

Příjmení a jméno:

V následujících dvanácti problémech je z nabízených odpovědí vždy právě jedna správná. Zakroužkujte ji! Za každou správnou odpověď získáte 5 bodů. Za nesprávnou odpověď se odečítá 1 bod.

1. K matici A existuje inverzní matice právě tehdy, když je:

- a) obdélníková b) singulární c) čtvercová **d) regulární** e) nulová (5 bodů)

2. Pro vektory $\vec{u} = (1, -2, 0)$ a $\vec{v} = (-2, 4, 0)$ platí:

- a) jsou opačné **b) jsou lineárně závislé** c) jsou stejné
d) mají stejnou velikost e) jsou kolmé (5 bodů)

3. Vektorovým součinem vektorů $\vec{u} = (0, -2, 3)$ a $\vec{v} = (1, 0, 1)$ (v tomto pořadí) je:

- a) $(-2, -3, 2)$ b) $(2, 3, 2)$ **c) $(-2, 3, 2)$** d) $(0, 0, 3)$ e) $(-2, 3, -2)$ (5 bodů)

4. Přímký

$$p \equiv \begin{cases} x = -2 + 4t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = -1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}; \quad q \equiv \begin{cases} x = 2 + 4s, \\ y = 1 + 2s, \\ z = -1 \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

jsou:

- a) různoběžné **b) totožné** c) rovnoběžné různé d) mimoběžné e) kolmé (5 bodů)

5. Množina bodů daná parametrickým vyjádřením

$$\begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = 4 \sin t - 2, \end{cases} \quad t \in \left\langle \pi, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$$

je:

- a) kružnice se středem v bodě $[0, -2]$ a poloměrem 2
b) čtvrtkružnice se středem v bodě $[0, -2]$ a poloměrem 4
c) půlkružnice se středem v bodě $[0, -2]$ a poloměrem 4
d) čtvrtkružnice se středem v bodě $[0, -2]$ a poloměrem 2
e) čtvrtkruh se středem v bodě $[0, -2]$ a poloměrem 2 (5 bodů)

6. Směrovým vektorem přímky $x + y + 2 = 0$ v rovině je:

- a) $(1, -1, 2)$ **b) $(1, -1)$** c) $(1, 1)$ d) $(1, 1, 0)$ e) $(0, 1)$ (5 bodů)

7. Pro dvě roviny v třírozměrném prostoru, které mají jediný společný bod, platí:

- a) jsou rovnoběžné různé b) jsou různoběžné c) jsou mimoběžné d) jsou totožné
e) takové roviny neexistují (5 bodů)

8. Je-li $A = [-1, 1, 1]$ a $B = [2, 1, 5]$, pak velikost vektoru \overrightarrow{AB} je rovna:

- a) $\sqrt{17}$ **b) 5** c) 2 d) $\sqrt{2}$ e) $\sqrt{5}$ (5 bodů)

9. Je-li $f(x, y) = e^{x+y^2}$, pak:

- a) $f''_{yx}(x, y) = e^{2y}$ **b) $f''_{yx}(x, y) = 2y e^{x+y^2}$** c) $f''_{yx}(x, y) = e^{1+2y}$ d) $f''_{yx}(x, y) = (1 + 2y) e^{x+y^2}$
e) $f''_{yx}(x, y) = e^{x+y^2}$ (5 bodů)

10. Je-li $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2y, 0 \leq y \leq 1\}$, pak hodnota integrálu $\iint_A 1 dx dy$ je rovna:

- a) 1** b) 2 c) π d) 0 e) $\frac{1}{2}$ (5 bodů)

11. Je-li $\Gamma = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$, pak hodnota integrálu $\int_{\Gamma} 1 ds$ je rovna:

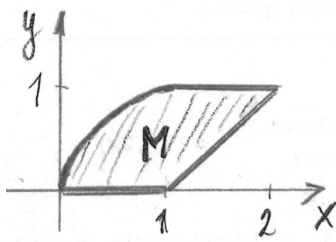
- a) π b) -2π c) 0 **d) 2π** e) $-\pi$ (5 bodů)

12. Je-li $M = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \leq 0\}$, po transformaci integrálu $\iint_M x dx dy$ do polárních souřadnic dostaneme:

a) $\int_{3\pi/2}^{2\pi} \left(\int_0^3 \varrho^2 \cos \varphi d\varphi \right) d\varrho$ b) $\int_0^3 \left(\int_{-\pi/2}^0 \varrho^2 \cos \varphi d\varphi \right) d\varrho$ c) $\int_0^\pi \left(\int_0^3 \varrho^2 \sin \varphi d\varphi \right) d\varphi$ d) $\int_{3\pi/2}^{2\pi} \left(\int_0^3 \varrho d\varrho \right) d\varphi$
e) $\int_0^3 \left(\int_{-\pi/2}^0 \varrho^2 \sin \varphi d\varphi \right) d\varrho$ (5 bodů)

Řešte následující úlohy. Za zcela správně vyřešenou úlohu získáte 20 bodů. Boduje se každý správný krok. Za chyby v řešení se body neodečítají.

13. Načrtněte oblast v rovině ohraničenou křivkami $x = y^2$, $y = 1$, $x = y + 1$, $y = 0$ a určete její obsah. (20 bodů)
Řešení:



Lze řešit různě, možná kombinace různých integrálů a vztahu pro obsah trojúhelníka. Např.

$$P(M) = \int_0^1 \sqrt{x} dx + \frac{1}{2},$$

nebo

$$P(M) = \int_0^1 \sqrt{x} dx + \int_1^2 (2 - x) dx,$$

nebo

$$P(M) = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{y+1} dx \right) dy = \int_0^1 (y + 1 - y^2) dy,$$

atd. Tedy

$$P(M) = \frac{7}{6}.$$

14. Najděte řešení počáteční úlohy

$$y'' + 6y' + 9y = 3; \quad y(0) = \frac{1}{3}, \quad y'(0) = 1. \quad (20 \text{ bodů})$$

Řešení: Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$$

a její kořeny jsou $\lambda_{1,2} = -3$. Obecné řešení odpovídající homogenní rovnice je

$$y_h(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice lze hledat ve tvaru $y_p(x) = A$, kde A je neznámá konstanta. Dosazením do rovnice zjistíme, že $A = \frac{1}{3}$ a proto

$$y_p(x) = \frac{1}{3}.$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice je tvaru

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} + \frac{1}{3}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Z počátečních podmínek dostaneme

$$c_1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, \quad -3c_1 + c_2 = 1,$$

tj. $c_1 = 0$, $c_2 = 1$. Hledané řešení je proto tvaru

$$y(x) = x e^{-3x} + \frac{1}{3}.$$

Pozor, řešení nehomogenní rovnice můžou hledat také metodou variace konstant.