

**Příjmení a jméno:**

*V následujících dvanácti problémech je z nabízených odpovědí vždy právě jedna správná. Zakroužkujte ji! Za každou správnou odpověď získáte 5 bodů. Za nesprávnou odpověď se odečítá 1 bod.*

1. Pro matici  $B$ , která vznikne z matice  $A$  vynásobením prvního řádku číslem  $-2$ , platí:

- a)  $\det A = -2 \det B$    b)  $\det A = 2 \det B$    c)  $B = -2A$    d)  $\det B = 2 \det A$    **e)  $\det B = -2 \det A$**  (5 bodů)

2. Pro vektory  $\vec{u} = (1, 0, -2)$  a  $\vec{v} = (2, 1, 1)$  platí:

- a) jejich skalární součin je roven  $-1$    b) jsou lineárně závislé   c) mají stejnou velikost  
**d) jsou kolmé**   e) jsou stejné (5 bodů)

3. Vektorovým součinem vektorů  $\vec{u} = (1, 1, 0)$  a  $\vec{v} = (3, 0, -2)$  (v tomto pořadí) je:

- a)  $(2, -2, 3)$    b)  $(2, 2, 3)$    c)  $(-2, -2, -3)$    d)  $(3, 0, 0)$    **e)  $(-2, 2, -3)$**  (5 bodů)

4. Přímky

$$p \equiv \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = t, \\ z = -1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}; \quad q \equiv \begin{cases} x = 3 + 2s, \\ y = 1 + 2s, \\ z = s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

jsou:

- a) totožné   **b) různoběžné**   c) rovnoběžné různé   d) kolmé   e) mimoběžné (5 bodů)

5. Množina bodů daná parametrickým vyjádřením

$$\begin{cases} x = 1 + 16 \cos t, \\ y = -1 + 16 \sin t, \end{cases} \quad t \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$$

je:

- a) kružnice se středem v bodě  $[1, -1]$  a poloměrem 16   b) čtvrtkruh se středem v bodě  $[1, -1]$  a poloměrem 4  
c) půlkružnice se středem v bodě  $[1, -1]$  a poloměrem 4   d) půlkruh se středem v bodě  $[1, -1]$  a poloměrem 4  
**e) půlkružnice se středem v bodě  $[1, -1]$  a poloměrem 16** (5 bodů)

6. Normálovým vektorem přímky  $y = 3 - x$  v rovině je:

- a)  $(1, 1)$**    b)  $(1, -1)$    c)  $(1, 1, 3)$    d)  $(1, -1, 0)$    e)  $(1, 0)$  (5 bodů)

7. Křivka s parametrickým vyjádřením

$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 2t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

je:

- a) přímka  $2x - y - 2 = 0$    b) přímka  $x + 2y - 1 = 0$    c) kružnice   **d) přímka  $2x + y - 2 = 0$**   
e) přímka  $x - 2y - 1 = 0$  (5 bodů)

8. Vzdálenost bodů  $A = [-1, 1, 1]$ ,  $B = [2, 1, 5]$  je rovna:

- a)  $\sqrt{17}$    b) 2   **c) 5**   d)  $\sqrt{5}$    e)  $\sqrt{2}$  (5 bodů)

9. Je-li  $f(x, y) = e^{x+y} \ln y$ , pak:

- a)  $f''_{xx}(x, y) = e^{1+y} \ln y$    b)  $f''_{xx}(x, y) = \frac{1}{y} e^{x+y}$    c)  $f''_{xx}(x, y) = e^{x+y}$    d)  $f''_{xx}(x, y) = e^x \ln y$   
**e)  $f''_{xx}(x, y) = e^{x+y} \ln y$**  (5 bodů)

10. Je-li  $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 0\}$ , pak hodnota integrálu  $\iiint_A 1 dx dy dz$  je rovna:

- a) 2   **b) 6**   c) 3   d) 0   e) 5 (5 bodů)

11. Je-li  $\Gamma = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x - y = 0, x \in \langle 0, 1 \rangle\}$ , pak hodnota integrálu  $\int_{\Gamma} 1 ds$  je rovna:

- a) 1   b) 0   c)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$    d)  $(1, 1)$    **e)  $\sqrt{2}$**  (5 bodů)

12. Je-li  $M = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 9, x \leq 0, y \geq 0\}$ , po transformaci integrálu  $\iint_M (x^2 + y^2) dx dy$  do polárních souřadnic dostaneme:

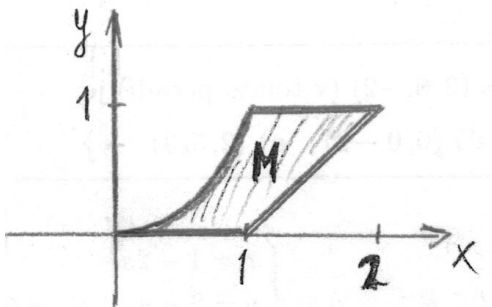
a)  $\int_{\pi/2}^{\pi} \left( \int_0^3 \varrho^2 d\varrho \right) d\varphi$     b)  $\int_0^{\pi/2} \left( \int_0^3 \varrho^3 d\varrho \right) d\varphi$     c)  $\int_{\pi/2}^{\pi} \left( \int_0^3 \varrho d\varphi \right) d\varrho$     d)  $\int_0^{\pi/2} \left( \int_0^3 \varrho^2 d\varphi \right) d\varrho$     e)  $\int_{\pi/2}^{\pi} \left( \int_0^3 \varrho^3 d\varrho \right) d\varphi$

(5 bodů)

Řešte následující úlohy. Za zcela správně vyřešenou úlohu získáte 20 bodů. Boduje se každý správný krok. Za chyby v řešení se body neodečítají.

13. Načrtněte oblast v rovině ohraničenou křivkami  $x = \sqrt{y}$ ,  $y = 1$ ,  $x = y + 1$ ,  $y = 0$  a určete její obsah. (20 bodů)

**Řešení:**



Lze řešit různě, možná kombinace různých integrálů a vztahu pro obsah trojúhelníka. Např.

$$P(M) = \int_0^1 x^2 dx + \frac{1}{2},$$

nebo

$$P(M) = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2-x) dx,$$

nebo

$$P(M) = \int_0^1 \left( \int_{\sqrt{y}}^{y+1} dx \right) dy = \int_0^1 (y+1 - \sqrt{y}) dy,$$

atd. Tedy

$$P(M) = \frac{5}{6}.$$

14. Najděte řešení počáteční úlohy

$$y'' + 4y = -8; \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 2.$$

(20 bodů)

**Řešení:**

Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

a její kořeny jsou  $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ . Obecné řešení odpovídající homogenní rovnice je

$$y_h(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice lze hledat ve tvaru  $y_p(x) = A$ , kde  $A$  je neznámá konstanta. Dosazením do rovnice zjistíme, že  $A = -2$ , a proto

$$y_p(x) = -2.$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice je tvaru

$$y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) - 2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Z počátečních podmínek dostaneme

$$c_1 - 2 = -2, \quad 2c_2 = 2,$$

tj.  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 1$ . Hledané řešení je proto tvaru

$$y(x) = \sin(2x) - 2.$$

**Pozor, řešení nehomogenní rovnice můžou hledat také metodou variace konstant.**