Navazující magisterské studium – MATEMATIKA 2021 (18. května)

Příjmení a jméno:

V následujících deseti problémech je z nabízených odpovědí vždy právě jedna správná. Zakroužkujte ji! Za každou správnou odpověď získáte uvedené body. Za nesprávnou odpověď se odečítá čtvrtina uvedené hodnoty.

---

1. K matici A existuje inverzní matice právě tehdy, když je:

a) obdélníková **b)** singulární **c)** čtvercová **d)** **regulární** **e)** nulová

(4 body)

---

2. Pro vektory $\vec{u} = (3, 4, -5)$ a $\vec{v} = (-3, -4, -5)$ platí:

a) jsou lineárně závislé **b)** jsou opačné **c)** jsou stejné **d)** **mají stejnou velikost** **e)** nejsou kolmé

(6 bodů)

---

3. Vektorovým součinem vektorů $\vec{u} = (1, 1, 0)$ a $\vec{v} = (3, 0, -2)$ (v tomto pořadí) je:

a) $(2, -2, 3)$ **b)** 3 **c)** $(-2, -2, -3)$ **d)** $(3, 0, 0)$ **e)** $(-2, 2, -3)$

(6 bodů)

---

4. Přímky

$$p \equiv \begin{cases} x = -2 + 4t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = -1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}; \qquad q \equiv \begin{cases} x = 2 + 4s, \\ y = 1 + 2s, \\ z = -1 \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

jsou:

a) různoběžné **b)** totožné **c)** rovnoběžné různé **d)** mimoběžné **e)** kolmé

(6 bodů)

---

5. Je-li $f(x, y) = \mathrm{e}^{y+x} \operatorname{tg} x$, pak:

a) $f''_{yy}(x, y) = \mathrm{e}^{1+x} \operatorname{tg} x$ **b)** $f''_{yy}(x, y) = \mathrm{e}^{y+x} \operatorname{tg} x$ **c)** $f''_{yy}(x, y) = \mathrm{e} \operatorname{tg} x$ **d)** $f''_{yy}(x, y) = \dfrac{\mathrm{e}^{x+y}}{\cos^2 x}$
e) $f''_{yy}(x, y) = \mathrm{e}^{y} \operatorname{tg} x$

(6 bodů)

---

6. Bod x_0 je stacionárním bodem funkce f a $f''(x_0) > 0$. Pak má funkce f v bodě x_0:

a) **ostré lokální minimum** **b)** lokální maximum **c)** inflexní bod **d)** globální minimum **e)** bod vratu

(6 bodů)

---

7. Jestliže $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$, pak lze tvrdit, že:

a) funkce f je na intervalu $\langle a, b \rangle$ ohraničená
b) funkce f je na intervalu $\langle a, b \rangle$ kladná
c) funkce f je na intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitá
d) funkce f je na intervalu $\langle a, b \rangle$ nezáporná
e) **žádná z předchozích odpovědí není správná**

(6 bodů)

---

8. Množina bodů daná parametrickým vyjádřením

$$\begin{cases} x = 1 + 3\cos t, \\ y = -1 + 3\sin t, \end{cases} \qquad t \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$$

je:

a) kružnice se středem v bodě $[1, -1]$ a poloměrem 3
b) čtvrtkruh se středem v bodě $[1, -1]$ a poloměrem 3
c) **půlkružnice se středem v bodě $[1, -1]$ a poloměrem 3**
d) kruh se středem v bodě $[1, -1]$ a poloměrem 3
e) půlkruh se středem v bodě $[1, -1]$ a poloměrem 3

(6 bodů)

---

9. Je-li $\Gamma = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = x,\ x \in \langle 0, 1 \rangle\}$, pak hodnota integrálu $\int_\Gamma 1\mathrm{d}s$ je rovna:

a) 1 **b)** 0 **c)** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **d)** $(1, 1)$ **e)** $\sqrt{2}$

(6 bodů)

---

10. Je-li $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : x^2+y^2 \le 4,\ y \ge 0\}$, po transformaci integrálu $\iint\limits_M x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ do polárních souřadnic dostaneme:

a) $\int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^\pi \varrho^2\cos\varphi \mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\varrho$ **b)** $\int\limits_0^\pi \left(\int\limits_0^2 \varrho^2\cos\varphi \mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\varrho$ **c)** $\int\limits_0^\pi \left(\int\limits_0^4 \varrho^2\sin\varphi \mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\varphi$ **d)** $\int\limits_0^\pi \left(\int\limits_0^2 \varrho \mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\varphi$

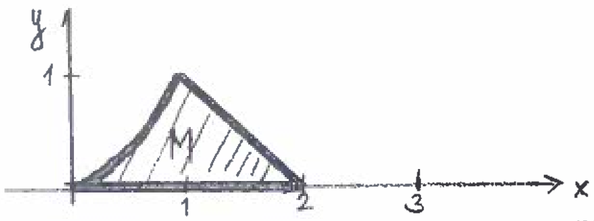
e) $\int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^\pi \varrho^2\sin\varphi \mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\varrho$

(8 bodů)

Řešte následující úlohy. Za zcela správně vyřešenou úlohu získáte 20 bodů. Boduje se každý správný krok. Za chyby v řešení se body neodečítají.

---

11. Načrtněte oblast v 1. kvadrantu ohraničenou křivkami $x^2 = y$, $x+y=2$, $y=0$ a určete její obsah. (20 bodů)



[5b]

Lze řešit různě, možná kombinace různých integrálů a vztahu pro obsah trojúhelníka. Např.

$$P(M) = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2},$$

nebo

$$P(M) = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (2-x)\mathrm{d}x,$$ [12b]

nebo

$$P(M) = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^{2-y} \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^1 (2-y-\sqrt{y})\mathrm{d}y,$$

atd. Tedy

$$P(M) = \frac{5}{6}.$$ [3b]

---

12. Najděte řešení počáteční úlohy

$$y'' + 4y = 10\,\mathrm{e}^x; \quad y(0)=5,\ y'(0)=0.$$

(20 bodů)

Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2+4=0$$ [2b]

a její kořeny jsou $\lambda_{1,2} = \pm 2\mathrm{i}$. Obecné řešení odpovídající homogenní rovnice je

$$y_h(x) = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$ [7b]

Partikulární řešení nehomogenní rovnice lze hledat ve tvaru $y_p(x) = A\,\mathrm{e}^x$, kde A je neznámá konstanta. Dosazením do rovnice zjistíme, že $A=2$, a proto

$$y_p(x) = 2\,\mathrm{e}^x.$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice je tvaru

$$y(x) = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) + 2\,\mathrm{e}^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$ [6b]

Z počátečních podmínek dostaneme

$$c_1 + 2 = 5, \quad 2c_2 + 2 = 0,$$ [3b]

tj. $c_1 = 3$, $c_2 = -1$. Hledané řešení je proto tvaru

$$y(x) = 3\cos(2x) - \sin(2x) + 2\,\mathrm{e}^x.$$ [2b]

Pozn. Řešení nehomogenní rovnice lze hledat také metodou variace konstant.