Příjmení a jméno:

Z uvedených odpovědí je vždy právě jedna správná. Zakroužkujte ji!

V následujících deseti problémech je z nabízených odpovědí vždy právě jedna správná. Zakroužkujte ji! Za každou správnou odpověď získáte uvedené body. Za nesprávnou odpověď se odečítá čtvrtina uvedené hodnoty.

1. Jestliže $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B}$, kde $\mathbf{A}$ je regulární matice, pak pro matici $\mathbf{X}$ platí (4b)

a) $\mathbf{X}=\dfrac{\mathbf{B}}{\mathbf{A}}$ **b)** $\mathbf{X}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}^T$ **c)** $\mathbf{X}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}^{-1}$ **d)** $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}$ **e)** $\mathbf{X}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$

2. Soustava lineárních algebraických rovnic má právě tři řešení právě tehdy, když determinant soustavy je **a)** roven nule **b)** různý od nuly **c)** menší než nula **d)** větší než nula **e)** taková soustava neexistuje (4b)

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-3}=$ **a)** 3 **b)** -3 **c)** ∞ **d)** $-\frac{1}{3}$ **e)** neexistuje (4b)

4. $\dfrac{\partial^2}{\partial^2 y}e^y tg\,x=$ **a)** $e^x tgx$ **b)** $\dfrac{e^y}{\cos^2 x}$ **c)** $e^y tgx$ **d)** $e^x\cos y$ **e)** e^y (4b)

5. Pro první derivaci funkce f v bodě x_0 platí $f'(x_0)<0$. Pak funkce f je v bodě x_0 (4b)

a) klesající **b)** rostoucí **c)** konkávní **d)** konvexní **e)** žádná odpověď není správná

6. Jestliže $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$, pak lze s jistotou říci, že funkce $f(x)$ je na intervalu $\langle a;b\rangle$ (8b)

a) kladná **b)** záporná **c)** nezáporná **d)** spojitá **e)** žádná odpověď není správná

7. O přímkách $p\equiv(-2+4v;\ -1+2v;\ -1)$; $q\equiv(2+4u;\ 1+2u;\ -1)$; lze říci, že jsou: (8b)

a) různoběžné **b)** totožné **c)** kolmé **d)** mimoběžné **e)** rovnoběžné různé

8. Je-li $M=\{[x,y,z]\in\mathbf{R}^3\,|\,x^2+y^2+z^2\le 9\}$, pak $\iiint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$ (8b)

a) 9π **b)** 27π **c)** 36π **d)** 1 **e)** 0

9. Posloupnost funkcí $\{x^{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ na intervalu $\langle -1;1\rangle$ **a)** konverguje bodově **b)** konverguje stejnoměrně **c)** diverguje **d)** osciluje **e)** žádná odpověď není správná (8b)

10. Obecným řešením diferenciální rovnice $y''+y=0$ je **a)** $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$ **b)** $y=C_1\cos x+C_2\sin x$ **c)** $y=\cos C_1x+\sin C_2x$ **d)** $y=e^{C_1x+C_2x}$ **e)** $y=Ce^{x^2+1}$ (8b)

Řešte následující úlohy. Za zcela správně vyřešenou úlohu získáte 20 bodů. Boduje se každý správný krok. Za chyby v řešení se body neodečítají.

11. Určete intervaly spojitosti, monotonie a extrémy funkce $f(x) = x^2 \ln^{-1} x$.

Řešení: $D(f) = \mathbb{R}^+ - \{1\}$ 2 body

na $D(f)$ spojitá 2 body

$$f'(x) = 2x\ln^{-1}x - x\ln^{-2}x = \frac{2x\ln x - x}{\ln^2 x}$$ 2 body

Stac. body $f'(x) = 0 \Rightarrow x(2\ln x - 1) = 0 \Rightarrow$ 2 body

$x_1 = 0$ ($\notin D(f) - \textit{není stac. bod}$) 2 body

$x_2 = \sqrt{e}$ 2 body

$x \in (0;1) \quad \Rightarrow f'(x) < 0$ *funkce klesá* 2 body

$x \in \left(1;\sqrt{e}\right) \Rightarrow f'(x) < 0$ *funkce klesá* 2 body

$x \in \left(\sqrt{e};\infty\right) \Rightarrow f'(x) > 0$ *funkce roste* 2 body

$x = \sqrt{e} \Rightarrow f(x) = 2e$ *lokální minimum* 2 body

12. Počet rozpadajících se atomových jader radioaktivního uhlíku je dán diferenciální rovnicí

$$\mathrm{d}n = -kn\mathrm{d}t$$

kde n je počet dosud nerozpadnutých jader, t je čas v rocích a $k = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$ je konstanta. Ve vzorku organické látky je 70% původního množství radioaktivního uhlíku. Určete stáří vzorku.

Řešení:

Obecné řešení rovnice:

$$\int \frac{\mathrm{d}n}{n} = -k\int \mathrm{d}t$$ 4 body

$$\ln n = -kt + \ln C \Rightarrow n = C \cdot e^{-kt}$$ 4 body

Počáteční ($t = 0$) počet nerozpadnutých jader ozn. n_0, partikulární řešení prochází bodem $[0; n_0] \;\Rightarrow\; n_0 = C \cdot e^{-k\cdot 0} \Rightarrow C = n_0$

Part. řešení $n = n_0 \cdot e^{-kt}$ 4 body

Podle zadání má být $n = 0{,}70 \cdot n_0$

$$0{,}70 \cdot n_0 = n_0 \cdot e^{-kt}$$ 4 body

Odtud

$$t = -\frac{1}{k}\cdot \ln 0{,}7 = -\frac{1}{1{,}2\cdot 10^{-4}}\cdot \ln 0{,}7 =$$

$$= -\tfrac{5}{6}\cdot 10^4 \cdot \ln 0{,}7 \;\; (let)$$ 4 body

anebo přímo

$$\int_{n_0}^{n_1 = 0{,}7n_0} \frac{\mathrm{d}n}{n} = -k\int_{t_0=0}^{t_1} \mathrm{d}t$$

$$[\ln n]_{n_0}^{0{,}7n_0} = -k[t]_0^{t_1}$$

$$\ln 0{,}7n_0 - \ln n_0 = -kt_1$$

$$\ln 0{,}7 = -kt_1$$

$$t_1 = -\frac{1}{k}\cdot \ln 0{,}7$$

$$t_1 = -\tfrac{5}{6}\cdot 10^4 \cdot \ln 0{,}7 \;\; (let)$$