i+1}^3} & \text{pro } x \in [x_i, x_{i+1}] = K_{i+1}, \\ 0 & \text{pro } x > x_{i+1}, \end{cases}$$

a

$$\varphi_{2i+1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < x_{i-1}, \\ \frac{(x-x_{i-1})^2(x-x_i)}{h_i^2} & \text{pro } x \in [x_{i-1}, x_i] = K_i, \\ \frac{(x-x_{i+1})^2(x-x_i)}{h_{i+1}^2} & \text{pro } x \in [x_i, x_{i+1}] = K_{i+1}, \\ 0 & \text{pro } x > x_{i+1}, \end{cases}$$

s vlastnostmi

$$\varphi_{2i}(x_j) = \delta_{ij}, \quad (\varphi_{2i})'(x_j) = 0, \quad (3.24)$$

$$\varphi_{2i+1}(x_j) = 0, \quad (\varphi_{2i+1})'(x_j) = \delta_{ij}, \quad (3.25)$$

kde  $\delta_{ij}$  je Kroneckerovo delta. Tyto funkce potřebujeme pro lokální interpolaci na jednotlivých prvcích, která bude zadána pomocí funkčních hodnot a hodnot derivací v jejich krajních bodech. Tím vytvoříme konečné prvky pro naši úlohu. Lineární kombinace takových bázových funkcí bude v souladu s (3.22)

- funkce třídy  $C^1$ , tj. derivace mezi prvky spojitě přecházejí,
- funkce po částech kubická, tj. na každém prvku kubický polynom.

Pro obecné vyjádření diskrétního řešení dostáváme výraz

$$w_h(x) = \sum_{i=0}^{2N+1} c_i \varphi_i(x).$$

S ohledem na vlastnosti (3.24), (3.25) bázových funkcí pak můžeme dokonce psát

$$w_h(x) = \sum_{i=0}^N (w_h(x_i) \varphi_{2i}(x) + w_h'(x_i) \varphi_{2i+1}(x)). \quad (3.26)$$

Poté, co do diskrétní formulace (3.21) dosadíme (3.26) a za  $v_h$  postupně všechny bázové funkce, dostaneme po vyčíslení integrálů lineární soustavu rovnic pro neznámé hodnoty  $w_h(x_i)$  a  $w_h'(x_i)$ , podrobněji např. viz [19].

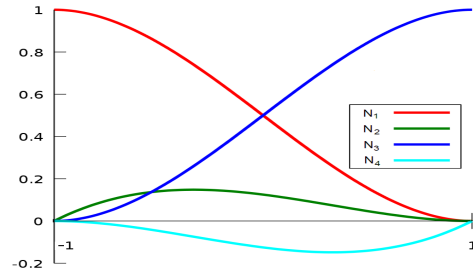
Při výpočtech na počítači však takto obvykle nepostupujeme a namísto sestavování zmíněné soustavy po jednotlivých rovnicích postupujeme „po prvcích“ a výslednou matici sestavujeme z tzv. elementárních matic (viz [28]).

Abychom je odvodili, přejdeme od intervalu  $(x_{i-1}, x_i)$  a od globálních bázových funkcí  $\varphi_i(x)$  k referenčnímu intervalu  $(-1, +1)$  a lokálním bázovým funkcím. Těm se často říká *tvárové funkce*. Transformace z a do lokálních souřadnic  $\hat{x} \in [-1, 1]$  mají tvar

$$x = \frac{h_i}{2}(\hat{x} + 1), \quad \hat{x} = \frac{2}{h_i}x - 1,$$

kde  $h_i$  je délka uvažovaného intervalu. Čtyři tvarové funkce příslušející danému prvku pak můžeme zapsat (při použití tradičního značení) jako

$$\begin{aligned} N_1(\hat{x}) &= \frac{1}{4}(1 - \hat{x})^2(2 + \hat{x}), \\ N_2(\hat{x}) &= \frac{1}{8}h_i(1 - \hat{x})^2(1 + \hat{x}), \\ N_3(\hat{x}) &= \frac{1}{4}(1 + \hat{x})^2(2 - \hat{x}), \\ N_4(\hat{x}) &= -\frac{1}{8}h_i(1 + \hat{x})^2(1 - \hat{x}). \end{aligned}$$



Obrázek 3.1: Tvarové funkce

Pro obecný člen elementární matice  $\mathbf{K}_\ell^{(e)}$  prvku délky  $h_\ell$  pak obdržíme při konstantní hodnotě ohybové tuhosti nosníku  $EI$  vyjádření

$$k_{ij,\ell}^{(e)} = \frac{8EI}{h_\ell^3} \int_{-1}^{+1} \frac{d^2 N_i}{d\hat{x}^2} \frac{d^2 N_j}{d\hat{x}^2} d\hat{x}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

V dalším textu budeme uvažovat ekvidistantní dělení s konstantním krokem  $h$ . Výsledný tvar elementární matice po provedených integracích je pak

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{EI}{h^3} \begin{pmatrix} 12 & 6h & -12 & 6h \\ 6h & 4h^2 & -6h & 2h^2 \\ -12 & -6h & 12 & -6h \\ 6h & 2h^2 & -6h & 4h^2 \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Takové matice pak skládáme „přes sebe“ až do konečného sestavení matice  $\mathbf{K}$  celé soustavy, takže např. pro matice  $\mathbf{K}_{(i)}^{(e)} = \left(k_{lm}^{(i)}\right)_{l,m=1}^4$  a  $\mathbf{K}_{(i+1)}^{(e)} = \left(k_{lm}^{(i+1)}\right)_{l,m=1}^4$  dvou sousedních prvků se vytvoří kompletní řádky  $2i + 1$  a  $2i + 2$  ve výsledné matici  $\mathbf{K}$  takto

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & k_{31}^{(i)} & k_{32}^{(i)} & k_{33}^{(i)} + k_{11}^{(i+1)} & k_{34}^{(i)} + k_{12}^{(i+1)} & k_{13}^{(i+1)} & k_{14}^{(i+1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & k_{41}^{(i)} & k_{42}^{(i)} & k_{43}^{(i)} + k_{21}^{(i+1)} & k_{44}^{(i)} + k_{22}^{(i+1)} & k_{23}^{(i+1)} & k_{24}^{(i+1)} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$



Podobně postupuje i generování pravé strany, kdy vytváříme výsledný vektor z příspěvků  $\mathbf{f}^{(e)}$ . Ty např. pro rovnoměrné zatížení o velikosti  $f(x) \equiv q$  vypočítáme podle vztahů

$$\mathbf{f}_i^{(e)} = \frac{1}{2} q h \int_{-1}^{+1} N_i(\hat{x}) d\hat{x}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

a v důsledku toho obdržíme

$$\mathbf{f}^{(e)} = q h \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{12} h \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{12} h \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Podobně získáme zobecnění tohoto vztahu pro případ, kdy je zatížení lineární s hodnotami  $q_1$  a  $q_2$  v koncových bodech prvku:

$$\mathbf{f}^{(e)} = h \begin{pmatrix} \frac{7q_1}{20} + \frac{3q_2}{20} \\ \left(\frac{q_1}{20} + \frac{q_2}{30}\right) h \\ \frac{3q_1}{20} + \frac{7q_2}{20} \\ -\left(\frac{q_1}{30} + \frac{q_2}{20}\right) h \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

V konečném důsledku tento postup nakonec vede k sestavení lineární soustavy rovnic, pro niž obvyklý symbolický zápis je (analogicky jako (3.12))

$$\mathbf{K}\mathbf{w} = \mathbf{f}. \quad (3.30)$$

Poznamenejme, že takto vzniklá soustava je symetrická, sedmidiagonální a pozitivně semidefinitní a že vektor neznámých  $\mathbf{w}$  má strukturu

$$\mathbf{w} = [ w_0, \theta_0, w_1, \theta_1, \dots, w_N, \theta_N ]^T,$$

kde značíme

$$w_i = w_h(x_i), \quad \theta_i = w_h'(x_i), \quad i = 0, \dots, N.$$

Implementaci stabilních podmínek provedeme standardním způsobem (viz např. [28]). Výsledná soustava rovnic bude pak pozitivně definitní.

Řešením ve smyslu metody konečných prvků bude funkce  $w_h(x)$  coby lineární kombinace s koeficienty, které jsme získali vyřešením uvedené soustavy rovnic, a těch básových funkcí, které odpovídají stupňům volnosti úlohy. Na prvku  $K_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ , bude průběh této funkce dán vztahem

$$w_h(x) = N_1(x)w_i + N_2(x)\theta_i + N_3(x)w_{i+1} + N_4(x)\theta_{i+1}, \quad x \in K_{i+1}. \quad (3.31)$$

Podrobné odvození celého postupu lze nalézt např. v knize [41].

Předcházející popis řešení stavových úloh se týká problémů (P1), (P2) a (P4) při použití transformace T1. V případě okrajového problému (P3) však musíme vyřešit stavovou úlohu (SP(1)<sup>\*</sup>) s nelineární okrajovou podmínkou a to pomocí lineárních úloh (SP(1)+).

Jejich řešení nepředstavuje zásadní problém, jelikož zápis (1.114) takovéto úlohy ukazuje, jak musíme modifikovat pravou stranu konečně-prvkové soustavy rovnic v případě zadané nehomogenní podmínky  $EIw'''(L) = r$ : v posledním konečném prvku v elementárním vektoru  $\mathbf{f}^{(e)}$  připočítáme na třetí pozici číslo  $-r$ . Dále, jelikož chceme, aby v optimu platilo

$$r^* = \frac{1}{3} E\alpha((w(\tilde{u}^*))'(L))^3 - P\mu(w(\tilde{u}^*))'(L), \quad (3.32)$$

budeme v  $k$ -tém kroku minimalizace za hodnotu  $r$  volit

$$r^k = \frac{1}{3} E\alpha((w^{k-1})'(L))^3 - P\mu(w^{k-1})'(L), \quad (3.33)$$

kde  $w^{k-1}$  představuje řešení úlohy (1.114) získané v předcházejícím kroku.

### 3.3.2 Řešení úloh (SP(2)) a (SP(3))

V obou těchto případech se jedná o obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu a z toho důvodu je postup řešení pomocí MKP poměrně jednoduchý. Nejprve ho zde uvedeme velmi stručně pro úlohu (SP(3)).

Diskrétní formulace úlohy (SP(3)) má pro případ  $u = 0$  tvar

$$\begin{cases} \text{Nalézt funkci } z_h \in Z_h \text{ takovou, že} \\ e(z_h, v_h) = (g, v_h) \quad \forall v_h \in Z_h, \end{cases} \quad (3.34)$$

přičemž v MKP budeme volit podprostor  $Z_h$  následovně:

$$X_h = \{v_h \in C^0((0, L)) : v_h|_{K_i} \in P_1(K_i) \quad \forall K_i \in \mathcal{T}_h\}, \quad (3.35)$$

$$Z_h = \{v_h \in X_h : v_h \text{ splňují stabilní okrajové podmínky}\}. \quad (3.36)$$

Použité symboly mají stejný význam jako v předchozím odstavci,  $P_1(K_i)$  představuje prostor lineárních polynomů definovaných na  $K_i$ .

Analogicky jako výše odvodíme elementární matice prvku a elementární vektor zatížení. Tvarové funkce, které zde použijeme, mají na referenčním intervalu  $(-1, +1)$  následující podobu

$$N_1(\hat{x}) = \frac{1}{2}(1 - \hat{x}), \quad N_2(\hat{x}) = \frac{1}{2}(1 + \hat{x}).$$

Jednotlivé integrály dokážeme i zde vypočítat přesně, takže pro ekvidistantní dělení na podintervaly délky  $h$  v případě konstantních hodnot  $EI$  a konstantní funkce  $g$  obdržíme

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{EI}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}^{(e)} = \frac{gh}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Podrobnosti lze nalézt např. v [28] nebo [41].

Poté co vypočítáme hodnoty funkce  $z_h$  v uzlových bodech, určíme funkci  $w_h$  z diskrétní varianty úlohy (1.123)

$$\begin{cases} w_h' = z_h, \\ w_h(0) = 0. \end{cases} \quad (3.38)$$

Jako výpočetní metoda se nejvíce osvědčila přímá integrace s použitím složené lichoběžníkové formule.

Úloha (SP(2)) bude mít pro případ  $u = 0$  tuto diskrétní formulaci

$$\begin{cases} \text{Nalézt funkci } w_h \in V_h \text{ takovou, že} \\ e(w_h, v_h) = (g, v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \end{cases} \quad (3.39)$$

přičemž podprostor  $V_h$  volíme stejně jako v předcházejícím odstavci, tj. za použití hermiteovských bázových funkcí. Matice tuhosti prvku délky  $h$  se odvodí podobně jako výše, má zde ovšem jiný tvar:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{EI}{30h} \begin{pmatrix} 36 & 3h & -36 & 3h \\ 3h & 4h^2 & -3h & -h^2 \\ -36 & -3h & 36 & -3h \\ 3h & -h^2 & -3h & 4h^2 \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

Vektor pravé strany vygenerujeme stejným postupem jako v 3.3.1, pouze zaměníme  $q$  za  $g$ , viz vztahy (3.28), (3.29).

### 3.4 Algoritmy pro minimalizaci funkcionalů

Nyní se budeme věnovat některým možnostem výpočtu bodů minima úlohy optimálního řízení. Přitom budeme kvůli zjednodušení problematiky předpokládat, že dokážeme exaktně vyčíslit

- hodnoty bilineární formy  $a(w_h, v_h)$  - viz poznámka 3.1,
- hodnoty integrálů  $\langle f_h + Bu_h, v_h \rangle_h$  - budeme proto psát jen  $\langle f_h + Bu_h, v_h \rangle$ ,
- hodnoty funkcionalu  $J$  - takže ho nebudeme aproximovat pomocí  $J_h$ .

Předmětem našeho uvažování bude pak následující problém

$$\begin{cases} \text{Nalézt } u_h^* \in U_{ad}^h \text{ tak, že} \\ J(w_h(u_h^*), u_h^*) = \min_{u_h \in U_{ad}^h} J(w_h(u_h), u_h), \\ \text{kde } w_h(u_h) \in V_h \text{ řeší následující stavovou úlohu:} \end{cases} \quad (3.41)$$

$$\begin{cases} \text{Nalézt } w_h := w_h(u_h) \in V_h \text{ tak, že} \\ a(w_h, v_h) = \langle f_h + Bu_h, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (3.42)$$

Jednou z vhodných metod pro výpočet řešení úlohy (3.41) je *podmíněná gradientní metoda* (anglicky *conditioned gradient method*). Nejprve položíme

$$J(w(u), u) \equiv I(u), \quad u \in U_{ad}.$$

Úloha minimalizovat diferencovatelný funkcional  $I(u)$  pro  $u \in U_{ad}$  se pak řeší pomocí postupných iterací  $\{u_k\}$ , jejichž stanovení sestává z následujících tří kroků:

1. Určení spádového směru  $s_k$  v bodě  $u_k$  řešením problému

$$I'(u_k, s_k) = \min_{s \in U_{ad}} I'(u_k, s).$$

2. Výpočet vhodné délky kroku: vypočítáme  $\gamma_k \in (0, 1]$  tak, aby platilo

$$I(u_k + \gamma_k(s_k - u_k)) = \min_{\gamma \in (0, 1]} I(u_k + \gamma(s_k - u_k)).$$

3. Výpočet nové iterace: položíme

$$u_{k+1} = u_k + \gamma_k(s_k - u_k).$$

Určení spádového směru, o němž se hovoří v prvním kroku metody, lze v případě, že  $u_k$  je vnitřním bodem  $U_{ad}$ , jednoduše splnit volbou směru největšího spádu, tj.  $s_k = -\nabla_u I(u_k)$ . V dodatku 1 je odvozen výraz pro  $\nabla_u I(u)$ , takže podle (6.23) máme

$$s_k = -B^* p_k - \nabla_u J(w(u_k), u_k), \quad (3.43)$$

přičemž  $p_k \in V$  je řešení odpovídající adjungované úlohy, která vystupuje v podmínkách optimality. Pro úlohu (1.110) z odstavce 1.4.2 je to rovnice (1.112):

$$a(p_k, v) = \frac{1}{2} (u_k, v) + \pi((w(u_k), v) - d((w(u_k), v)) \quad \forall v \in V.$$

Podrobněji pojednává o podmíněné gradientní metodě např. monografie [52].

### Poznámka 3.2

a) Funkcionál  $J$  z pravidla nelze určit analyticky, vyčíslíme ho proto např. pomocí lichoběžníkového pravidla.

b) Je ovšem také možné přejít přímo na úlohu nelineárního programování (3.19) a pak použít některou z metod jejího řešení, jako je metoda vnitřních bodů (viz např. [26] nebo [37]).

# 4. Příklady

## 4.1 Výpočty úloh ohybu Gaova nosníku

Uvažujme Gaův nelineární nosník s těmito vstupními daty:

délka  $L = 1$  m,

tloušťka nosníku je  $2h$ , kde  $h = 0.1$  m,

Poissonova konstanta  $\nu = 0.3$ ,

Youngův modul pružnosti  $E = 21 \cdot 10^{10}$  Pa,

moment setrvačnosti průřezu  $I = \frac{2}{3} h^3 = 0.666667 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$ .

Při řešení úloh budeme uvažovat 32 prvků. Pro srovnání použijeme Euler–Bernoulliho model nosníku. Na níže uvedených obrázcích jsou modře znázorněny průhyby Euler–Bernoulliho a červeně Gaova nosníku. Černě jsou znázorněny oba nosníky před působením vertikální a axiální síly. Připomeňme, že budeme-li hovořit o vertikálním zatížení  $q(x)$ , máme tím na mysli vertikální zatížení z rovnice (1.1). Pro Gaův nelineární nosník, tj. pro rovnici (1.43), je třeba použít zatížení ve tvaru  $f(x) = (1 - \nu^2)q(x)$ , viz (1.41).

Pojmy uvedené v tabulkách představují:

- nosník** symbolem **G** budeme rozumět Gaův nelineární model nosníku, symbolem **EB** pak Euler–Bernoulliho lineární model,
- průhyb** je maximální resp. minimální hodnota průhybu nosníku,
- poloha** je bod, v němž nastane největší průhyb nosníku,
- energie** je minimální hodnota celkové potenciální energie nosníku.

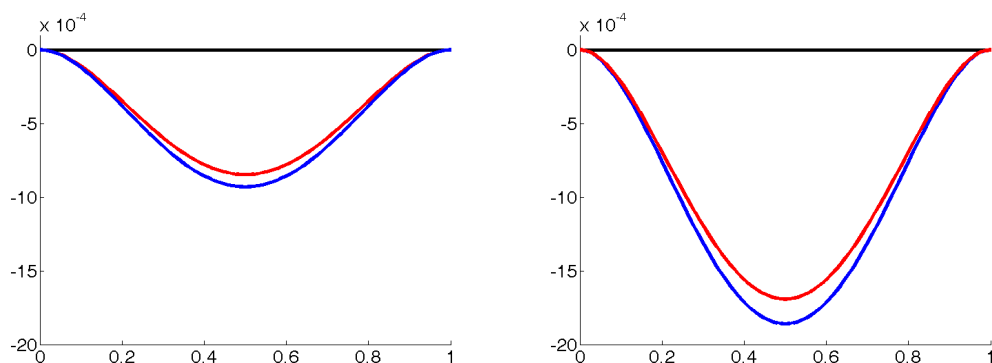
Z důvodu přehlednosti budeme do tabulek uvádět pouze číselné hodnoty jednotlivých veličin bez jednotek. V celé kapitole budeme přitom uvažovat veličiny s těmito jednotkami:

spojité vertikální zatížení $q$	$\text{Nm}^{-1}$
axiální síla $P$	N
průhyb, poloha, kontakt	m
energie	J
koeficient Winklerova podloží $k_F$	$\text{Nm}^{-2}$

### (P1) Nosník oboustranně vetknutý

Nejprve budeme uvažovat nosník, který je na obou koncích vetknutý. Na nosník bude působit pouze konstantní vertikální zatížení  $q$ , tedy axiální síla  $P = 0$ . Na obrázku 4.1 jsou vykresleny průhyby obou typů nosníků pro dvě různá vertikální zatížení. Maximální hodnoty průhybů, jejich poloha a energie jsou uvedeny v tabulce 4.1.

Pro lineární Euler–Bernoulliho nosník dostáváme pro dvojnásobné vertikální zatížení  $q$  dvojnásobný maximální průhyb, což v případě Gaova nelineárního nosníku ovšem neplatí.

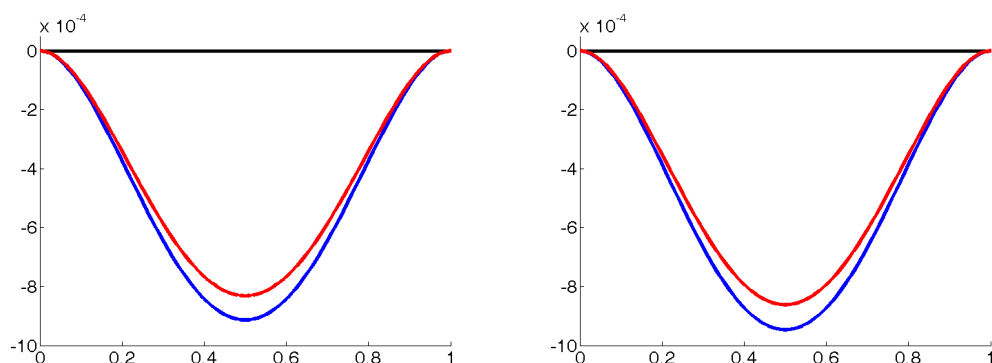


Obrázek 4.1: Vlevo jsou znázorněny průhyby nosníků v případě konstantního vertikálního zatížení  $q = -5 \cdot 10^7 \text{ Nm}^{-1}$ , vpravo je vertikální zatížení dvakrát větší, tedy  $q = -10^8 \text{ Nm}^{-1}$ .

Tabulka 4.1: Data k obrázku 4.1.

$q$	nosník	průhyb	poloha	energie
$-5 \cdot 10^7$	<b>EB</b>	$-9.301 \cdot 10^{-4}$	0.500	$-1.240 \cdot 10^4$
	<b>G</b>	$-8.464 \cdot 10^{-4}$	0.500	$-1.027 \cdot 10^4$
$-10^8$	<b>EB</b>	$-1.860 \cdot 10^{-3}$	0.500	$-4.960 \cdot 10^4$
	<b>G</b>	$-1.693 \cdot 10^{-3}$	0.500	$-4.108 \cdot 10^4$

Dále se zaměříme na situaci, kdy na nosník působí konstantní vertikální zatížení a současně také axiální síla, viz obrázek 4.2 a příslušná data v tabulce 4.2. Připomeňme, že v případě záporné axiální síly dochází k natahování nosníku, v případě kladné axiální síly pak k jeho stlačování, čemuž odpovídají i maximální hodnoty průhybů nosníků uvedené v tabulce.

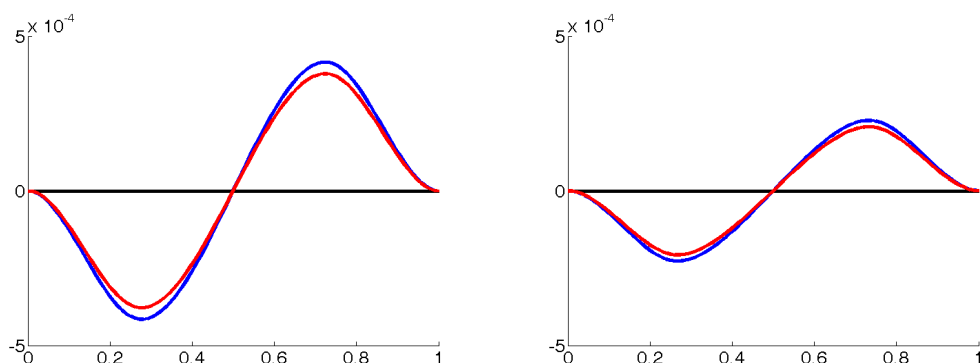


Obrázek 4.2: Průhyby nosníků, na které působí konstantní vertikální zatížení  $q = -5 \cdot 10^7 \text{ Nm}^{-1}$  a navíc také axiální síla  $P$ , vlevo  $P = -10^8 \text{ N}$  a vpravo  $P = +10^8 \text{ N}$ .

Tabulka 4.2: Data k obrázku 4.2.

$P$	nosník	průhyb	poloha	energie
$-10^8$	<b>EB</b>	$-9.138 \cdot 10^{-4}$	0.500	$-1.219 \cdot 10^4$
	<b>G</b>	$-8.315 \cdot 10^{-4}$	0.500	$-1.006 \cdot 10^4$
$+10^8$	<b>EB</b>	$-9.470 \cdot 10^{-4}$	0.500	$-1.261 \cdot 10^4$
	<b>G</b>	$-8.617 \cdot 10^{-4}$	0.500	$-1.048 \cdot 10^4$

Nyní budeme uvažovat situaci, kdy vertikální zatížení představují dvě osamělé síly. Síla  $F_1 = -5 \cdot 10^7$  N působí v bodě  $x = L/4$  a síla  $F_2 = +5 \cdot 10^7$  N v bodě  $x = 3L/4$ , přičemž  $L = 1$  m. Porovnáme případ s nulovou a zápornou axiální silou, viz obrázek 4.3. V tabulce 4.3 jsou uvedeny hodnoty maximálních průhybů - kladné i záporné, jejich poloha a energie obou typů nosníků.



Obrázek 4.3: Průhyby nosníků, na které působí dvě osamělé síly, na nosník vpravo ještě navíc axiální síla  $P = -10^{10}$  N.

### (P2) Nosník s vetknutím na jednom a podepřením na druhém konci

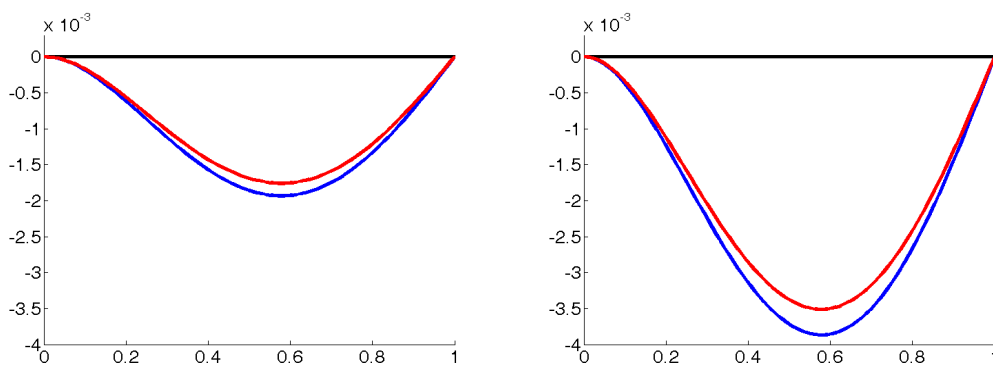
Nyní budeme uvažovat nosník, který je na jednom konci vetknutý a na druhém podepřený. Na nosník bude působit pouze konstantní vertikální zatížení, tedy axiální síla  $P = 0$ . Na obrázku 4.4 jsou vykresleny průhyby obou typů nosníků pro dvě různá vertikální zatížení. Maximální hodnoty průhybů, jejich poloha a energie jsou uvedeny v tabulce 4.4.

I zde dostáváme pro lineární Euler–Bernoulliho nosník a dvojnásobné vertikální zatížení  $q$  dvojnásobnou hodnotu maximálního průhybu. Dále je vidět, že různé okrajové podmínky, tedy vetknutí nosníku na jednom a podepření nosníku na druhém konci, mělo vliv na polohu maximálního průhybu. Ta se oproti oboustranně vetknutému nosníku posunula ze středu blíže k podepření.

Dále se zaměříme na situaci, kdy na nosník působí konstantní vertikální zatížení  $q = -5 \cdot 10^7$  N m<sup>-1</sup> a současně také různé axiální síly, záporná axiální síla  $P = -10^8$  N

Tabulka 4.3: Data k obrázku 4.3.

$P$	nosník		průhyb	poloha	energie
0	EB	max	$+4.156 \cdot 10^{-4}$	0.719	$-2.035 \cdot 10^4$
		min	$-4.156 \cdot 10^{-4}$	0.281	
	G	max	$+3.783 \cdot 10^{-4}$	0.719	$-1.685 \cdot 10^4$
		min	$-3.783 \cdot 10^{-4}$	0.281	
$-10^{10}$	EB	max	$+2.261 \cdot 10^{-4}$	0.719	$-1.127 \cdot 10^4$
		min	$-2.261 \cdot 10^{-4}$	0.281	
	G	max	$+2.058 \cdot 10^{-4}$	0.719	$-9.330 \cdot 10^3$
		min	$-2.058 \cdot 10^{-4}$	0.281	



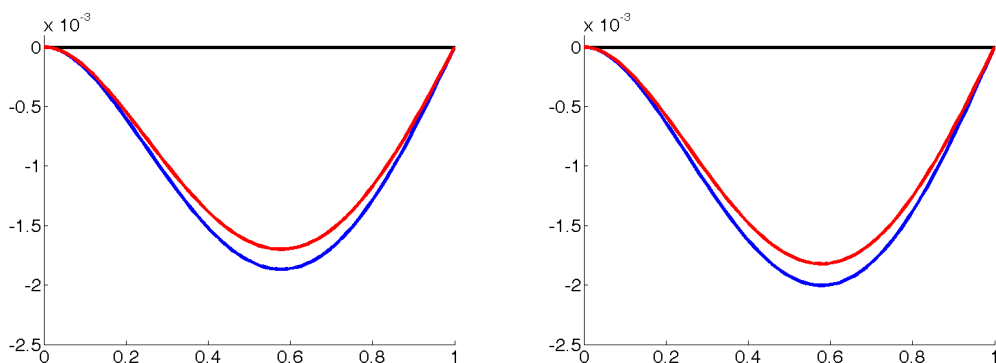
Obrázek 4.4: Vlevo jsou znázorněny průhyby nosníků v případě vertikálního zatížení  $q = -5 \cdot 10^7 \text{ Nm}^{-1}$ , vpravo je vertikální zatížení dvakrát větší, tedy  $q = -10^8 \text{ Nm}^{-1}$ .

Tabulka 4.4: Data k obrázku 4.4.

$q$	nosník		průhyb	poloha	energie
$-5 \cdot 10^7$	EB		$-1.931 \cdot 10^{-3}$	0.594	$-2.790 \cdot 10^4$
	G		$-1.757 \cdot 10^{-3}$	0.594	$-2.310 \cdot 10^4$
$-10^8$	EB		$-3.862 \cdot 10^{-3}$	0.594	$-1.116 \cdot 10^5$
	G		$-3.511 \cdot 10^{-3}$	0.594	$-9.238 \cdot 10^4$

odpovídající natahování nosníku a kladná  $P = +10^8 \text{ N}$  odpovídající stlačování, viz obrázek 4.5 a příslušná data v tabulce 4.5.



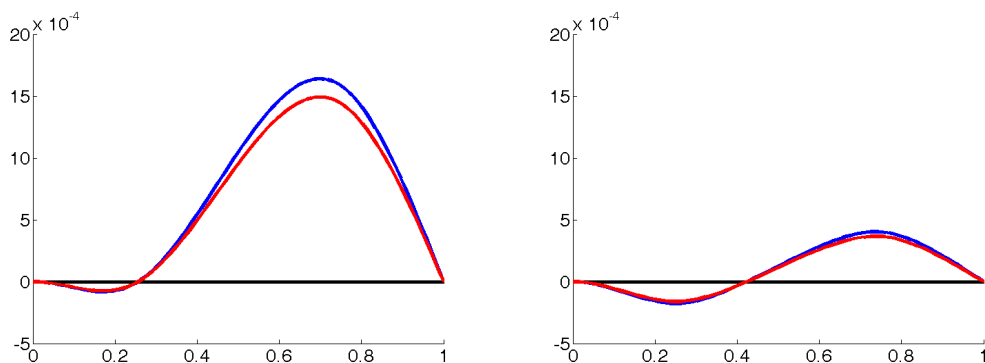


Obrázek 4.5: Průhyby nosníků, na které působí vertikální zatížení  $q = -5 \cdot 10^7 \text{ Nm}^{-1}$  a navíc také axiální síla  $P$ , vlevo  $P = -10^8 \text{ N}$  a vpravo  $P = +10^8 \text{ N}$ .

Tabulka 4.5: Data k obrázku 4.5.

$P$	nosník	průhyb	poloha	energie
$-10^8$	<b>EB</b>	$-1.866 \cdot 10^{-3}$	0.563	$-2.699 \cdot 10^4$
	<b>G</b>	$-1.698 \cdot 10^{-3}$	0.563	$-2.228 \cdot 10^4$
$+10^8$	<b>EB</b>	$-2.002 \cdot 10^{-3}$	0.594	$-2.889 \cdot 10^4$
	<b>G</b>	$-1.821 \cdot 10^{-3}$	0.594	$-2.399 \cdot 10^4$

Nyní budeme opět uvažovat situaci, kdy je vertikální zatížení zadáno prostřednictvím dvou osamělých sil. Síla  $F_1 = -5 \cdot 10^7 \text{ N}$  působí v bodě  $x = L/4$  a síla  $F_2 = +5 \cdot 10^7 \text{ N}$  v bodě  $x = 3L/4$ , přičemž  $L = 1 \text{ m}$ . Porovnáme případ s nulovou a zápornou axiální silou, viz obrázek 4.6 a příslušná data v tabulce 4.6.



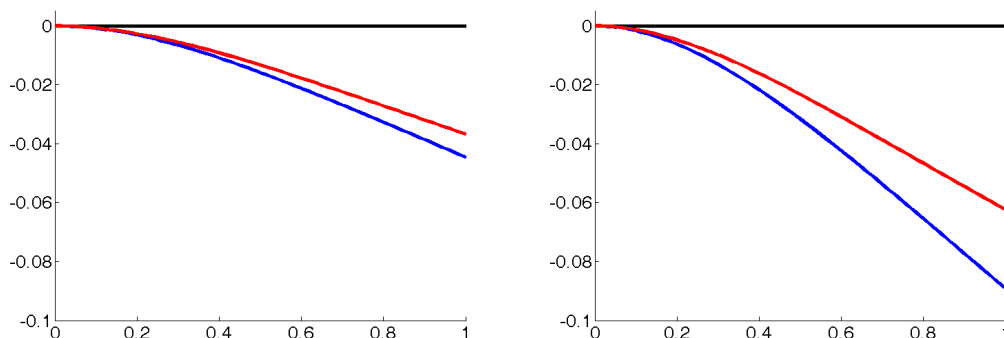
Obrázek 4.6: Průhyby nosníků, na které působí dvě osamělé síly, na nosník vpravo ještě navíc axiální síla  $P = -10^{10} \text{ N}$ .

Tabulka 4.6: Data k obrázku 4.6.

$P$	nosník		průhyb	poloha	energie
0	EB	max	$+1.637 \cdot 10^{-3}$	0.688	$-3.996 \cdot 10^4$
		min	$-8.019 \cdot 10^{-5}$	0.156	
	G	max	$+1.489 \cdot 10^{-3}$	0.688	$-3.309 \cdot 10^4$
		min	$-7.292 \cdot 10^{-5}$	0.156	
$-10^{10}$	EB	max	$+4.014 \cdot 10^{-4}$	0.750	$-1.445 \cdot 10^4$
		min	$-1.769 \cdot 10^{-4}$	0.250	
	G	max	$+3.652 \cdot 10^{-4}$	0.750	$-1.196 \cdot 10^4$
		min	$-1.610 \cdot 10^{-4}$	0.250	

### (P3) Nosník s volným koncem

Nyní se zaměříme na nosník, jehož levý konec je vetknutý a pravý je volný. Opět se nejprve podíváme na situaci, kdy na nosník působí pouze konstantní vertikální zatížení, tedy axiální síla je nulová, viz obrázek 4.7 a příslušná data v tabulce 4.7.



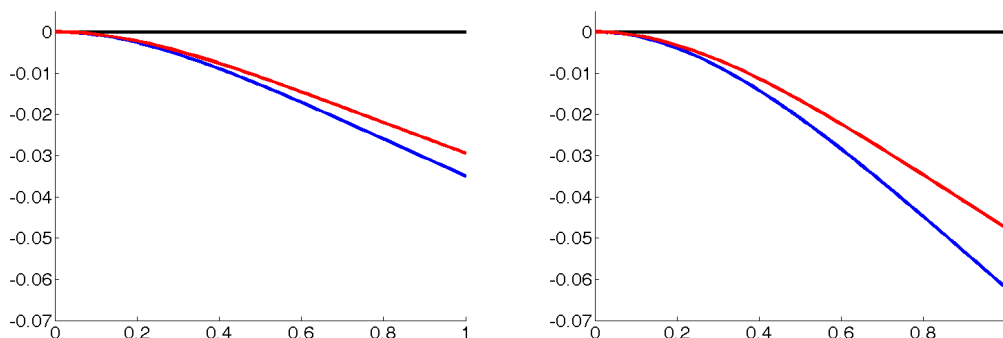
Obrázek 4.7: Vlevo jsou znázorněny průhyby nosníků v případě vertikálního zatížení  $q = -5 \cdot 10^7 \text{ Nm}^{-1}$ , vpravo je vertikální zatížení dvakrát větší, tedy  $q = -10^8 \text{ Nm}^{-1}$ .

Tabulka 4.7: Data k obrázku 4.7.

$q$	nosník		průhyb	poloha	energie
$-5 \cdot 10^7$	EB		$-4.463 \cdot 10^{-2}$	1.000	$-4.462 \cdot 10^5$
	G		$-3.667 \cdot 10^{-2}$	1.000	$-3.513 \cdot 10^5$
$-10^8$	EB		$-8.926 \cdot 10^{-2}$	1.000	$-1.785 \cdot 10^6$
	G		$-6.259 \cdot 10^{-2}$	1.000	$-1.167 \cdot 10^6$

Je zřejmé, že maximální průhyby obou nosníků budou v tomto případě v bodě  $x = L$ , přičemž  $L = 1$  m. Pro Euler–Bernoulliho nosník je z tabulky 4.7 patrná linearita, tedy že dvojnásobné vertikální zatížení  $q$  dává dvojnásobný maximální průhyb.

Dále se analogicky jako u předchozích typů nosníků podíváme na situaci, kdy kromě konstantního vertikálního zatížení  $q = -5 \cdot 10^7 \text{ Nm}^{-1}$  působí na nosník také síla axiální. Záporná axiální síla  $P = -10^8 \text{ N}$  pro natahování nosníku a kladná  $P = +10^8 \text{ N}$  pro případ stlačování, viz obrázek 4.8 a příslušná data v tabulce 4.8.



Obrázek 4.8: Průhyby nosníků, na které působí vertikální zatížení  $q = -5 \cdot 10^7 \text{ Nm}^{-1}$  a navíc také axiální síla  $P$ , vlevo  $P = -10^8 \text{ N}$  a vpravo  $P = +10^8 \text{ N}$ .

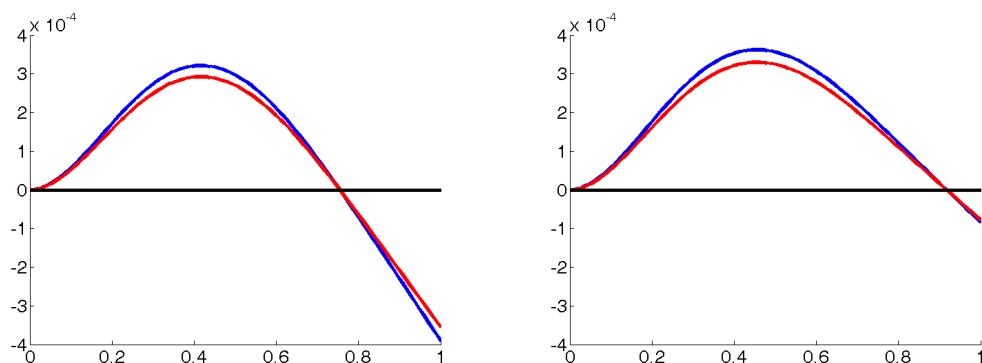
Tabulka 4.8: Data k obrázku 4.8.

$P$	nosník	průhyb	poloha	energie
$-10^8$	<b>EB</b>	$-3.496 \cdot 10^{-2}$	1.000	$-3.576 \cdot 10^5$
	<b>G</b>	$-2.922 \cdot 10^{-2}$	1.000	$-2.800 \cdot 10^5$
$+10^8$	<b>EB</b>	$-6.217 \cdot 10^{-2}$	1.000	$-6.056 \cdot 10^5$
	<b>G</b>	$-4.756 \cdot 10^{-2}$	1.000	$-4.708 \cdot 10^5$

Nyní budeme uvažovat situaci, kdy na nosník působí vertikální zatížení  $q$ , které je po částech lineární funkcí. V bodě  $x = 0$  působí silou  $F_1 = 0 \text{ N}$ , v  $x = L/4$  silou  $F_2 = +5 \cdot 10^7 \text{ N}$ , v  $x = 3L/4$  silou  $F_3 = -1.7 \cdot 10^7 \text{ N}$  a v bodě  $x = L$  silou  $F_4 = 0 \text{ N}$ . Tedy pro uvažovanou délku nosníku  $L = 1$  m je

$$q(x) = \begin{cases} 2x \cdot 10^8 & \text{pro } x \in [0, 1/4], \\ 5(167 - 268x) \cdot 10^5 & \text{pro } x \in [1/4, 3/4], \\ 68(x - 1) \cdot 10^6 & \text{pro } x \in [3/4, 1]. \end{cases} \quad (4.1)$$

Porovnáme případ s nulovou a zápornou axiální silou, viz obrázek 4.9 a příslušná data v tabulce 4.9.



Obrázek 4.9: Průhyby nosníků, na které působí vertikální zatížení dané předpisem (4.1), na nosník vpravo působí ještě navíc axiální síla  $P = -3 \cdot 10^8$  N.

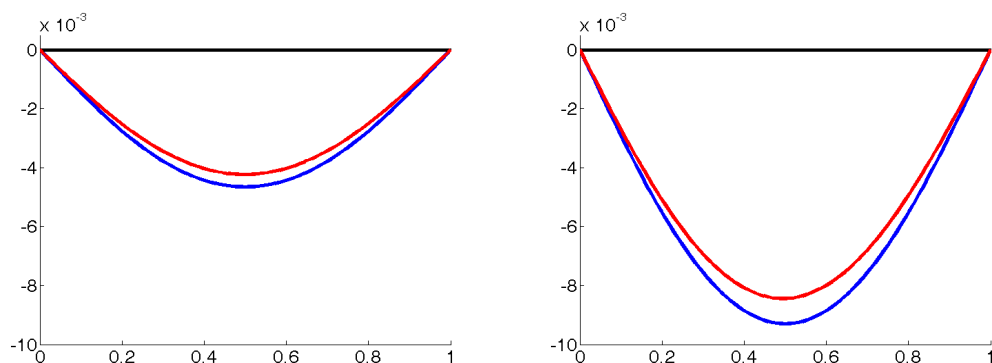
Tabulka 4.9: Data k obrázku 4.9.

$P$	nosník		průhyb	poloha	energie
0	EB	max	$+3.210 \cdot 10^{-4}$	0.406	$-1.861 \cdot 10^3$
		min	$-3.906 \cdot 10^{-4}$	1.000	
	G	max	$+2.921 \cdot 10^{-4}$	0.406	$-1.541 \cdot 10^3$
		min	$-3.553 \cdot 10^{-4}$	1.000	
$-3 \cdot 10^8$	EB	max	$+3.618 \cdot 10^{-4}$	0.469	$-1.716 \cdot 10^3$
		min	$-8.554 \cdot 10^{-5}$	1.000	
	G	max	$+3.311 \cdot 10^{-4}$	0.469	$-1.404 \cdot 10^3$
		min	$-5.393 \cdot 10^{-5}$	1.000	

#### (P4) Nosník na dvou podporách

Nyní budeme uvažovat nosník, který je na obou koncích podepřený a na který bude působit pouze konstantní vertikální zatížení  $q$ , tedy axiální síla  $P = 0$ , viz obrázek 4.10.

V tabulce 4.10 jsou pro obě varianty vertikálního zatížení uvedeny hodnoty maximálních průhybů, jejich poloha a energie obou typů nosníků. U Euler–Bernoulliho nosníku je vidět opět linearita - dvojnásobné vertikální zatížení má za následek dvojnásobný průhyb. Z důvodu stejných okrajových podmínek, tedy podepření na obou koncích nosníku, dochází k maximálnímu průhybu nosníku přesně v jeho středu.

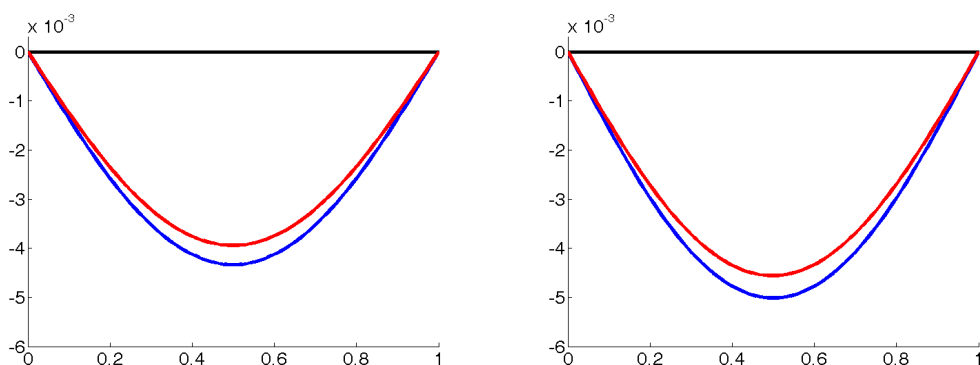


Obrázek 4.10: Vlevo jsou znázorněny průhyby nosníků v případě konstantního vertikálního zatížení  $q = -5 \cdot 10^7 \text{ Nm}^{-1}$ , vpravo je vertikální zatížení dvakrát větší, tedy  $q = -10^8 \text{ Nm}^{-1}$ .

Tabulka 4.10: Data k obrázku 4.10.

$q$	nosník	průhyb	poloha	energie
$-5 \cdot 10^7$	<b>EB</b>	$-4.650 \cdot 10^{-3}$	0.500	$-7.441 \cdot 10^4$
	<b>G</b>	$-4.227 \cdot 10^{-3}$	0.500	$-6.156 \cdot 10^4$
$-10^8$	<b>EB</b>	$-9.300 \cdot 10^{-3}$	0.500	$-2.976 \cdot 10^5$
	<b>G</b>	$-8.433 \cdot 10^{-3}$	0.500	$-2.455 \cdot 10^5$

Dále se zaměříme na situaci, kdy na nosník působí konstantní vertikální zatížení  $q = -5 \cdot 10^7 \text{ Nm}^{-1}$  a současně také různé axiální síly, záporná axiální síla  $P = -10^8 \text{ N}$  odpovídající natahování nosníku a kladná  $P = +10^8 \text{ N}$  odpovídající jeho stlačování, viz obrázek 4.11 a příslušná data v tabulce 4.11.



Obrázek 4.11: Průhyby nosníků, na něž působí vertikální zatížení  $q = -5 \cdot 10^7 \text{ Nm}^{-1}$  a navíc také axiální síla  $P$ , vlevo  $P = -10^8 \text{ N}$  a vpravo  $P = +10^8 \text{ N}$ .

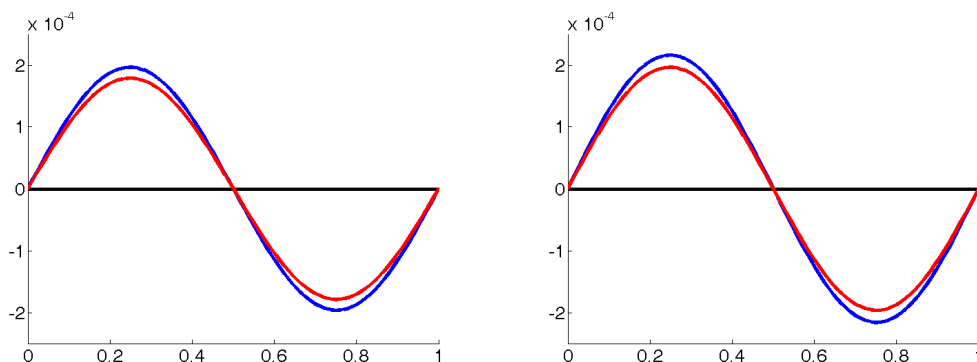
Tabulka 4.11: Data k obrázku 4.11.

$P$	nosník	průhyb	poloha	energie
$-10^8$	<b>EB</b>	$-4.335 \cdot 10^{-3}$	0.500	$-6.939 \cdot 10^4$
	<b>G</b>	$-3.942 \cdot 10^{-3}$	0.500	$-5.742 \cdot 10^4$
$+10^8$	<b>EB</b>	$-5.014 \cdot 10^{-3}$	0.500	$-8.020 \cdot 10^4$
	<b>G</b>	$-4.558 \cdot 10^{-3}$	0.500	$-6.634 \cdot 10^4$

Nyní budeme uvažovat situaci, kdy na nosník působí vertikální zatížení  $q$ , které je po částech lineární funkcí. V bodě  $x = 0$  působí silou  $F_1 = +10^7$  N, v  $x = L/4$  silou  $F_2 = +5 \cdot 10^7$  N, v  $x = 3L/4$  silou  $F_3 = -5 \cdot 10^7$  N a v bodě  $x = L$  silou  $F_4 = -10^7$  N. Tedy pro uvažovanou délku nosníku  $L = 1$  m je

$$q(x) = \begin{cases} (16x + 1) \cdot 10^7 & \text{pro } x \in [0, 1/4], \\ (1 - 2x) \cdot 10^8 & \text{pro } x \in [1/4, 3/4], \\ (16x - 17) \cdot 10^7 & \text{pro } x \in [3/4, 1]. \end{cases} \quad (4.2)$$

Porovnáme případ s nulovou a kladnou axiální silou  $P = +5 \cdot 10^8$  N, která odpovídá stlačování nosníku. Z obrázku 4.12 a příslušných dat v tabulce 4.12 je patrné, že při stlačování nosníku dojde k většímu průhybu. S ohledem na stejné okrajové podmínky na obou koncích nosníku (oba konce jsou podepřené) a symetrii vertikálního zatížení vzhledem ke středu nosníku dostáváme kladné maximální průhyby v bodě  $x = 0.250$  m a záporné v bodě  $x = 0.750$  m.



Obrázek 4.12: Průhyby nosníků, na které působí vertikální zatížení dané předpisem (4.2), na nosník vpravo působí ještě navíc axiální síla  $P = +5 \cdot 10^8$  N.

Tabulka 4.12: Data k obrázku 4.12.

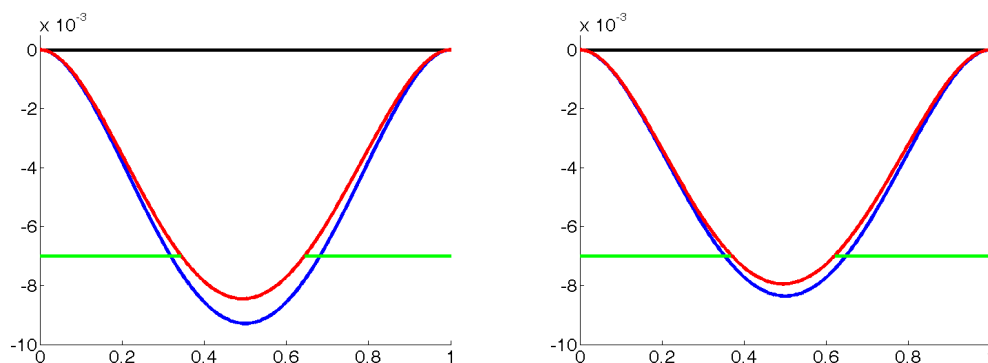
$P$	nosník		průhyb	poloha	energie
0	EB	max	$+1.965 \cdot 10^{-4}$	0.250	$-2.104 \cdot 10^3$
		min	$-1.965 \cdot 10^{-4}$	0.750	
	G	max	$+1.788 \cdot 10^{-4}$	0.250	$-1.742 \cdot 10^3$
		min	$-1.788 \cdot 10^{-4}$	0.750	
$+5 \cdot 10^8$	EB	max	$+2.160 \cdot 10^{-4}$	0.250	$-2.313 \cdot 10^3$
		min	$-2.160 \cdot 10^{-4}$	0.750	
	G	max	$+1.965 \cdot 10^{-4}$	0.250	$-1.915 \cdot 10^3$
		min	$-1.965 \cdot 10^{-4}$	0.750	

## 4.2 Výpočty kontaktních úloh s Gaovým nosníkem

Nyní budeme pro oba typy nosníků uvažovat kontaktní úlohu s podložím, které bude umístěné ve vzdálenosti  $g$  pod nosníkem. Uvažovat budeme stejné hodnoty vstupních dat jako v předchozím odstavci. Pojmy uvedené v tabulkách mají stejný význam. Navíc uvádíme položku **kontakt**, což představuje místo, kde dochází ke kontaktu nosníku s podložím. Podloží je na obrázcích znázorněno zeleně.

### (P1) Nosník oboustranně vetknutý

Uvažujme nejprve nosník, který je oboustranně vetknutý a který leží ve vzdálenosti  $g=0.007$  m nad podložím. Na nosník bude působit pouze konstantní vertikální zatížení  $q = -5 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-1}$ , takže  $P = 0$  N. Podíváme se na případ dvou různých koeficientů tuhosti podloží  $k_F$ .



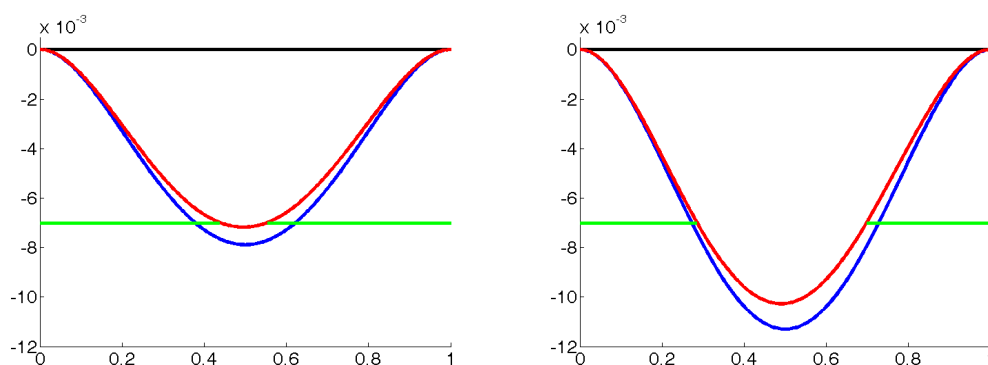
Obrázek 4.13: Průhyby nosníků, na které působí konstantní vertikální zatížení  $q = -5 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-1}$ . Koeficient tuhosti podloží je vlevo  $k_F = 5 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-2}$ , vpravo je  $k_F = 1 \cdot 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$ .

Tabulka 4.13: Data k obrázku 4.13.

$k_F$	nosník	kontakt	průhyb	poloha	energie
$5 \cdot 10^8$	<b>EB</b>	[0.344;0.656]	$-9.291 \cdot 10^{-3}$	0.500	$-1.240 \cdot 10^6$
	<b>G</b>	[0.375;0.625]	$-8.452 \cdot 10^{-3}$	0.500	$-1.026 \cdot 10^6$
$10^{11}$	<b>EB</b>	[0.375;0.625]	$-8.359 \cdot 10^{-3}$	0.500	$-1.202 \cdot 10^6$
	<b>G</b>	[0.375;0.594]	$-7.945 \cdot 10^{-3}$	0.500	$-1.014 \cdot 10^6$

Z příslušného obrázku 4.13 a dat v tabulce 4.13 je vidět, že tužší podloží odpovídající koeficientu  $k_F = 1 \cdot 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$  umožňuje podstatně menší proniknutí nosníku do podloží, a tedy i menší kontaktní zónu, než měkčí podloží s koeficientem  $k_F = 5 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-2}$ .

Nyní se zaměříme na situaci, kdy na nosník působí konstantní vertikální zatížení  $q = -5 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-1}$  a současně také různé axiální síly, záporná axiální síla  $P = -10^9 \text{ N}$  odpovídající natahování nosníku a kladná  $P = +10^9 \text{ N}$  odpovídající jeho stlačování, koeficient tuhosti podloží je  $k_F = 5 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-2}$ , viz obrázek 4.14 a příslušná data v tabulce 4.14.



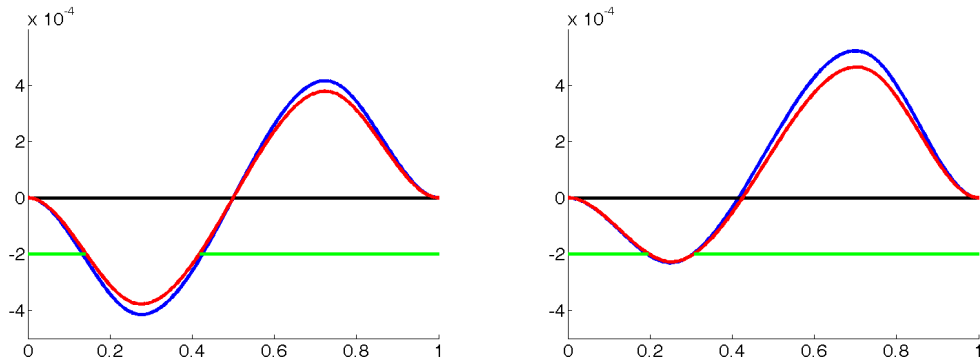
Obrázek 4.14: Průhyby nosníků, na které působí konstantní vertikální zatížení  $q = -5 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-1}$  a navíc také axiální síla  $P$ , vlevo  $P = -10^9 \text{ N}$  a vpravo  $P = +10^9 \text{ N}$ . Koeficient tuhosti podloží je  $k_F = 5 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-2}$ .

Tabulka 4.14: Data k obrázku 4.14.

$P$	nosník	kontakt	průhyb	poloha	energie
$-10^9$	<b>EB</b>	[0.406;0.594]	$-7.893 \cdot 10^{-3}$	0.500	$-1.034 \cdot 10^6$
	<b>G</b>	[0.469;0.531]	$-7.179 \cdot 10^{-3}$	0.500	$-8.327 \cdot 10^5$
$+10^9$	<b>EB</b>	[0.281;0.719]	$-1.130 \cdot 10^{-2}$	0.500	$-1.441 \cdot 10^6$
	<b>G</b>	[0.313;0.688]	$-1.028 \cdot 10^{-2}$	0.500	$-1.239 \cdot 10^6$



Dále budeme uvažovat situaci, kdy vertikální zatížení představují dvě osamělé síly. Síla  $F_1 = -5 \cdot 10^7 \text{ N}$  působí v bodě  $x = L/4$  a síla  $F_2 = +5 \cdot 10^7 \text{ N}$  v bodě  $x = 3L/4$ , přičemž  $L = 1 \text{ m}$ . Pro podloží ležící ve vzdálenosti  $g=0.0002 \text{ m}$  pod nosníkem budou opět dány dvě různé hodnoty koeficientu tuhosti. I v tomto případě dostáváme menší zaboření nosníku do podloží, tedy menší záporné průhyby a také menší kontaktní zónu, pro tužší podloží. Co se týká maximální velikosti kladných průhybů, bude v tomto případě vlivem tužšího podloží větší, viz obrázek 4.15 a tabulka 4.15.

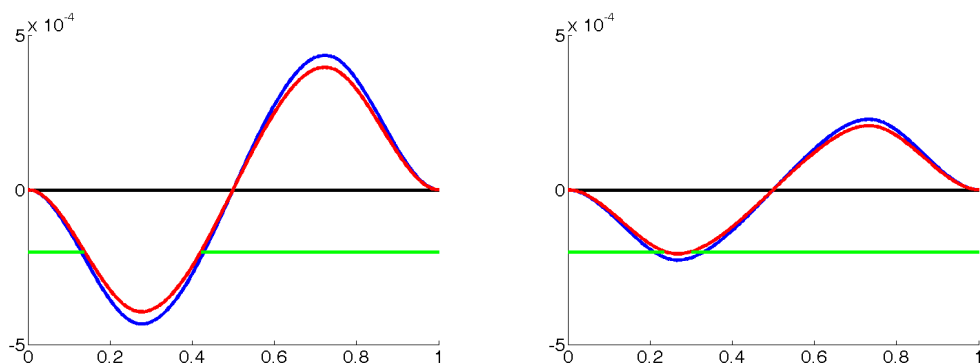


Obrázek 4.15: Průhyby nosníků, na které působí dvě osamělé síly  $F_1$  a  $F_2$ . Koeficient tuhosti podloží je vlevo  $k_F = 5 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-2}$ , vpravo  $k_F = 5 \cdot 10^{12} \text{ Nm}^{-2}$ .

Tabulka 4.15: Data k obrázku 4.15.

$k_F$	nosník	kontakt	průhyb		poloha	energie
$5 \cdot 10^8$	<b>EB</b>	[0.156;0.406]	max	$+4.159 \cdot 10^{-4}$	0.719	$-2.034 \cdot 10^4$
			min	$-4.153 \cdot 10^{-4}$	0.281	
	<b>G</b>	[0.156;0.406]	max	$+3.784 \cdot 10^{-4}$	0.719	$-1.851 \cdot 10^4$
			min	$-3.779 \cdot 10^{-4}$	0.281	
$5 \cdot 10^{12}$	<b>EB</b>	[0.219;0.281]	max	$+5.212 \cdot 10^{-4}$	0.688	$-1.823 \cdot 10^4$
			min	$-2.311 \cdot 10^{-4}$	0.250	
	<b>G</b>	[0.219;0.281]	max	$+4.630 \cdot 10^{-4}$	0.688	$-1.712 \cdot 10^4$
			min	$-2.279 \cdot 10^{-4}$	0.250	

Dále uvažujme stejné vertikální zatížení, tedy dvě osamělé síly  $F_1 = -5 \cdot 10^7 \text{ N}$  v bodě  $x = L/4$  a  $F_2 = +5 \cdot 10^7 \text{ N}$  v bodě  $x = 3L/4$ , přičemž  $L = 1 \text{ m}$ . Podloží je ve vzdálenosti  $g=0.0002 \text{ m}$  pod nosníkem a má koeficient tuhosti  $k_F = 5 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-2}$ , na nosník navíc působí axiální síla  $P$ , vlevo  $P = 5 \cdot 10^8 \text{ N}$ , vpravo  $P = -10^{10} \text{ N}$ , viz obrázek 4.16 a tabulka 4.16.



Obrázek 4.16: Průhyby nosníků, na které působí dvě osamělé síly  $F_1$  a  $F_2$  a síla axiální, vlevo je  $P = 5 \cdot 10^8$  N, vpravo  $P = -10^{10}$  N. Koeficient tuhosti podloží je  $k_F = 5 \cdot 10^8$  Nm $^{-2}$ .

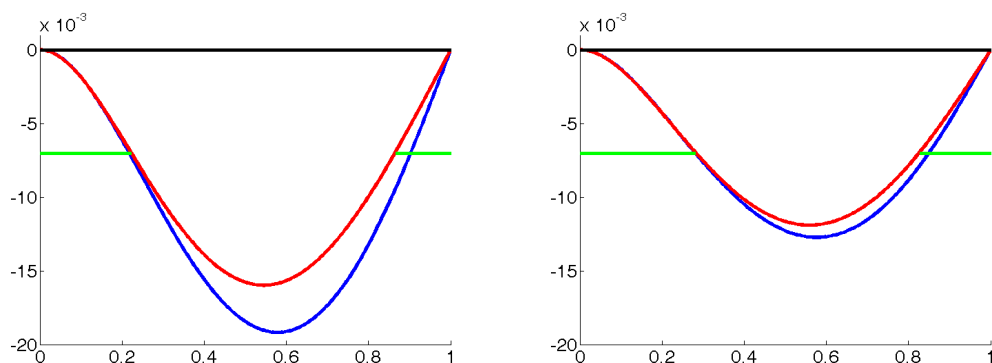
Tabulka 4.16: Data k obrázku 4.16.

$P$	nosník	kontakt	průhyb		poloha	energie
$5 \cdot 10^8$	<b>EB</b>	[0.156;0.406]	max	$+4.345 \cdot 10^{-4}$	0.719	$-2.118 \cdot 10^4$
			min	$-4.338 \cdot 10^{-4}$	0.281	
	<b>G</b>	[0.156;0.406]	max	$+3.953 \cdot 10^{-4}$	0.719	$-1.935 \cdot 10^4$
			min	$-3.947 \cdot 10^{-4}$	0.281	
$-10^{10}$	<b>EB</b>	[0.219;0.313]	max	$+2.261 \cdot 10^{-4}$	0.719	$-7.106 \cdot 10^3$
			min	$-2.260 \cdot 10^{-4}$	0.281	
	<b>G</b>	[0.250;0.281]	max	$+2.059 \cdot 10^{-4}$	0.719	$-6.808 \cdot 10^3$
			min	$-2.059 \cdot 10^{-4}$	0.281	

### (P2) Nosník s vetknutím na jednom a podepřením na druhém konci

Nyní uvažujme nosník, který je na jednom konci vetknutý a na druhém podepřený. Podloží je umístěno ve vzdálenosti  $g=0.007$  m pod nosníkem. Na nosník bude působit pouze konstantní vertikální zatížení  $q = -5 \cdot 10^8$  Nm $^{-1}$ , axiální síla  $P$  je nulová. Zaměříme se na případ dvou různých koeficientů tuhosti podloží  $k_F$ .

Z příslušného obrázku 4.17 a dat v tabulce 4.17 je vidět, že tužší podloží odpovídající koeficientu  $k_F = 5 \cdot 10^{10}$  Nm $^{-2}$  umožňuje podstatně menší proniknutí nosníku do podloží, a tedy i menší kontaktní zónu, než měkčí podloží s koeficientem  $k_F = 5 \cdot 10^8$  Nm $^{-2}$ .

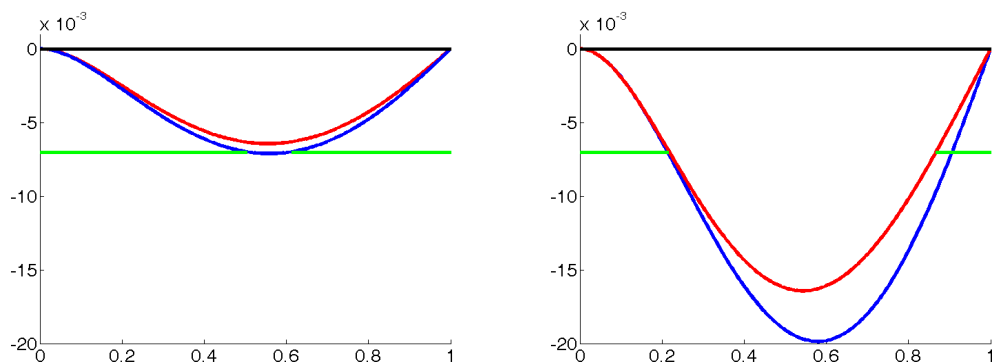


Obrázek 4.17: Průhyby nosníků, na které působí konstantní vertikální zatížení  $q = -5 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-1}$ . Koeficient tuhosti podloží je vlevo  $k_F = 5 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-2}$ , vpravo je  $k_F = 5 \cdot 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$ .

Tabulka 4.17: Data k obrázku 4.17.

$k_F$	nosník	kontakt	průhyb	poloha	energie
$5 \cdot 10^8$	EB	[0.219;0.875]	$-1.916 \cdot 10^{-2}$	0.594	$-2.777 \cdot 10^6$
	G	[0.250;0.875]	$-1.706 \cdot 10^{-2}$	0.563	$-2.275 \cdot 10^6$
$5 \cdot 10^{10}$	EB	[0.281;0.844]	$-1.271 \cdot 10^{-2}$	0.563	$-2.232 \cdot 10^6$
	G	[0.313;0.813]	$-1.215 \cdot 10^{-2}$	0.563	$-1.917 \cdot 10^6$

Dále se zaměříme na situaci, kdy na nosník působí konstantní vertikální zatížení  $q = -5 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-1}$  a současně také různé axiální síly, záporná axiální síla  $P = -5 \cdot 10^9 \text{ N}$  odpovídající natahování nosníku, a kladná  $P = +10^8 \text{ N}$  odpovídající jeho stlačování. Koeficient tuhosti podloží je  $k_F = 5 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-2}$ , viz obrázek 4.18 a příslušná data v tabulce 4.18. Symbolem  $\emptyset$  rozumíme, že ke kontaktu nosníku s podložím nedošlo.

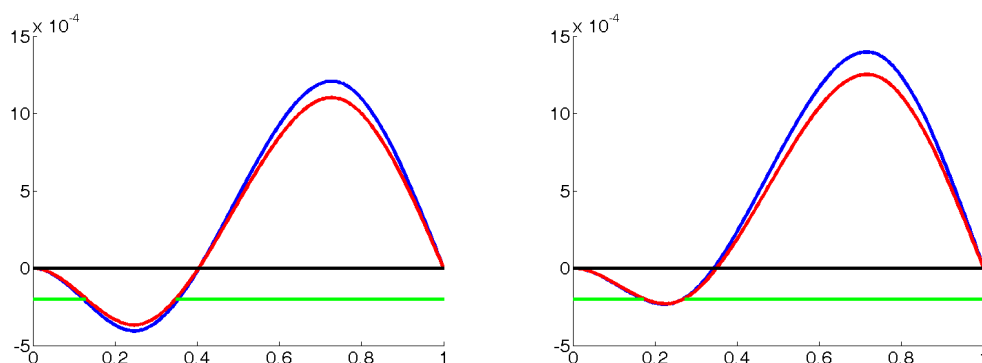


Obrázek 4.18: Průhyby nosníků, na které působí konstantní vertikální zatížení  $q = -5 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-1}$  a navíc také axiální síla  $P$ , vlevo  $P = -5 \cdot 10^9 \text{ N}$  a vpravo  $P = +10^8 \text{ N}$ . Koeficient tuhosti podloží je v obou případech  $k_F = 5 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-2}$ .

Tabulka 4.18: Data k obrázku 4.18.

$P$	nosník	kontakt	průhyb	poloha	energie
$-5 \cdot 10^9$	<b>EB</b>	[0.531;0.594]	$-7.105 \cdot 10^{-3}$	0.563	$-1.058 \cdot 10^6$
	<b>G</b>	$\emptyset$	$-6.459 \cdot 10^{-3}$	0.563	$-8.271 \cdot 10^5$
$+10^8$	<b>EB</b>	[0.219;0.875]	$-1.984 \cdot 10^{-2}$	0.594	$-2.874 \cdot 10^6$
	<b>G</b>	[0.250;0.875]	$-1.763 \cdot 10^{-2}$	0.563	$-2.358 \cdot 10^6$

Nyní budeme uvažovat situaci, kdy vertikální zatížení představují dvě osamělé síly. Síla  $F_1 = -7 \cdot 10^7$  N působí v bodě  $x = L/4$  a síla  $F_2 = +5 \cdot 10^7$  N v bodě  $x = 3L/4$ , přičemž  $L = 1$  m. Pro podloží ležící ve vzdálenosti  $g=0.0002$  m pod nosníkem budou opět dány dvě různé hodnoty koeficientu tuhosti.



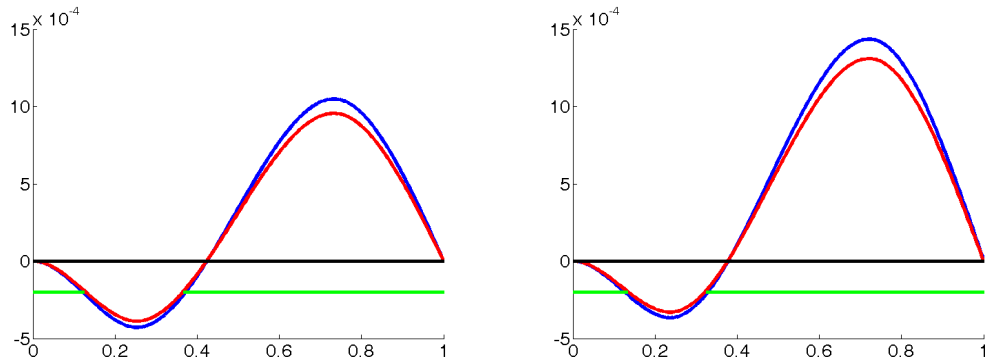
Obrázek 4.19: Průhyby nosníků, na které působí dvě osamělé síly  $F_1$  a  $F_2$ . Koeficient tuhosti podloží je vlevo  $k_F = 5 \cdot 10^8$   $\text{Nm}^{-2}$ , vpravo  $k_F = 5 \cdot 10^{12}$   $\text{Nm}^{-2}$ .

Tabulka 4.19: Data k obrázku 4.19.

$k_F$	nosník	kontakt		průhyb	poloha	energie
$5 \cdot 10^8$	<b>EB</b>	[0.125;0.344]	max	$+1.207 \cdot 10^{-3}$	0.719	$-4.011 \cdot 10^4$
			min	$-4.066 \cdot 10^{-4}$	0.250	
	<b>G</b>	[0.156;0.344]	max	$+1.098 \cdot 10^{-3}$	0.719	$-3.650 \cdot 10^4$
			min	$-3.699 \cdot 10^{-4}$	0.250	
$5 \cdot 10^{12}$	<b>EB</b>	[0.188;0.250]	max	$+1.397 \cdot 10^{-3}$	0.719	$-3.908 \cdot 10^4$
			min	$-2.337 \cdot 10^{-4}$	0.219	
	<b>G</b>	[0.188;0.250]	max	$+1.252 \cdot 10^{-3}$	0.719	$-3.582 \cdot 10^4$
			min	$-2.296 \cdot 10^{-4}$	0.219	

I v tomto případě dostáváme menší zaboření nosníku do podloží, tedy menší záporné průhyby a také menší kontaktní zónu, pro tužší podloží. Co se týká maximální velikosti kladných průhybů, bude v tomto případě vlivem tužšího podloží větší, viz obrázek 4.19 a tabulka 4.19.

Dále budeme uvažovat stejné vertikální zatížení, tedy dvě osamělé síly. Síla  $F_1 = -7 \cdot 10^7$  N působí v bodě  $x = L/4$  a síla  $F_2 = +5 \cdot 10^7$  N v bodě  $x = 3L/4$ , přičemž  $L = 1$  m. Podloží ležící ve vzdálenosti  $g=0.0002$  m pod nosníkem má koeficient tuhosti podloží  $k_F = 5 \cdot 10^8$  Nm<sup>-2</sup>, na nosník navíc působí axiální síla  $P$ , vlevo  $P = -5 \cdot 10^8$  N, vpravo  $P = +5 \cdot 10^8$  N, viz obrázek 4.20 a tabulka 4.20.



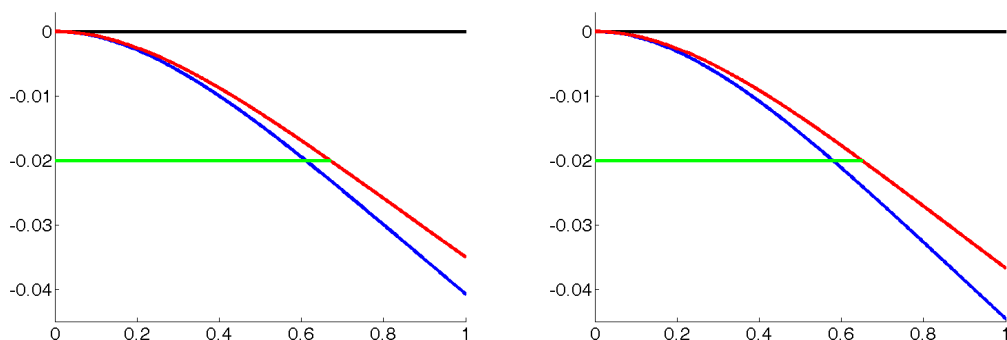
Obrázek 4.20: Průhyby nosníků, na které působí dvě osamělé síly  $F_1$  a  $F_2$ . Koeficient tuhosti podloží je  $k_F = 5 \cdot 10^8$  Nm<sup>-2</sup>, na nosník vlevo působí axiální síla  $P = -5 \cdot 10^8$  N, vpravo  $P = +5 \cdot 10^8$  N.

Tabulka 4.20: Data k obrázku 4.20.

$P$	nosník	kontakt		průhyb	poloha	energie
$-5 \cdot 10^8$	<b>EB</b>	[0.125;0.344]	max	$+1.045 \cdot 10^{-3}$	0.719	$-3.670 \cdot 10^4$
			min	$-4.289 \cdot 10^{-4}$	0.250	
	<b>G</b>	[0.156;0.344]	max	$+9.507 \cdot 10^{-4}$	0.719	$-3.350 \cdot 10^4$
			min	$-3.902 \cdot 10^{-4}$	0.250	
$+5 \cdot 10^8$	<b>EB</b>	[0.156;0.313]	max	$+1.435 \cdot 10^{-3}$	0.719	$-4.400 \cdot 10^4$
			min	$-3.627 \cdot 10^{-4}$	0.250	
	<b>G</b>	[0.156;0.313]	max	$+1.306 \cdot 10^{-3}$	0.719	$-4.039 \cdot 10^4$
			min	$-3.298 \cdot 10^{-4}$	0.250	

### (P3) Nosník s volným koncem

Nyní uvažujme nosník, jehož levý konec je vetknutý a pravý volný. Podloží leží ve vzdálenosti  $g=0.02$  m pod nosníkem. Na nosník bude nejprve působit pouze konstantní vertikální zatížení  $q = -5 \cdot 10^7$  Nm<sup>-1</sup>, axiální síla  $P = 0$  N. Budeme uvažovat situaci, kdy jsou dány dva různé koeficienty tuhosti podloží  $k_F$ .



Obrázek 4.21: Průhyby nosníků, na které působí konstantní vertikální zatížení  $q = -5 \cdot 10^7 \text{ Nm}^{-1}$ . Koefficient tuhosti podloží je vlevo  $k_F = 5 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-2}$ , vpravo je  $k_F = 5 \cdot 10^6 \text{ Nm}^{-2}$ .

Tabulka 4.21: Data k obrázku 4.21.

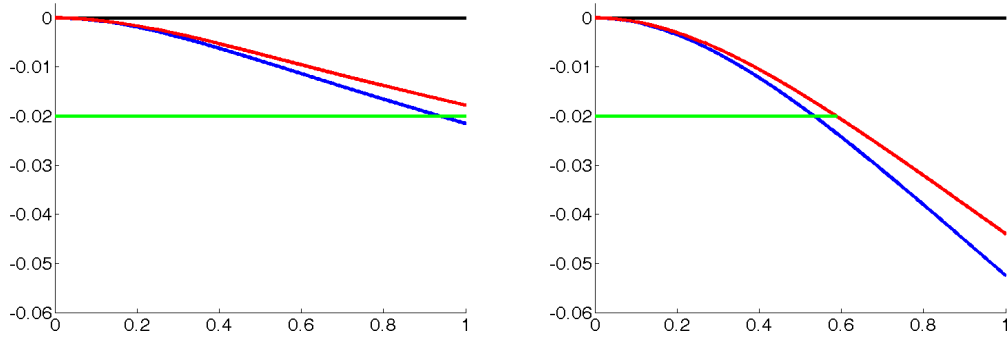
$k_F$	nosník	kontakt	průhyb	poloha	energie
$5 \cdot 10^8$	<b>EB</b>	[0.625;1.000]	$-4.078 \cdot 10^{-2}$	1.000	$-4.289 \cdot 10^5$
	<b>G</b>	[0.688;1.000]	$-3.503 \cdot 10^{-2}$	1.000	$-3.455 \cdot 10^5$
$5 \cdot 10^6$	<b>EB</b>	[0.594;1.000]	$-4.453 \cdot 10^{-2}$	1.000	$-4.459 \cdot 10^5$
	<b>G</b>	[0.656;1.000]	$-3.664 \cdot 10^{-2}$	1.000	$-3.519 \cdot 10^5$

Z příslušného obrázku 4.21 a dat v tabulce 4.21 je opět vidět, že tužší podloží odpovídající koeficientu  $k_F = 5 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-2}$  umožňuje menší proniknutí nosníku do podloží, a tedy i menší kontaktní zónu, než měkčí podloží s koeficientem  $k_F = 5 \cdot 10^6 \text{ Nm}^{-2}$ .

Dále se analogicky jako v předchozích případech budeme zabývat situací, kdy na nosník působí konstantní vertikální zatížení  $q = -5 \cdot 10^7 \text{ Nm}^{-1}$  a současně také různé axiální síly, záporná axiální síla  $P = -4 \cdot 10^8 \text{ N}$  odpovídající natahování nosníku, a kladná  $P = +10^8 \text{ N}$  odpovídající jeho stlačování. Koefficient tuhosti podloží je v obou případech  $k_F = 5 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-2}$ , viz obrázek 4.22 a příslušná data v tabulce 4.22. Symbolem  $\emptyset$  rozumíme, že ke kontaktu nosníku s podložím nedošlo.

Tabulka 4.22: Data k obrázku 4.22.

$P$	nosník	kontakt	průhyb	poloha	energie
$-4 \cdot 10^8$	<b>EB</b>	[0.969;1.000]	$-2.142 \cdot 10^{-2}$	1.000	$-2.320 \cdot 10^5$
	<b>G</b>	$\emptyset$	$-1.772 \cdot 10^{-2}$	1.000	$-1.773 \cdot 10^5$
$+10^8$	<b>EB</b>	[0.563;1.000]	$-5.255 \cdot 10^{-2}$	1.000	$-1.054 \cdot 10^5$
	<b>G</b>	[0.594;1.000]	$-4.416 \cdot 10^{-2}$	1.000	$-7.995 \cdot 10^4$

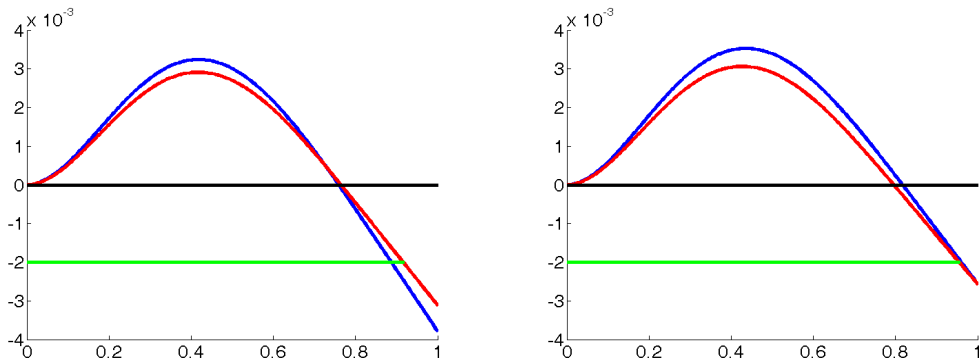


Obrázek 4.22: Průhyby nosníků, na které působí konstantní vertikální zatížení  $q = -5 \cdot 10^7 \text{ Nm}^{-1}$  a navíc také axiální síla  $P$ , vlevo  $P = -4 \cdot 10^8 \text{ N}$  a vpravo  $P = +10^8 \text{ N}$ . Koeficient tuhosti podloží je v obou případech  $k_F = 5 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-2}$ .

Nyní budeme uvažovat situaci, kdy na nosník působí vertikální zatížení  $q$ , které je po částech lineární funkcí. V bodě  $x = 0$  působí silou  $F_1 = 0 \text{ N}$ , v  $x = L/4$  silou  $F_2 = +5 \cdot 10^8 \text{ N}$ , v  $x = 3L/4$  silou  $F_3 = -1.7 \cdot 10^8 \text{ N}$  a v bodě  $x = L$  silou  $F_4 = 0 \text{ N}$ . Tedy pro uvažovanou délku nosníku  $L = 1 \text{ m}$  je

$$q(x) = \begin{cases} 2x \cdot 10^9 & \text{pro } x \in [0, 1/4], \\ 5(167 - 268x) \cdot 10^6 & \text{pro } x \in [1/4, 3/4], \\ 68(x - 1) \cdot 10^7 & \text{pro } x \in [3/4, 1]. \end{cases} \quad (4.3)$$

Pro podloží ležící ve vzdálenosti  $g=0.002 \text{ m}$  pod nosníkem budeme uvažovat dvě různé hodnoty koeficientu tuhosti, a to  $k_F = 5 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-2}$  a  $k_F = 5 \cdot 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$ . Také v tomto případě dostáváme menší zaboření nosníku do podloží, tedy menší záporné průhyby a také menší kontaktní zónu, pro tužší podloží. Co se týká maximální velikosti kladných průhybů, bude v tomto případě vlivem tužšího podloží větší, viz obrázek 4.23 a tabulka 4.23.

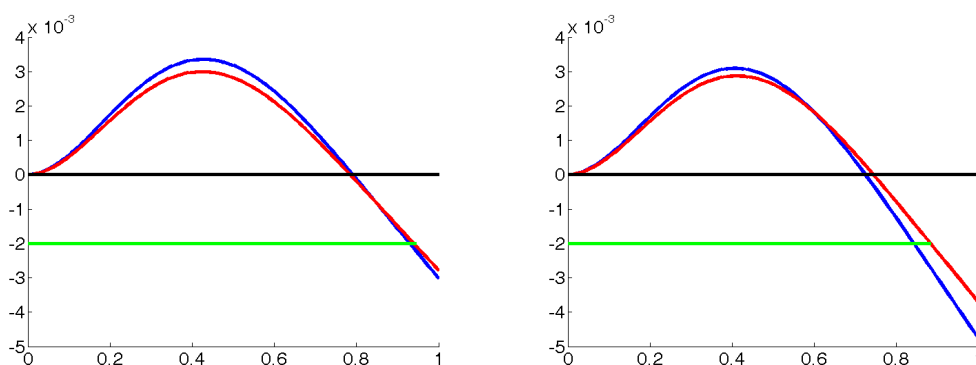


Obrázek 4.23: Průhyby nosníků, na které působí vertikální zatížení dané předpisem (4.3). Koeficient tuhosti podloží je vlevo  $k_F = 5 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-2}$ , vpravo  $k_F = 5 \cdot 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$ .

Tabulka 4.23: Data k obrázku 4.23.

$k_F$	nosník	kontakt	průhyb		poloha	energie
$5 \cdot 10^8$	<b>EB</b>	[0.906;1.000]	max	$+3.235 \cdot 10^{-3}$	0.406	$-1.861 \cdot 10^5$
			min	$-3.793 \cdot 10^{-3}$	1.000	
	<b>G</b>	[0.906;1.000]	max	$+2.943 \cdot 10^{-3}$	0.406	$-1.540 \cdot 10^5$
			min	$-3.370 \cdot 10^{-3}$	1.000	
$5 \cdot 10^{10}$	<b>EB</b>	[0.969;1.000]	max	$+3.527 \cdot 10^{-3}$	0.438	$-1.856 \cdot 10^5$
			min	$-2.569 \cdot 10^{-3}$	1.000	
	<b>G</b>	[0.969;1.000]	max	$+3.153 \cdot 10^{-3}$	0.438	$-1.538 \cdot 10^5$
			min	$-2.515 \cdot 10^{-3}$	1.000	

Nyní budeme opět uvažovat vertikální zatížení zadané předpisem (4.3). Podloží je ve vzdálenosti  $g=0.002$  m pod nosníkem a má koeficient tuhosti  $k_F = 5 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-2}$ . Na nosník bude navíc působit axiální síla  $P$ , záporná síla  $P = -5 \cdot 10^7$  N odpovídající natahování nosníku, a kladná  $P = +5 \cdot 10^7$  N odpovídající jeho stlačování, viz obrázek 4.24 a tabulka 4.24.



Obrázek 4.24: Průhyby nosníků, na které působí vertikální zatížení dané předpisem (4.3). Koeficient tuhosti podloží je  $k_F = 5 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-2}$ , na nosník vlevo působí axiální síla  $P = -5 \cdot 10^7$  N, vpravo  $P = +5 \cdot 10^7$  N.

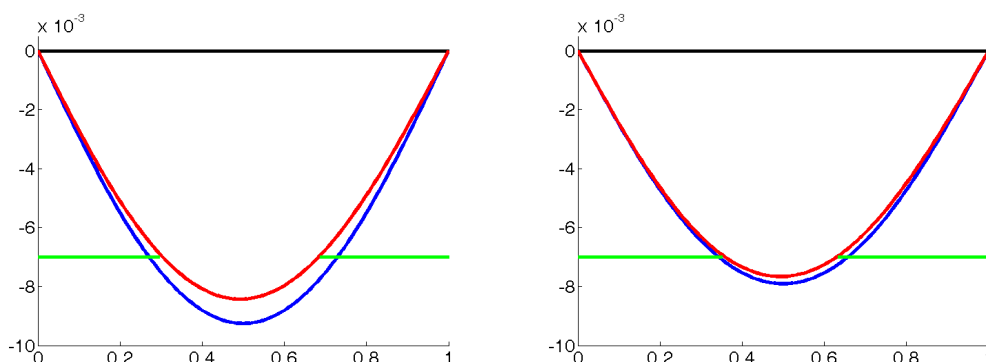


Tabulka 4.24: Data k obrázku 4.24.

$P$	nosník	kontakt	průhyb		poloha	energie
$-5 \cdot 10^7$	<b>EB</b>	[0.938;1.000]	max	$+3.350 \cdot 10^{-3}$	0.438	$-1.842 \cdot 10^5$
			min	$-3.019 \cdot 10^{-3}$	1.000	
	<b>G</b>	[0.969;1.000]	max	$+3.032 \cdot 10^{-3}$	0.438	$-1.511 \cdot 10^5$
			min	$-2.759 \cdot 10^{-3}$	1.000	
$+5 \cdot 10^7$	<b>EB</b>	[0.844;1.000]	max	$+3.091 \cdot 10^{-3}$	0.406	$-1.874 \cdot 10^5$
			min	$-4.777 \cdot 10^{-3}$	1.000	
	<b>G</b>	[0.875;1.000]	max	$+2.839 \cdot 10^{-3}$	0.406	$-1.574 \cdot 10^5$
			min	$-4.110 \cdot 10^{-3}$	1.000	

#### (P4) Nosník na dvou podporách

Uvažujme nyní nosník, který je na obou koncích podepřený a který leží ve vzdálenosti  $g=0.007$  m nad podloží. Na nosník bude působit pouze konstantní vertikální zatížení  $q = -1 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-1}$ , axiální síla  $P = 0$  N. Budeme uvažovat dva různé koeficienty tuhosti podloží  $k_F$ .



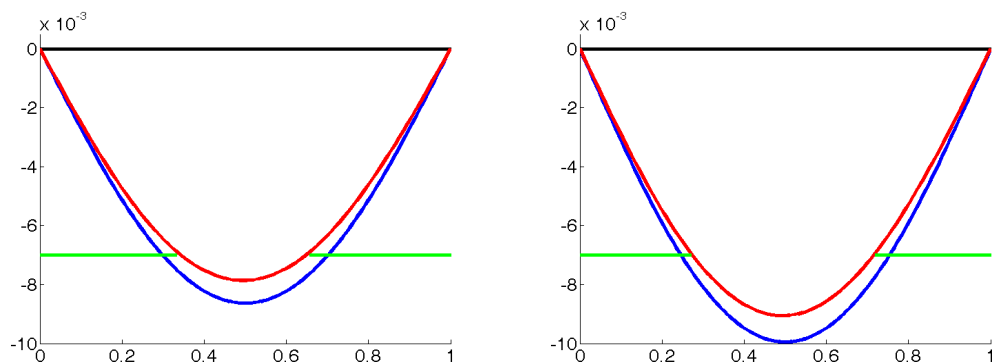
Obrázek 4.25: Průhyby nosníků, na které působí konstantní vertikální zatížení  $q = -10^8 \text{ Nm}^{-1}$ . Koeficient tuhosti podloží je vlevo  $k_F = 5 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-2}$ , vpravo je  $k_F = 5 \cdot 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$ .

Tabulka 4.25: Data k obrázku 4.25.

$k_F$	nosník	kontakt	průhyb	poloha	energie
$5 \cdot 10^8$	<b>EB</b>	[0.281;0.719]	$-9.253 \cdot 10^{-3}$	0.500	$-2.973 \cdot 10^5$
	<b>G</b>	[0.313;0.688]	$-8.410 \cdot 10^{-3}$	0.500	$-2.455 \cdot 10^5$
$5 \cdot 10^{10}$	<b>EB</b>	[0.344;0.656]	$-7.913 \cdot 10^{-3}$	0.500	$-2.876 \cdot 10^5$
	<b>G</b>	[0.375;0.625]	$-7.656 \cdot 10^{-3}$	0.500	$-2.422 \cdot 10^5$

Z příslušného obrázku 4.25 a dat v tabulce 4.25 je vidět, že tužší podloží odpovídající koeficientu  $k_F = 5 \cdot 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$  umožňuje podstatně menší proniknutí nosníku do podloží, a tedy i menší kontaktní zónu, než poddajnější podloží s koeficientem  $k_F = 5 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-2}$ .

Dále se zaměříme na situaci, kdy na nosník působí konstantní vertikální zatížení  $q = -1 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-1}$  a současně také různé axiální síly. Záporná axiální síla  $P = -10^8 \text{ N}$  odpovídající natahování nosníku a kladná axiální síla  $P = +10^8 \text{ N}$  odpovídající jeho stlačování. Koeficient tuhosti podloží je  $k_F = 5 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-2}$ , viz obrázek 4.26 a příslušná data v tabulce 4.26.



Obrázek 4.26: Průhyby nosníků, na které působí konstantní vertikální zatížení  $q = -1 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-1}$  a navíc také axiální síla  $P$ , vlevo  $P = -10^8 \text{ N}$  a vpravo  $P = +10^8 \text{ N}$ . Koeficient tuhosti podloží je v obou případech  $k_F = 5 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-2}$ .

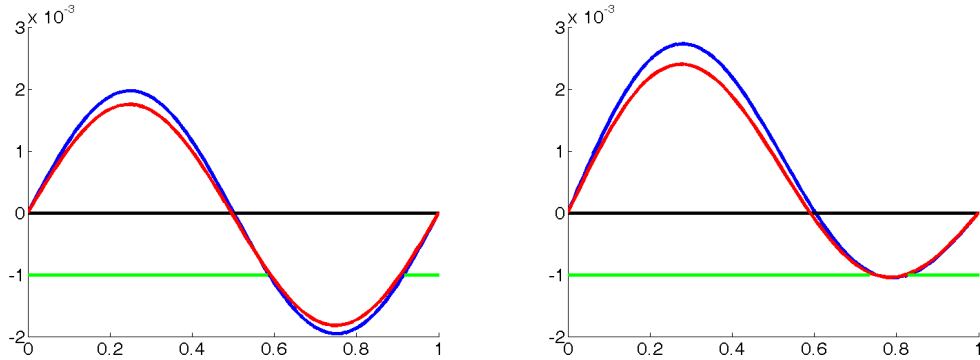
Tabulka 4.26: Data k obrázku 4.26.

P	nosník	kontakt	průhyb	poloha	energie
$-10^8$	<b>EB</b>	[0.313;0.688]	$-8.642 \cdot 10^{-3}$	0.500	$-2.774 \cdot 10^5$
	<b>G</b>	[0.375;0.625]	$-7.856 \cdot 10^{-3}$	0.500	$-2.291 \cdot 10^5$
$+10^8$	<b>EB</b>	[0.250;0.750]	$-9.955 \cdot 10^{-3}$	0.500	$-3.202 \cdot 10^5$
	<b>G</b>	[0.281;0.688]	$-9.044 \cdot 10^{-3}$	0.500	$-2.642 \cdot 10^5$

Nyní budeme uvažovat situaci, kdy na nosník působí vertikální zatížení  $q$ , které je po částech lineární funkcí. V bodě  $x = 0$  působí silou  $F_1 = +10^8 \text{ N}$ , v  $x = L/4$  silou  $F_2 = +5 \cdot 10^8 \text{ N}$ , v  $x = 3L/4$  silou  $F_3 = -5 \cdot 10^8 \text{ N}$  a v bodě  $x = L$  silou  $F_4 = -10^8 \text{ N}$ . Tedy pro uvažovanou délku nosníku  $L = 1 \text{ m}$  je

$$q(x) = \begin{cases} (16x + 1) \cdot 10^8 & \text{pro } x \in [0, 1/4], \\ (1 - 2x) \cdot 10^9 & \text{pro } x \in [1/4, 3/4], \\ (16x - 17) \cdot 10^8 & \text{pro } x \in [3/4, 1]. \end{cases} \quad (4.4)$$

Pro podloží ležící ve vzdálenosti  $g=0.001$  m pod nosníkem budeme uvažovat dvě různé hodnoty koeficientu tuhosti, a to  $k_F = 5 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-2}$  a  $k_F = 5 \cdot 10^{12} \text{ Nm}^{-2}$ . Také v tomto případě dostáváme menší zaboření nosníku do podloží, tedy menší záporné průhyby a také menší kontaktní zónu, pro tužší podloží. Co se týká maximální velikosti kladných průhybů, bude v tomto případě vlivem tužšího podloží větší, viz obrázek 4.27 a tabulka 4.27.

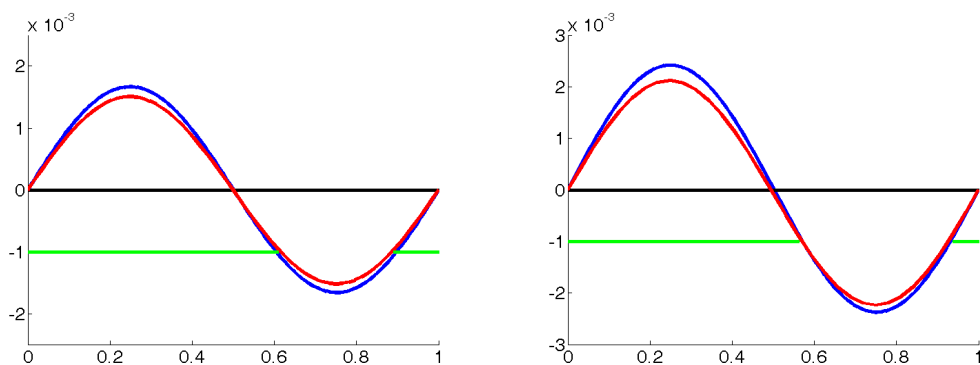


Obrázek 4.27: Průhyby nosníků, na které působí vertikální zatížení dané předpisem (4.4). Koeficient tuhosti podloží je vlevo  $k_F = 5 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-2}$ , vpravo  $k_F = 5 \cdot 10^{12} \text{ Nm}^{-2}$ .

Tabulka 4.27: Data k obrázku 4.27.

$k_F$	nosník	kontakt	průhyb		poloha	energie
$5 \cdot 10^8$	EB	[0.594;0.906]	max	$+1.971 \cdot 10^{-3}$	0.250	$-2.103 \cdot 10^5$
			min	$-1.957 \cdot 10^{-3}$	0.750	
	G	[0.625;0.906]	max	$+1.778 \cdot 10^{-3}$	0.250	$-1.742 \cdot 10^5$
			min	$-1.796 \cdot 10^{-3}$	0.750	
$5 \cdot 10^{12}$	EB	[0.750;0.813]	max	$+2.731 \cdot 10^{-3}$	0.281	$-2.045 \cdot 10^5$
			min	$-1.047 \cdot 10^{-3}$	0.781	
	G	[0.750;0.813]	max	$+2.402 \cdot 10^{-3}$	0.281	$-1.703 \cdot 10^5$
			min	$-1.044 \cdot 10^{-3}$	0.781	

Dále budeme opět uvažovat vertikální zatížení zadané předpisem (4.4). Na nosník bude navíc působit axiální síla  $P$ , záporná síla  $P = -10^9$  N odpovídající natahování nosníku, a kladná  $P = +10^9$  N odpovídající jeho stlačování. Podloží je umístěno ve vzdálenosti  $g=0.001$  m pod nosníkem a má koeficient tuhosti  $k_F = 5 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-2}$ . Na obrázku 4.28 a datech z tabulky 4.28 je jasně vidět, že při stlačování nosníku dojde k většímu zaboření do podloží. Zvětší se také maximální velikosti kladných průhybů a také kontaktní plocha.



Obrázek 4.28: Průhyby nosníků, na které působí vertikální zatížení dané předpisem (4.4). Koefficient tuhosti podloží je  $k_F = 5 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-2}$ , na nosník vlevo působí axiální síla  $P = -10^9 \text{ N}$ , vpravo  $P = +10^9 \text{ N}$ .

Tabulka 4.28: Data k obrázku 4.28.

$P$	nosník	kontakt		průhyb	poloha	energie
$-10^9$	<b>EB</b>	[0.625;0.875]	max	$+1.666 \cdot 10^{-3}$	0.250	$-1.781 \cdot 10^5$
			min	$-1.661 \cdot 10^{-3}$	0.750	
	<b>G</b>	[0.625;0.875]	max	$+1.511 \cdot 10^{-3}$	0.250	$-1.475 \cdot 10^5$
			min	$-1.517 \cdot 10^{-3}$	0.750	
$+10^9$	<b>EB</b>	[0.594;0.906]	max	$+2.438 \cdot 10^{-3}$	0.250	$-2.567 \cdot 10^5$
			min	$-2.356 \cdot 10^{-3}$	0.750	
	<b>G</b>	[0.594;0.906]	max	$+2.121 \cdot 10^{-3}$	0.250	$-2.125 \cdot 10^5$
			min	$-2.240 \cdot 10^{-3}$	0.750	

# Závěr

V této práci jsem se pokusila o souhrn výsledků dosažených v oblastech formulací a výpočetních modelů pro ohyb a kontakt nelineárního Gaova nosníku. U kontaktních problémů je možné tyto výsledky plně aplikovat i na klasický Euler–Bernoulliho nosník, jelikož stačí, když v rovnici (1.43) položíme  $\alpha = \nu = 0$ . Pro úlohu ohybu pak mají smysl - s ohledem na tvar stavových problémů - pouze řešení založené na transformacích T2 a T3, kdy dochází k redukci řádu původní úlohy.

Formulace jednotlivých problémů a výpočetní metody byly zpracovány tak, aby směřovaly společně k jistým úlohám optimálního řízení a metodám jejich řešení. Původní články [45], [3] začínají definicí kontaktní úlohy, pak zavedou jistou úlohu optimálního řízení a následně ukáží ekvivalenci jejich řešení. Hlavní přínos této práce i navazujících článků spočívá v tom, že je zde vypracovaná metodika (založená na transformacích T1 až T3), jak k daným problémům takovéto úlohy řízení zformulovat, přičemž místo lineárního nosníku se uvažuje obecnější nelineární. Zvolený postup navíc umožňuje korektně se vypořádat s nelineární okrajovou podmínkou (1.54), na kterou vede problém s volným koncem Gaova nosníku.

Kontaktní problematika se z důvodu „rozumného rozsahu“ práce omezila pouze na případ deformovatelného podloží, který je z hlediska aplikací relativně nejzajímavější. V zásadě stejným způsobem však lze postupovat i v případě dokonale tuhého podloží. Ten je navíc mezním případem předchozího problému.

Zásadní v celé práci je to, že osově zatížení  $P$  je uvažováno pouze v mezích, v nichž je funkcionál celkové potenciální energie konvexní. Nekonvexní případ bude předmětem dalšího bádání, neboť v tomto případě se ztrácí jednoznačnost řešení. Dílčí výsledky z použití transformací ukazují na tři různá reálná řešení (viz odstavec 1.4.1). Navíc často chceme znát všechna řešení, což je pomocí obvyklých postupů velmi obtížné. Použití transformací těchto problémů na úlohy optimálního řízení se zde jeví jako poměrně nadějně.

Jako možný směr budoucího výzkumu se nabízí rozšíření problematiky na dynamické, tj. časově závislé jevy. I v tomto případě se zdá, že by řízená variační metoda (CVM) mohla být slibným nástrojem, jak lze usoudit z publikací [50] a [51]. To je však podmíněno dalšími teoretickými studiemi, jak konstatuje D. Tiba v [51].

Samotná CVM se ovšem neomezuje jen na problémy týkající se nosníků. Již od svých počátků je koncipována jako metoda vhodná i pro vícerozměrné úlohy, viz [2], [48]. Protože přirozeným rozšířením nosníkových úloh jsou úlohy deskové, ukážeme zde příklad použití CVM pro úlohu ohybu tenké prostě podepřené desky tloušťky  $h(x)$ . Za předpokladu, že modul pružnosti  $E$  je konstantní, lze tuto úlohu na základě Kirchhoffovy teorie zjednodušeně zapsat v klasickém tvaru takto

$$\begin{cases} \Delta(h^3\Delta w) = f & \text{v } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ w = \Delta w = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.5)$$

přičemž oblast desky značíme  $\Omega$  a její hranici  $\partial\Omega$ . Aplikováním CVM získáme ekvi-

valentní vyjádření ve formě úlohy optimálního řízení

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Nalézt } u^* \in U_{ad}^D \text{ tak, že} \\ J_D(w(u^*), u^*) = \min_{u \in U_{ad}^D} J_D(w(u), u), \\ \text{kde } w := w(u) \text{ řeší stavovou úlohu (SP(D)).} \end{array} \right. \quad (4.6)$$

V této formulaci jsme přitom označili

$$U_{ad}^D = \{u \in L^2(\Omega) : |u(x)| \leq C \text{ sk.vš. v } \Omega\}, \quad (4.7)$$

$$J_D(w, u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{h^3} u^2 dx. \quad (4.8)$$

Příslušná stavová úloha má v klasické formulaci tvar

$$(\text{SP(D)}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta w = \frac{1}{h^3} (g + u) & \text{v } \Omega, \\ w = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (4.9)$$

příčemž funkci  $g$  definujeme jako řešení úlohy

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta g = f & \text{v } \Omega, \\ g = 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (4.10)$$

Ekvivalence obou formulací je dokázána v [35].

Výše uvedená transformace problémů je zřejmě v dobrém souladu s tím, jak jsme postupovali v odstavci 1.4.4, pokud přejdeme k lineárnímu modelu nosníku a následně od formulace v  $\mathbb{R}^1$  k  $\mathbb{R}^2$ . Dan Tiba tento postup využil k řešení úlohy tvarové optimalizace desky, přesněji k optimalizaci vzhledem k její tloušťce. Je zřejmé, že CVM může být využita analogicky i k řešení kontaktních deskových úloh. Přitom redukce řádu úloh ze čtyř na dva je zde z praktického hlediska velmi významná, jelikož umožňuje použití jednodušších konečných prvků než jsou obvyklé deskové prvky.

V současnosti disponuje CVM potenciálem ke zvládnutí řady náročných úloh, viz např. [46], [49], [50], [51]. Vzhledem k tomu, jací lidé se na jejím vývoji doposud podíleli, je na tom mnohem lépe po teoretické stránce, zatímco výpočtová je dosti skromná. Zde se nabízí do budoucna značné možnosti pro další výzkum.

# 5. Dodatek 1

## Úloha optimálního řízení

Nebudeme se zde zabývat obecnou teorií úloh optimálního řízení, jelikož pro naše účely vystačíme pouze s úlohami optimálního řízení *eliptických rovnic pomocí pravé strany*, jak jsou uvedeny v monografiích [21] a [52]. Tyto úlohy obsahují tzv. stavový problém, jehož pravá strana je závislá na řídicím parametru. Cílem je stanovit optimální hodnotu tohoto parametru pomocí minimalizace zadaného cenového funkcionálu, který je funkcí řízení a odpovídajícího řešení stavového problému.

Nejprve uvedeme variační formulaci obecné eliptické stavové úlohy.

**Definice 5.1** Necht'

- $V$  je Hilbertův prostor,
- $V'$  je prostor k němu duální,
- $U_{ad}$  je neprázdná podmnožina reflexivního Banachova prostoru  $U$ ,
- $B: U \rightarrow V'$  je lineární spojité zobrazení, tj.  $B \in \mathcal{L}(U, V')$ ,
- $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá a  $V$ -eliptická bilineární forma.

Pro libovolné  $u \in U_{ad}$  uvažujme úlohu

$$\begin{cases} \text{Nalézt funkci } w := w(u) \in V \text{ takovou, že} \\ a(w, v) = \langle f + Bu, v \rangle_{V' \times V} \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (5.1)$$

přičemž  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V' \times V}$  značí dualitu mezi  $V'$  a  $V$ .

Úlohu (5.1) budeme nazývat *variační formulace stavové úlohy* a o funkci  $w$  hovořit jako o *stavu* systému popsaného pomocí úlohy (5.1). Kromě toho nazveme

- $U$  *prostorem řídicích parametrů* (*space of controls*),
- $U_{ad}$  *množinou přípustných řídicích parametrů* (*set of admissible controls*).

**Příklad 5.1** Eliptickou rovnicí bude Euler–Bernoulliho rovnice (1.1), v níž však budeme používat formálně místo  $q$  symbol  $f$ , a  $B$  bude identické zobrazení. Pro určitost přidáme okrajové podmínky typu (P2).

V definici stavové úlohy pak provedeme následující volbu prostoru funkcí a bilineární formy:

$$V = V_2, \quad a(w, v) = \int_0^L EI w'' v'' dx. \quad (5.2)$$

Výsledný tvar představuje úlohu, která je v odstavci 1.4 označená (SP(1)).

Stavovou úlohu můžeme ovšem zapsat i v klasickém tvaru diferenciální rovnice.

Pro libovolně zadané  $u \in U_{ad}$  a pevně zvolenou funkci  $f$  tedy definujme úlohu:

$$\begin{cases} \text{Nalézt funkci } w := w(u) \text{ tak, že} \\ (EI w'')'' = f + u \quad \text{v } (0, L), \\ w(0) = w'(0) = 0, \\ w(L) = w''(L) = 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

**Poznámka 5.1** Variační formulace stavové úlohy (5.1) je vhodnější z hlediska řešení úlohy pomocí metody konečných prvků.

**Poznámka 5.2** Tento typ úloh náleží mezi tzv. *úlohy s rozloženým řízením* (*problems with distributed control*), což znamená, že řízení  $u \in U_{ad}$  působí na celém intervalu  $(0, L)$ . Jiný typ problémů představují *úlohy s řízením na hranici* (*boundary control problems*), kde řízení  $u$  bývá zadáno v okrajových podmínkách stavové úlohy.

Pro úlohu optimálního řízení je nutné zavést ještě tzv. *cenový* (nebo *kriteriální*) *funkcionál*  $J: V \times U \rightarrow \mathbb{R}$ , pomocí něhož realizujeme „vhodné řešení“ stavového problému (5.1).

Nyní můžeme přikročit k hlavnímu pojmu.

**Definice 5.2** Nechť  $V$  je Hilbertův prostor,  $U_{ad}$  je neprázdna podmnožina Banachova prostoru  $U$  a  $J: V \times U \rightarrow \mathbb{R}$  je daný cenový funkcionál.

Úloha

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Nalézt funkci } u^* \in U_{ad} \text{ tak, že} \\ J(w(u^*), u^*) = \min_{u \in U_{ad}} J(w(u), u), \\ \text{kde } w(u) \in V \text{ řeší stavovou úlohu (5.1),} \end{array} \right. \quad (5.4)$$

se nazývá *úloha optimálního řízení* eliptické stavové úlohy (5.1) její pravou stranou.

Dalším krokem je stanovit předpoklady, za nichž máme garantovanou existenci řešení úlohy (5.4). K tomu je třeba následující vlastnost cenového funkcionálu  $J$ .

**Definice 5.3** Řekneme, že funkcionál  $J: V \times U \rightarrow \mathbb{R}$  je *slabě zdola polospojité* na  $V \times U$ , jestliže platí

$$w_n \rightharpoonup w, u_n \rightharpoonup u \quad \Rightarrow \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} J(w_n, u_n) \geq J(w, u). \quad (5.5)$$

**Věta 5.1** Nechť  $V$  je Hilbertův prostor,  $U_{ad}$  neprázdna omezená uzavřená podmnožina reflexivního Banachova prostoru  $U$  a  $J: V \times U \rightarrow \mathbb{R}$  daný funkcionál. Jestliže je  $J$  slabě zdola polospojité na  $V \times U$ , potom má úloha optimálního řízení (5.4) alespoň jedno řešení.

*Důkaz:* Nechť

$$q = \inf_{u \in U_{ad}} J(w(u), u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} J(w(u_n), u_n),$$

tj.  $\{u_n\}$  je nějaká minimizující posloupnost úlohy (5.4).

Jelikož  $U_{ad}$  je omezená a  $U$  je reflexivní, existuje vybraná podposloupnost  $\{u_{n'}\} \subset \{u_n\}$  taková, že

$$u_{n'} \rightharpoonup u^* \in U_{ad}.$$

Uvažujme nyní posloupnost  $w_{n'} = w(u_{n'}) \in V$ , přičemž její prvky řeší úlohu

$$a(w_{n'}, v) = \langle f + Bu_{n'}, v \rangle_{V' \times V} \quad \forall v \in V. \quad (5.6)$$



Tato posloupnost je zřejmě rovněž omezená, takže můžeme předpokládat, že existuje prvek  $w^* \in V$  tak, že

$$w_{n'} \rightharpoonup w^*.$$

Nyní provedeme limitu pro  $n' \rightarrow +\infty$  v (5.6) a obdržíme

$$a(w^*, v) = \langle f + Bu^*, v \rangle_{V' \times V} \quad \forall v \in V.$$

Tedy  $w^* = w(u^*)$ .

Z druhé strany z (5.5) máme

$$q = \lim_{n' \rightarrow +\infty} J(w(u_{n'}), u_{n'}) = \liminf_{n' \rightarrow +\infty} J(w(u_{n'}), u_{n'}) \geq J(w(u^*), u^*) \geq q.$$

Odtud vidíme, že  $u^*$  je řešením úlohy (5.4). □

**Poznámka 5.3** Není pravda, že každý spojitý funkcionál je zároveň slabě zdola polospojité. Platí však následující postačující podmínka (viz např. [7]):

**Věta 5.2** *Je-li funkcionál  $J$  spojitý a konvexní na uzavřené konvexní množině  $K$ , pak je na  $K$  slabě zdola polospojité.*

**Poznámka 5.4** S ohledem na tvrzení věty 5.1 budeme vždy předpokládat, že  $U_{ad}$  je neprázdná omezená a uzavřená podmnožina  $U$ .

Pokud jde o jednoznačnost řešení úlohy (5.4), lze vyslovit následující tvrzení.

**Věta 5.3** *Nechť jsou splněny předpoklady věty 5.1 a navíc funkcionál  $J(w(u), u)$  je ryze konvexní na  $U_{ad}$ ,  $U_{ad}$  je konvexní množina a zobrazení  $u \mapsto w(u)$  je afinní. Potom má úloha (5.4) právě jedno řešení.*

*Důkaz:* Položme

$$I(u) = J(w(u), u) \quad \forall u \in U_{ad}. \quad (5.7)$$

Z toho, že  $u \mapsto w(u)$  je afinní, plyne, že  $I(u)$  je ryze konvexní na  $U_{ad}$ .

Předpokládejme, že úloha (5.4) má za daných předpokladů dvě různá řešení  $u_1, u_2 \in U_{ad}$ . Označme  $q = I(u_1) = I(u_2)$ . Prvek  $\tilde{u} = (u_1 + u_2)/2$  evidentně leží v  $U_{ad}$  a dle definice ryzí konvexity přitom platí

$$I(\tilde{u}) = I\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) < \frac{1}{2}(I(u_1) + I(u_2)) = q,$$

což je spor s tím, že  $q$  je hodnota minima úlohy. □

Abychom mohli úlohu (5.4) dále analyzovat, potřebujeme odvodit její podmínky optimality. V dalším textu budeme pro jednoduchost používat následující označení

$$a(w, v) = \langle Aw, v \rangle_{V' \times V} \quad \forall w, v \in V,$$

přičemž  $A$  je zřejmě lineární spojitý operátor z  $V$  do  $V'$ , viz věta 6.1. V našem případě bude konkrétně

$$Aw = (EI w'')''. \quad (5.8)$$

Klíčová idea dalšího postupu nyní spočívá ve faktu, že na problém (5.4) budeme nahlížet jako na úlohu minimalizace s vazbami. Za tím účelem definujeme množinu

$$W = \{(w, u) \in V \times U_{ad} : Aw = f + Bu\}. \quad (5.9)$$

Je evidentní, že platí

$$\min_{u \in U_{ad}} J(w(u), u) = \min_{(w, u) \in W} J(w, u) \quad (5.10)$$

a že je

$$(w, u) \in W \Leftrightarrow \langle f + Bu - Aw, p \rangle_{V' \times V} = 0 \quad \forall p \in V.$$

Označme

$$\Phi(w, u, p) = \langle f + Bu - Aw, p \rangle_{V' \times V} \quad \forall w \in V, u \in U_{ad}, p \in V. \quad (5.11)$$

Snadno nahlédneme, že zobrazení

$$(w, u) \mapsto \sup_{p \in V} \Phi(w, u, p)$$

představuje tzv. *indikátorový funkcionál* množiny  $W$ , který je obecně definován jako

$$I_W(w, u) = \begin{cases} 0 & \text{pro } (w, u) \in W, \\ +\infty & \text{pro } (w, u) \notin W. \end{cases} \quad (5.12)$$

Odtud dostaneme pro úlohu z (5.10) vyjádření

$$\min_{(w, u) \in W} J(w, u) = \min_{(w, u) \in V \times U_{ad}} \sup_{p \in V} \{J(w, u) + \Phi(w, u, p)\} \quad (5.13)$$

a je zřejmé, že na základě toho můžeme definovat Lagrangeův multiplikátor  $p$  a lagrangián  $\mathcal{L}$  následovně

$$\mathcal{L}(w, u, p) = J(w, u) + \Phi(w, u, p) \quad \forall w \in V, u \in U_{ad}, p \in V. \quad (5.14)$$

Uvažujme nyní sedlový bod  $(\bar{w}, \bar{u}, \bar{p}) \in V \times U_{ad} \times V$  lagrangiánu  $\mathcal{L}$ , tj. platí

$$\mathcal{L}(\bar{w}, \bar{u}, p) \leq \mathcal{L}(\bar{w}, \bar{u}, \bar{p}) \leq \mathcal{L}(w, \bar{u}, \bar{p}) \quad \forall w \in V, u \in U_{ad}, p \in V. \quad (5.15)$$

Následující tvrzení z knihy [6] (Ch. VI, Proposition 1.2.) udává nutnou a postačující podmínku pro takový sedlový bod.

**Lemma 5.1** *Dvojice  $(\bar{z}, \bar{\lambda}) \in Z \times \Lambda$  je sedlovým bodem lagrangiánu  $\mathcal{L}$  tehdy a jen tehdy, když platí*

$$\min_{z \in Z} \sup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{L}(z, \lambda) = \mathcal{L}(\bar{z}, \bar{\lambda}) = \max_{\lambda \in \Lambda} \inf_{z \in Z} \mathcal{L}(z, \lambda).$$

S ohledem na definici (5.14) a předchozí lemma pak můžeme psát

$$\mathcal{L}(\bar{w}, \bar{u}, \bar{p}) = \min_{(w, u) \in V \times U_{ad}} \sup_{p \in V} \mathcal{L}(w, u, p) = \min_{(w, u) \in W} J(w, u) = J(\bar{w}, \bar{u}).$$

Odsud je evidentní, že dvojice  $(\bar{w}, \bar{u})$  je řešení úlohy (5.4).

V dalším odvozování teď budeme předpokládat, že  $J$  je diferencovatelný. Potom z definice sedlového bodu (5.15) plynou následující vztahy

$$\langle \nabla_w \mathcal{L}(\bar{w}, \bar{u}, \bar{p}), w \rangle_{V' \times V} = 0 \quad \forall w \in V, \quad (5.16)$$

$$\langle \nabla_u \mathcal{L}(\bar{w}, \bar{u}, \bar{p}), u - \bar{u} \rangle_{U' \times U} \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}, \quad (5.17)$$

$$\langle \nabla_p \mathcal{L}(\bar{w}, \bar{u}, \bar{p}), p \rangle_{V' \times V} = 0 \quad \forall p \in V. \quad (5.18)$$

Z první rovnice (5.16) po dosazení získáme

$$\langle \nabla_w J(\bar{w}, \bar{u}), w \rangle_{V' \times V} - \langle Aw, \bar{p} \rangle_{V' \times V} = 0 \quad \forall w \in V, \quad (5.19)$$

kdežto třetí rovnice (5.18) dává vztah

$$A\bar{w} = f + B\bar{u}, \quad (5.20)$$

který ovšem značí, že  $(\bar{w}, \bar{u}) \in W$ .

Z (5.19) užitím definice operátoru  $A^*$  adjungovaného k operátoru  $A$  dostaneme

$$A^*\bar{p} = \nabla_w J(\bar{w}, \bar{u}), \quad (5.21)$$

což představuje tzv. *adjungovanou rovnici*. Snadno nahlédneme, že její řešení  $\bar{p}$ , kterému říkáme *adjungovaný stav*, není nic jiného než optimální hodnota Lagrangeova multiplikátoru, který přísluší vazbové podmínce definující množinu  $W$ . O adjungovaných problémech se podrobněji hovoří v dodatku 2.

Konečně zbývá druhá podmínka (5.17). Tu můžeme s ohledem na (5.11) přepsat následovně

$$\langle \nabla_u J(\bar{w}, \bar{u}), u - \bar{u} \rangle_{U' \times U} + \langle B^*\bar{p}, u - \bar{u} \rangle_{U' \times U} \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}, \quad (5.22)$$

přičemž  $B^*$  je operátor adjungovaný k  $B$ .

Tři vztahy (5.20) - (5.22), které jsme odvodili, představují hledané podmínky optimality. Lze je ovšem zapsat i ve slabé formulaci takto

$$a(\bar{w}, p) = \langle f + B\bar{u}, p \rangle_{V' \times V} \quad \forall p \in V, \quad (5.23)$$

$$a^*(\bar{p}, w) = \langle \nabla_w J(\bar{w}, \bar{u}), w \rangle_{V' \times V} \quad \forall w \in V, \quad (5.24)$$

$$\langle \nabla_u J(\bar{w}, \bar{u}) + B^*\bar{p}, u - \bar{u} \rangle_{U' \times U} \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}, \quad (5.25)$$

kde  $a^*(p, w) = \langle A^*p, w \rangle_{V' \times V} \quad \forall p, w \in V$ , viz dodatek 2.

**Poznámka 5.5** Pro řešení úlohy (5.4) je užitečná znalost gradientu cenového funkcionálu  $J$ . Zde můžeme s výhodou použít znalost adjungovaného stavu  $p$  určeného na základě (5.24). Odvození lze nalézt v dodatku 2, přičemž výsledné vztahy pro požadovaný gradient jsou (6.22) resp. (6.23).

## 6. Dodatek 2

# Adjungovaný problém

V tomto odstavci připomeneme pojem úlohy adjungované k dané okrajové úloze, jenž je důležitý pro teoretické úvahy stejně jako pro výpočty.

Jelikož výchozí formulace dané (např. stavové) úlohy je obvykle slabá nebo variační, ukážeme nejprve, jak ji lze vyjádřit jakožto operátorovou rovnici v duálním prostoru. K tomu účelu dokážeme následující tvrzení.

**Věta 6.1** *Nechť  $V$  je Banachův prostor. Nechť  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá a  $V$ -eliptická bilineární forma. Operátor  $A : V \rightarrow V'$  definovaný vztahem*

$$\langle Aw, v \rangle_{V' \times V} = a(w, v) \quad \forall w, v \in V \quad (6.1)$$

*je prostý spojitý lineární operátor z  $V$  do  $V'$ , tedy  $A \in \mathcal{L}(V, V')$ . Existuje k němu inverzní operátor  $A^{-1} : V' \rightarrow V$ , který je rovněž spojitý.*

*Důkaz:* S ohledem na předpoklady platí pro bilineární formu

$$a(w, v) \leq Q \|w\|_V \|v\|_V \quad \forall w, v \in V, \quad (6.2)$$

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V, \quad (6.3)$$

kde  $Q$  a  $\alpha$  jsou kladné konstanty.

Pro libovolné pevně zvolené  $w \in V$  je zobrazení  $a_w : v \mapsto a(w, v)$  lineární a spojitě na  $V$ , tj.  $a_w \in V'$ .

Zobrazení  $A : w \rightarrow a_w$  je rovněž lineární a spojitě, neboť z (6.2) plyne

$$\|Aw\|_{V'} = \sup_{\|v\|_V=1} |a_w(v)| = \sup_{\|v\|_V=1} |a(w, v)| \leq \sup_{\|v\|_V=1} Q \|w\|_V \|v\|_V = Q \|w\|_V. \quad (6.4)$$

Dále dle definice operátorové normy je

$$\|A\| = \sup_{\|w\|_V=1} \|Aw\|_{V'} \quad (6.5)$$

a to spolu s (6.4) implikuje  $\|A\| \leq Q$ , tj. operátor  $A$  je ohraničený. Odtud plyne jeho spojitost a tedy  $A \in \mathcal{L}(V, V')$ .

Konečně na základě předpokladů (6.2) a (6.3) z Lax-Milgramovy věty dostáváme, že rovnice

$$a(w, v) = \langle f, v \rangle_{V' \times V} \quad \forall v \in V \quad (6.6)$$

má pro každé  $f \in V'$  jediné řešení  $w \in V$ . Avšak s ohledem na (6.1) lze rovnici (6.6) uvažovat rovněž jako operátorovou rovnici

$$Aw = f \quad \text{ve } V'. \quad (6.7)$$

Z toho, že  $f \in V'$  volíme libovolně, pak plyne, že  $A$  je prosté zobrazení. Odtud máme existenci  $A^{-1} : f \rightarrow w$ . Jeho spojitost plyne z (6.7) a ze vztahu  $\|w\|_V \leq c \|f\|_{V'}$ .  $\square$

Pro danou bilineární formu  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  a lineární operátor  $B : U \rightarrow V'$  uvažujme lineární stavovou rovnici

$$a(w(u), v) = \langle f + Bu, v \rangle_{V' \times V} \quad \forall v \in V. \quad (6.8)$$

V souladu s právě dokázanou větou 6.1 lze vztahem (6.1) definovat lineární spojitý operátor  $A : V \rightarrow V'$  tak, že rovnici (6.8) odpovídá ve  $V'$  operátorová rovnice

$$Aw(u) = f + Bu. \quad (6.9)$$

Odtud opět s ohledem na větu 6.1 ihned dostáváme

$$w(u) = A^{-1}Bu + A^{-1}f, \quad (6.10)$$

tedy zobrazení  $u \mapsto w(u)$  je afinní. Z (6.10) pak dostáváme vyjádření pro derivaci  $w$  v bodě  $u$  ve směru  $\varphi$

$$w'(u, \varphi) = A^{-1}B\varphi \quad \forall \varphi \in V. \quad (6.11)$$

Odtud pak snadno plyne, že funkce  $w'(u, \varphi) \in V$  je řešením rovnice

$$a(w'(u, \varphi), v) = \langle B\varphi, v \rangle_{V' \times V} \quad \forall v \in V. \quad (6.12)$$

Označme nyní

$$I(u) \equiv J(w(u), u) \quad \forall u \in U_{ad} \quad (6.13)$$

a pokusme se analyzovat vlastnosti zobrazení  $u \mapsto I(u)$ . Za tím účelem předpokládejme, že funkcionál  $J$  je diferencovatelný na  $V \times U$  a že v bodě  $(w, u)$  existuje jeho gradient  $\nabla_w J(w, u) \in V'$  vzhledem k  $w$  a gradient  $\nabla_u J(w, u) \in U'$  vzhledem k  $u$ . V tom případě je  $I$  rovněž diferencovatelný na  $U$  a má gradient  $\nabla_u I(u) \in U'$  v bodě  $u$ . Navíc podle pravidla o derivování složených funkcí máme

$$\langle \nabla_u I(u), z \rangle_{U' \times U} = \langle \nabla_w J(w, u), w'(u, z) \rangle_{V' \times V} + \langle \nabla_u J(w, u), z \rangle_{U' \times U} \quad \forall z \in U. \quad (6.14)$$

V tomto vyjádření zřejmě bude dělat problém určit správně první člen na pravé straně kvůli  $w'(u, z)$ . Zde si pomůžeme následujícím způsobem: Nechť  $p = p(u) \in V$  je řešením rovnice

$$a^*(p, v) = \langle \nabla_w J(w, u), v \rangle_{V' \times V} \quad \forall v \in V, \quad (6.15)$$

kde bilineární forma  $a^*$  je definovaná vztahem

$$a^*(p, v) = a(v, p) \quad \forall p, v \in V. \quad (6.16)$$

**Definice 6.1** Rovnici (6.15) nazveme *adjungovaná rovnice* k rovnici (6.8), forma  $a^*(\cdot, \cdot)$  je *adjungovaná forma* k formě  $a(\cdot, \cdot)$  a příslušný operátor  $A^*$ , definovaný jako

$$\langle A^*w, v \rangle_{V' \times V} = a^*(w, v) \quad \forall w, v \in V, \quad (6.17)$$

se nazývá *adjungovaný operátor* k operátoru  $A$ .

S ohledem na definiční vztah (6.17) lze rovnici (6.15) přepsat v operátorovém tvaru takto

$$A^*p = \nabla_w J(w, u) \quad \text{ve } V'. \quad (6.18)$$

Nyní dosadíme v adjungované rovnici (6.15) za  $v$  funkci  $w'(u, z)$ . Obdržíme

$$a^*(p, w'(u, z)) = \langle \nabla_w J(w, u), w'(u, z) \rangle_{V' \times V}. \quad (6.19)$$

Použitím (6.16) a (6.12) pak dostaneme

$$a^*(p, w'(u, z)) = a(w'(u, z), p) = \langle Bz, p \rangle_{V' \times V}, \quad (6.20)$$

zatímco dle definice (6.17) bude operátor  $B^*$  adjungovaný k  $B$  splňovat

$$\langle Bz, p \rangle_{V' \times V} = \langle z, B^*p \rangle_{U \times U'} \quad \forall z \in U, p \in V. \quad (6.21)$$

Celkem tedy dostáváme

$$\langle \nabla_u I(u), z \rangle_{U' \times U} = \langle B^*p, z \rangle_{U' \times U} + \langle \nabla_u J(w, u), z \rangle_{U' \times U} \quad \forall z \in U, \quad (6.22)$$

nebo v operátorovém tvaru

$$\nabla_u I(u) = B^*p + \nabla_u J(w, u) \quad \text{v } U'. \quad (6.23)$$

Pomocí vyřešení adjungovaného problému (6.15) resp. (6.18) tedy dokážeme určit  $\nabla_u I(u)$  z (6.22) resp. z (6.23).

# 7. Dodatek 3

## Transformace

V této části se zaměříme na transformace variačních problémů, a to jednak zavedením nových proměnných (což bylo inspirované kapitolou 5 z knihy [18]) nebo pomocí transformace vertikálních zatížení. Podobné postupy zavedli ve svých článcích [45], [3] M. Sofonea a D. Tiba, zde budou prezentované v upraveném a obecnějším pojetí.

Transformace proměnných se navzájem liší podle počtu nových neznámých a podle počtu vztahů, které budou obsahovat, což pak využijeme k transformaci příslušného funkcionálu. Symboly  $f \rightarrow f$  nebo  $f \rightarrow g$  budou značit to, zda použijeme původní nebo transformované zatížení. V dalším budeme často využívat Greenovu formuli k tomu, abychom ukázali interpretaci integrálních vztahů. Používat ji budeme zcela formálně.

Ohledně funkcionálů lze uvažované problémy seřadit následovně:

1. Ohyb nosníku:  
funkcionál (1.50) na prostoru  $V_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ,  
výchozí úloha (1.52),  
transformovaný funkcionál označíme  $J_k$ , kde  $k$  je číslo transformace.
2. Kontakt nosníku s deformovatelným podložím:  
funkcionál (2.40) na prostoru  $V_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ,  
výchozí úloha (2.41),  
transformovaný funkcionál označíme  $\hat{J}_k$ , kde  $k$  je číslo transformace.

Poznamenejme, že funkcionály (1.50) a (2.40) se navzájem liší pouze o člen

$$\Pi_F(v) = \frac{1}{2} \int_0^L c_F((g-v)^+)^2 dx. \quad (7.1)$$

Abychom zachovali přiměřenou stručnost výkladu, zřejmě tedy postačí podrobnější odvození transformačních vztahů pro úlohu ohybu, tj. pro funkcionál (1.50) na vhodném prostoru. Pak uvedeme už jen doplnění pro funkcionál (2.40), který obsahuje navíc člen (7.1).

Rovněž použitá značení zde nejsou kvůli stručnosti explicitně popsána, lze je nalézt v kapitolách 1 a 2 nebo v seznamu na konci práce.

### 7.1 Transformace T1

$z$	$=$	$v'$
$f$	$\rightarrow$	$f$

## 1. Úloha ohybu nosníku

Tato transformace převádí funkcionál (1.50) na lagrangián, neboť vztah  $z = v'$  lze chápat jako vazbovou podmínku.

Tento lagrangián zde má tvar

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v, z, \lambda) = & \frac{1}{2} \int_0^L EI(v'')^2 dx + \frac{1}{12} \int_0^L E\alpha z^4 dx - \frac{1}{2} \int_0^L P\mu z^2 dx - \\ & - \int_0^L f v dx + \int_0^L \lambda(v' - z) dx, \quad v \in V, z \in Z, \lambda \in \Lambda, \end{aligned} \quad (7.2)$$

přičemž  $V$  je daný Sobolevův prostor,  $Z$  je prostor derivací funkcí z  $V$  a  $\Lambda = L^2((0, L))$ . Úloha (1.52) tím přechází na úlohu hledání stacionárního resp. sedlového bodu lagrangiánu (7.2)

$$\mathcal{L}(v, z, \lambda) \longrightarrow \underset{v, z, \lambda}{\text{stat}}. \quad (7.3)$$

Rovnice pro sedlový bod  $(w, \bar{z}, \bar{\lambda})$  získáme známým způsobem tak, že derivace podle jednotlivých proměnných položíme rovné nule. Pro lepší čitelnost zde ani v dalším textu nebudeme psát  $\bar{z}, \bar{\lambda}$ , ale jen  $z, \lambda$ .

$$\mathcal{L}'_v = 0 \Rightarrow \int_0^L EI w'' \varphi'' dx - \int_0^L f \varphi dx + \int_0^L \lambda \varphi' dx = 0 \quad \forall \varphi \in V, \quad (7.4)$$

$$\mathcal{L}'_z = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} \int_0^L E\alpha z^3 \varphi dx - \int_0^L P\mu z \varphi dx - \int_0^L \lambda \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in Z, \quad (7.5)$$

$$\mathcal{L}'_\lambda = 0 \Rightarrow \int_0^L (w' - z) \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in \Lambda. \quad (7.6)$$

Další postup je závislý na předepsaných okrajových podmínkách. Pro okrajové problémy (P1), (P2) a (P4) je  $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$ , takže máme

$$\int_0^L \lambda \varphi' dx = - \int_0^L \lambda' \varphi dx \quad \forall \varphi \in V. \quad (7.7)$$

Nyní definujme novou proměnnou  $u$  vztahem

$$\int_0^L u \varphi dx = \int_0^L \lambda' \varphi dx \quad \forall \varphi \in V. \quad (7.8)$$

Podmínky pro stacionární bod pak lze zapsat jako soustavu

$$EI w'''' = f + u, \quad (7.9)$$

$$u = \lambda', \quad (7.10)$$

$$\frac{1}{3} E\alpha z^3 - P\mu z = \lambda, \quad (7.11)$$

$$w' = z. \quad (7.12)$$

A konečně z (7.4) a z (7.8) můžeme získat rovnici

$$a(w, v) = (f, v) + (u, v) \quad \forall v \in V. \quad (7.13)$$



V případě okrajové úlohy (P3) máme jen  $\varphi(0) = 0$ , takže je

$$\int_0^L \lambda \varphi' dx = - \int_0^L \lambda' \varphi dx + \lambda(L) \varphi(L) \quad (7.14)$$

a z (7.4) pak obdržíme místo (7.13) rovnici

$$a(w, v) = (f + u, v) - \lambda(L) v(L) \quad \forall v \in V (= V_3). \quad (7.15)$$

U úlohy (P3) je proto nezbytné vztahy (7.9)-(7.12) doplnit o okrajovou podmínku

$$EI w'''(L) = \lambda(L). \quad (7.16)$$

Nechť  $\hat{w} \in V$  je řešením variační rovnice (7.13) pro  $u = 0$ , tj.

$$a(\hat{w}, v) = (f, v) \quad \forall v \in V. \quad (7.17)$$

Takové řešení existuje a je jediné. Pro funkcionál (1.45) pak s ohledem na (7.13) a (7.17) můžeme psát

$$\begin{aligned} \Pi_0(w) &= \frac{1}{2} a(w, w) - (f, w) \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{2} (u, w) - \frac{1}{2} (f, w) = \frac{1}{2} (u, w) - \frac{1}{2} a(\hat{w}, w) = \\ &= \frac{1}{2} (u, w) - \frac{1}{2} (f + u, \hat{w}) = \frac{1}{2} (u, w - \hat{w}) - \frac{1}{2} (f, \hat{w}). \end{aligned} \quad (7.18)$$

Nyní lze transformovat funkcionál (1.50). Pomocí (7.18) obdržíme

$$\begin{aligned} \Pi_G(w) &= \frac{1}{2} b(w, w) + \frac{1}{4} \pi(w, w) - (f, w) \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{2} (u, w - \hat{w}) + \frac{1}{4} \pi(w, w) - \frac{1}{2} d(w, w) - \frac{1}{2} (f, \hat{w}). \end{aligned} \quad (7.19)$$

Ještě vezmeme do úvahy, že poslední člen

$$\frac{1}{2} \int_0^L f \hat{w} dx$$

je konstantní a může být proto při minimalizaci vynechán. Tím získáme transformovaný tvar funkcionálu  $\Pi_G$  pro T1:

$$J_1(w, u) = \frac{1}{2} \int_0^L u(w - \hat{w}) dx + \frac{1}{12} \int_0^L E \alpha (w')^4 dx - \frac{1}{2} \int_0^L P \mu (w')^2 dx. \quad (7.20)$$

## 2. Kontakt nosníku s deformovatelným podložím

Nakonec provedeme transformaci funkcionálu (2.40). Postupovat budeme stejně, jako výše, tj. nejprve sestavíme lagrangeián, který bude mít oproti (7.2) navíc člen

(7.1). Pak sepíšeme vztahy pro sedlový bod

$$\int_0^L EI w'' \varphi'' dx - \int_0^L f \varphi dx - \quad (7.21)$$

$$- \int_0^L c_F (g - w)^+ \varphi dx + \int_0^L \lambda \varphi' dx = 0 \quad \forall \varphi \in V, \quad (7.22)$$

$$\frac{1}{3} \int_0^L E \alpha z^3 \varphi dx - \int_0^L P \mu z \varphi dx - \int_0^L \lambda \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in Z, \quad (7.23)$$

$$\int_0^L (w' - z) \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in \Lambda, \quad (7.24)$$

a definujeme novou proměnnou  $u$ , nyní jako

$$\int_0^L u \varphi dx = \int_0^L \lambda' \varphi dx + \int_0^L c_F (g - w)^+ \varphi dx \quad \forall \varphi \in V. \quad (7.25)$$

Soustavu rovnic pro stacionární bod pak lze zapsat obdobně, jako výše:

$$EI w'''' = f + u, \quad (7.26)$$

$$u = \lambda' + c_F (g - w)^+, \quad (7.27)$$

$$\frac{1}{3} E \alpha z^3 - P \mu z = \lambda, \quad (7.28)$$

$$w' = z, \quad (7.29)$$

přičemž v případě úlohy (P3) zde stejně jako výše přidáme okrajovou podmínku (7.16). Stavová rovnice má pak formálně stejný tvar jako výše, tj. (7.15).

Jelikož rovnice (7.9) a (7.26) v sedlo-bodových soustavách jsou formálně shodné, proběhne transformace funkcionálu (2.40) stejně, jako tomu bylo výše u funkcionálu (1.50). Výsledkem je tudíž funkcionál

$$\begin{aligned} \hat{J}_1(w, u) &= \frac{1}{2} \int_0^L u(w - \hat{w}) dx + \frac{1}{12} \int_0^L E \alpha (w')^4 dx - \frac{1}{2} \int_0^L P \mu (w')^2 dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L c_F ((g - w)^+)^2 dx, \end{aligned} \quad (7.30)$$

kde funkce  $\hat{w}$  je řešením rovnice (7.17).

## 7.2 Transformace T2

$z$	$=$	$v'$
$z'$	$=$	$v''$
$f$	$\rightarrow$	$g$

### 1. Úloha ohybu nosníku

Tato transformace používá jednu novou proměnnou  $z$ , ale využívá i odvozený vztah pro  $z'$ .

Nejprve definujeme transformovanou funkci zatížení  $g$ . Necht'  $f \in L^2((0, L))$  je funkce z funkcionálu (1.50). Necht'  $g \in L^2((0, L))$  je funkce taková, že platí

$$\int_0^L gv' dx = \int_0^L f v dx \quad \forall v \in V, \quad (7.31)$$

přičemž  $V$  je daný prostor testovacích funkcí. Za předpokladu, že  $g \in H^1((0, L))$ , lze ji definovat vztahem

$$\int_0^L g'v dx = - \int_0^L f v dx \quad \forall v \in V. \quad (7.32)$$

Odtud plyne, že musí platit

$$g(L)v(L) = 0 \quad \forall v \in V, \quad (7.33)$$

když jsme opět uvážili to, že vždy máme  $v(0) = 0$ . Při volbě problému (P3) odtud plyne podmínka

$$g(L) = 0. \quad (7.34)$$

Transformací T2 převedeme funkcionál (1.50) za pomoci (7.31) na lagrangián

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v, z, \lambda) = & \frac{1}{2} \int_0^L EI(z')^2 dx + \frac{1}{12} \int_0^L E\alpha z^4 dx - \frac{1}{2} \int_0^L P\mu z^2 dx - \\ & - \int_0^L gz dx + \int_0^L \lambda_1(v' - z) dx + \int_0^L \lambda_2(v'' - z') dx, \\ & v \in V, z \in Z, \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda, \end{aligned} \quad (7.35)$$

a budeme hledat jeho sedlový bod. Rovnice pro sedlový bod jsou následující

$$\mathcal{L}'_v = 0 \Rightarrow \int_0^L \lambda_1 \varphi' dx + \int_0^L \lambda_2 \varphi'' dx = 0 \quad \forall \varphi \in V, \quad (7.36)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_z = 0 \Rightarrow & \int_0^L EI z' \varphi' dx + \frac{1}{3} \int_0^L E\alpha z^3 \varphi dx - \int_0^L P\mu z \varphi dx - \\ & - \int_0^L g \varphi dx - \int_0^L \lambda_1 \varphi dx - \int_0^L \lambda_2 \varphi' dx = 0 \quad \forall \varphi \in Z, \end{aligned} \quad (7.37)$$

$$\mathcal{L}'_{\lambda_1} = 0 \Rightarrow \int_0^L (w' - z) \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in \Lambda, \quad (7.38)$$

$$\mathcal{L}'_{\lambda_2} = 0 \Rightarrow \int_0^L (w'' - z') \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in \Lambda. \quad (7.39)$$

Nyní položíme

$$\lambda = \lambda_1 - \lambda_2' \quad (7.40)$$

a pomocí obdobné argumentace jako u transformace T1 dojdeme k soustavě

$$\lambda' = 0, \quad (7.41)$$

$$-EI z'' - P\mu z + \frac{1}{3} E\alpha z^3 = g + \lambda, \quad (7.42)$$

$$w' = z, \quad (7.43)$$

$$w'' = z', \quad (7.44)$$

přičemž v případě úlohy (P3) zde z integrace per partes navíc získáme okrajovou podmínku

$$\lambda(L) = 0. \quad (7.45)$$

Zajímavý výsledek zde představuje (7.37) resp. (7.42), což přepíšeme jako diferenciální rovnici

$$-EIz'' - P\mu z + \frac{1}{3}E\alpha z^3 = \tilde{g}. \quad (7.46)$$

Toto je varianta tzv. *Ginzburg–Landauovy rovnice supravodivosti* v 1D (v reálném oboru a stacionární), která hraje významnou roli v nauce o materiálech, zejména feroelektrických a feromagnetických, viz např. [52], fyzikální výklad viz [38].

Zavedeme novou proměnnou  $u$  vztahem

$$\int_0^L u\varphi dx = \int_0^L \lambda\varphi dx + \int_0^L P\mu z\varphi dx - \frac{1}{3}\int_0^L E\alpha z^3\varphi dx \quad \forall \varphi \in Z. \quad (7.47)$$

Sedlo-bodová soustava rovnic pak přejde na následující tvar

$$\lambda' = 0, \quad (7.48)$$

$$-EIz'' = g + u, \quad (7.49)$$

$$\frac{1}{3}E\alpha z^3 - P\mu z = \lambda - u, \quad (7.50)$$

$$w' = z, \quad (7.51)$$

$$w'' = z', \quad (7.52)$$

což pro případ úlohy (P3) doplníme okrajovou podmínkou (7.45).

Navíc, pomocí vztahů (7.37) a (7.47) získáme variační rovnici

$$e(z, v) = (g, v) + (u, v) \quad \forall v \in Z. \quad (7.53)$$

A stejně jako u předcházejících transformací, budeme definovat nový funkcionál. Nejprve označme  $\hat{z} \in Z$  řešení rovnice (7.53) pro  $u = 0$

$$e(\hat{z}, v) = (g, v) \quad \forall v \in Z. \quad (7.54)$$

Evidentně takové řešení existuje a je jediné. Pro funkcionál (1.45) pak s ohledem na (7.31), (7.49), (7.51), (7.53) a (7.54) můžeme psát

$$\begin{aligned} \Pi_0(w) &= \frac{1}{2}a(w, w) - (f, w) \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{2}e(z, z) - (g, z) = \frac{1}{2}(u, z) - \frac{1}{2}(g, z) = \\ &= \frac{1}{2}(u, z) - \frac{1}{2}(\hat{z}, z) = \frac{1}{2}(u, z) - \frac{1}{2}(g + u, \hat{z}) = \\ &= \frac{1}{2}(u, z - \hat{z}) - \frac{1}{2}(g, \hat{z}) = \frac{1}{2}(u, w' - \hat{w}') - \frac{1}{2}(g, \hat{w}'), \end{aligned} \quad (7.55)$$

přičemž  $\hat{w}' = \hat{z}$ . Nyní upravíme funkcionál (1.50) pomocí (7.55). Jelikož člen

$$\frac{1}{2}\int_0^L g\hat{w}' dx$$

je konstantní, můžeme ho při minimalizaci vypustit. Tak získáme transformovaný funkcionál

$$\begin{aligned} J_2(w, u) &= \frac{1}{2} (u, w' - \widehat{w}') + \frac{1}{4} \pi(w, w) - \frac{1}{2} d(w, w) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L u(w' - \widehat{w}') dx + \frac{1}{12} \int_0^L E\alpha(w')^4 dx - \frac{1}{2} \int_0^L P\mu(w')^2 dx. \end{aligned} \quad (7.56)$$

## 2. Kontakt nosníku s deformovatelným podložím

Nakonec provedeme transformaci funkcionálu (2.40) s tím, že postupovat budeme stejně, jako výše, tj. nejprve sestavíme lagrangián, který bude mít oproti původnímu (7.35) navíc člen (7.1). Potom odvodíme vztahy pro sedlový bod, kterými jsou

$$- \int_0^L c_F(g - w)^+ \varphi dx + \int_0^L \lambda_1 \varphi' dx + \int_0^L \lambda_2 \varphi'' dx = 0 \quad \forall \varphi \in V, \quad (7.57)$$

$$\begin{aligned} \int_0^L EI z' \varphi' dx + \frac{1}{3} \int_0^L E\alpha z^3 \varphi dx - \int_0^L P\mu z \varphi dx - \\ - \int_0^L g \varphi dx - \int_0^L \lambda_1 \varphi dx - \int_0^L \lambda_2 \varphi' dx = 0 \quad \forall \varphi \in Z, \end{aligned} \quad (7.58)$$

$$\int_0^L (w' - z) \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in \Lambda, \quad (7.59)$$

$$\int_0^L (w'' - z') \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in \Lambda. \quad (7.60)$$

Stejně, jako výše budeme definovat veličinu  $\lambda$  vztahem (7.40) a novou proměnnou  $u$  vztahem (7.47). Pak lze sedlo-bodovou soustavu převést na následující tvar

$$\lambda' = -c_F(g - w)^+, \quad (7.61)$$

$$-EI z'' = g + u, \quad (7.62)$$

$$\frac{1}{3} E\alpha z^3 - P\mu z = \lambda - u, \quad (7.63)$$

$$w' = z, \quad (7.64)$$

$$w'' = z', \quad (7.65)$$

k čemuž opět v případě úlohy (P3) přistoupí podmínka (7.45).

Vzhledem k tomu, že rovnice (7.49) a (7.62) jsou stejné, postup transformace funkcionálu (2.40) bude prakticky shodný s postupem transformace funkcionálu (1.50), takže nakonec dostaneme

$$\begin{aligned} \widehat{J}_2(w, u) &= \frac{1}{2} \int_0^L u(w' - \widehat{w}') dx + \frac{1}{12} \int_0^L E\alpha(w')^4 dx - \frac{1}{2} \int_0^L P\mu(w')^2 dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L c_F((g - w)^+)^2 dx. \end{aligned} \quad (7.66)$$

## 7.3 Transformace T3

$z$	$=$	$v'$
$y$	$=$	$v''$
$f$	$\rightarrow$	$g$

### 1. Úloha ohybu nosníku

Nejprve definujme transformovanou funkci zatížení  $g$  (avšak jinak než u předchozí transformace). Uvažujme proto funkci  $f \in L^2((0, L))$  z funkcionálu (1.50) a necht'  $g \in L^2((0, L))$  je funkce taková, že platí

$$\int_0^L g v'' dx = - \int_0^L f v dx \quad \forall v \in V, \quad (7.67)$$

přičemž  $V$  je daný prostor testovacích funkcí. Pokud budeme předpokládat, že funkce  $g$  leží v prostoru  $H^2((0, L))$ , přirozenou volbou je definovat ji vztahem

$$- \int_0^L g' v dx = \int_0^L f v dx \quad \forall v \in V. \quad (7.68)$$

Odtud použitím integrace per partes pak plyne, že musí platit

$$(g v')(0) - (g v')(L) + (g' v)(L) = 0 \quad \forall v \in V, \quad (7.69)$$

přičemž jsme vzali ohled na to, že pro všechny uvažované okrajové problémy (P1) až (P4) je vždy  $v(0) = 0$ . V závislosti na konkrétní volbě problému a tedy i prostoru  $V$  je pak třeba k těmto podmínkám při použití transformace T3 přihlídnout.

Touto transformací převedeme funkcionál (1.50) za pomoci (7.67) na lagrangián

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v, z, y, \lambda) = & \frac{1}{2} \int_0^L EI y^2 dx + \frac{1}{12} \int_0^L E \alpha z^4 dx - \frac{1}{2} \int_0^L P \mu z^2 dx + \\ & + \int_0^L g y dx + \int_0^L \lambda_1 (v' - z) dx + \int_0^L \lambda_2 (v'' - y) dx, \\ & v \in V, z \in Z, y \in Y, \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda, \end{aligned} \quad (7.70)$$

a budeme hledat jeho sedlový bod. Značení je stejné jako výše,  $Y$  značí prostor druhých derivací funkcí z  $V$ .

Soustava rovnic pro sedlový bod má v tomto případě tvar

$$\mathcal{L}'_v = 0 \Rightarrow \int_0^L \lambda_1 \varphi' dx + \int_0^L \lambda_2 \varphi'' dx = 0 \quad \forall \varphi \in V, \quad (7.71)$$

$$\mathcal{L}'_z = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} \int_0^L E \alpha z^3 \varphi dx - \int_0^L P \mu z \varphi dx - \int_0^L \lambda_1 \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in Z, \quad (7.72)$$

$$\mathcal{L}'_y = 0 \Rightarrow \int_0^L EI y \varphi dx + \int_0^L g \varphi dx - \int_0^L \lambda_2 \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in Y, \quad (7.73)$$

$$\mathcal{L}'_{\lambda_1} = 0 \Rightarrow \int_0^L (v' - z) \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in \Lambda, \quad (7.74)$$

$$\mathcal{L}'_{\lambda_2} = 0 \Rightarrow \int_0^L (v'' - y) \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in \Lambda. \quad (7.75)$$

Definujme proměnnou  $u$  vztahem

$$\int_0^L u \varphi dx = - \int_0^L \lambda_2 \varphi dx \quad \forall \varphi \in Y. \quad (7.76)$$

Pokud budeme předpokládat, že

$$(\lambda_1 \varphi)(L) = 0 \quad \forall \varphi \in V, \quad (7.77)$$

$$- (\lambda_2' \varphi)(L) + (\lambda_2 \varphi')(L) - (\lambda_2 \varphi')(0) = 0 \quad \forall \varphi \in V, \quad (7.78)$$

můžeme pak odsud získat tyto rovnice

$$-u'' = \lambda_1', \quad (7.79)$$

$$\frac{1}{3} E \alpha z^3 - P \mu z = \lambda_1, \quad (7.80)$$

$$-EI w'' = g + u, \quad (7.81)$$

$$w' = z, \quad (7.82)$$

když jsme dosadili v třetí rovnici z poslední rovnice  $y = w''$ , protože jinde proměnná  $y$  již nevystupuje.

Nakonec definujme bilineární formu  $e(.,.)$  vztahem (1.84). Pak odsud a z (7.81) získáme rovnici

$$e(w, v) = (g, v) + (u, v) \quad \forall v \in V. \quad (7.83)$$

Podobně jako u předchozí transformace upravíme tvar funkcionálu (1.45) pomocí (7.67), (7.73) a (7.76).

$$\begin{aligned} \Pi_0(w) &= \frac{1}{2} a(w, w) - (f, w) \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{2} a(w, w) + (g, w'') = \frac{1}{2} (EI w'' + g, w'') + \frac{1}{2} (g, w'') = \\ &= \frac{1}{2} (g - u, w'') = -\frac{1}{2} \frac{1}{EI} (g - u, g + u) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{EI} (u, u) - \frac{1}{2} \frac{1}{EI} (g, g). \end{aligned} \quad (7.84)$$

Pomocí (7.84) lze přikročit k transformaci funkcionálu (1.50). Máme

$$\begin{aligned} \Pi_G(w) &= \frac{1}{2} b(w, w) + \frac{1}{4} \pi(w, w) - (f, w) \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{EI} (u, u) + \frac{1}{4} \pi(w, w) - \frac{1}{2} d(w, w) - \frac{1}{2} \frac{1}{EI} (g, g). \end{aligned} \quad (7.85)$$

S ohledem na to, že poslední člen

$$\frac{1}{2} \int_0^L \frac{1}{EI} g^2 dx$$

je konstantní, můžeme ho při minimalizaci vypustit. Získáme transformovaný funkcionál tvaru

$$\begin{aligned} J_3(w, u) &= \frac{1}{2} \frac{1}{EI} (u, u) + \frac{1}{4} \pi(w, w) - \frac{1}{2} d(w, w) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \frac{1}{EI} u^2 dx + \frac{1}{12} \int_0^L E \alpha (w')^4 dx - \frac{1}{2} \int_0^L P \mu (w')^2 dx. \end{aligned} \quad (7.86)$$

## 2. Kontakt nosníku s deformovatelným podložím

Nakonec provedeme transformaci funkcionálu (2.40). Postupovat budeme opět tak, že nejprve sestavíme lagrangián, který bude mít oproti (7.70) navíc člen (7.1) a poté odvodíme vztahy pro sedlový bod

$$-\int_0^L c_F(g-w)^+\varphi dx + \int_0^L \lambda_1\varphi' dx + \int_0^L \lambda_2\varphi'' dx = 0 \quad \forall \varphi \in V, \quad (7.87)$$

$$\frac{1}{3}\int_0^L E\alpha z^3\varphi dx - \int_0^L P\mu z\varphi dx - \int_0^L \lambda_1\varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in Z, \quad (7.88)$$

$$\int_0^L EIy\varphi dx + \int_0^L g\varphi dx - \int_0^L \lambda_2\varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in Y, \quad (7.89)$$

$$\int_0^L (w' - z)\varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in \Lambda, \quad (7.90)$$

$$\int_0^L (w'' - y)\varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in \Lambda. \quad (7.91)$$

Pak definujeme novou proměnnou  $u$  vztahem

$$\int_0^L u\varphi dx = -\int_0^L \lambda_2\varphi dx \quad \forall \varphi \in Y \quad (7.92)$$

a při splnění podmínek (7.77) a (7.78) následně získáme soustavu rovnic

$$-u'' = \lambda_1' + c_F(g-w)^+, \quad (7.93)$$

$$\frac{1}{3}E\alpha z^3 - P\mu z = \lambda_1, \quad (7.94)$$

$$-EIw'' = g + u, \quad (7.95)$$

$$w' = z. \quad (7.96)$$

S ohledem na to, že rovnice (7.81) a (7.95) jsou shodné, lze použít postup transformace funkcionálu (1.50) i u funkcionálu (2.40), takže obdržíme

$$\begin{aligned} \widehat{J}_3(w, u) = & \frac{1}{2}\int_0^L \frac{1}{EI} u^2 dx + \frac{1}{12}\int_0^L E\alpha (w')^4 dx - \frac{1}{2}\int_0^L P\mu (w')^2 dx + \\ & + \frac{1}{2}\int_0^L c_F((g-w)^+)^2 dx. \end{aligned} \quad (7.97)$$



# Seznam použité literatury

- [1] ADAMS, R.A.: *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [2] ARNAUTU, V., LANGMACH, H., SPREKELS, J., TIBA, D.: On the approximation and the optimization of plates. *Numer. Funct. Anal. Optim.* 21, pp. 337–354, 2000.
- [3] BARBOTEU, M., SOFONEA, M., TIBA, D.: The control variational method for beams in contact with deformable obstacles. *Z. Angew. Math. Mech.*, 92 (1), pp. 25–40, 2012.
- [4] CEA, J.: *Lectures on Optimization - Theory and Algorithms*. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics 53. Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- [5] CIARLET, P.G.: *Introduction to Numerical Linear Algebra and Optimisation*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [6] EKELAND, I., TÉMAM, R.: *Convex Analysis and Variational Problems*. SIAM, Philadelphia, 1999.
- [7] FUČÍK, S., KUFNER, A.: *Nelineární diferenciální rovnice*. SNTL, Praha, 1978.
- [8] GAO, D.Y.: Nonlinear elastic beam theory with application in contact problems and variational approaches. *Mechanics Research Communications*, 23 (1), pp. 11–17, 1996.
- [9] GAO, D.Y.: Finite deformation beam models and triality theory in dynamical post-buckling analysis. *Int. J. of Non-Linear Mechanics*, 35, pp. 103–121, 2000.
- [10] GAO, D.Y., MACHALOVÁ, J., NETUKA, H.: Mixed finite element solutions to contact problems of nonlinear Gao beam on elastic foundation. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 22, pp. 537–550, 2015.
- [11] GAO, D.Y., OGDEN, R.W.: Closed-form solutions, extremality and nonsmoothness criteria in a large deformation elasticity problem. *ZAMM* 59 (3), pp. 498–517, 2008.
- [12] GAO, D.Y., RUSSELL, D.L.: An extended beam theory for smart materials applications. Part II. Static formation problems. *Appl. Math. Optim.*, 38, pp. 69–94, 1998.
- [13] GLOWINSKI, R., LIONS, J.-L., TRÉMOLIÈRES, R.: *Numerical Analysis of Variational Inequalities*. North-Holland, Amsterdam, 1981.
- [14] HETENYI, M.: *Beams on elastic foundation: Theory with Applications in the Fields of Civil and Mechanical Engineering*. University of Michigan Press, Michigan, 1971.

- [15] HLAVÁČEK, I., HASLINGER, J., NEČAS, J., LOVÍŠEK, J.: *Solution of Variational Inequalities in Mechanics*. Springer Series in Applied Mathematical Sciences 66. Springer-Verlag, 1988.
- [16] KIKUCHI, N., ODEN, J.T.: *Contact Problems in Elasticity. Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*. SIAM, Philadelphia, 1988.
- [17] KLARBRING, A., MIKELIĆ, A., SHILLOR, M.: Frictional contact problems with normal compliance. *Int. Journal of Engineering Science*, 26, pp. 811–832, 1988.
- [18] KRAVCHUK, A.S., NEITTAANMÄKI, P.J.: *Variational and Quasi-Variational Inequalities in Mechanics*. Solid Mechanics and Its Applications (Book 147). Springer, 2007.
- [19] KRÍŽEK, M., NEITTAANMÄKI, P.J.: *Finite Element Approximation of Variational Problems and Applications*. Longman, New York, 1990.
- [20] KUROŠ, A.G.: *Kurs vyššej algebry*. 9. vydání. Nauka, Moskva, 1968.
- [21] LIONS, J.-L.: *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [22] LIONS, J.-L.: *Some Aspects of the Optimal Control of Distributed Parameter Systems*. SIAM, Philadelphia, 1972.
- [23] MACHALOVÁ, J., NETUKA, H.: A new Approach to the Problem of an Elastic Beam Resting on a Foundation. In: *Beams and Frames on Elastic Foundation 3* (editors K. Frydrýšek, M. Nikodým). VŠB – Technical University of Ostrava, Ostrava, pp. A99–A113, 2010.
- [24] MACHALOVÁ, J., NETUKA, H.: Bending of a nonlinear beam reposing on an unilateral foundation. *Applied and Computational Mechanics*, Vol. 5, No. 1, pp. 45–54, 2011.
- [25] MACHALOVÁ, J., NETUKA, H.: Solving the beam bending problem with an unilateral Winkler foundation. In: *Numerical Analysis and Applied Mathematics ICNAAM 2011* (editors T. E. Simos, G. Psihoyios, C. Tsitouras, Z. Anastassi). AIP Conference Proceedings, Vol. 1389, pp. 1820–1824, AIP-Press, Springer, 2011.
- [26] MACHALOVÁ, J., NETUKA, H.: *Nelineární programování: Teorie a metody*. Skripta PřF UP, Olomouc, 2013.
- [27] MACHALOVÁ, J., NETUKA, H.: *Variační metody*. Skripta PřF UP, Olomouc, 2014.
- [28] MACHALOVÁ, J., NETUKA, H.: *Metoda konečných prvků*. Skripta PřF UP, Olomouc, 2015.
- [29] MACHALOVÁ, J., NETUKA, H.: Solution of Contact Problems for Nonlinear Gao Beam and Obstacle. *Journal of Applied Mathematics*, Vol. 2015, Article ID 420649, 12 pages, 2015.  
<http://dx.doi.org/10.1155/2015/420649>.

- [30] MACHALOVÁ, J., NETUKA, H.: Solution of Contact Problems for Gao Beam and Elastic Foundation. *Mathematics and Mechanics of Solids*, Special Issue on Inequality Problems In Contact Mechanics, Vol. 23, Issue 3, pp. 473–488, 2018. First published on October 14, 2017 as doi: 10.1177/1081286517732382.
- [31] MACHALOVÁ, J., NETUKA, H.: Control variational method approach to bending and contact problems for Gao beam. *Applications of Mathematics*, Vol. 62, No. 6, pp. 661–677, 2017. First published on November 30, 2017 as doi: 10.21136/AM.2017.0168-17.
- [32] MACHALOVÁ, J., NETUKA, H., ŠIMEČEK, R.: Shape optimization of a Timoshenko beam together with an elastic foundation. *Applied and Computational Mechanics*, Vol. 4, No. 2, pp. 179–190, 2010.
- [33] NANIEWICZ, Z., PANAGIOTOPOULOS, P.D.: *Mathematical Theory of Hemivariational Inequalities and Applications*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics 188. Marcel Dekker, Inc., New York, 1995.
- [34] NEČAS, J., HLAVÁČEK, I.: *Úvod do matematické teorie pružných a pružně plastických těles*. SNTL, Praha, 1983.
- [35] NEITTAANMÄKI, P., SPREKELS, J., TIBA, D.: *Optimization of elliptic systems. Theory and applications*. Springer, New-York, 2006.
- [36] NETUKA, H., MACHALOVÁ, J.: Solution of contact problems for nonlinear beam and foundation. *Proceedings of the conference SNA'17*, Ostrava, January 30 - February 3, 2017, (editors R. Blaheta, J. Starý, D. Sysalová), pp. 76–79, Institute of Geonics of the CAS, 2017.
- [37] NOCEDAL, J., WRIGHT, S.J.: *Numerical optimization*. Second edition. Springer-Verlag, New York, 2006.
- [38] ODEHNAL, M.: *Supravodivost a jiné kvantové jevy*. Academia, Praha, 1992.
- [39] ODEN, J.T., MARTINS, J.A.C.: Models and computational methods for dynamic friction phenomena. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 52, pp. 527–634, 1985.
- [40] REDDY, J.N.: *An introduction to nonlinear finite element analysis*. Oxford University Press, Oxford, 2004.
- [41] REDDY, J.N.: *An Introduction to the Finite Element Method*. Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 2006.
- [42] REKTORYS, K.: *Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky*. 6. vydání, 2. české (opravené). Academia, Praha, 1999.
- [43] SHILLOR, M., SOFONEA, M., TELEGA, J.J.: *Models and Analysis of Quasistatic Contact: Variational Methods*. Springer-Verlag, 2004.
- [44] SOFONEA, M., MATEI, A.: *Mathematical Models in Contact Mechanics*. London Mathematical Society, LNS 398. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012.

- [45] SOFONEA, M., TIBA, D.: The control variational method for contact of Euler-Bernoulli beams. *Bull. Transilvania Univ. Brasov, Ser. III, Math. Inf. Phys.* 2, pp. 127–136, 2009.
- [46] SOFONEA, M., TIBA, D.: The control variational method for elastic contact problems. *Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl.*, 2(1), pp. 99–122, 2010.
- [47] ŠOLÍN, P.: *Partial Differential Equations and the Finite Element Method*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. John Wiley & Sons, 2006.
- [48] SPREKELS, J., TIBA, D.: Control variational methods for differential equations. In: *Optimal control of complex structures* (editors K.-H. Hoffmann, I. Lasiecka, G. Leugering, J. Sprekels, F. Tröltzsch), ISNM 139. Birkhäuser, Basel, pp. 245–257, 2001.
- [49] SPREKELS, J., TIBA, D.: The control variational approach for differential systems. *SIAM J. Control Optim.* 47, nr. 6, pp. 3220–3236, 2009.
- [50] SPREKELS, J., TIBA, D.: Extensions of the control variational method. *Control and Cybernetics*, vol. 40, nr. 4, pp. 1099–1108, 2011.
- [51] TIBA, D.: Optimal control methods and the variational approach to differential equations. In: *Lecture Notes in Engineering and Computer Science: Proceedings of IMECS 2013* (editors S.I. Ao, O. Castillo, D. Craig, D.D. Feng, J.-A. Lee). Newswood Limited, Hong Kong, pp. 127–132, 2013.
- [52] TRÖLTZSCH, F.: *Optimal Control of Partial Differential Equations. Theory, Methods and Applications*. AMS, Providence, Rhode Island, 2010.
- [53] WASHIZU, K.: *Variational methods in elasticity and plasticity*. Second edition. Pergamon Press, New York, 1975.

# Seznam některých značení

Bilineární formy:

$$a(w, v) = \int_0^L EI w'' v'' dx$$

$$b(w, v) = a(w, v) - d(w, v)$$

$$d(w, v) = \int_0^L P\mu w' v' dx$$

$$e(w, v) = \int_0^L EI w' v' dx$$

$$\pi(w, v) = \frac{1}{3} \int_0^L E\alpha (w')^3 v' dx$$

$$\kappa_E(w, v) = \int_0^L k_F (g - w)^+ v dx$$

$$\kappa(w, v) = \int_0^L c_F (g - w)^+ v dx$$

Funkcionály:

$$\Pi_{EB}(v) = \frac{1}{2} \int_0^L EI (v'')^2 dx - \int_0^L qv dx$$

$$\Pi_{EF}(v) = \frac{1}{2} \int_0^L k_F ((g - v)^+)^2 dx$$

$$\Pi_{ET}(v) = \Pi_{EB}(v) + \Pi_{EF}(v)$$

$$\Pi_0(v) = \frac{1}{2} \int_0^L EI (v'')^2 dx - \int_0^L fv dx$$

$$\Pi_N(v) = \frac{1}{12} \int_0^L E\alpha (v')^4 dx$$

$$\Pi_P(v) = -\frac{1}{2} \int_0^L P\mu (v')^2 dx$$

$$\Pi_F(v) = \frac{1}{2} \int_0^L c_F ((g - v)^+)^2 dx$$

$$\Pi_G(v) = \Pi_0(v) + \Pi_N(v) + \Pi_P(v)$$

$$\Pi_T(v) = \Pi_0(v) + \Pi_N(v) + \Pi_P(v) + \Pi_F(v)$$

Prostory funkcí:

$$V_1 = \{v \in H^2((0, L)) : v(0) = v'(0) = 0, v(L) = v'(L) = 0\}$$

$$V_2 = \{v \in H^2((0, L)) : v(0) = v'(0) = 0, v(L) = 0\}$$

$$V_3 = \{v \in H^2((0, L)) : v(0) = v'(0) = 0\}$$

$$V_4 = \{v \in H^2((0, L)) : v(0) = 0, v(L) = 0\}$$