

Příjmení a jméno:

V následujících dvanácti problémech je z nabízených odpovědí vždy právě jedna správná. Zakroužkujte ji! Za každou správnou odpověď získáte 5 bodů. Za nesprávnou odpověď se odečítá 1 bod.

1. Jsou-li A, B čtvercové matice stejného řádu, pak $(A \cdot B)^T$ je rovno:

- a) $A \cdot B$ **b) $B^T \cdot A^T$** c) $(B \cdot A)^T$ d) $A^T \cdot B^T$ e) $B^T + A^T$ (5 bodů)

2. Pro vektory $\vec{u} = (3, 4, -5)$ a $\vec{v} = (-3, -4, -5)$ platí:

- a) jsou lineárně závislé b) jsou opačné c) jsou stejné **d) mají stejnou velikost** e) nejsou kolmé (5 bodů)

3. Vektorovým součinem vektorů $\vec{u} = (1, 1, 1)$ a $\vec{v} = (0, 1, 1)$ (v tomto pořadí) je:

- a) $(0, 1, 1)$ **b) $(0, -1, 1)$** c) $(0, -1, -1)$ d) $(1, 0, -1)$ e) $(1, 0, 1)$ (5 bodů)

4. Pro přímky

$$p \equiv \begin{cases} x = 3 + t, \\ y = t, \\ z = -1, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}; \quad q \equiv \begin{cases} x = 2 + s, \\ y = 1 - s, \\ z = -1, \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

platí:

- a) jsou kolmé** b) jsou totožné c) jsou rovnoběžné různé d) jsou mimoběžné e) žádná z předchozích odpovědí není správná (5 bodů)

5. Množina bodů daná parametrickým vyjádřením

$$\begin{cases} x = 9 \cos t + 2, \\ y = 9 \sin t, \end{cases} \quad t \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, 0 \right\rangle$$

je:

- a) čtvrtkružnice se středem v bodě $[2, 0]$ a poloměrem 9** b) kružnice se středem v bodě $[2, 0]$ a poloměrem 9
c) čtvrtkružnice se středem v bodě $[2, 0]$ a poloměrem 3 d) čtvrtkruh se středem v bodě $[2, 0]$ a poloměrem 9
e) kruh se středem v bodě $[2, 0]$ a poloměrem 3 (5 bodů)

6. Směrovým vektorem přímky $x - y - 3 = 0$ v rovině je:

- a) $(1, -1)$ **b) $(1, 1)$** c) $(1, -1, -3)$ d) $(1, 1, 0)$ e) $(0, 1)$ (5 bodů)

7. Kolmým průmětem přímky do roviny v třírozměrném prostoru je vždy:

- a) jediný bod b) prázdná množina **c) přímka nebo bod** d) přímka e) svazek přímek (5 bodů)

8. Je-li $A = [-3, 1, 1]$ a $B = [1, 4, 1]$, pak velikost vektoru \overrightarrow{AB} je rovna:

- a) $\sqrt{13}$ b) 2 c) $\sqrt{5}$ **d) 5** e) $\sqrt{2}$ (5 bodů)

9. Je-li $f(x, y) = e^{x^2 + \sin y}$, pak:

- a) $f''_{xy}(x, y) = e^{2x + \cos y}$ b) $f''_{xy}(x, y) = e^{x^2 + \sin y}$ **c) $f''_{xy}(x, y) = 2x \cos y e^{x^2 + \sin y}$**
d) $f''_{xy}(x, y) = (2x + \cos y) e^{x^2 + \sin y}$ e) $f''_{xy}(x, y) = 2x \cos y e^{x^2}$ (5 bodů)

10. Je-li $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x\}$, pak hodnota integrálu $\iint_A 1 dx dy$ je rovna:

- a) 2 **b) 1** c) 0 d) π e) $\frac{1}{2}$ (5 bodů)

11. Je-li $\Gamma = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x + y = 0, y \in \langle -1, 0 \rangle\}$, pak hodnota integrálu $\int_{\Gamma} 1 ds$ je rovna:

- a) 1 b) 0 c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **d) $\sqrt{2}$** e) $(1, 1)$ (5 bodů)

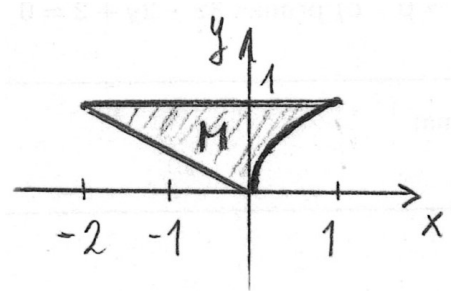
12. Je-li $M = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$, po transformaci integrálu $\iint_M x dx dy$ do polárních souřadnic dostaneme:

a) $\int_0^2 \left(\int_0^\pi \varrho^2 \cos \varphi d\varphi \right) d\varrho$ b) $\int_0^\pi \left(\int_0^2 \varrho^2 \cos \varphi d\varphi \right) d\varrho$ c) $\int_0^\pi \left(\int_0^4 \varrho^2 \sin \varphi d\varrho \right) d\varphi$ d) $\int_0^\pi \left(\int_0^2 \varrho d\varrho \right) d\varphi$ e) $\int_0^2 \left(\int_0^\pi \varrho^2 \sin \varphi d\varphi \right) d\varrho$
(5 bodů)

Řešte následující úlohy. Za zcela správně vyřešenou úlohu získáte 20 bodů. Boduje se každý správný krok. Za chyby v řešení se body neodečítají.

13. Načrtněte oblast v rovině ohraničenou křivkami $y = 1$, $y = \sqrt{x}$, $x + 2y = 0$, a určete její obsah. (20 bodů)

Řešení:



Lze řešit různě, možná kombinace různých integrálů a vztahu pro obsah trojúhelníka. Např.

$$P(M) = 1 + \int_0^1 (1 - \sqrt{x}) dx,$$

nebo

$$P(M) = \int_{-2}^0 \left(1 + \frac{1}{2}x \right) dx + \int_0^1 (1 - \sqrt{x}) dx,$$

nebo

$$P(M) = \int_0^1 \left(\int_{-2y}^{y^2} dx \right) dy = \int_0^1 (y^2 + 2y) dy,$$

atd. Tedy

$$P(M) = \frac{4}{3}.$$

14. Najděte řešení počáteční úlohy

$$y'' - 4y' + 4y = 8; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1. \quad (20 \text{ bodů})$$

Řešení:

Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

a její kořeny jsou $\lambda_{1,2} = 2$. Obecné řešení odpovídající homogenní rovnice je

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice lze hledat ve tvaru $y_p(x) = A$, kde A je neznámá konstanta. Dosazením do rovnice zjistíme, že $A = 2$ a proto

$$y_p(x) = 2.$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice je tvaru

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + 2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Z počátečních podmínek dostaneme

$$c_1 + 2 = 2, \quad 2c_1 + c_2 = 1,$$

tj. $c_1 = 0$, $c_2 = 1$. Hledané řešení je proto tvaru

$$y(x) = x e^{2x} + 2.$$

Pozor, řešení nehomogenní rovnice můžou hledat také metodou variace konstant.