

Příjmení a jméno:**I. Testová část**

V následujících problémech je z nabízených odpovědí vždy právě jedna správná. Zakroužkujte ji! Za každou správnou odpověď získáte 6 bodů, za nesprávnou odpověď se odečítá 1 bod.

1. Jsou-li A, B čtvercové matice stejného řádu, pak $(A \cdot B)^T$ je rovno:

- a) $A \cdot B$ **b) $B^T \cdot A^T$** c) $(B \cdot A)^T$ d) $A^T \cdot B^T$ e) $B^T + A^T$ (6 bodů)

2. Pro vektory $\vec{u} = (1, 0, -2)$ a $\vec{v} = (2, 1, 1)$ platí:

- a) jejich skalární součin je roven -1 b) jsou lineárně závislé c) mají stejnou velikost
d) jsou kolmé e) jsou stejné (6 bodů)

3. Vzdálenost bodů $A = [-1, 1, 1]$, $B = [2, 1, 5]$ je rovna:

- a) $\sqrt{17}$ b) 2 **c) 5** d) $\sqrt{5}$ e) $\sqrt{2}$ (6 bodů)

4. Směrovým vektorem přímky $x + y + 2 = 0$ v rovině je:

- a) $(1, -1, 2)$ **b) $(1, -1)$** c) $(1, 1)$ d) $(1, 1, 0)$ e) $(0, 1)$ (6 bodů)

5. Přímky

$$p \equiv \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = t, \\ z = -1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}; \quad q \equiv \begin{cases} x = 3 + 2s, \\ y = 1 + 2s, \\ z = s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

jsou:

- a) totožné **b) různoběžné** c) rovnoběžné různé d) kolmé e) mimoběžné (6 bodů)

6. Je-li $f(x, y) = e^{x+y^2}$, pak:

- a) $f''_{yx}(x, y) = e^{2y}$ **b) $f''_{yx}(x, y) = 2y e^{x+y^2}$** c) $f''_{yx}(x, y) = e^{1+2y}$ d) $f''_{yx}(x, y) = (1 + 2y) e^{x+y^2}$
e) $f''_{yx}(x, y) = e^{x+y^2}$ (6 bodů)

7. Jestliže má funkce f spojitě parciální derivace 2. řádu v okolí svého stacionárního bodu $A = [x_0, y_0]$ a platí $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, $\det \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} > 0$, pak v bodě A :

- a) nastává lokální minimum funkce f b) má funkce f globální maximum
c) lokální extrém funkce f nenastává **d) nastává lokální maximum funkce f** e) je inflexní bod (6 bodů)

8. Funkce $y(x) = x \ln x$ je řešením diferenciální rovnice:

- a) $y' = y + x$ **b) $xy' = y + x$** c) $y'' = \frac{y+x}{x}$ d) $y' = \frac{y-x}{x}$ e) $y' = xy$ (6 bodů)

9. Neurčitý integrál $\int x e^x dx$ je roven:

- a) $(x+1)e^x + c$ b) $\frac{x^2}{2} e^x + c$ **c) $(x-1)e^x + c$** d) $e^x + c$ e) $x - e^x + c$ (6 bodů)

10. Je-li $\Gamma = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, pak hodnota integrálu $\int_{\Gamma} 1 ds$ je rovna:

- a) 4π b) 0 c) 2π **d) π** e) $-\pi$ (6 bodů)

II. Početní část

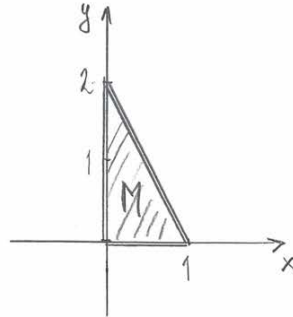
Řešte následující úlohy. Za zcela správně vyřešenou úlohu získáte 20 bodů. Boduje se každý správný krok. Za chyby v řešení se body neodečítají.

11. Uvažujme nosník trojúhelníkového průřezu. Ve zvoleném souřadném systému se jedná o pravoúhlý trojúhelník s vrcholy $A = [0, 0]$, $B = [1, 0]$ a $C = [0, 2]$. Určete kvadratický moment průřezu vzhledem k delší odvěsně daného trojúhelníka.

Nápověda: Kvadratické momenty průřezu vzhledem k souřadným osám jsou dány vztahy $J_x = \iint_{\triangle ABC} y^2 dx dy$ a $J_y =$

$$\iint_{\triangle ABC} x^2 dx dy \quad (20 \text{ bodů})$$

Řešení:



Bud'

$$J_y = \iint_M x^2 dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} x^2 dy \right) dx = \int_0^1 x^2 (2-2x) dx = 2 \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \frac{1}{6}$$

nebo

$$J_y = \iint_M x^2 dx dy = \int_0^2 \left(\int_0^{1-\frac{y}{2}} x^2 dx \right) dy = \frac{1}{3} \int_0^2 \left(1 - \frac{y}{2} \right)^3 dy = \frac{1}{6}$$

12. Těleso kmitá podél osy y , přičemž jeho pohyb je popsán diferenciální rovnicí

$$y'' + 16y = 0.$$

Najděte obecné řešení této diferenciální rovnice a dále určete, v jaké poloze se bude těleso nacházet po 5 s pohybu, jestliže startuje z počáteční polohy $y = 2$ s nulovou počáteční rychlostí. (20 bodů)

Řešení:

Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + 16 = 0$$

a její kořeny jsou $\lambda_{1,2} = \pm 4i$. Obecné řešení je proto tvaru

$$y(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Dále hledáme řešení splňující počáteční podmínky

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 0,$$

odkud dostaneme

$$c_1 = 2, \quad c_2 = 0,$$

tj. řešení počáteční úlohy je tvaru

$$y(t) = 2 \cos(4t).$$

Po 5 s pohybu bude těleso v poloze $y(5) = 2 \cos(20) \approx 0,816$.