

Příjmení a jméno:

V následujících dvanácti problémech je z nabízených odpovědí vždy právě jedna správná. Zakroužkujte ji! Za každou správnou odpověď získáte 5 bodů. Za nesprávnou odpověď se odečítá 1 bod.

1. Zaměníme-li ve čtvercové matici dva řádky, determinant vzniklé matice:

- a) se nezmění b) nebude existovat c) se zdvojnásobí **d) změní znaménko** e) bude poloviční (5 bodů)

2. Pro vektory $\vec{u} = (3, 4, 1)$ a $\vec{v} = (-4, 3, 1)$ platí:

- a) jsou lineárně nezávislé b) jsou stejné c) jejich skalární součin je roven -1
d) nemají stejnou velikost e) jsou kolmé (5 bodů)

3. Vektorovým součinem vektorů $\vec{u} = (0, 1, 1)$ a $\vec{v} = (3, 0, -2)$ (v tomto pořadí) je:

- a) $(-2, 3, -3)$** b) $(-2, -3, -3)$ c) $(2, -3, 3)$ d) $(0, 0, -2)$ e) $(2, 3, 3)$ (5 bodů)

4. Pro přímky

$$p \equiv \begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = 1 + t, \\ z = 3 - t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}; \quad q \equiv \begin{cases} x = 1 - 2s, \\ y = 2 - s, \\ z = 4 + s, \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

platí:

- a) jsou kolmé **b) jsou rovnoběžné různé** c) jsou mimoběžné
d) jsou totožné e) žádná z předchozích odpovědí není správná (5 bodů)

5. Množina bodů daná parametrickým vyjádřením

$$\begin{cases} x = -1 + 4 \cos t, \\ y = 1 + 4 \sin t, \end{cases} \quad t \in \langle \pi, 2\pi \rangle$$

je:

- a) kružnice se středem v bodě $[-1, 1]$ a poloměrem 4 **b) půlkružnice se středem v bodě $[-1, 1]$ a poloměrem 4**
c) půlkružnice se středem v bodě $[-1, 1]$ a poloměrem 2 d) kruh se středem v bodě $[-1, 1]$ a poloměrem 4
e) půlkruh se středem v bodě $[-1, 1]$ a poloměrem 2 (5 bodů)

6. Normálovým vektorem přímky $y = x - 2$ v rovině je:

- a) $(1, 1)$ **b) $(1, -1)$** c) $(1, 1, 0)$ d) $(1, -1, -2)$ e) $(1, 0)$ (5 bodů)

7. Křivka s parametrickým vyjádřením

$$\begin{cases} x = 3t, \\ y = 1 - 2t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

je:

- a) přímka $2x + 3y - 3 = 0$** b) přímka $2x - 3y + 3 = 0$ c) přímka $3x - 2y + 2 = 0$ d) kružnice
e) přímka $3x + 2y - 2 = 0$ (5 bodů)

8. Vzdálenost bodů $A = [-3, 1, 1]$, $B = [1, 4, 1]$ je rovna:

- a) $\sqrt{13}$ **b) 5** c) 2 d) $\sqrt{2}$ e) $\sqrt{5}$ (5 bodů)

9. Je-li $f(x, y) = e^{x+\ln y}$, pak:

- a) $f''_{xx}(x, y) = e^x$ b) $f''_{xx}(x, y) = e^0$ c) $f''_{xx}(x, y) = y e^x$ **d) $f''_{xx}(x, y) = e^{x+\ln y}$**
e) $f''_{xx}(x, y) = (1 + 2y) e^{x+\ln y}$ (5 bodů)

10. Je-li $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, -2 \leq z \leq 0\}$, pak hodnota integrálu $\iiint_A 1 dx dy dz$ je rovna:

- a) 2 b) 3 c) 0 **d) 6** e) 5 (5 bodů)

11. Je-li $\Gamma = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, pak hodnota integrálu $\int_{\Gamma} 1 ds$ je rovna:

- a) 4π b) 0 c) 2π **d) π** e) $-\pi$ (5 bodů)

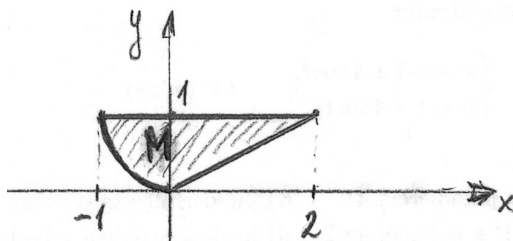
12. Je-li $M = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1, x \leq 0\}$, po transformaci integrálu $\iint_M (x^2 + y^2) dx dy$ do polárních souřadnic dostaneme:

a) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^1 \varrho^3 d\varrho \right) d\varphi$ b) $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(\int_0^1 \varrho^2 d\varrho \right) d\varphi$ c) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^1 \varrho^2 d\varphi \right) d\varrho$ **d) $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(\int_0^1 \varrho^3 d\varrho \right) d\varphi$** e) $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(\int_0^1 \varrho d\varphi \right) d\varrho$ (5 bodů)

Řešte následující úlohy. Za zcela správně vyřešenou úlohu získáte 20 bodů. Boduje se každý správný krok. Za chyby v řešení se body neodečítají.

13. Načrtněte oblast v rovině ohraničenou křivkami $y = 1$, $x = -\sqrt{y}$, $x - 2y = 0$, a určete její obsah. (20 bodů)

Řešení:



Lze řešit různě, možná kombinace různých integrálů a vztahu pro obsah trojúhelníka. Např.

$$P(M) = \int_{-1}^0 (1 - x^2) dx + 1,$$

nebo

$$P(M) = \int_{-1}^0 (1 - x^2) dx + \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{2}x\right) dx,$$

nebo

$$P(M) = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^{2y} dx \right) dy = \int_0^1 (2y + \sqrt{y}) dy,$$

atd. Tedy

$$P(M) = \frac{5}{3}.$$

14. Najděte řešení počáteční úlohy

$$y'' + 9y = 3; \quad y(0) = \frac{1}{3}, \quad y'(0) = 3. \quad (20 \text{ bodů})$$

Řešení:

Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + 9 = 0$$

a její kořeny jsou $\lambda_{1,2} = \pm 3i$. Obecné řešení odpovídající homogenní rovnice je

$$y_h(x) = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice lze hledat ve tvaru $y_p(x) = A$, kde A je neznámá konstanta. Dosazením do rovnice zjistíme, že $A = \frac{1}{3}$, a proto

$$y_p(x) = \frac{1}{3}.$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice je tvaru

$$y(x) = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x) + \frac{1}{3}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Z počátečních podmínek dostaneme

$$c_1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, \quad 3c_2 = 3,$$

tj. $c_1 = 0$, $c_2 = 1$. Hledané řešení je proto tvaru

$$y(x) = \sin(3x) + \frac{1}{3}.$$

Pozor, řešení nehomogenní rovnice můžou hledat také metodou variace konstant.