

Příjmení a jméno:

I. Testová část

V následujících problémech je z nabízených odpovědí vždy právě jedna správná. Zakroužkujte ji! Za každou správnou odpověď získáte 6 bodů, za nesprávnou odpověď se odečítá 1 bod.

1. Zaměníme-li ve čtvercové matici dva sloupce, determinant vzniklé matice:

- a) se nezmění b) se zdvojnásobí c) nebude existovat d) bude poloviční **e) změní znaménko** (6 bodů)

2. Vektorovým součinem vektorů $\vec{u} = (0, -2, 3)$ a $\vec{v} = (1, 0, 1)$ (v tomto pořadí) je:

- a) $(-2, -3, 2)$ b) $(2, 3, 2)$ **c) $(-2, 3, 2)$** d) $(0, 0, 3)$ e) $(-2, 3, -2)$ (6 bodů)

3. Je-li $A = [-1, 1, 1]$ a $B = [2, 1, 5]$, pak velikost vektoru \overrightarrow{AB} je rovna:

- a) $\sqrt{17}$ **b) 5** c) 2 d) $\sqrt{2}$ e) $\sqrt{5}$ (6 bodů)

4. Křivka s parametrickým vyjádřením

$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 2t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

je:

- a) přímka $2x - y - 2 = 0$ b) přímka $x + 2y - 1 = 0$ c) kružnice **d) přímka $2x + y - 2 = 0$**
e) přímka $x - 2y - 1 = 0$ (6 bodů)

5. Normálovým vektorem přímky $y = 3 - x$ v rovině je:

- a) $(1, 1)$** b) $(1, -1)$ c) $(1, 1, 3)$ d) $(1, -1, 0)$ e) $(1, 0)$ (6 bodů)

6. Je-li $f(x, y) = e^{x^2+y}$, pak:

- a) $f''_{xy}(x, y) = e^{2x}$ b) $f''_{xy}(x, y) = e^{2x+1}$ **c) $f''_{xy}(x, y) = 2x e^{x^2+y}$** d) $f''_{xy}(x, y) = (2x + 1) e^{x^2+y}$
e) $f''_{xy}(x, y) = e^{x^2+y}$ (6 bodů)

7. Jestliže má funkce f spojitě parciální derivace 2. řádu v okolí svého stacionárního bodu $A = [x_0, y_0]$ a platí $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, $\det \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} < 0$, pak v bodě A :

- a) nastává lokální minimum funkce f b) má funkce f globální maximum c) je inflexní bod
d) lokální extrém funkce f nenastává e) nastává lokální maximum funkce f (6 bodů)

8. Řešením diferenciální rovnice $y' - 2y = 0$ je funkce:

- a) $y(x) = 2e^{-2x}$ b) $y(x) = xe^{2x}$ c) $y(x) = xe^{-2x}$ **d) $y(x) = -e^{2x}$** e) $y(x) = \frac{1}{2}x$ (6 bodů)

9. Je-li $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2y, 0 \leq y \leq 1\}$, pak hodnota integrálu $\iint_A 1 dx dy$ je rovna:

- a) 1** b) 2 c) π d) 0 e) $\frac{1}{2}$ (6 bodů)

10. Je-li $M = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \leq 0\}$, po transformaci integrálu $\iint_M x dx dy$ do polárních souřadnic dostaneme:

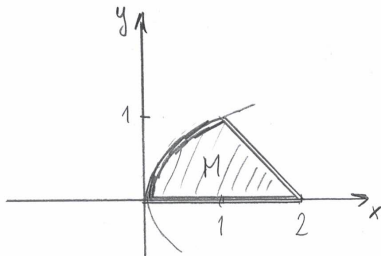
- a) $\int_{3\pi/2}^{2\pi} \left(\int_0^3 \varrho^2 \cos \varphi d\varphi \right) d\varrho$ **b) $\int_0^3 \left(\int_{-\pi/2}^0 \varrho^2 \cos \varphi d\varphi \right) d\varrho$** c) $\int_0^\pi \left(\int_0^3 \varrho^2 \sin \varphi d\varphi \right) d\varphi$ d) $\int_{3\pi/2}^{2\pi} \left(\int_0^3 \varrho d\varrho \right) d\varphi$
e) $\int_0^3 \left(\int_{-\pi/2}^0 \varrho^2 \sin \varphi d\varphi \right) d\varrho$ (6 bodů)

II. Početní část

Řešte následující úlohy. Za zcela správně vyřešenou úlohu získáte 20 bodů. Boduje se každý správný krok. Za chyby v řešení se body neodečítají.

11. Napište oblast v 1. kvadrantu ohraničenou křivkami $x = y^2$, $x + y = 2$, $y = 0$ a určete její obsah. (20 bodů)

Řešení:



Lze řešit různě, možná kombinace různých integrálů a vztahu pro obsah trojúhelníka. Např.

$$P(M) = \int_0^1 \sqrt{x} \, dx + \frac{1}{2},$$

nebo

$$P(M) = \int_0^1 \sqrt{x} \, dx + \int_1^2 (2 - x) \, dx,$$

nebo

$$P(M) = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{2-y} dx \right) dy = \int_0^1 (2 - y - y^2) dy,$$

atd. Tedy

$$P(M) = \frac{7}{6}.$$

12. Motorové sáně se pohybují přímočarým zrychleným pohybem, přičemž změna rychlosti v v čase je popsána diferenciální rovnicí

$$v' = \frac{1}{10} v.$$

Najděte obecné řešení této diferenciální rovnice a dále určete jakou rychlostí se sáně pohybovaly na konci sledovaného úseku trvajícího 20 s, jestliže na počátku tohoto úseku byla jejich rychlost $0,5 \text{ m s}^{-1}$. (20 bodů)

Řešení:

Obecné řešení je tvaru

$$v(t) = c e^{\frac{1}{10} t}, \quad c \in \mathbb{R},$$

či

$$\ln |v| = \frac{1}{10} t + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Dále hledáme řešení splňující počáteční podmínku

$$v(0) = 0,5,$$

odkud dostaneme

$$c = \frac{1}{2},$$

tj. řešení počáteční úlohy je tvaru

$$v(t) = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{10} t}.$$

Na konci sledovaného úseku bude rychlost saní $v(20) = \frac{1}{2} e^2 \approx 3,695$.