VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA PODNIKATELSKÁ

FACULTY OF BUSINESS AND MANAGEMENT

DYNAMICKÉ MODELOVÁNÍ V EKONOMICE A ŘÍZENÍ PODNIKU

DYNAMIC MODELING
IN COMPANY MANAGEMENT AND ECONOMICS

HABILITAČNÍ PRÁCE V OBORU EKONOMIKA A MANAGEMENT

HABILITATION THESIS IN THE FIELD ECONOMICS AND MANAGEMENT

AUTOR PRÁCE Mgr. Veronika Novotná, Ph.D.

AUTHOR

BRNO 2020

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že habilitační práce je původní a zpracovala jsem ji samostatně. Prohlašuji, že citace použitých pramenů je úplná, že jsem ve své práci neporušila autorská práva (ve smyslu Zákona č. 121/2000 Sb., o autorském a o právech souvisejících s právem autorským).

V Brně dne

Mgr. Veronika Novotná, Ph.D.

Poděkování

Na tomto místě bych chtěla poděkovat doc. RNDr. Bedřichu Půžovi, CSc., prof. Ing. Petru Dostálovi, CSc. a prof. Ing. Vojtěchu Korábovi, Dr., MBA za odborné rady, náměty a připomínky. Současně děkuji také kolegům z fakulty, kteří mi pomohli svými radami a konstruktivními připomínkami. V neposlední řadě patří velké poděkování mé rodině, za trpělivost a podporu v průběhu celého zpracovávání habilitační práce.

ABSTRAKT

Předkládaná habilitační práce prezentuje nové možnosti praktického využití matematického modelování pro podporu rozhodování v oblasti řízení podniků.

Výstupem a hlavním cílem habilitační práce je nový metodický postup, který dovoluje numericky řešit ekonomické dynamické modely, ve kterých je nutno uvažovat časové zpoždění proměnných. K dosažení stanoveného cíle jsou využity především metody teoretického výzkumu – modelování, indukce, dedukce a zejména analýza a syntéza.

Úvodní část obsahuje charakteristiku, meze použitelnosti a možnosti řešení dynamických modelů s časovými zpožděními, využívaných v ekonomice a řízení podniku pro podporu rozhodování. Kritická literární rešerše této oblasti potvrdila, že teoretický aparát umožňující řešení těchto modelů systémů diferenciálních rovnic se zpožděními a zejména numerické metody jejich řešení jsou nedostatečně propracovány a nedovolují řešit modely komplikovanější, bližší realitě a potřebné v podnikové praxi.

V teoretické části práce jsou odvozeny nové postupy řešení ekonomických dynamických modelů se zpožděními, které lze realizovat za pomoci běžně dostupného software. Opírají se o současné znalosti tzv. funkcionálních diferenciálních rovnic a úrovní abstrakce jim odpovídající partie funkcionální analýzy a teorie integrálu.

V aplikační části práce je tento nový postup ilustrován řadou vybraných příkladů z oblasti podnikové praxe. Vychází z již publikovaných vybraných autorských statí, v nichž je popsána konstrukce numerického řešení konkrétních dynamických ekonomických modelů se zpožděními. K výpočtům byl použit software Maple a chování modelů je graficky demonstrováno pomocí počítačové simulace.

Závěrečné kapitoly habilitační práce shrnují hlavních výsledky, přínosy práce pro vědu, praxi a pedagogiku a nastiňují možné budoucí směřování výzkumu.

Nově vytvořené postupy umožňují podnikovým manažerům při popisu chování reálného ekonomického systému uvažovat i vliv zpoždění exogenních i endogenních proměnných na jejich chování. To významně přispívá ke kvalitnější predikci či optimalizaci chování zkoumaných objektů a ke zvýšení efektivity řídících procesů podniku.

ABSTRACT

The habilitation thesis presents new possibilities of practical use of mathematical modelling to support decision-making in business management.

The outcome and the main objective of the habilitation thesis is a new methodological procedure, allowing to numerically solve economic dynamic models in which the time delay of variables needs to be considered. In order to achieve the set goal, methods of theoretical research have been used, i.e. modelling, induction, deduction, in particular analysis and synthesis.

The introductory part contains the characteristics, limits of applicability, and possibilities of solving dynamic models with time delays which are used in economics and business management to support decision-making. A critical literature search in this area confirmed that the theoretical apparatus enabling solution of these models of systems of differential equations with delays and especially numerical methods of their solutions are insufficiently elaborated and do not allow solving more complicated models, which are closer to reality and required in business practice.

In the theoretical part of the work, new procedures for solving economic dynamic models with delays are derived, which can be implemented using commonly available software. They are based on the current knowledge of the so-called functional differential equations and on parts of the functional analysis and the theory of the integral corresponding to the equations in terms of abstraction.

The application part of the work illustrates the new procedure with a number of selected examples from business practice. It is based on published selected authorial articles which describe the construction of a numerical solution of specific dynamic economic models with delays. Maple software was used for the calculations and the behaviour of the models is graphically demonstrated using computer simulation.

The final chapters of the habilitation thesis summarize the main results and the benefits of the habilitation for science, practice, and pedagogy, and outline potential direction of research in the future.

The new procedures allow corporate managers to consider the impact of the delay of exogenous and endogenous variables on their behaviours when describing the behaviour of a real economic system. This significantly contributes to a better prediction or optimization of the behaviours of the examined objects and to an increase in the efficiency of a company's management processes.

Klíčová slova

dynamický ekonomický model; modelování; rozhodování v řízení podniku; numerické metody; diferenciální rovnice se zpožděním

Key words

economic dynamic model; modelling; decision-making in business management; numerical methods; differential equations with delay

Obsah

1 Úvod **9**

2 Cíl habilitační práce **12**

3 Výzkumná metodologie a metody použité v habilitační práci **13**
3.1 Metody využité v habilitační práci 14
3.2 Rámcový postup při zpracování habilitační práce 17

4 Současný stav vědeckého poznání **19**
4.1 Modely a modelování 19
4.2 Dynamické systémy a modely 41
4.3 Dynamické modely v ekonomice a řízení podniku 42
4.4 Matematické prostředky pro řešení dynamických modelů . . . 49
4.5 Zhodnocení současného stavu vědeckého poznání 60

5 Nový postup konstrukce řešení modelů dynamických systémů v ekonomice a řízení podniku **62**
5.1 Matematický popis modelů dynamických systémů se zpožděním v ekonomice a řízení podniku 63
5.2 Případ lineárního ekonomického modelu 70
5.3 Případ nelineárního ekonomického modelu 87
5.4 Aplikace nového postupu na řešení ekonomického modelu . . . 96

6 Aplikace nového postupu v oblasti ekonomiky a řízení podniku **100**
6.1 Model systému výroby, skladování a prodeje 105
6.2 Řízení zásob podniku - efekt biče 109
6.3 Řízení zásob podniku - částečný backlogging 112
6.4 Reakce investorů na uvedení nového produktu na trh 117
6.5 Podniková data a jejich ohrožení 121
6.6 Šíření informace o emisi nové akcie na kapitálovém trhu 124

6.7 Nabídka a poptávka na trhu s drůbežím masem 128

7 Přínos práce pro vědu, praxi a pedagogickou činnost 132

7.1 Přínos pro vědu 132

7.2 Přínos pro podnikovou praxi 133

7.3 Přínos pro pedagogickou činnost 135

8 Závěr 137

Literatura 138

Seznam obrázků 169

A Upřesnění terminologie a značení 172

B Sylaby předmětů 178

B.1 Matematická ekonomie 178

B.2 Matematické modelování 180

C Životopis autorky 182

D Vědecké a odborné publikace autorky 184

Kapitola 1

Úvod

Typickým znakem současného ekonomického vývoje ve světě je růst vzájemné závislosti a propojení trhů jednotlivých národních ekonomik i nadnárodních uskupení ve formě globalizačních procesů. Turbulentní prostředí prudce se rozvíjejících trhů vytváří zázemí pro zvyšování konkurenčního boje mezi ekonomickými subjekty, což je jedním z hlavních důvodů lepší alokace výrobních faktorů či efektivnější výroby a postupně vede ke zvyšování konkurenceschopnosti v prostředí světového trhu. Vstup na jednotný trh má však zásadní dopad na výsledky ekonomické aktivity jak jednotlivých národohospodářských odvětví, tak na ekonomické postavení domácností i podniků. S vývojem společnosti se adekvátně mění i podmínky pro podnikání a současná doba také vyžaduje cílenou, co nejpřesnější a co nejkvalitnější reakci podnikového managementu, což je důsledkem nejen rychlého rozvoje všech oblastí vědy a techniky, dynamiky výzkumu, stále efektivnější technologie výroby, ale i sílícího rozvoje všech odvětví průmyslu, obchodu a služeb. Znamená to i nutnost vysoké přesnosti při výpočtech, využití velkého množství nových dat a informací a také neustálé doplňování znalostí.

K řešení problémů, kterými se musí zabývat podnikový management, napomáhá manažerské rozhodování, které je významnou součástí podnikového managementu, zasahující do všech oblastí řízení.

Správná rozhodnutí jsou však podmíněna zodpovědným vyhodnocováním čím dál většího množství informací. Nesprávná manažerská rozhodnutí, přijatá na základě neúplných, případně nevhodně nebo nedostatečně zpracovaných informací, mohou mít za následek značné ekonomické ztráty.

Dospět ke kvalifikovanému rozhodnutí ale není možné bez masivního použití exaktních metod – metod matematické ekonomie. Navíc rychlý vývoj informačních a komunikačních technologií umožňuje stále častěji a úspěšněji nasazovat tyto metody v praxi a vyžaduje vývoj nových prostředků a postupů řešení klasických i pokročilých matematických metod, které dříve chyběly, byly špatně dostupné z časového hlediska nebo obtížně použitelné pro rozsáhlost.

V podnikové praxi existuje celá řada jevů, které se vyznačují změnami a dynamikou. Pochopení dynamiky těchto změn je pro rozhodování podnikového managementu zásadní, protože chování spotřebitelů je v dnešní době proměnlivé v čase. To je způsobeno tím, že spotřebitel je významně ovlivňován jednak touhou po vynikajících produktech a službách za dostupné ceny, jednak prostřednictvím interakce se svým okolím, například v rámci různých diskuzních skupin na sociálních sítích, nebo díky nově se vytvářejícími vztahy mezi maloobchodníky a spotřebiteli.

Simulační modely vysvětlují například důvody neočekávaného chování podniku, zisku, ztráty nebo výkonností podniku, kterou můžeme měřit například prodejem, produktivitou nebo podílem na trhu, která je přímo závislá na faktorech jako jsou zákazníci, pracovní síla nebo dobré jméno. Na základě takových informací je možné chování podniku namodelovat a zjistit příčiny jeho úspěchu či neúspěchu.

Podnik proto v daném kontextu můžeme chápat jako dynamický systém s mnoha prvky a vazbami. V prostředí podniku můžeme za stavové proměnné považovat veličiny jako jsou produkce, spotřeba, investice a mnohé další. Model takového dynamického systému je pak většinou zadán soustavou diferenciálních rovnic, které popisují změny stavového vektoru v čase. Stále častěji jsou při modelování změn a pohybů tyto rovnice využívány v různých vědních oborech.

Dále je třeba si uvědomit, že chceme-li modelovat jev a pracovat s ním jako se systémem, může jít o systém, který je determinován nejen současnými podmínkami, ale i podmínkami z minulosti, nebo systém, který reaguje s časovou prodlevou.

Předkládaná práce obsahuje popis a charakteristiku dynamických systémů s časovými zpožděními, využívaných v ekonomice a řízení podniku, nově vytvořený matematický aparát umožňující analýzu chování dynamických matematických modelů a řadu vybraných příkladů modelů z oblasti podnikové praxe, které ilustrují použití odvozených postupů. Proto lze tuto práci charakterizovat jako převážně teoreticky zaměřenou. Pro zpracování jsou používány metody teoretického výzkumu a výsledky jsou prezentovány na modelových příkladech. Jádro práce se opírá o vybrané autorské statě, v nichž je popsána konstrukce numerického řešení konkrétních dynamických ekonomických modelů.

V hlavní části práce je použit obecnější postup pro řešení a analýzu chování dynamických modelů. Opírá se o současné znalosti tzv. funkcionálních diferenciálních rovnic a úrovní abstrakce jim odpovídající partie funkcionální analýzy a teorie integrálu.

Nově vytvořený postup umožňuje komplexnější a podrobnější studium doposud nedostatečně studovaných dynamických systémů se zpožděními, dostatečné zpřesnění a doplnění analýzy chování „klasických“ dynamických modelů bez zpoždění nebo (v mnohých případech) alespoň aproximaci řešení ekonomických systémů se zpožděními. Důvodem pro odvození nového postupu byla dříve nedostatečně propracovaná obecná teorie takových matematických objektů, která nedovolovala řešit komplikovanější a reálnější modely praktických úloh. To mimo jiné dokumentuje i pestrost přístupů a postupů k řešení konkrétních ekonomických modelů v minulosti.

Z matematického i metodického hlediska se odvození postupu konstrukce řešení dělí na lineární a nelineární, a to v souladu s tvarem dynamického systému, respektive tvarem odpovídající okrajové úlohy. Společným rysem obou částí je využití metody apriorního odhadu řešení k originální konstrukci řešení okrajových úloh pro rovnice (systémy) se zpožděním (zpožděními) prostřednictvím posloupností jednodušších okrajových úloh bez zpoždění.

V rámci aplikační části je prezentována konstrukce několika modelů a možnosti jejich řešení, vycházející z vybudované teorie. K výpočtu byl použit software Maple a chování modelu je graficky demonstrováno pomocí počítačové simulace.

Kapitola 2

Cíl habilitační práce

Obecným cílem práce je prohloubit a rozšířit možnosti praktického využití matematického modelování pro podporu rozhodování v oblasti řízení podniků, konkrétně v oblastech popisovaných dynamickými systémy se zpožděními.

Hlavním cílem práce je navrhnout a popsat postup, který dovoluje prostředky numerické matematiky analyzovat a řešit dynamické modely z oblasti podnikové praxe, ve kterých je nutno uvažovat časové zpoždění proměnných. Tyto nové postupy pak budou využity jak k potvrzení účinnosti navržených postupů na již publikované analýzy chování dynamických modelů, využívající odlišné metody řešení, tak k jejich hlubšímu zkoumání, příp. k řešení těch, které ještě řešeny nebyly.

Dílčími cíli jsou:

A) Vymezení relevantních pojmů týkajících se tématu práce, zejména pojmů z oblasti dynamického modelování v podnikové ekonomice, a zhodnocení současného stavu poznání v této oblasti.

B) Odvození nového obecného postupu konstrukce řešení lineárních i nelineárních dynamických systémů v oblasti řízení podnikových procesů se zpožděními a vymezením podmínek jejich použitelnosti na úlohy nejčastěji se v podnikové ekonomii vyskytující.

C) Testování zjištěných postupů (konstrukcí řešení) na dynamických modelech, určených pro podporu podnikového managementu s využitím vhodných prostředků informačních a komunikačních technologií.

Kapitola 3

Výzkumná metodologie a metody použité v habilitační práci

S ohledem na stanovený předmět vědeckého výzkumu a výzkumné cíle je nezbytné pro zkoumání daného problému zvolit odpovídající metodologii a výzkumné metody.

Výzkumné metody jsou nástroje, na jejichž základě získáváme požadované vědecké informace, které následně třídíme, interpretujeme a na jejich základě uskutečňujeme odpovídající vědecké závěry. Tyto metody se používají používány na bázi určité metodologie. Teorie uvádí dva základní typy metodologií - pozitivistickou a normativní (Dunn, 2004; Ochrana, 2009).

V této habilitační práci je použita kombinace normativní i pozitivní metodologie.

Metody výzkumného procesu tvoří základ vědecké činnosti a jejich výběr má značný vliv na dosažení stanovených cílů.

V oblasti výzkumu rozlišujeme:

1. Empirický výzkum je založen na práci s konkrétními daty a exaktními metodami dospívá ke konkrétním poznatkům. Jedná se tedy o metody, kterými je možno zjistit konkrétní jedinečné vlastnosti nějakého objektu či jevu v realitě.

2. Teoretický výzkum, který je v této habilitační práci převážně použit, je založen převážně na dedukci a používá metody analýzy a komparace pojmů, kategorií, různých konstruktů apod. (Reichel, 2009)

Dle Černíka můžeme teoretický výzkum dále dělit na:

(a) teoretickou poznávací činnost prvního druhu (formulace problémů, konstrukce modelů a ověřování hypotéz),

(b) teoretickou poznávací činnost druhého druhu (výstavba teorií, formulace zákonů) (Černík a kol., 1987).

3.1 Metody využité v habilitační práci

Další možná klasifikace je založena na hledisku způsobu vysvětlení, resp. výkladu zkoumaného problému. Na základě tohoto kritéria vymezujeme tzv. typy vědeckých metod. Patří k nim metody explanační a metody interpretační. Při explanaci postupujeme od obecného k jednotlivému. Obecným je známý vztah (např. ve formě „vědeckého zákona"), jednotlivým je vysvětlovaný jev, který zařazujeme pod daný obecný vztah. Jiným postupem je interpretace. (Sebera, 2012)

Pro dosažení stanovených cílů této habilitační práce bylo použito široké spektrum explanačních vědeckých metod, především z oblasti teoretického vědeckého výzkumu - modelování, indukce, dedukce a zejména metody analýzy a syntézy.

Vedle uvedených empirických a obecně teoretických vědeckých metod existují další metody, které se používají v rámci specifické dané skupiny vědních disciplín. Mezi těmito specifickými vědeckými metodami mají zvláštní postavení matematické a statistické metody, které umožňují exaktní vyjádření jevů a vztahů mezi nimi. Matematika napomáhá k řešení problémů tak, že je matematicky zformuluje a s použije matematické operace k řešení jejich matematických modelů. Statistika shromažďuje a třídí data, kvantifikuje jevy a pracuje s teorií pravděpodobností. (Sebera, 2012).

Modelování: do skupiny vědeckých metod patří modelování, které prostřednictvím formulace problému, vytváření modelu a výzkumu modelu přenáší znalost o modelu (jakožto zjednodušeného obrazu skutečnosti) zpět do reality.

V ekonomické teorii se můžeme setkávat s teoretickými modely, které vytvářejí soubor předpokladů, postihujících určité zákonitosti probíhající v realitě. Tyto modely objasňují např. chování ekonomických subjektů, tvorbu cen, produkční funkci apod. (Čížek, 1969).

Vzhledem k významným vztahům mezi ekonomickou realitou, konkrétněji mezi ekonomickými dynamickými systémy a jejich matematickými modely, je této problematice věnována samostatná pozornost v kapitole 4.1.7.

Analýza: myšlenková metoda spočívající v rozložení celku na jeho komponenty a následném zkoumání, jak tyto komponenty fungují jako relativně samostatné prvky a jaké jsou mezi nimi vztahy (Hendl, 2005).

V habilitační práci je tato obecně vědní metoda využita jako teoreticko-metodologický základ pro provedení specifické analýzy problému a pro vyhodnocení poznatků zkoumané problematiky, získaných pomocí literární rešerše.

Syntéza: tato metoda spočívá v integraci jednotlivých komponent do celku. Cílem je získat informace o vzájemných souvislostech mezi komponentami, jež ve výsledku umožní pochopit celek (Hendl, 2005).

Metoda syntézy je v habilitační práci použita zejména jako nástroj pro formulování teoretických závěrů.

Analýza a syntéza tvoří nedílný celek. Nelze je tedy chápat odděleně, jelikož se oba tyto postupy prolínají a doplňují. Závěry jsou obvykle formulované metodou syntézy na základě analýzy. Není to však pouhé skládání jednotlivých částí, ale odhalování nových vztahů a zákonitostí (Molnár, 2012).

V případě této práce se obecné přístupy odráží v analýze jednotlivých ekonomických dynamických systémů a řešení jejich matematických modelů s cílem hledat co nejuniverzálnější metodu jejich zkoumání v co nejobecnějším případě.

Po získání dostatečně rozsáhlého množství publikovaných výsledků o ekonomických dynamických systémech na základě výše zmíněné analýzy byla použita syntéza používaných matematických metod a podstatnou měrou doplněna a rozšířena ta z metod, která mohla cíl práce nejlépe naplnit. K tomu bylo třeba nastudovat a nově využít řadu výsledků z teorie funkcionálních diferenciálních rovnic a abstraktní matematické i funkcionální analýzy.

Abstrakce: myšlenkový proces, v jehož rámci se u různých objektů vydělují pouze jejich podstatné charakteristiky (nepodstatné se neuvažují), čímž se ve vědomí vytváří model objektu obsahující jen ty charakteristiky či znaky, jejichž zkoumání nám umožní získat odpovědi na otázky, které si klademe (Molnár, 2012).

Konkretizace: opačný proces, kdy vyhledáváme konkrétní výskyt určitého objektu z určité třídy objektů a snažíme se na něj aplikovat charakteristiky platné pro tuto třídu objektů (Molnár, 2012).

Proces abstrakce je v našem případě organickým a neoddělitelným procesem jak při vytváření, případně zpřesňování samotného ekonomického dynamického systému, tak zejména při vyjadřování takového systému matematickým modelem, popsaným systémem diferenciálních rovnic se zpožděními.

Konkretizace naopak odpovídá v matematickém modelu dynamickému systému, kterým od obecné teorie a obecně popsatelných výsledků přecházíme ke konkrétnímu ekonomickému dynamickému systému.

Indukce: vychází z poznatku, že pozorování dané jevové kategorie se vyznačuje jistou vlastností. Z toho se usuzuje, že tuto vlastnost budou mít také její další instance. Indukce se používá k převedení pravidelností v datovém materiálu do obecného pravidla (Hendl, 2005).

Dedukce: spočívá v logickém odvození závěru z množiny jiných tvrzení, která považujeme za pravdivá. Množinu tvrzení nazýváme premisy. Dedukce tedy postupuje od obecného k jedinečnému tvrzení (Hendl, 2005).

Metoda dedukce bude v habilitačním spise využita zejména při dedukování závěrů vyplývajících z analýzy soudobé teorie.

Tak jako analýza úzce souvisí se syntézou, tak i indukce je těsně spjata s dedukcí. Indukcí lze dospět na základě zkoumání jednotlivých (zejména empirických) jevů k teoretickým zobecněním, teoretické závěry lze naopak dedukcí v praxi ověřovat.

Obě tyto obecné metody jsou přirozenou součástí modelace reálných procesů matematickými modely a aplikace matematických modelů v praxi, jak je v práci opakované ilustrováno.

Z **dalších metod**, využitých pro řešení problematiky habilitační práce, jmenujme zejména dynamické modelování a metody řešení obyčejných a funkcionálních diferenciálních rovnic.

3.2 Rámcový postup při zpracování habilitační práce

Pro zpracování habilitační práce byl zpracován rámcový plán postupu, vyjádřený následujícími kroky:

1. Stanovení oblasti výzkumu, formulování a vymezení problému;

2. Analýza dostupných bibliografických zdrojů, zahrnující domácí i zahraniční informační zdroje, a to s důrazem na vědecké práce publikované v mezinárodně uznávaných časopisech obsažených v databázích WOS a Scopus. Zhodnocení současných přístupů k problematice;

3. Stanovení cílů habilitační práce na základě předchozích zjištění;

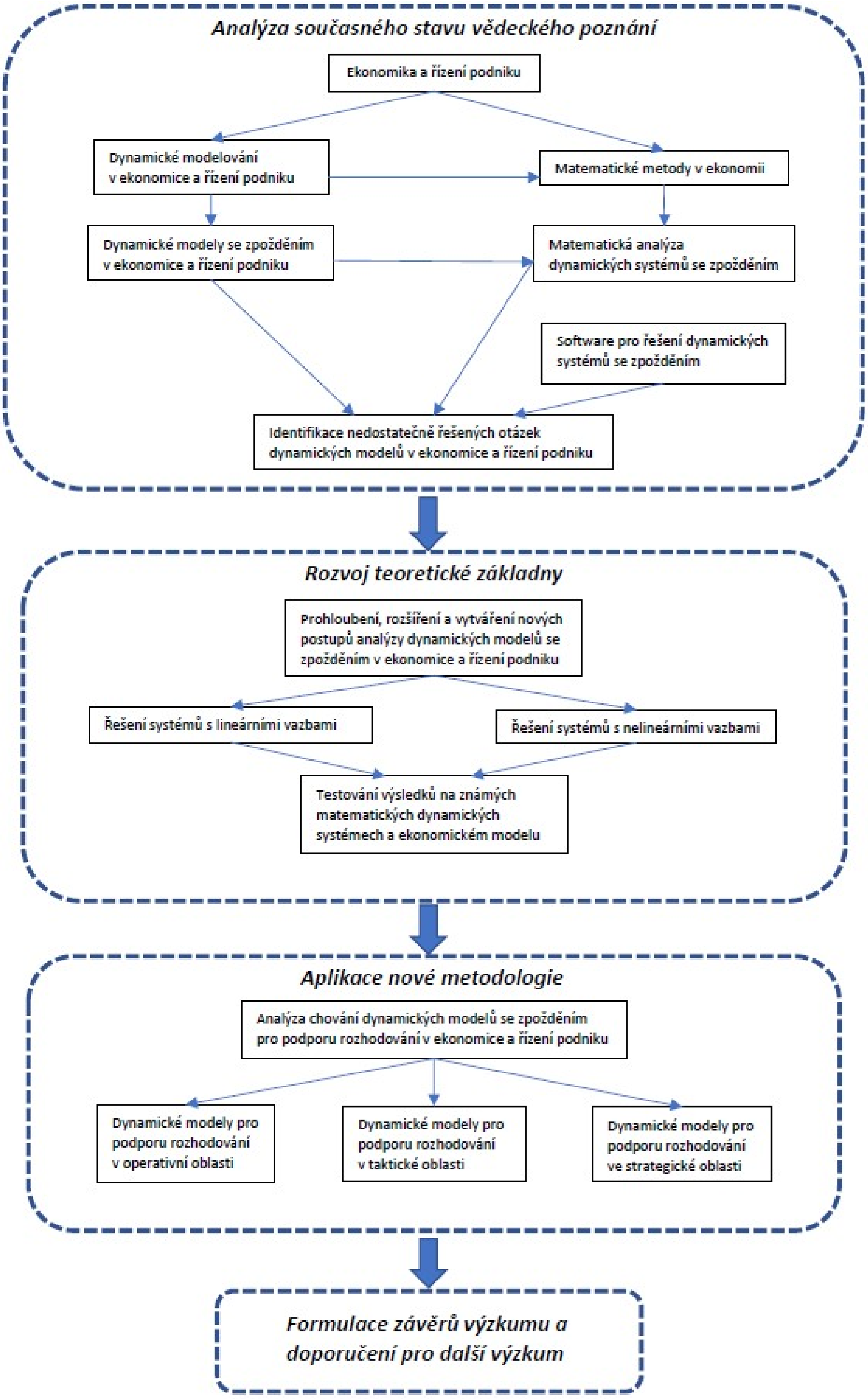
4. Volba vhodných metod, jejichž využití je vhodné pro dosažení cílů habilitační práce, výběr vhodného software;

5. Rozvoj teoretického základu - vytvoření nového postupu;

6. Ověření nového postupu na známých teoretických nebo nově sestavených modelových příkladech;

7. Diseminace dílčích výsledků prostřednictvím vědeckých publikací;

8. Formulace závěrů výzkumu a doporučení pro další výzkum.



Obr. 3.1: Konceptuální schéma, zdroj: vlastní zpracování

Kapitola 4

Současný stav vědeckého poznání

Modelování jevů, které vycházejí z oblasti ekonomiky a řízení podniku a jsou popsané statistickými daty, nám umožňují metody založené zejména na bázi matematických disciplín, jako je diferenciální počet (Aluf, 2014; Balasubramaniam a kol., 2014; Franke, 2018; Nuño & Moll, 2018; Popkova & Ostrovskaya, 2018); statistika (Andriansyah & Messinis, 2019; Cieślik & Hien Tran, 2019; Das a kol., 2019; Wu & Zhang, 2019); lineární a dynamické programování (Zhen a kol., 2017), nebo optimalizace (Beklaryan, 2019; Lankhuizen & Thissen, 2019; Wang a kol., 2019).

V dalším textu se budeme soustředit na dynamické modely v oblasti ekonomiky a řízení podniku, které se vyznačují závislostí na čase. U takových modelů je následující stav determinován současnými a často i předešlými stavy. Jen u velmi málo veličin lze budoucí stav určit pouze na základě znalosti aktuálního stavu dané veličiny. Budoucí stav je obvykle určen i dřívějšími stavy veličin a vztahy mezi veličinami, které by v modelu také měly být zachyceny. Tento model pak může, mimo jiné, představovat soustava rovnic, nerovnic či grafů. Jako stavové proměnné mohou v podnikové ekonomice sloužit například veličiny produkce, spotřeba, investice a další.

4.1 Modely a modelování

V případě, že se rozhodujeme a následně potom svá rozhodnutí realizujeme, nejsou naše rozhodnutí a později i činy bezprostředně založeny na reálném světě. Jsme totiž ovlivňováni jednak subjektivním vnímáním svého okolí, jednak tím, jak vnímáme vztahy mezi jednotlivými předměty našeho zájmu a také představami o budoucích důsledcích našich činů. Aniž bychom si to uvědomovali, v naší mysli se vytváří model reálného světa. Vytvoření takového myšlenkového modelu nám může v mnoha případech napomoci v úvahách o předmětu našeho zájmu. Tyto úvahy vytváříme zpravidla za jasným účelem - usnadnit si řešení konkrétního problému. Vyjádřeno jinými slovy, vytváříme si v našich představách model reality, který usnadňuje naše každodenní rozhodování.

S prudkým rozvojem informačních technologií vzrostl i význam teorie modelů a modelování a v současné době modely nacházejí uplatnění v nejrůznějších oborech. Abychom lépe pochopili podstatu modelování, musíme si nyní přiblížit význam výchozích termínů jako systém a model.

4.1.1 Systém

Pojem „systém" se běžně používá, je však vnímán spíše intuitivně. Používá se v mnoha oborech a také v mnoha významech (např. informační systém, politický systém, ekosystém). Za systém můžeme označit cokoliv, co lze nějakým způsobem (byť i jen obrazně) vydělit z reality, nebo něco, co se nějakým způsobem liší od svého doplňku. Systém lze také označit jako množinu prvků a vazeb mezi nimi, která má jako celek určité vlastnosti. Množina prvků, které nejsou prvky systému, ale mají k němu významné vazby, nazýváme okolí systému. Bez svého okolí nemohou existovat například ekonomické systémy, říkáme o nich, že jsou otevřené, neboť tyto systémy se svým okolím provádí důležité hmotné, energetické, resp. informační výměny. Současně je třeba si uvědomit, že právě ekonomické systémy jsou ovlivňovány nejen prostředím uvažovaným v reálném čase, ale i svojí historií, tzv. hysterezí.

Systém, v němž se od významu času abstrahuje, se nazývá statickým systémem. Pokud se od významu času neabstrahuje, pak se jen výjimečně berou v úvahu i jeho vlastnosti, jak je poznává moderní fyzika. V převážné většině oborů se čas chápe „newtonovsky", to jest jako v klasické fyzice, čili tak, že je smysluplné mluvit o tom, že dvě „události" nastaly v systému současně nebo jedna z nich nastala dříve než druhá. Systém, jehož čas se nezanedbává a je přitom chápán takto „newtonovsky", se v modelování a simulaci nazývá dynamickým systémem (Kindler, 1980).

Za určitých podmínek můžeme za systém považovat např.:

a) reálný objekt (přirozený či umělý);

b) projekt reálného objektu;

c) proces nebo komplex procesů;

d) problém nebo komplex problémů;

e) soubor informačních, regulačních a řídících aktivit, které se vztahují k předchozím bodům, např. informační systém, řídící systém, komunikační systém, regulační systém;

f) abstraktní myšlenkovou konstrukci, výrokovou konstrukci, konstrukci matematických výrazů apod. zaváděnou v případech a) – e);

g) abstraktní myšlenkovou konstrukci, výrokovou konstrukci, konstrukci matematických výrazů apod., vytvářenou bez přímého vztahu k případům a) – e).

Pojem systém byl vytvořen především pro studium komplikovanějších kauzálních vztahů, tedy vztahů mezi souborem určitých příčin a souborem důsledků, způsobených těmito příčinami. Veličiny charakterizující vliv, kterým působí okolí na systém, jsou nazvány vstupy systému. Vnější projevy systému, které charakterizují vliv systému na jeho okolí, jsou pak jeho výstupy.

Systém existující v reálném světě můžeme (nebo chceme) nějak reprezentovat, nahradit systémem jiným, jednodušším, srozumitelnějším, nebo zvládnutelnějším. Zkoumanou skutečnost (systém) budeme nazývat originálem, jeho reprezentaci, což je také systém, nazveme modelem (Pospíšil, 2015).

4.1.2 Model

Slovo model ve významu určité myšlenkové konstrukce má dlouhou historii. Samotné slovo „model“ má svůj původ ve stavitelství, kde označovalo míru, podle níž jsou vyjádřeny proporce stavby. Pochází z latiny (modus, modulus) a vyjadřovalo míru, způsob, později též vzor, předobraz aj. Obecně se tedy modelem rozumí zjednodušený obraz reálné situace, případně jevu. V tomto významu se užívá dodnes a slovo „model“ se používá v běžné řeči ve významu předlohy.

Umělci jako malíř Giotto (1267–1336) a renesanční architekt a sochař Brunelleschi (1377–1446) zahájili novou etapu vývoje geometrických principů, např. perspektivy. V té době byly používány vizuální i matematické modely (např. pro anatomii).

Základy vědeckého modelování pak byly položeny pracemi G. Galilea a I. Newtona v 17. století, kdy se ukázala možnost zkoumat sledované objekty prostřednictvím jejich zástupců, jiných objektů nebo zobrazení. Z doby před simulací a virtuální realitou zůstal v povědomí odborný termín z praxe - „funkční model“, a to pro první exemplář navrženého výrobku, který pracuje tak, jak by výrobek pracovat měl, přestože jiné vlastnosti výrobku (např. estetické) ještě nemá. Z této praxe vznikla i interpretace slova model pro něco zvláštního, nezvyklého či nákladného (např. hlavně před druhou světovou válkou používané termíny model klobouku, model automobilu apod.).

V modelování a simulaci se termín model používán pro analogii mezi dvěma systémy. Jednoduchými příklady je například mapa (model části země na papíře), socha (model osoby, zvířete atd. v neživém materiálu) nebo dětský vláček (model skutečného vlaku ve zmenšeném měřítku).

Jak bylo uvedeno výše, slovo model se v současné době používána v různých významech. Vzhledem k tomu, že existují různá pojetí modelu, chybí doposud jednotná teorie a liší se i terminologie. Pokud budeme hledat definici pojmu model, můžeme nalézt seznamy několika desítek výkladů významu tohoto pojmu. Úplná definice modelu se potom zřejmě neobejde bez použití teorie množin a matematické logiky. Odlišné přístupy k definování modelu také najdeme v přírodních a technických vědách, logice a společenských vědách, jiné pojetí v kybernetice a dalších disciplínách.

V odborné literatuře se pojem model vyskytuje velmi často, může být chápán různě a modely mohou sloužit odlišným cílům. Rozlišujeme i různé typy modelů, jako obrázky, schémata, fyzikální modely skutečnosti aj. Samo využívání modelů pro zkoumání chování reálných soustav bývá akceptováno jak v technických, tak netechnických oborech. Výhodami obecného modelu je, že na jedné straně nás nutí k vytvoření kompletní teorie (teorie, která bere v úvahu všechny relevantní vztahy a jevy) a na straně druhé konfrontuje při testování námi vytvořený model s realitou (tj. naměřenými údaji).

Vlastnosti modelu se mohou lišit v závislosti na jeho použití. Mohou se lišit úrovní formality, jednoznačnosti, bohatosti detailů a relevance. Charakteristiky závisí na základní funkci modelu a na účelu modelování.

Podle (Lave,1975) je model „Pokusná myšlenková struktura používaná jako testovací prostředek“. Můžeme uvést dva základní přístupy k pojmu model (Vachek & Lepil, 1990):

1. model jako přírodní nebo umělý objekt, který je v nějakém vztahu se zkoumaným objektem, a

2. model jako interpretace určité matematické teorie, určitého deduktivního systému.

Cílem tvorby modelů je získat takový obecný model, který je schopen pracovat se širokou škálou dat. Od modelu požadujeme, aby byl maximálně možně efektivní, i když ho použijeme na reálná data, a ne pouze na data vzorová, která byla použita při jeho konstrukci (Leahy, 1994).

Modely mohou mít mnoho různých funkcí:

Vysvětlení jevů: Většina z teorií vyvinutých ve fyzice patří do této kategorie: Newtonova mechanika, termodynamika, Einsteinova teorie relativity, kvantová mechanika, standardní model fyziky částic a mnoho dalších.

Nejde však jen o fyziku. Model agregátní poptávky a úpravy ceny (aggregate demand-price adjustment AD-PA), model agregátní poptávky a inflační úpravy (aggregate demand-inflation adjustment AD-IA) nebo Hicks-Hansenův model IS/LM jsou tři příklady ekonomických modelů popisujících makroekonomickou rovnováhu.

Vědci zkoumající laviny výzkumu vytvářejí modely založené na statistických a fenomenologických údajích, které popisují sněhové podmínky na alpských svazích.

Biologové používají modely predátor-kořist nebo epidemiologické modely ke zkoumání vztahů mezi různými formami života.

Předpovídání: Po vytvoření modelů, které jevy vysvětlují, je lze použít jako další krok k vytvoření předpovědí o budoucím vývoji jevu v reálném světě.

V oblasti lavinového výzkumu využívají vědci data o stavu a topografické informace o svazích, aby předpovídali pravděpodobnost pádu lavin, jejich možnou sílu a předpokládané lokality.

Aerodynamické modely předpovídají například ovladatelnost konstruovaného letounu. Klimatické modely se používají k předpovědi účinků zvýšeného množství skleníkových plynů v atmosféře.

Rozhodování: Například řidič automobilu používá myšlenkový model svého okolí a typického provozu na ulicích, aby se rozhodl, kterou cestou pojede. Tento model reálného světa, redukovaný na ulice a průměrný provoz, samozřejmě není v žádném případě formálním matematickým modelem. Je založen na zkušenostech, a to poněkud vágních, pokud to lze vůbec vyjádřit slovy.

Formálnějším modelem pro rozhodování může být návrh chemické továrny se stovkami rozhodovacích proměnných a tisíci dalších proměnných a omezení, zapsaných jako matematické rovnice a nerovnice. Představují prostor, kapacitu, nákladová omezení a chemické principy, jako je zachování hmoty.

Komunikace: Dalším důležitým aspektem modelů je, že je lze použít ke sdělování znalostí. Pokud chce osoba A navštívit osobu B, může se zeptat na cestu. B nakreslí správnou trasu na list papíru několika tahy a přidá pár dalších značek a text, například „tady na rohu je žlutý dům s malou zahrádkou“. Tento list papíru je vizuálním modelem okolí domu osoby B; jeho účelem je předat podmnožinu znalostí osoby B o jejím městě osobě A.

Ostatní: Podrobné kontrolní seznamy pro údržbu letounu jsou také modely (obsahující velmi mnoho podrobností a jsou explicitní), stejně jako soubory formálních norem (ANSI, DIN, EU normy, ...), které se v moderních zemích používají k regulaci veřejného života.

Funkčnost modelu je podmíněna splněním několika kritérií:

- měl by být konzistentní s reálnými daty,
- měl by umožnit ověření hypotéz, které jsou s ním spojeny,
- měl by být co nejjednodušší a měl by preferovat co nejmenší počet parametrů (principle of parsimony),
- řešení by mělo být optimální,
- model by měl umožnit racionální rozhodování (Cipra, 1974).

4.1.3 Modelování

Při vytváření modelů začíná vše od reálného objektu, kterým se zabýváme. V modelu jsou objekty reálného světa nahrazeny jinými, jednoduššími objekty, obvykle nesoucími stejná jména. Znalosti, které máme o reálném světě, jsou strukturovány podle modelu a vše je redukováno na ty jevy a aspekty, které jsou považovány za důležité. Model samozřejmě může popsat pouze část jevu reálného světa, a proto je jeho užitečnost omezena na rozsah jeho použití.

Činnost zaměřenou ke konstrukci modelu nazýváme modelováním. Jde o zjednodušené zobrazování vnějšího světa a zkoumání v něm existujících objektivních zákonitostí. Podstatou modelování ve smyslu výzkumné techniky je náhrada zkoumaného systému jeho modelem (přesněji: systémem, který jej modeluje), jejímž cílem je získat pomocí pokusu s modelem informaci o původním zkoumaném systému. Konstrukce modelu a pravidla této konstrukce jsou zpravidla vázána na řešení konkrétních úloh teoretického i praktického rázu. V tomto smyslu tedy platí, že vytvoříme model, v němž modelovaným systémem je právě námi zkoumaný systém. My však budeme experimentovat s modelujícím systémem, přičemž cílem bude dozvědět se něco o modelovaném systému. Je ale nutné si uvědomit, že teorie nemusí být jen zobrazením skutečnosti v její objektivní podobě, ale že může jít o její určitou idealizaci. Časté jsou také případy, kdy je z určitých důvodů výhodnější pracovat s modelem místo experimentu „na živo“. Pokud nahrazujeme realitu matematickou strukturou a matematickými symboly a znaky, hovoříme o matematickém modelování.

Období historického vývoje modelování lze rozdělit do několika etap podle kvalitativních změn v rozvoji modelové abstrakce.

Výraz „modelování“ pochází z latinského slova modellus. Popisuje typický způsob, jakým se člověk vyrovnává s realitou. Antropologové se domnívají, že schopnost vytvářet abstraktní modely je nejdůležitějším rysem, který dal homo sapiens konkurenční výhodu nad méně rozvinutými lidskými rasami, jako je člověk neandrtálský, homo neandertalensis.

Ačkoli abstraktní reprezentace objektů reálného světa se používají již od doby kamenné, což je doloženo malbami jeskynních lidí, skutečný průlom v modelování přišel s kulturami starověkého Blízkého východu a starověkého Řecka.

První rozpoznatelné modely byla čísla; počítání a „zapisování“ čísel (např. jako značky na kostech) je dokumentováno přibližně 30 tisíc let před Kristem. Astronomie a architektura byly další oblasti, v nichž hrály roli modely, a to již kolem roku 4 tisíce před naším letopočtem.

Je dobře známo, že kolem roku 2 tisíce před naším letopočtem měly alespoň tři kultury (babylónská, egyptská, indická) dobré znalosti matematiky a používaly matematické modely ke zjednodušení svého každodenního života. Matematika se většinou používala algoritmickým způsobem určeným pro řešení specifických problémů.

Vývoj filosofie v helénském období a její propojení s matematikou vedly k deduktivní metodě, která dala vzniknout základům matematické teorie. Počínaje Thalésem z Milétu kolem roku 600 př. n. l. se geometrie stala užitečným nástrojem při analýze reality a samotná analýza geometrie vedla k vývoji matematiky nezávisle na její aplikaci.

Významní filosofové jako Aristotelés, Eudoxos a mnoho dalších přidali další dílky a během 300 let následujících po Thalésovi se geometrie a zbývající odvětví matematiky dále rozvíjely. Vrcholu dosáhl Eukleidés z Alexandrie asi v roce 300 př. n. l., když sepsal „Základy“, sbírku knih obsahujících většinu matematických znalostí dostupných v té době. „Základy“ obsahovaly mimo jiné první stručný axiomatický popis geometrie a pojednání o teorii čísel.

Euklidovy knihy byly používány pro výuku matematiky po stovky let a kolem roku 250 př. n. l. Eratosthenés z Kyrény, jeden z prvních „aplikovaných matematiků“, použil tyto znalosti pro výpočet vzdáleností Země-Slunce a Země-Měsíc a pro nejznámější výpočet obvodu Země pomocí matematicko-geometrického modelu. Další důležitý krok ve vývoji modelů udělal Diophantus z Alexandrie asi v roce 250 n. l. ve svých knihách „Aritmetika“, kde položil základy algebry založené na symbolice a pojmu proměnné.

V astronomii Ptolemaios, inspirovaný Pythagorovou myšlenkou popsat nebeskou mechaniku kruhy, vytvořil kolem roku 150 n. l. matematický model sluneční soustavy s kruhy a epicykly pro účely předpovídání pohybu Slunce, Měsíce a planet. Model byl tak přesný, že se používal až do doby Keplera v roce 1619, kdy Kepler sestavil lepší a jednodušší model pro pohyby planet, který po úpravách Newtonem a Einsteinem platí dodnes.

Vytváření modelů pro problémy reálného světa, zejména matematických modelů, je pro vývoj lidstva natolik důležité, že podobné metody se nezávisle vyvinuly v Číně, Indii a zemích, jako je Persie.

Jedním z nejznámějších arabských matematiků je Abu Abdalláh Muhammad ibn Músá al Chvárizmí (konec 8. století). Jeho jméno, dodnes zachované v moderním slovu algoritmus, a jeho slavné knihy „O indických číslech“ (dnes nazývaných arabská čísla) a „Stručná kniha o postupech výpočtu pomocí sčítání a vyrovnávání rovnic“ obsahují mnoho matematických modelů a algoritmů pro řešení reálných problémů v obchodě, dědictví, zeměměřictví a zavlažování. Termín algebra byl převzat z názvu jeho druhé knihy.

Západní civilizaci trval vývoj matematiky a matematických modelů, zpočátku zejména pro zeměměřictví, až do 11. století.

Pravděpodobně prvním velkým západním matematikem po úpadku řecké matematiky byl Fibonacci, Leonardo da Pisa (cca 1170 – cca 1240). Jako syn obchodníka podnikl Fibonacci mnoho obchodních cest do Orientu a v té době se seznámil s orientálními znalostmi o matematiky. Použil algebraické metody zaznamenané v knihách Al Chvárizmího, aby dosáhl úspěchů jako obchodník, protože si uvědomil nesmírnou praktickou výhodu indických číslic oproti římským číslicím, která se v té době ještě stále používaly v západní a střední Evropě. Jeho vysoce vlivná kniha „Liber Abaci“, poprvé vydaná v roce 1202, začala představením deseti „indických číslic“ (0, 1, 2, ..., 9), jak je nazýval. Toto datum bylo obzvláště důležité, protože přineslo do Evropy číslo nula, abstraktní model pro prosté nic. Samotná kniha byla napsána jako algebraický manuál pro komerční použití a podrobně vysvětlovala aritmetická pravidla pomocí početních příkladů, které byly odvozeny např. z měření a přepočtu měn.

V pozdějších stoletích bylo objeveno stále více matematických principů a složitost modelů rostla. Je důležité si uvědomit, že navzdory úspěchům Diophanta a Al Chvárizmího bylo systematické používání proměnných skutečně zavedeno až Vitou (1540 – 1603). Přesto trvalo dalších 300 let, než byla plně

Cantorem a Russellem pochopena skutečná role proměnných ve formulaci matematické teorie. Fyzika a popis přírodních principů se staly hlavní hnací silou v modelování a ve vývoji matematické teorie. Později se připojila ekonomie a nyní vyžaduje modely a jejich analýzu stále větší počet aplikací.

První nástup teorie modelování v současném slova smyslu se datuje od 16. stol. a úzce souvisí s rozvojem matematiky a mechaniky. V té době byly formulovány také základní principy teorie podobnosti (podobnostní přiřazení dvou různých dynamických systémů).

Další etapou vývoje bylo formulování abstraktních modelů ve fyzice v 19. stol. Především druhá polovina 19. stol. se vyznačuje širokým uplatněním fyzikálních modelů. Jedná se o rozvoj fyzikální podobnosti a modelování na poli techniky. Postupem času vědci zjistili, že na některé procesy je obtížné aplikovat přímé fyzikální modelování, a proto začali využívat analogii, založenou na matematické podobnosti různých fyzikálních procesů. Největší oblibu dosáhl tento způsob modelování v 50. a 60. letech 20. století.

V počátcích svého vývoje se modelování orientovalo především na technické problémy. Situace se změnila s nástupem počítačů a rozvojem kybernetiky. S postupným nárůstem využívání výpočetní techniky vznikala možnost využít ji pro modelování a objevuje se pojem počítačového modelování. Modelování se může využívat jak v technických, tak i netechnických oborech. Současné možnosti již umožňují modelování a simulaci problémů, které se pohybují na hranici mezi jednotlivými obory. S modelováním se můžeme setkat v chemii, biologii, lékařství, lingvistice, ekonomii apod.

4.1.4 Simulace

Obecně platnou definici pojmu simulace, stejně jako pojmu systémy na podporu rozhodování v literatuře nenajdeme. Můžeme říct, že cílem simulace je popsat a analyzovat zkoumaný systém, odhadnout jeho budoucí chování a navrhnout strukturu systému.

„Základní myšlenka simulace je vlastně prostá: když nejde problém řešit analyticky, tak napodobíme daný systém pomocí počítačového modelu a poté pozorujeme, co se děje.“ (Fiala, 2010).

Winstona a Goldberg říkají, že simulaci můžeme definovat jako techniku, která napodobuje činnost systému reálného světa a jeho vývoj v čase pomocí tvorby simulačního modelu. Ten má obvykle podobu souboru předpokladů o fungování systému, vyjádřeného matematickými nebo logickými vztahy mezi objekty zájmu v systému (Winston & Goldberg, 2004).

V (Chobot & Turnovcová, 1980) můžeme najít přehled případů, kdy se definicí simulace zabývají další autoři:

- Podle Shannona je simulace proces tvorby modelu reálného systému a provádění experimentů s tímto modelem za účelem dosažení lepšího pochopení chování studovaného systému či za účelem posouzení různých variant činnosti systému.
- Taylor definuje simulaci jako numerickou metodu, která spočívá v experimentování s dynamickými matematickými modely reálných systémů na číslicových počítačích.
- Dahl považuje simulaci za techniku, která nahrazuje dynamický systém modelem s cílem získat informace o systému pomocí experimentů s modelem.
- Zeigler charakterizuje problematiku simulace pomocí tří elementů (reálný systém, model, počítač) a dvou vztahů (modelového a simulačního).

Využívání simulačních metod v různých oblastech má souvislost se zaváděním výpočetní techniky a využíváním počítačů. Mezi software, který je využíván pro simulaci lze zařadit např. MATLAB, Maple, MapleSim, Powersim apod.

4.1.5 Obecný postup při tvorbě modelu

Proces tvorby modelu můžeme rozdělit na několik fází:

Identifikace systému - určíme prvky systému, které jsou pro nás podstatné. Dále musíme popsat jejich vzájemné vztahy, určit rozměr úlohy, její parametry apod.

Sestavení modelu – po sestavení mentálního modelu vybereme prostředky vhodné pro popis prvků vybraného systému a vztahů mezi nimi a následně provedeme transkripci závislostí do zvoleného prostředí modelu a model formalizujeme.

Zkoumání chování modelu z hlediska možných změn parametrů - jedná se o fázi ladění modelu. Testujeme, zda jsou dostatečně zachyceny sledované vztahy. Pozorujeme vliv malých změn na chování řešení modelu. Pokud i malé změny parametrů vyvolají silnou odezvu a neadekvátní změny řešení, může být model nestabilní, a proto pro další použití nemusí být vhodný.

Srovnání řešení se skutečností - v této fázi testujeme model za použití reálných dat. V případě, že výsledky neodpovídají praxi, je model ve stávající podobě nepoužitelný. Pak je nutné se vrátit k fázi 2 nebo dokonce k fázi 1 modelování a celý postup opakovat.

Interpretace získaných výsledků - tato fáze by měla obsahovat správný výklad výsledků, vypracování doporučení a samotné uvedení výsledků do praxe.

4.1.6 Různé typy modelů

Modelů existuje mnoho typů a jsou klasifikovány podle různých kritérií. Mohou být statické, nebo dynamické, matematické, nebo fyzikální, stochastické, nebo deterministické. Jednou z velmi užitečnějších klasifikací je i ta, rozdělující je na simulační a optimalizační. Právě rozdíl mezi optimalizačními a simulačními modely je velmi zřetelný, protože jsou konstruovány k úplně jiným účelům.

Při třídění modelů do skupin může být východiskem modelovaná skutečnost a prostředky modelování, jakož i charakter cílů, kterým konstrukce modelu slouží. Velmi jednoduché je rozlišení materiálních modelů od myšlenkových (mentálních) modelů.

Zatímco materiální modely zobrazují reálně existující objekty, modely druhé skupiny mají charakter spíše teoretický a existují jen v našem vědomí.

Myšlenkové modely je možné dále třídit na představové modely, vytvářené hypotetickou konstrukcí nebo idealizací skutečnosti podle představ, a na symbolické modely, jejichž prvky jsou vytvářené symboly nebo znaky. Modely patřící do skupiny symbolických modelů mají velmi blízko k modelům, u kterých mají rozhodující význam logické a matematické vlastnosti. Takové modely se nazývají modely logické či formální nebo také matematické.

V následujících odstavcích se budeme věnovat vybraným modelům myšlenkovým a budeme se soustředit modely matematické a modely založené na principu umělé inteligence.

Matematické a matematicko-statistické modely

Nejrozšířenější skupinou tradičních modelů jsou **matematické a matematicko-statistické modely**, které bývají často označovány jako modely konvenční a jsou postaveny na hlubokých (kvantitativních) znalostech.

Matematické modelování má celou řadu výhod, jako je obecnost, stručnost, přesnost a poměrně snadná ověřitelnost přijatých hypotéz. Nevýhodou je, že však nejsou zcela a vždy adekvátní realitě světa, která je spíše nepřesná a neurčitá.

Matematické modelování v jakémkoliv oboru může být velmi silný nástroj, který poskytuje široký matematický aparát pro řešení složitých fyzikálních, ekonomických, biologických problémů apod. Je třeba si ovšem dát pozor na samotnou podstatu problému. Odborník musí vytvořit model dostatečně odpovídající realitě, ale zase ne příliš složitý. Matematický model musí (stejně jako každý jiný model) objektivním způsobem znázorňovat jevy a procesy reálného světa. Matematický model vyjadřuje zákonitosti jevů a procesů, a to jak v oblasti vědeckého poznávání, tak v oblasti praktické lidské činnosti. Je zajímavé, že i když matematické modely neobsahují žádné vztahy, které do nich nebyly vloženy, přesto poskytují poznání, které do nich nebylo vědomě dáno. Matematické modely mohou přispět k poznání tím, že naznačí nebo dokonce umožní dokázat obecné výsledky, které byly obsaženy v souborech pozorování, ale nebyly z těchto souborů zřejmé. Mohou poskytovat podnět a inspiraci k budoucímu bádání.

Matematický model můžeme zjednodušeně definovat jako určitou formu zobrazení některých aspektů jevů a procesů reálného světa matematickými prostředky. Takovým prostředkem může být třeba soustava rovnic obsahující proměnné (veličiny) a konstanty (parametry).

V 19. stol. se začalo v teoretické matematice užívat významu slova model ve smyslu přehledného znázornění objektů abstraktní teorie (např. modely neeukleidovských geometrií, vícerozměrných geometrií, konečných grup). Ve 20. století byl pomocí matematické logiky zformován pojem „matematický model situace“. Na rozdíl od převážně geometrických modelů předcházejícího období jde o modely v algebře a jiných odvětvích, které mají vypracovaný kalkul, tj. počítání se symboly.

Matematické modelování se zabývá tvorbou matematických modelů. Jde o překlad problémů (úloh) z aplikační oblasti matematiky (tj. např. z fyziky, biologie, chemie, ekonomie, atd.) do matematicky zpracovatelné formulace. Tato formulace umožňuje numerickou analýzu problému, jejímž cílem je proniknout do podstaty problému, klást otázky, hledat odpovědi a získat užitečné a potřebné informace o zkoumaném objektu.

Termínem matematické modelování se také označuje vytváření a analýza postupů, které využívají matematické prostředky pro hlubší pochopení reálných procesů, jevů, stavů a principů.

Matematické modelování je nepostradatelné v mnoha oblastech. Udává směr pro analýzu problému a objasňuje, co rozumíme řešením problému. Dále umožňuje důkladné pochopení modelovaného systému a umožňuje účinné využití nových informačních technologií. Po dlouhou dobu svého vývoje bylo modelování zaměřeno především na oblast techniky. Avšak nástup počítačů a vznik kybernetiky výrazně ovlivnily skoro všechny významné obory lidské činnosti. V současné době existuje velké množství oborů, ve kterých je matematické modelování přímou součástí vědních a technických oblastí. Jsou to například fyzika (fyzikální technologie), chemie (chemické technologie), biologie, ekologie, elektrotechnika, strojírenství atd. Díky metodám matematického modelování se v současné době intenzivně rozvíjí řada oborů. Jsou to například antropologie (klasifikace a rekonstrukce lebek), architektura (virtuální prostředí, technické parametry architektonických návrhů), biologie (proteinová teorie, populační dynamika, šíření infekčních nemocí), ekonomie (analýza trhu a marketing, teorie efektivnosti), farmakologie (dávkování léků, analýza účinnosti nových léků), fyziologie a medicína (biochemické reakce, kinetika enzymů, činnost srdce, počítačová tomografie, magnetická rezonance), geovědy (predikce zásob ropy a rudy, tvorba map, GPS), chemie (chemická rovnováha, chemické reakce), hudba (analýza a syntéza zvuku, hudební akustika), kriminalistika (identifikace, vyšetřovací metody), lingvistika (automatický překlád), meteorologie (předpověď počasí, globální oteplování), neurovědy (neuronové sítě, šíření neuronových signálů) atd.

U složitých modelů se obecně přijímá potřeba počítačů v procesu výpočtu řešení. U rozsáhlých datových souborů nebo dat, která musí být získána z různých zdrojů, je akceptována rovněž počítačová podpora v kroku sběru dat.

Až do první třetiny 20. stol. se většina matematických modelů používala k popisu jevů a k formulaci kvalitativních výroků o popisovaných problémech reálného světa. Od té doby se situace dramaticky změnila. Obrovský nárůst výpočetního výkonu posunoval zájem o matematické modely stále více od popisu problému k řešení problémů.

Z toho plyne důležitý důsledek pro samotné matematické modelování a pro strukturu modelů: jsou-li nejdůležitější závěry, které lze z modelu vyvodit, a kvalitativní výroky, které jsou odvozeny analytickými prostředky pomocí mnoha matematických teorií, je důležité formulovat model velmi stručně, zejména přizpůsobený na míru dostupným analytickým metodám. Potřeba numerických řešení v posledních desetiletích však vyvolala nutnost změnit strukturu modelu a přizpůsobit ji dostupným algoritmům řešení.

Klasifikace matematických modelů Matematické modely můžeme klasifikovat podle různých hledisek. Některé z nich si nyní přiblížíme.

Klasifikací **podle charakteru veličin a proměnných** v něm vystupujících. Rozlišujeme je podle jednoznačnosti transformace vstupních proměnných na modely deterministické a stochastické.

Deterministické modely jsou již svojí podstatou velice precizní. Mají povahu zákonitostí, jež při dodržení určitých předpokladů a podmínek platí vždy, neboli vyhovují každé empirické situaci. Matematický model je vyjádřením problému pomocí fyzikálního a matematického formálního aparátu. Jedná se o matematický nebo fyzikální popis reálné situace na základě stavů, toků (finanční, materiálové, nehmotné,. . .) a vazeb mezi jednotlivými složkami. Díky těmto modelům je možné pro řešení problémů využívat i výpočetní techniku.

Klasickou formou reprezentace neurčitosti, která je bližší reálnému světu, je aparát **matematické statistiky**. Je pro něj charakteristická nejistota, kterou pociťujeme i kolem samotné matematické formy modelu. Zjednodušeně lze přijmout definici stochastického modelu jako rovnice nebo soustavy rovnic obsahující náhodné veličiny, nenáhodné veličiny (fixní, pevné) a parametry (konstanty).

Nejjednodušší stochastické modely jsou lineární. Pro reálné složitější nelineární modely se používá linearizující zjednodušení. Stochastické modely bývají též označovány jako pravděpodobnostní. Dovolují dostatečně přesnou matematickou manipulaci se vztahy mezi veličinami, i když ve skutečnosti platí tyto vztahy pouze přibližně. Statistické přístupy, postavené na přístupech empirické pravděpodobnosti, však - přes svoji popularitu – trpí řadou omezení. Je to především schopnost reflektovat pouze neurčitost typu stochastičnost. Další problém je v nedostupnosti dostatečného počtu pozorování. Časté jsou také problémy spojené s platností řady apriorních předpokladů, nezbytných pro korektnost statistických metod (Pokorný, 1996). V oblasti modelování a simulace se vedle testování statistických hypotéz nejčastěji uplatňují metody regresní a korelační analýzy, analýza časových řad a metody vícerozměrné statistické analýzy.

Úkolem regresní analýzy je nalezení teoretické regresní funkce, vhodné k vystižení sledované závislosti, určení bodových, popřípadě intervalových, odhadu regresních koeficientu, určení odhadu hodnot regresní funkce pro účely prognostické a ověření souladu mezi navrženou regresní funkcí a experimentálními daty. Základním cílem korelační analýzy je měřit sílu (intenzitu, těsnost) korelační závislosti mezi sledovanými veličinami. V aplikacích jde většinou o vícenásobnou regresi a korelaci, protože se sleduje závislost vybrané náhodné veličiny na skupině dvou a více jiných veličin.

Ekonometrickým modelem potom rozumíme matematický model, který je matematicko-statistickou formulací ekonomické hypotézy. Vyjadřuje závislost ekonomických veličin na veličinách, které je podle hypotézy vysvětlují. Tyto závislosti mohou být popsány jednou či více rovnicemi buď vzájemně nezávislými nebo propojenými vzájemnými zpětnými vazbami. Způsobů využití odhadnutého ekonometrického modelu je mnoho a to jak na makroúrovni při kvantifikaci a testování ekonomických hypotéz vycházejících z ekonomické teorie, tak na mikroúrovni při zkoumání vztahů mezi ekonomickými proměnnými, jako jsou poptávka, spotřeba, ceny nebo důchody. Významnou roli z hlediska teorie rozdělování a teorie růstu hrají makroekonomické produkční funkce.

V některé literatuře se můžeme setkat s dělením **podle stupně popisujících rovnic na modely lineární a nelineární**. Lineární model je ten, v němž lze uplatnit princip superpozice. Obecně platí, že je-li model lineární a lze využít superpozice, je jeho řešení často velmi jednoduché a jednoznačné. Chování takových modelovaných systémů pak lze předpovědět i do budoucnosti. Je-li model nelineární a nelze tedy využít principu superpozice, je nutné pro řešení využít diferenciální rovnice, což je mnohdy velmi složité. Není také zaručeno, že se nám podaří předpovědět stav modelovaného systému i do budoucnosti. V praxi se často využívá možnosti zjednodušit nelineární modely tím, že se linearizují. Nicméně toto zjednodušení je nutné vždy zvážit, vzhledem k tomu, že linearizované modely ne vždy poskytují uspokojivé výsledky.

Dalším možným kritériem je **časové hledisko**. Podle závislosti operátoru transformace vstupních a výstupních veličin v čase můžeme modely rozdělit na dynamické a statické. Pokud se zkoumaná veličina v čase nemění, pak čas v modelu vůbec neuvažujeme. Takové modely označujeme jako modely statické. Statický model bývá převážně zapsán nějakým systémem rovností, které vyjadřují strukturu (v širokém smyslu tohoto slova) modelovaného jevu. V případě, že se zkoumaná veličina může v čase měnit (častější případ), pak časové hledisko do modelu zařadíme a hovoříme o dynamických modelech. Pro dynamický model je typické, že je tvořen systémem diferenciálních, nebo parciálních diferenciálních rovnic. Jejich řešení popisuje chování modelovaného procesu v čase. Těmito modely se budeme zabývat podrobněji.

Pokročilé metody - umělá inteligence

Velice často jsou v praxi využívány závěry, které jsou výsledkem rozhodovacích procesů v mozku experta. Kvalita jeho závěrů je závislá na schopnosti efektivního zpracování dostupných informací, přičemž jejich neurčitost - vágnost - má zcela jiný charakter než neurčitost stochastická. Jde o efektivní využívání pojmové, slovní neurčitosti, jež je u lidí vysoce vyvinuto. Účinné je i použití nenumerických algoritmů, které umožňují expertovi začlenit hluboké znalosti společně se znalostmi mělkými s efektem dosažení vyšší kvality závěrů při řešení problémů, rozhodování a řízení (Pokorný, 1996).

Vychází-li matematická statistika ze zákonů empirické pravděpodobnosti s využitím znalostí o rozložení hustoty pravděpodobnosti náhodných jevů, vychází metody pro práci s vágností ze zákonů tzv. distribuce možnosti. Je zajímavé, že většina těchto technologií má svůj původ v biologických úkazech nebo v chování lidí či zvířat a mnoho těchto technologií je analogických se systémy, které lze najít v lidském nebo zvířecím prostředí (Tsoukalas, 1997).

Umělá inteligence je pojem, který zatím není jednotně definován, například M.Minsky (Minsky, 1996) definuje umělou inteligenci takto: „...umělá inteligence je věda o vytváření strojů nebo systémů, které budou při řešení určitého úkolu užívat takového postupu, který – kdyby ho dělal člověk – bychom považovali za projev jeho inteligence“. Jiní autoři (Rich & Knight, 1991) se domnívají, že „...umělá inteligence se zabývá tím, jak počítačově řešit úlohy, které dnes zatím zvládají lidé lépe.“

Oblast umělé inteligence je velice rozsáhlá a možnosti využití rychle rostou. Použití těchto metod není vhodné v případech, kdy je potřeba stoprocentní spolehlivost nebo pokud je k dispozici deterministická metoda pro řešení úlohy. Naopak velkou výhodou těchto metod je, že výsledek nezávisí na počátečních podmínkách. Možnosti uplatnění a podmínky použití se liší podle použitého prostředku, procesu, složitosti řešeného systému a definovaného problému. Výsledky pokročilých metod vedou ke kvalitnějšímu rozhodovacímu procesu, zejména u multikriteriálních a obtížně algoritmizovaných úloh.

Kvalitativní modelování je výsledkem snahy zformulovat pravidla a odvozovací mechanismus pro takovéto každodenní uvažování (Dohnal, 1997). Kvalitativní uvažování lze použít v situacích, kdy přesné údaje a vztahy nejsou dostupné nebo použitelné, protože pracuje s obecnými údaji, které kvalitativně charakterizují jistý jev. Výsledkem kvalitativního uvažování je několik možných scénářů dalšího vývoje systému, ze kterých lze za pomoci kvalitativní hodnoty některé vyloučit jako tzv. nekonzistentní chování.

Postupně vzniklo několik různých způsobů tvorby kvalitativních modelů podle toho, jaký byl zvolen k dané problematice přístup. Kvantitativní modely nám poskytují prostředek k odvození několika základních poznatků o systému, stanovení výsledku působení více procesů současně a predikci začátku a konce procesů. Kvalitativní simulace podle (Kuipers, 1989) vychází ze znalosti struktury systému a počátečního stavu. Jejím výsledkem je orientovaný graf reprezentující možné budoucí stavy systému. Strukturu systému můžeme charakterizovat fyzikálními parametry systému a omezujícími rovnicemi, které popisují vztahy mezi těmito parametry. Tyto vztahy mohou být například jednoduché matematické vztahy jako součet, součin nebo derivace. Vyjadřují kvalitativně funkcionální závislost dvou parametrů.

Teorie fuzzy množin nám umožňuje popisovat reálné jevy přesněji, než nám dovolovala klasická matematika a logika. Nevýhodou klasických přístupů je jejich obtížná aplikovatelnost v situacích, které jsou popsány pouze slovními proměnnými. Tyto slovní proměnné vyjadřují kvalitativní hodnocení dané situace. Právě takový slovní popis bývá jedinou dostupnou a validní informací o popisovaném jevu či situaci.

Fuzzy lineární programování je jednou z možností, jak kvalitativní proměnné korektně uplatnit v modelech. Fuzzy lineární programování dává možnost vnést do klasických úloh lineárního programování prvky, které jsou klasickými způsoby obtížně popsatelné, nebo které mají při výpočtu pomocí klasického LP prázdnou množinu řešení. Pro formalizaci pojmové neurčitosti a její zpracování se v nich využívá principů fuzzy množinové matematiky a vícehodnotové jazykové (fuzzy) logiky, popsané v (Zadeh, 1965) a (Dubois & Prade, 1980). Fuzzy logika nám dává jazyk s vlastní syntaxí a sémantikou, který nám umožňuje slovně popsat kvalitativní znalosti o řešeném problému. Fuzzy logiku lze použít i u netechnických aplikací, jak ukazuje příklad aplikace pro obchodování na burze. Lze jej také s úspěchem využít v lékařských diagnostických systémech nebo při analýze rukopisu. Systém fuzzy logiky lze vlastně použít téměř v jakémkoli systému, který má vstupy a výstupy. Systémy fuzzy logiky se dobře hodí pro nelineární systémy a systémy s více vstupy a výstupy. Mohou pracovat s jakýmkoli přiměřeným počtem vstupů a výstupů. Fuzzy logika se rovněž osvědčuje v případech, kdy systém nelze snadno modelovat tradičními prostředky. Nejrozšířenější využití fuzzy modelu jsou expertní systémy (DSS - Systémy na podporu rozhodování), které jsou sestaveny na základě mělkých znalostí poskytnutých experty dané oblasti (Dostál, 2017).

Genetické algoritmy jsou nekonvenční vyhledávací nebo optimalizační algoritmy, které byly inspirovány ději pozorovanými v procesu evoluce v přírodě. Jinými slovy, algoritmus pracuje s jistými jedinci (populací jedinců), jejichž vlastnosti jsou reprezentovány v určité struktuře, která je připodobněním chromozómu tohoto organismu. Cílem algoritmu je přitom vytvářet v populaci jedinců stále silnější jedince vyhodnocováním jeho „kvality“, která musí být vyjádřitelná funkcí, obvykle nazývanou účelová funkce (fitness function) (Goldberg, 1986). Tato vlastnost předurčuje algoritmus k použití na řešení optimalizačních problémů, tedy problémů, kdy hledáme nejlepší z možných řešení daného problému.

Většina evolučních algoritmů využívaných pro optimalizaci je inspirována Darwinovskou evolucí, jež je založena na předpokladu, že biologická evoluce je výsledkem přirozeného výběru. Tento princip se realizuje pomocí ohodnocovací (též účelové nebo fitness) funkce. Můžeme se s ní setkat například v genetických algoritmech v (Mařík a kol., 2001; Vondrák, 2009) nebo v případě systémů založených na evolučním programování (Kvasnička, 2000).

Výhodou algoritmu je, že při řešení problému pracuje pouze s řetězci jedniček a nul a kvalitou řetězců. O kvalitě se přitom dovídá při dekódování funkce. Snahou algoritmu je získávat co nejlepší řetězce. V algoritmu se využívají pouze tři operátory – reprodukce, křížení a mutace. Při reprodukci se do nové generace kopírují řetězce ze staré generace, křížení spočívá ve výměně informací mezi řetězci a mutace způsobí náhodné změny v řetězci.

Genetické algoritmy nalezly uplatnění v řadě oblastí: numerická optimalizace a rozvrhování, strojové učení, tvorba modelů (ekonomických, populačních, sociálních), apod. Z hlediska dobývání znalostí z databází je zajímavé využití genetických algoritmů přímo pro učení se konceptům nebo použití genetických algoritmů pro optimalizaci neuronových sítí. Genetické algoritmy mohou být využity například k optimalizaci při alokaci aktiv nebo k vyhodnocování výstupů z neuronových sítí (Mařík, a kol., 2001).

Umělá neuronová síť je výpočetní struktura inspirovaná pozorováním procesů v neuronových sítích známých ze živé přírody. Podstatou je pojetí umělého neuronu, který má napodobit činnost neuronu v lidském mozku. Umělé neuronové sítě bývají vybráno pro modelování chování složitých soustav díky jejich schopnosti učení se.

Základním schématem je síť složená z primárních jednotek – neuronů. Samotné neurony si lze zjednodušeně představit jako „černou skříňku“, která sečte všechny vstupy ohodnocené vahami a takto získanou hodnotu použije jako argument přenosové funkce. Funkční hodnota vystupující z neuronu pak vstupuje do další, vyšší vrstvy nebo vystupuje ven ze sítě. Neuronové sítě mohou mít jednu, dvě nebo více vrstev.

Umělé neuronové sítě tedy mohou v reálném životě široké uplatnění, například v modelování a řízení nelineárních procesů anebo v predikci časových řad a v případném dalším rozhodování. V praxi se s nimi můžeme setkat v souvislosti s prognózami dalšího vývoje v meteorologii, ekonomii, dopravě, energetice, chemii a také v lékařství.

Vývoj postupně směřuje ke kombinování jednotlivých technologií za účelem získání optimálních přístupů pro různé typy datových souborů. Již dnes se můžeme v literatuře setkat s pojmem hybridní systém ve smyslu kombinování různých algoritmů - **hybridní algoritmy** (Řezanková, 2001).

Neuronové sítě našly své uplatnění v mnoha aplikacích teorie fuzzy množin. Také genetické algoritmy se používají k řešení různých optimalizačních problémů spojených s fuzzy systémy. Genetický algoritmus může generovat topologii neuronové sítě a následně probíhá proces učení. V článku (Arminger a kol., 1997) je na příkladu sledování potíží při splácení úvěru použita kombinace logistické diskriminační analýzy, klasifikačního stromu a neuronové sítě.

4.1.7 Matematické modelování v ekonomii

Na rozdíl od vědních oblastí, kde lze experimentovat v kontrolovaném prostředí, je řízený experiment v ekonomii velmi obtížně realizovatelný. Jádrem ekonomické teorie je proto modelování, které mimo jiné umožňuje produkovat různé scénáře, zhodnotit vliv politiky a posoudit dopady určitých kroků na reálnou společnost.

Matematické modelování v ekonomii je obor na rozhraní matematiky a ekonomie. Převedeme-li ekonomický problém, který se zdá být obtížně řešitelný, či dokonce neřešitelný, do „matematické řeči“, často zjistíme, že takto popsaný problém již tak obtížně řešitelný být nemusí. Zjednodušeným problémem matematickým se tak pokoušíme vyřešit složitý problém ekonomický. V každé oblasti ekonomie, kde využíváme matematiku, potřebujeme ekonomickou veličinu a její chování matematicky popsat. Poté s ní můžeme pracovat a zkoumat ji využívajíce širokého matematického aparátu. Jeden matematický postup dokážeme tímto způsobem aplikovat na mnoho ekonomických problémů a oblastí zájmu.

Matematika se při vedení hospodářství v určité podobě využívala již v dávné historii. Dokladem toho je například Rhind-Ahmesův papyrus ze 17. stol. př. n. l., který má tvar pásku širokého 33 cm a dlouhého více než 5 m. Tento papyrus obsahuje hospodářské úlohy, které lze s jistou tolerancí považovat za matematickou aplikaci v ekonomii.

S matematickým modelováním, tak jak ho chápeme dnes, se můžeme setkat již v klasických dílech z oblasti politické ekonomie, např. v díle „Political arithmetics“ od anglického filosofa W. Pettyho (1623 – 1687).

Nejčastěji však bývá za první vyjádření ekonomického děje pomocí modelu považována nejslavnější práce F. Quesnayho (1694 - 1774), tzv. „ekonomická tabulka“, publikovaná v roce 1758 (opakované vydání (Quesnay, 1980)). Zabývá se toky mezi zdroji společenského bohatství ze sféry oběhu do sféry výroby, která je omezena pouze na výrobu zemědělskou. Jedná se v podstatě o model prosté reprodukce. Tato tabulka se později stala inspirací pro Leontiefův model input-output.

V roce 1805 byla poprvé představena ekonomie jako formální studijní předmět zvaný „historie a politická ekonomie“ a zabývali se jí nejčastěji filozofové, využívající zejména dedukci a logiku. Například A. Smith ve svém díle použil numerickou analýzu pouze jako prostředek pro kvalitativní posouzení vládních politik. Nevyužívaly se grafy ani rovnice. Stejně tak o něco dříve J. Locke, filozof 17. století, nebo D. Hume využívali ve své práci čistou logiku. Kniha J. S. Milla „Liberty" také vysvětluje fungování volného trhu bez použití matematiky.

Souběžně s pokrokem, dosahovaným ve vědě a technice a který je spojován právě s rozvojem matematiky, se rozvíjí i pokusy o vytváření modelů v oblasti ekonomie. Za průkopníka ve využívání matematiky v ekonomii je považován předchůdce Lausannské školy - A. Cournot (1801 - 1877), autor díla „Zkoumání matematických principu teorie bohatství" (Cournot, 1838). V tomto díle byla poptávka poprvé zobrazena jako klesající funkce vyjádřující vztah mezi poptávaným množstvím a cenou na trhu, a tím Cournot získal možnost vyjádřit mechanismus fungování trhu. S jeho jménem je také pevně svázán model duopolu, který vytvořil.

Společně s využíváním diferenciálního počtu v ekonomii se otevřela možnost hledání extrému funkcí (například funkce příjmů, nákladů, zisku a další). To souvisí s tzv. marginalistickou revolucí, spojovanou především s prvními dvěma představiteli teorie mezní užitečnosti C. Mengerem v Rakousku a W. S. Jevonsem v Anglii.

W.S. Jevons ve své práci využíval nejen logiku, ale také matematiku, což zdůvodňoval faktem, že ekonomie pojednává o kvantitách.

C. Menger vycházel z hodnotové teorie a za klíčovou považoval subjektivní hodnotu. Teorie mezní užitečnosti je pak vystavěna na teoretickém vysvětlení pojmu subjektivní hodnota.

Švýcarský ekonom L. Walras (1834 – 1910) již používal matematický aparát jako nedílnou součást svých ekonomických úvah o marginální teorii užitku a v teorii ekonomické rovnováhy. Jedná se o originální, logicky vystavěný a především univerzální model. Řešení jím definovaného problému vede k řešení soustavy rovnic. Výsledkem je vektor cen, které dané soustavě rovnic vyhovují a mohou být prohlášeny za rovnovážné(Walras, 1984).

Již v polovině 19. století však francouzský fyzik C. Juglare (1862) (opakované vydání (Juglar, 1969)) identifikoval výskyty dynamických procesů v ekonomice a existence hospodářských cyklů. Jeho hlavní myšlenky dále propracovali van Gelderena (Van Gelderen, 1996) a Kitchina (Kitchin, 1923).

V. Pareto (1848 – 1923), žák L. Walrase, přenesl matematiku do společenských věd a dovedl používání matematiky v ekonomii k dnešním standardům. V práci „Cours d´economie politique" (1896 - 97) zkoumal zejména princip dokonalé konkurence (Moore, 2016). Své znalosti matematiky aplikoval v ekonomické analýze a rozpracoval systém všeobecné rovnováhy. Jeho další díla obsahovala zákon o distribuci důchodů v tržní společnosti, díky kterému se Pareto stal světově proslulým ekonomem.

Zcela novým způsobem přistupoval k tzv. křivkám indiference, které znala už anglosaská škola, ale Pareto jim dal zcela nový klíčový význam.

Na práci Walrase navázal J. von Neumann (1903 - 1957) tím, že uvažoval obměněnou dynamickou variantu Walrasova modelu.

Nositel Nobelovy ceny Jan Tinbergen se ve 30. letech minulého století zaměřil na výzkum hospodářských cyklů, kde se pokusil popsat dynamický vývoj celkové nosnosti lodí v čase. Právě tento model je jedním z prvních příkladů, kde byla v ekonomii využita diferenciální rovnice se zpožděním (Tinbergen, 1931); (Tinbergen, 1959).

Další významnou publikací byla „Structure of the American Economy, 1919 - 1929“, kterou sepsal W. Leontief (1906 - 1999) v roce 1941 a která dala základ budoucím analýzám výrobních „input-output“ tabulek.

Ekonomické dynamice se plně věnoval také J. Schumpeter (1912) (viz. opakované vydání (Schumpeter, 1987)), jehož zajímala hlavně ekonomická analýza dynamiky, která spojuje ekonomii, historii a sociologii. Předchozí výzkum otevřel cestu novému směru v oblasti ekonomické dynamiky, kterou se dále zabývali například J. van Duijn (Duijn, 1983), S. Kuznets (Kuznets, 1940), J. Mensh (Mensch, 1975) nebo A. Klainkneht (Kleinknecht, 1981).

Jak již bylo uvedeno, jedny z prvních dynamických ekonomických modelů byly modely zabývající se hospodářským cyklem. Na tyto modely navázal J. B. Haldane.

J. B. S. Haldane ve svém článku (Haldane, 1934) předpokládá, že nárůst ceny určité komodity bude motivovat výrobce ke zvýšení výroby, což povede k větší ochotě investovat do výrobních prostředků. Tyto investice s určitým zpožděním způsobí růst produkce. Větší a dostupnější množství výrobků na trhu bude tlačit cenu dolů a ve výsledku bude cena oscilovat kolem rovnovážné hodnoty.

K významnému propojení statistiky a ekonomie došlo ve 40. letech, kdy v disertační práci „The Probability Aproach in Econometrics?“ T. Haavelmo (1911-1999) popsal postupy při odhadování parametrů ekonomických rovnic pomocí statistiky.

Velká hospodářská krize (1929 - 1933) vyvolala potřebu vysvětlit její příčiny, což vedlo mimo jiné i k rozvoji makroekonomie. Keynesiánství a později neokeynesiánství napomohlo k formulaci mnoha strukturálních makroekonomických modelů, popsaných systémy rovnic. Tyto modely odpovídaly základním ekonomickým paradigmatům a obsahovaly pravidla chování v makroekonomickém kontextu. Využívaly se zejména pro makroekonomickou predikci nebo při simulaci možných dopadů navrhovaných opatření. Velmi oblíbené byly zejména v 50. a 60. letech minulého století. Na přelomu 60. a 70. let pak nastala změna, jejich obliba klesala a naopak začala sílit nespokojenost s takto pojatými modely.

A. B. Larson v článku (Larson, 1964) prezentuje teorii cenového cyklu vepřového masa na základě lineární diferenciální rovnice s předbíhajícím argumentem. Inspiroval se problémem rychlých změn poměru ceny vepřového masa a obilí, který nastal v průběhu druhé světové války. Po skončení války se k problému rychlé změny ceny vrátila řada ekonomů i matematiků.

Průkopnická práce Solowa (1956) představuje z ekonomického hlediska paradigma schopné popsat dlouhodobé chování zemí z teoretického i empirického pohledu. Během několika desetiletí na práci Solowa (Solow, 1956) navázali další autoři. Uveďme například příspěvek Mankiwa a spol. (Mankiw a kol., 1992), využívající fyzický a lidský kapitál (a také následnou empirickou literaturu, která z něj vzešla) a příspěvek Brocka a Taylora (Brock & Taylor, 2010), dříve označovaný jako model Green Solow, který Solowovo nastavení využívá ke studiu environmentálních otázek.

V článku (Kulikov, 2019) autor prokazuje, že předpoklad časového zpoždění v Solow-Svanově modelu vede ke smysluplné změně v dynamice řešení a umožňuje identifikovat parametry ovlivňující periodické cykly. Z dalších publikací, které navazují na práci Solowa, můžeme zmínit publikace (Bambi a kol., 2012; Benhabib & Rustichini, 1991; Bianca a kol., 2013; Boucekkine a kol., 1997; Cai, 2012; Dalgaard & Strulik, 2011; Ferrara a kol., 2013; Gori a kol., 2018; Guerrini, 2013; Guerrini & Sodini, 2014; Kaddar a kol., 2018; Keller, 2010).

V roce 1976 R.E. Lucas ve své stati „Ekonometrické hodnocení politiky: kritika“ (Lucas, 1976) formuloval myšlenku nazývanou v současné době „Lucasova kritika“. Prezentovaná kritika ekonometrické analýzy modelu v redukované formě byla demonstrována na příkladu spotřební funkce odvozené z hypotézy permanentního příjmu, poptávce po investicích a na Phillipsově křivce.

M. C. Mackey v článku (Mackey, 1989) uvádí podmínky pro stabilitu rovnovážné ceny na základě ekonomických parametrů a následky porušení této stability. Ve své práci prezentuje spojitý model cenové fluktuace komodity založený na diferenciální rovnici se zpožděním. Výsledky M. C. Mackeyho využívali mnozí další matematici, například E. Liz a G. Röst (Liz & Röst, 2013).

Oblast ekonomického modelování se následně rozpadá na oblast nestrukturálních modelů a oblast dále se rozvíjejících modelů strukturálních. Nestrukturální modely jsou zaměřeny na analýzu na pozorovaných dat, z nichž „odvozují“ informaci o dalším vývoji.

4.2 Dynamické systémy a modely

Slovo dynamický má svůj původ z řečtiny, kde „dynamis“ znamená „síla“. V dnešní době chápeme slovo dynamický ve smyslu Newtonova zákona, který nám říká, že pokud na těleso působí síla, pak se těleso pohybuje se zrychlením, které je přímo úměrné působící síle a nepřímo úměrné hmotnosti tělesa. Jinými slovy, nenulová výsledná síla působí nenulové zrychlení.

Za dynamický systém je považován (viz. např. (Kindler, 1980; Křivý & Kindler, 2001; Nemyckii, 1962)) systém, jehož stav lze ve kterémkoliv libovolném časovém okamžiku popsat konečnou množinou tzv. stavových proměnných $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, konstant a rovnic. Stav dynamického systému v daném časovém okamžiku plně určuje jeho vývoj (tj. určuje hodnoty, které mohou stavové proměnné nabývat v čase). Pro zkoumání chování takových systémů, zejména predikci v různých podmínkách, se efektivně využívá simulace chování dynamických systémů prostřednictvím odpovídajících dynamických modelů. Přirozeně se přitom předpokládá, že vytvořený dynamický model je realizovatelný a že hodnoty jeho stavových proměnných v čase t mohou být ovlivněny pouze faktory, které působily před okamžikem t. Čas tedy vstupuje do dynamického modelu jako vnitřní proměnná zkoumané závislosti.

Změny hodnot stavových veličin i odpovídající modely můžeme popsat dvěma základními způsoby, případně jejich kombinací:

- jako diskrétní modely (změny hodnot $X(t)$ na hodnoty $X(t + \Delta t)$ jsou náhodné veličiny, jejichž základní charakteristiky jsou známé),
- jako spojité modely (změny hodnot X(t) na hodnoty $X(t + \Delta t)$ jsou vyjádřeny pomocí spojité funkce, která je známá),
- jako smíšené modely (část stavových veličin je ovlivňována náhodnými změnami a část se mění spojitě).

Podle charakteru uvažovaných vazeb rozlišujeme simulace na deterministické a stochastické. Deterministické simulace lze opsat deterministickými rovnicemi a nerovnostmi, ve stochastických simulacích uvažujeme náhodné veličiny. V simulaci se obvykle uplatní jen tzv. simulační modely, které splňují následující požadavky (Kindler, 1980); (Křivý & Kindler 2001):

1. Jejich modelující i modelované systémy jsou dynamické systémy.
2. Existuje zobrazení τ existence modelovaného systému do existence modelujícího systému; je-li t_1 okamžik, v němž existuje modelovaný systém M_1, je mu přiřazen okamžik $\tau(t_1) = t_2$, v němž existuje modelující systém M_2, a tak je zobrazením τ přiřazen i stavu $S_1(t_1) = \sigma_1$ systému M_1 stav $S_2(t_2) = \sigma_2$ systému M_2.

3. Mezi stavy σ_1 a σ_2 jsou splněny požadavky na vztahy mezi prvky a jejich atributy, jak jsme je výše popsali pro modely obecně; jako kdyby každému stavu σ_1 modelovaného systému odpovídal stav σ_2 modelujícího systému tak, že oba stavy jsou ve vztahu statického modelu.

4. Zobrazení τ je neklesající; pokud nastane stav s modelovaného systému před stavem s^* téhož systému, pak stav, který odpovídá v modelujícím systému stavu s, nastane před stavem, který odpovídá stavu s^*. Nebo mohou oba stavy nastat v modelujícím systému současně (totiž v případě, že modelující systém není „tak kvalitní“, aby dokázal zobrazit všechny detaily v modelovaném systému), nikdy však nemůže být časové pořadí stavů v modelovaném systému a jim odpovídajících stavů v modelujícím systému přehozeno.

Požadavek 4 umožňuje tomu, kdo konstruuje modelující systém, aby se při tom nechal inspirovat vztahy kausality v modelovaném systému. Jestliže platí, že některé vlastnosti modelovaného systému implikují, že později nastane v tomto systému něco, co ovlivní jeho stav, lze tuto zákonitost napodobit i v modelujícím systému. Příkladem takovéhoto kauzálního vlivu může být implikace, že pokud je nějaký permanentní prvek schopen obsloužit jen jednu transakci a žádají ho o obsluhu dvě transakce brzy po sobě, pak druhá z nich musí čekat ve frontě. Jiným příkladem je to, že když se hodnota některého aritmetického atributu mění v čase spojitě a je větší než jisté číslo, pak bude větší než toto číslo i v jistém následujícím časovém intervalu.

Dynamický model popisuje chování systému ve smyslu, jak se jeden kvalitativní stav může změnit v jiný. Výraz „dynamický“ se vztahuje k takovým změnám, které se udávají v čase a čas je z toho pohledu důležitým faktorem. Stručné shrnuto, dynamickým modelem je každý model, ve kterém jeho proměnné vystupují s časovým indexem a ve kterém se ve vztahu vyskytují proměnné současné s minulými. Nejznámějším zástupcem dynamických modelů jsou dynamické lineární modely.

4.3 Dynamické modely v ekonomice a řízení podniku

Těsně před 1. světovou válkou vznikaly první vysoké školy obchodní v Německu a ve Švýcarsku a nauka o podniku v té době začala být považována za samostatný vědní obor. Prvním řádným profesorem podnikového hospodářství na univerzitě v Curychu, byl zvolen Johann Friedrich Schär. Na začátku minulého století vznikala podniková ekonomika jako nevýznamná početní nauka začleněná do vědního oboru o národním hospodářství.

Postupně si však podniková ekonomika začala budovat nezastupitelné místo ve vědeckých disciplínách. Vzhledem ke stále se zvyšující dynamice globalizovaného prostředí se v současné době podniková ekonomika jako vědní obor dostává do popředí ekonomických věd. (Synek, Hoffmann & Mackenzie, 2013).

Hlavní funkcí systému řízení podniku je dosahování co nejlepších výsledků plynoucích z jeho strategií a jejich stabilizace a je tedy důležité, aby vedení společností postupovaly v souladu s dynamikou měnícího se tržního chování, dokázaly se rychle adaptovat, být flexibilnější, splňovat nároky trhu a optimalizovat výsledky. Dynamika chování současných spotřebitelů a změny potřeb, které z ní vycházejí, vyžadují změny v přístupu na straně výrobců a jejich systémů řízení a podniková ekonomika se tak dostává do popředí zájmu ekonomických věd.

Proto je pro management podniku velmi důležité porozumět skutečným potřebám spotřebitelů a tyto potřeby promítnout do produktů nebo služeb, které jsou čím dál více propojeny s jejich chováním a změnami, a zároveň neustále zlepšovat výrobní procesy a zvyšovat efektivitu. Z tohoto důvodu bývá velmi často využívána možnost simulovat zamýšlený proces změny pomocí dynamického modelu. Nejčastěji bývají tyto modely využívány v případě výrobních procesů, marketingu, informačních a finančních toků.

Jednou z možností, jak zahrnout dynamiku procesů do modelu, je pohlížet na čas jako na spojitou veličinu a na jednotlivé proměnné včetně neznámé (hledané a analyzované) jako na funkci času. Rychlost a případně zrychlení změn takových proměnných lze vyjádřit jejich první a případně druhou derivací a celý děj popsat jako dynamický model pomocí diferenciálních rovnic. Formální zápis matematického modelu přitom vyžaduje jasné, stručné a názorné zachycení složitějších praktických procesů a velmi často odhalí nekonzistentnost jeho chování, například tehdy, když popis pomocí obyčejných diferenciálních rovnic není dostačující. Především se jedná o modely, jejichž vývoj může být závislý nejen na okamžitém stavu proměnných, ale i na hodnotách proměnných v předchozích obdobích, tj. i jejich minulým stavem.

Časové zpoždění obvykle reprezentuje různé efekty modelovaného problému, jako jsou efekty transmisní, transportní nebo setrvačné. Zpoždění muže být jak konstantní, tj. o určitou časovou periodu, ale stejně tak může být proměnné, včetně nekonečně malé. S rozvojem nových metod „carathéodoryovské“ teorie diferenciálních rovnic a zejména se vznikem a rozvojem zobecňující teorie funkcionálních diferenciálních rovnic, se od druhé poloviny 20. století objevují nové matematické modely, umožňující lépe popisovat i reálnou problematiku ekonomických vztahů.

Pochopení dynamiky změn je pro management podniku velmi důležité, protože chování a návyky spotřebitelů se v čase mění, je třeba zohlednit i interakce mezi různými diskuzními skupinami na sociálních sítích a vztahy mezi maloobchodníky a spotřebiteli. Příchod internetu umožnil rychlou výměnu informací mezi spotřebiteli, umožňuje výběr velkého množství produktů a služeb, vytváří nové požadavky spotřebitelů a tím diktuje tempo a druh změn. Porozumění procesům změn na trhu a potřeba se jim přizpůsobovat tedy musí tvořit nedílnou součást strategie společnosti.

Řízení podniku se v minulosti zabývalo především modely optimalizace výrobních faktorů, investičních programů, financování, skladování. Při řešení se postupně užívaly lineární a nelineární modely plánování, teorie grafů, kombinatorika, metody rozhodovacího stromu a také poznatky z teorie her.

V polovině 20. století nastal mohutný rozvoj vědy a techniky a to i v oblasti uplatnění matematicky v řízení podniku. Odkazy lze nalézt například v (Andreeva a kol., 1992; Titov & Uspenskii, 2013).

Stále častěji se začínají objevovat nové matematické modely, popisující dynamický model pomocí diferenciálních rovnic, které lze využít pro reálný popis různých dějů z praktického života.

V 60. letech minulého století byly vytvořeny prof. Forresterem základy tzv. systémové dynamiky a díky rozvoji informačních technologií systémová dynamika přispěla k tvorbě dynamických modelů podnikových procesů. Postupně vznikly velmi rozsáhlé modely jako je například manažerská hra Beer Game, modely ekonomických cyklů a další.

Současné struktury společností, které pracují na vytváření akčních plánů, kontrole realizace jednotlivých kroků a dosahování výsledků, musí vykazovat vysokou míru flexibility. Management podniku hraje významnou roli v uskutečňování procesu změny a adaptability musí zajistit nastavení způsob řízení, který je flexibilní a odpovídá čím dál více individualizovaných potřebám náročných spotřebitelů. Z tohoto úhlu pohledu vnímáme současný podnik jako celek tvořený procesy, jejichž dynamiku je třeba namodelovat, aby bylo možné předvídat výkonnost.

Systémově orientované řízení podniku usiluje o vytvoření tvůrčích modelů „pro budoucí skutečnosti“. Řízení podniku je potom chápáno jako kybernetická věda, která se nezajímá o bytí, ale o fungování systémů. (Synek, Hoffmann & Mackenzie, 2013)

Autoři knihy (McGarvey & Hannon, 2004) doporučují při tvorbě modelu řízení organizace použít strategii, kterou lze shrnout do následujících kroků:

1. Rozdělení organizace na menší, snadněji řiditelné části.

2. Výběr vhodné techniky tvorby modelu.

3. Vytvoření modelu.

4. Ověření modelu na předpovědi historicky známého vývoje.

5. Formulace nových předpovědí.

6. Návrh a zavedení změn v organizaci s využitím nových předpovědí.

Rozhodování v podniku na všech úrovních řízení bylo v minulosti založeno z velké části na jejich předchozích zkušenostech. V současném proměnlivém prostředí jsou však samotné zkušenosti pro kvalifikované rozhodnutí nedostačující. V průběhu posledních let došlo v teorii a praxi řízení podniku k významnému vývoji, na který reaguje i odborná literatura. V článku (Rebs, Brandenburg & Seuring, 2019) autoři analyzují odbornou literaturu z oblasti revenue managementu z let 2004 - 2017. Zaměřili se zejména na dynamické modelování poptávky, optimalizaci sortimentu a controlling.

Matsumoto a Szidarovszky (Matsumoto & Szidarovszky, 2011) sestavili neoklasický růstový model s produkční funkcí ve speciálním tvaru, který odpovídá předpokladu zpoždění produkce. Na tuto práci pak navázali a její výsledky prohloubili další autoři (Ferrara, Guerrini & Bisci, 2013; Matsumoto & Szidarovszky, 2013; Chen & Wang, 2014). Keller (Keller, 2010) analyzoval možnosti aplikací diferenciálních rovnic se zpožděním v ekonomické dynamice a řízení.

Studie (Aqlan, Lam & Ramakrishnan, 2014) se zabývá konsolidací výrobních linek pomocí nově vytvořených simulačních a optimalizačních strategií a formuluje optimalizační model na bázi celočíselného programování. Automatický systém řízení výroby a zásob, reagující na poptávku analyzují autoři (Bijulal, Venkateswaran & Hemachandra, 2011). Omezenou výrobní kapacitou a snahou uspokojit zákazníky vhodnou kombinací produktů se zabývá publikace (Zhang, Rusmevichientong & Topaloglu, 2017).

Práce (Shorikov & Rassadina, 2013) se zabývá metodickým přístupem k řízení struktury produktového portfolia podniku na bázi dynamického modelování, zohledňující i zpětnou vazbu. Nabízený přístup umožňuje vyvíjet řešení zohledňující zpětnou vazbu a spolu s informační podporou vytváří optimální strukturu produktových řad podniku, přispívající k optimalizaci zisků a udržení požadované úrovně zisku po dlouhou dobu. V (Belair & Mackey, 1989) byl vytvořen dynamický model přizpůsobení ceny za předpokladu zpožděné reakce výroby.

Efektivní působení podniku na trhu je přímo závislé na dostupnosti výrobních zdrojů. Kvalitní informační a kvalifikované lidské zdroje pak lze označit za ty nejvýznamnější. Pro management podniku je nutné mít možnost promítnout konfigurace změn v procesech na on-line bázi do controllingových procesů a zavést informační toky a metriky. V publikaci (Aghabaghery a kol.,

2020) je navržena nová metoda analýzy procesů, která využívá protokoly událostí a také informace o výměně dat mezi organizačními jednotkami.

Za jednu z mnoha funkcí výrobních i obchodních podniků je považována problematika řízení zásob, která má poměrně často zásadní vliv na celkovou výkonnost podnikání. Právě efektivní řízení zásob umožňuje organizacím uspokojovat poptávku svých zákazníků a vytvářet takové množství zásob, které by maximalizovalo zisk a minimalizovalo náklady.

Warburton navrhl model popsaný diferenciálními rovnicemi (Warburton, 2004) se zpožděním pro řízení zásob a objednávek, vhodný pro uplatnění v řízení výroby; později tuto práci rozšířil a výsledky publikoval v (Warburton, 2014). Stejnému problému se o něco dříve věnovali i Csik a spol. (Csík a kol., 2010), kteří navrhli přibližné analytické řešení problému. S ohledem na zpoždění ve výrobním procesu sestavil Li model kontroly cen a zásob jednotlivých komodit (Li, 2003).

Problematiku modelování systému skladování a distribuce, ve kterém jsou výrobky expedovány ze skladu hotových výrobků přímo zákazníkům na základě minimálních výrobních, skladovacích a přepravních nákladů popisuje článek (Bucki & Suchánek, 2020). Cílem práce (Aschauer, Gronalt & Mandl, 2015) je představit dynamický model vztahů mezi logistickými strategiemi a nákladní dopravou. Dynamický model škod zboží, vzniklých při přepravě zboží od dodavatele k zadavateli objednávky popisuje (Voelkel, Sachs & Thonemann, 2020).

Autoři (Chaudhary, Kulshrestha & Routroy, 2018) analyzovali 419 výzkumných prací týkajících se problematiky skladování rychle se kazícího zboží, aby shrnuli její současný stav a identifikovaly směry možného budoucího vývoje. (Li a kol. ,2017) analyzují maloobchodní dodavatelsko-odběratelský řetězec produktů podléhajících zkáze, v nichž obchodník nabízí zákazníkům možnost úvěru. Aby dosáhli maximálního zisku, zkoumají (Feng a kol., 2017) vliv ceny, čerstvosti produktu a úrovně zásob na poptávku.

Globalizované hospodářské systémy zahrnují složité dodavatelské řetězce, kde je třeba řídit environmentální a sociální dopady v souladu s různými očekáváními zúčastněných stran a zmírňovat rizika spojená s udržitelností. Článek (Rebs, Brandenburg & Seuring, 2019) poskytuje přehled dynamických modelů souvisejících s tímto tématem, systematizuje simulační modely z pohledu systémového myšlení v daném koncepčním rámci a navrhuje postup při modelování.

Koordinační model pro kanadský farmaceutický dodavatelský řetězec zpracovali Weraikat a kol. (Weraikat, Zanjani & Lehoux, 2016). Analýzu vztahů v dodavatelském řetězci provedli také autoři (Demirel, a kol., 2019), kteří se zaměřili na základní aspekty různých inventárních a výrobních politik a formulují návrhy pro efektivní správu, řízení a rozvoj dodavatelských sítí. Identifikovat hlavní přínosy, typy modelů, použité nástroje a výzkumné trendy v oblasti analytického modelování koordinace a integrace řízení kvality do dodavatelského řetězce se snaží příspěvek (Cogollo-Flórez & Correa-Espinal, 2019).

Cílem práce (Govindan, Soleimani & Kannan, 2015) bylo vytvořit přehled nedávno publikovaných vědeckých příspěvků z oblasti řízení a modelování zpětných uzavřených logistických dodavatelských řetězců. Kvantitativní modely zpětné logistiky pro udržitelné dodavatelské řetězce můžeme najít v pracích (Brandenburg, a kol., 2014) a (Lozano, a kol., 2014).

Optimalizace portfolia je zásadní otázkou všech investorů při nákupu akcií. I když má každý investor jiné preference a jinou představu o optimálním portfoliu danou zkušenostmi, dostupnými informacemi, či znalostí finančních trhů, jejich společným cílem je maximalizace zisku a minimalizace rizika. K vytvoření optimálního portfolia mohou sloužit optimalizační modely.

V práci (Gruszka & Szwabiński, 2020) modelují pomocí sady nástrojů z teorie pravděpodobnosti analyzovány různé strategie budování finančních portfolií v různých tržních podmínkách. V publikaci (D'Albis & Augeraud-Véron, 2009) se analyzuje dynamické chování míry růstu kapitálu pomocí modelu s nepřetržitým obchodováním. Zvláštní pozornost je věnována několika realizacím tzv. vyváženého portfolia, které má kořeny v přirozeném principu „buy-low-sell-high".

Funkcionální analýzu při modelování portfolia využívá (Li, Qu & Zhang, 2015). Butt ve své publikaci (Butt, 2019) využívá diskrétní pravděpodobnost a Cui, Gao a Shi používají obdobný přístup. V práci (Cui, Gao & Shi, 2019) autoři zohledňují i poplatky za správu portfolia.

Za zmínku stojí, že současná literatura v oblasti matematického modelování v oblasti financí se zabývá i modelováním tržní frakce v oblasti oceňování opcí (Bouchard, Deng & Tan, 2019; Guéant & Pu, 2017) a dynamického portfolia (Cai, Chen & Dai, 2018; Fischer & Gallmeyer, 2016).

Autoři (Midrigan & Xu, 2014) pomocí údajů výrobce zkoumají roli finančních frikcí při určování celkové produktivity výrobních faktorů a pro posouzení vlivu změn používají dynamický model vlivu nových technologií a přerozdělení kapitálových výnosů.

Cílem příspěvku (Kassim, a kol., 2016) je prezentovat systémový dynamický model jako alternativní přístup k rychlému rozhodování při určování poplatků za pronájem budov.

(Verani, 2018) popisuje návrh modelu všeobecné rovnováhy, ve kterém podnikatelé financují svůj podnik prostřednictvím dlouhodobé smlouvy s finančním zprostředkovatelem.

V oblasti marketingu se používá celá řada ekonomických a matematických metod, včetně metod striktně formalizovaných a heuristických. Vybrané metody přibližuje publikace (Zvyagin, 2016). Článek (Kozlovskyi, a kol., 2018) představuje metodiku návrhu marketingové strategie, založené na kombinaci klasických statistických a matematických metod a modelů, jakož i moderních informačních technologií, včetně metod inteligentní analýzy.

Pro analýzu prodeje komodit je v marketingu velmi důležitá korelační analýza. Dynamický model korelační analýzy prodeje prezentovaný v (Li, Wu & Chen, 2020) zahrnuje vybrané modely, vycházející z databáze časových řad, která je vytvořena pomocí databáze transakcí s komoditami. Dokument (Bockelie & Belobaba, 2017) popisuje nový model chování cestujících, simulující výběru doplňkových služeb ve spojení s itinerářem letecké společnosti a konkrétní třídou jízdného.

Prostřednictvím virálního marketingu může podnik dosáhnout velké pozornosti spotřebitele za použití minimálních finančních nákladů. Snaží se tedy dosáhnout zvýšení prodeje, rozšířit svůj obchodní potenciál a vybudovat určité povědomí o konkrétní obchodní značce. Článek (Reichstein & Brusch, 2019) zkoumá rozhodovací proces jednotlivců v rámci virového marketingu pomocí nového dynamického modelu.

Rešerši publikací na téma kooperativní reklamy publikovali autoři (Aust & Buscher, 2014). Celkem identifikovali 58 vědeckých prací, využívajících matematické modelování v této oblasti.

Nejnovější matematické metody aplikované v oblasti ekonomického modelování nám umožňují předvídat chování analyzovaného systému a zohlednit širokou škálu faktorů, které na chování mají vliv (Alharbi & Naderpour, 2016; Fischer a kol., 2015; Groesser & Jovy, 2016). Dynamické modely se tedy nyní používají například jako nástroje pro podporu manažerského rozhodování, zpracování podnikatelských záměrů či optimalizaci výroby (další aplikace viz. kapitola 4.3).

4.4 Matematické prostředky pro řešení dynamických modelů

V této části práce budou stručně charakterizovány vybrané matematické metody, které se v současnosti obvykle uplatňují v oblasti analýzy dynamických modelů.

Pro dynamický model je typické, že je tvořen nějakým systémem dynamických rovnic. Jejich řešení popisuje chování modelovaného procesu v čase. Proto bývá požadováno, aby model, tj. příslušné rovnice, měl následující vlastnosti:

1. existence řešení,
2. jednoznačnost řešení,
3. spojitá závislost na vstupních údajích modelu.

První vlastnost je naprosto nezbytná. Model, který by neměl řešení, nemůže nic modelovat — buď by modelovaný děj nemohl probíhat, nebo by rovnice byly špatně. Požadavek, aby existovalo řešení, však neznamená, že toto řešení musíme znát, nebo být schopni ho nalézt. Pro projekce z modelu často plně dostačuje matematická analýza příslušných rovnic (např. s využitím metod kvalitativní teorie diferenciálních rovnic) nebo přibližné řešení nalezené numericky (což je další důvod, proč neexistuje ostrá hranice mezi modely matematickými a počítačovými). (Pospíšil, 2015)

4.4.1 Řešení dynamických modelů bez zpoždění

Výpočtem řešení (obecného nebo partikulárního) tzv. přímými metodami (kvadraturami), jejichž největší předností je přesnost řešení a jeho analytický popis, lze řešit jen velmi omezené množství diferenciálních rovnic a s nimi spojených otázek. Jinými slovy, pro řadu úloh z oblasti řešení obyčejných diferenciálních rovnic nelze řešení určit analyticky, tj. vyjádřit je pomocí elementárních funkcí, nebo je nalezení přesného řešení příliš obtížné. Její aplikovatelnost se díky tomu omezuje na úzce vymezené typy rovnic, například lineární, což značně limituje její využití při řešení modelů, popisujících reálné systémy. Zbývající modely, popisující co nejvýstižněji řešený problém, je třeba řešit pomocí tzv. numerických metod. Ty neposkytují přesné řešení, ale jen přibližné hodnoty řešení s předem danou přesností. V těchto případech nám metody numerické matematiky umožňují nalézt řešení přibližné.

Rovnici

$$y' = f(x, y), \tag{4.1}$$

v níž f je funkcí dvou proměnných, nazýváme obyčejná diferenciální rovnice 1.řádu, podmínku

$$y(x_0) = y_0, \tag{4.2}$$

kde $[x_0, y_0] \in Dom(f)$, nazýváme počáteční podmínkou a dvojici (4.1), (4.2) počáteční úlohou pro obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu.

Podobně

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),\ y(x_0) = y_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{4.3}$$

je počáteční úloha pro obyčejnou diferenciální rovnici n-tého řádu a

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n)\ (i = 1, \ldots, n),\ y_i = y_{0i}\ (i = 1, \ldots, n) \tag{4.4}$$

je počáteční úloha pro systém obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu.

Předpokládejme, že funkce $f(f_i)$ na pravých stranách rovnic zaručují jednoznačnou existenci řešení uvažovaných počátečních úloh (viz. teorie diferenciálních rovnic). Jestliže y, resp. $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ označuje řešení dané úlohy, pak označme $\tilde{y}$ $(\tilde{y}_i)$ přibližnou hodnotu řešení y (komponenty řešení y_i). Chybou řešení na intervalu I rozumíme $max\left\{|\tilde{y}(x) - y(x)|, x \in I\right\}$, resp. v případě úlohy (4.4) pak $\sum_{i=1}^{n} max\left\{|\tilde{y}_i(x) - y(x)|, x \in I\right\}$.

Pro ilustraci používaných numerických metod se omezme na přibližný výpočet řešení počáteční úlohy (4.1),(4.2). Toto řešení hledejme na intervalu $I = [x_0, x_0 + a]$, kde $a > 0$. Podmínkami garantujícími existenci a jednoznačnost řešení naší úlohy jsou spojitost a lipschitzovskost funkce f v obdélníku

$$D = \left\{[x, y] \in R^2 : x \in [x_0, x_0 + a], y \in [y_0 - b, y_0 + b]\right\} \subset Dom(f)$$

pro dostatečně velké b. Druhá z podmínek znamená, že na obdélníku D platí:

$$|f(x, y_1) = f(x, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|,$$

přičemž konstanta $L > 0$ se nazývá Lipschitzova.

Z 1. předpokladu dále, mezi jiným, plyne existence konstanty $M > 0$ takové, že

$$|f(x, y)| \leq M,\ [x, y] \in D$$

a že druhý předpoklad se dá zajistit podmínkou

$$\left|\frac{\delta f(x, y)}{\delta y}\right| \leq L,\ [x, y] \in D.$$

Eulerova (polygonální) metoda

Jde o nejjednodušší a historicky nejstarší numerickou metodu pro řešení diferenciálních rovnic. Vychází z názorné geometrické představy - aproximace integrální křivky diferenciální rovnice lomenou čarou. Tuto lomenou čáru (polygon) je možné odvodit více způsoby. Například takto:

- Interval I rozdělíme dělícími body $x_0 < x_1 < \ldots < x_n = x_0 + a$ na n podintervalů, délek $h_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, n)$;
- Na těchto intervalech postupně konstruujeme lomenou spojitou čáru, tvořenou úsečkami vycházejícími z bodu $[x_i, y_i]$ se směrnicí $f(x_i, y_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$;
- Označíme-li $Y_0 = y_0,\ Y_1, \ldots, Y_n$ takto vypočítávané koncové body těchto úseček, pak

$$Y_k = Y_{k-1} + h_k f(x_{k-1}, Y_{k-1}) \ (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.5}$$

Pro odhad nepřesnosti v j-tém bodě při ekvidistantním rozložení dělících bodů platí

$$|Y_j - y(x_j)| \leq \frac{hN}{2L}\left[(1 + hL)^j - 1\right],$$

kde $N > 0$ je konstanta, pro níž na obdélníku D platí

$$\left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} f(x,y) \right| \leq N$$

a $L > 0$ je Lipschitzova konstanta funkce f na obdélníku D. Aproximace hodnoty řešení našeho problému v dělícím bodě bude tím přesnější, čím větší počet dělících bodů použijeme a čím blíž budeme dělícím bodem počátečnímu bodu $[x_0, y_0]$ (Novotná & Půža, 2015).

Metoda Runge-Kutta

Přesnější výsledky přináší při stejném počtu uzlových bodů metoda Runge-Kutta a její modifikace.

Obecný tvar s-stupňové explicitní Rungovy-Kuttovy metody je

$$x_{(i+1)} = x_i + h\sum_{j=1}^{s} b_j K_j \tag{4.6}$$

kde koeficienty $K_j, j = 1, \ldots, s$, jsou určeny vztahem

$$K_j = f(t_i + hc_j, x_i + h\sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}K_k), \tag{4.7}$$

a kde koeficienty b_j, c_j a a_{jk} definují konkrétní metodu. Při samotném výpočtu postupujeme tak, že nejprve spočítáme koeficient K_1, pak K_2 pomocí K_1, koeficient K_3 pomocí K_1 a $K_2, \ldots,$ až nakonec K_s pomocí všech předchozích. Dosazením do 4.6 dostáváme hodnotu x_{i+1}.

Nejznámější Rungova-Kuttova metoda je stupně *4* ve tvaru. Při označení stejném jako u Eulerovy metody,($Y_0 = y_0$), hodnoty Y_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) vypočtěme postupně pomocí formulí

$$\begin{aligned} Y_i &= Y_{i-1} + \frac{h}{6}(k_1^i + 2k_2^i + 2k_3^i + k_4^i), \qquad (4.8)\\ k_1^i &= f(x_{i-1}, Y_{i-1}),\\ k_2^i &= f(x_{i-1} + \frac{h_i}{2}, Y_{i-1} + \frac{1}{2}h_i k_1^i),\\ k_3^i &= f(x_{i-1} + \frac{h_i}{2}, Y_{i-1} + \frac{1}{2}h_i k_2^i),\\ k_4^i &= f(x_{i-1} + h_i, Y_{i-1} + \frac{1}{2}h_i k_3^i). \end{aligned}$$

Hodnotami (x_i, Y_i) ($i = 0, 1, \ldots, n$) je řešení naší úlohy aproximováno přesněji než v předchozím případě.

Tato konfigurace koeficientů byla velmi oblíbená v době, kdy se ještě běžně nepoužívaly samočinné počítače, protože se vzhledem ke své jednoduchosti jeví jako dostatečně přesná. Právě vlivem rozvoje v oblasti výpočetní techniky tato metoda v dnešní době ztrácí na popularitě. Do popředí se naopak dostaly metody vyšších stupňů s mnohem větším nárokem na výpočetní požadavky, ale o to přesnější tyto metody jsou.

Odhady nepřesnosti jsou však jak složité, tak „hrubé“ (Novotná & Půža, 2015).

Metoda postupných aproximací

Vedle výše uvedených metod majících výrazně lokální charakter se zejména v teoretických úvahách o jednoznačné řešitelnosti diferenciálních rovnic a obecnějších úloh funkcionální analýzy používá metoda pevného bodu, kterou lze v kombinaci s principem apriorního odhadu využít jako globální na celém uvažovaném uzavřeném intervalu zkoumaného řešení.

Na rozdíl od řady aplikací v různých oblastech matematiky (řešení lineárních systémů, výpočet nulových bodů,…) však pro výpočet řešení okrajových úloh diferenciálních rovnic metoda postupných aproximací využívána není.

Metoda postupných aproximací se opírá o tzv. Banachovu větu o pevném bodu (věta o kontrakci, Banachova věta). Uveďme ji, pro ilustraci, v elementárním tvaru - pro výpočet kořene funkce jedné proměnné:

Věta 4.1 *Nechť g je spojitou funkcí zobrazující uzavřený interval $[a, b]$ do sebe. Pak má g alespoň jeden pevný bod.*

Je-li navíc g kontraktivní (tj. $|g(x) - g(y)| \leq q\,|x - y|$ pro každé x, y z intervalu $[a, b]$ a $q \in [0, 1)$), pak g má v intervalu $[a, b]$ jediný pevný bod. Pak pro libovolnou počáteční aproximaci $x^{(0)} \in [a, b]$ je posloupnost $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ definovaná rovností

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}), k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.9}$$

konvergentní a $\lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = \xi$ je pevný bod funkce g. (Bachman & Narici, 2000)

Poznámka 1 Jestliže má funkce g na intervalu $[a, b]$ první derivaci ohraničenou číslem q, tj. $|g'(x)| \leq q$ pro každé $x \in [a, b]$ a $q \in [0, 1)$, pak je g kontraktivní na $[a, b]$.

Analogicky, za níže uvedených předpokladů platí následující tvrzení o „lokální“ řešitelnosti počáteční úlohy (4.1), (4.2):

Věta 4.2 *Nechť na obdélníku $D = [x_0, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ je funkce f spojitá a lipschitzovská a označme $M = max\,\{|f(x, y)|\,, [x, y] \in D\}$, L - lipschitzovská konstanta a $\alpha \leq min(a, \frac{b}{M})$.*

Pak posloupnost

$$y_0(x) = y_0,\;\; y_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{k-1}(t))dt,\;\; k \in N$$

(tzv. posloupnost postupných aproximací) pro dostatečně malé α konverguje stejnoměrně na intervalu $[x_0, x_0 + \alpha]$ k řešení $y = y(x)$ problému (4.1), (4.2). Pro odhad chyby k-té aproximace řešení na intervalu $[x_0, x_0 + \alpha]$ platí

$$|y(x) - y_k(x)| \leq \frac{M\alpha}{k!} \frac{(L\alpha)^k}{1 - L\alpha}.$$

Jak je dále uvedeno v kapitole 5, lze tuto metodu za tomu odpovídajících předpokladů použít i pro numerický výpočet řešení diferenciálních rovnic na celém uvažovaném intervalu řešení I a výše uvedenou posloupnost jeho postupných aproximací získávat řešením uvedené posloupnosti úloh prostřednictvím ekvivalentní posloupnosti diferenciálních rovnic

$$y_k'(x) = f(x, y_{k-1}(x)); \; y_k(x_0) = y_0, \tag{4.10}$$

přičemž můžeme volit $y_0(x) \equiv y_0$ na intervalu I.

V každém kroku řešení původní úlohy metody postupných aproximací tak řešíme danou počáteční úlohu pro jednodušší diferenciální rovnici a k jejímu řešení je obvykle nezbytné použít numerické řešení. Tak získáváme numerické řešení původní úlohy. Sama realizace tohoto procesu je přitom spojená s omezeními danými výpočetní technikou (Novotná & Půža, 2015). Uvedený a následně v kapitole 5 odůvodněný postup je přitom použitelný jak pro úlohy bez zpoždění, tak i se zpožděním.

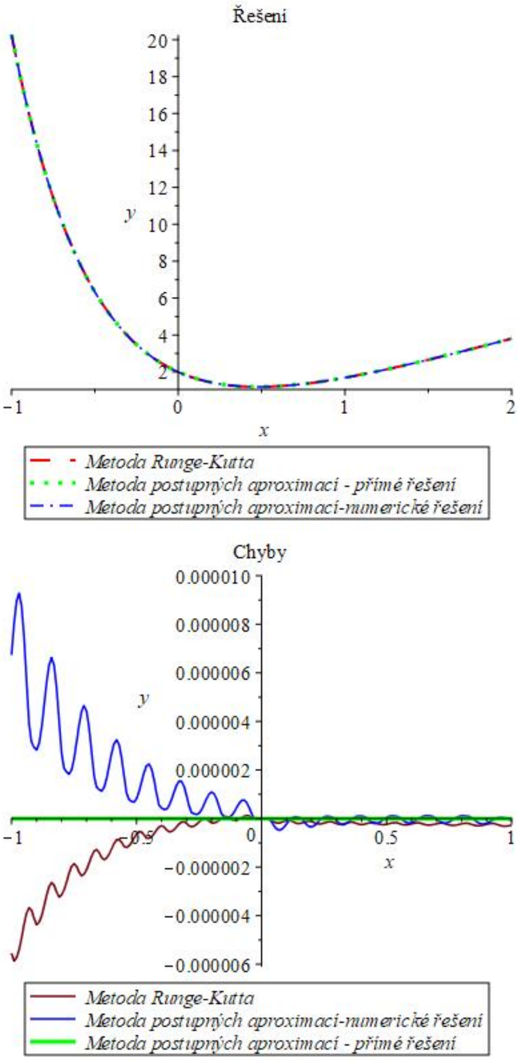
Pro porovnání přesnosti uvedených metod a jejich ilustraci v nejjednodušším případě - pro diferenciální rovnici bez zpoždění, byly pomocí software Maple řešeny následující tři úlohy. Úlohy byly řešeny metodou přímou, metodou Runge-Kutta (RKF45) a metodou postupných aproximací, přičemž metoda postupných aproximací byla použita dvakrát – jednou byly dílčí kroky řešeny přímou metodou, podruhé opět pomocí metody Runge Kutta. Metoda postupných aproximací je vždy zahájena konstantní funkcí. Jednotlivá řešení a graf velikosti odchylky numerických řešení od přímé metody byly pro srovnání znázorněny graficky.

Příklad 4.1 *Uvažujme na intervalu $[-1; 2]$ obyčejnou diferenciální rovnici s počáteční podmínkou*

$$y'(t) = 5t - 2y(t), \; y(0) = 2.$$

Příklad 4.2 *Uvažujme na intervalu $[-1; 1]$ obyčejnou diferenciální rovnici s počáteční podmínkou*

$$y'(x) = \frac{(y(x) + 2cos(x))sin(x)}{cos(x)}, \; y(0) = 2.$$

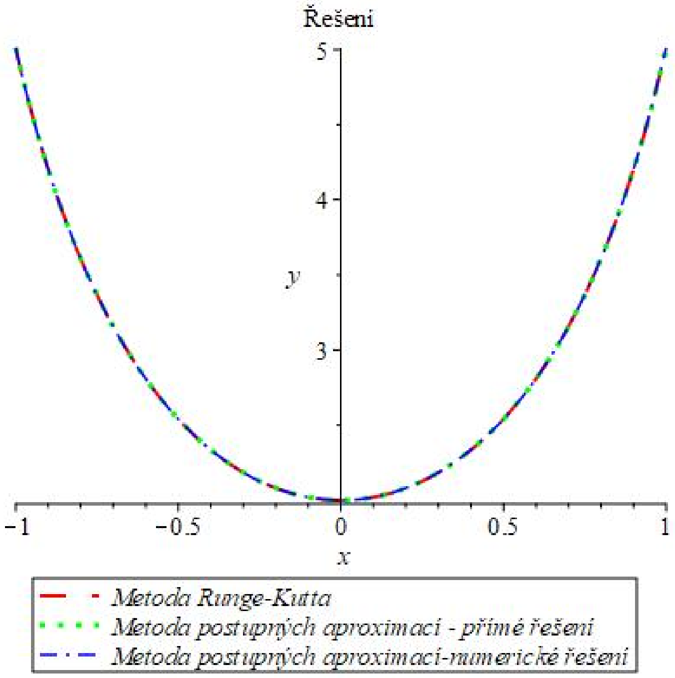


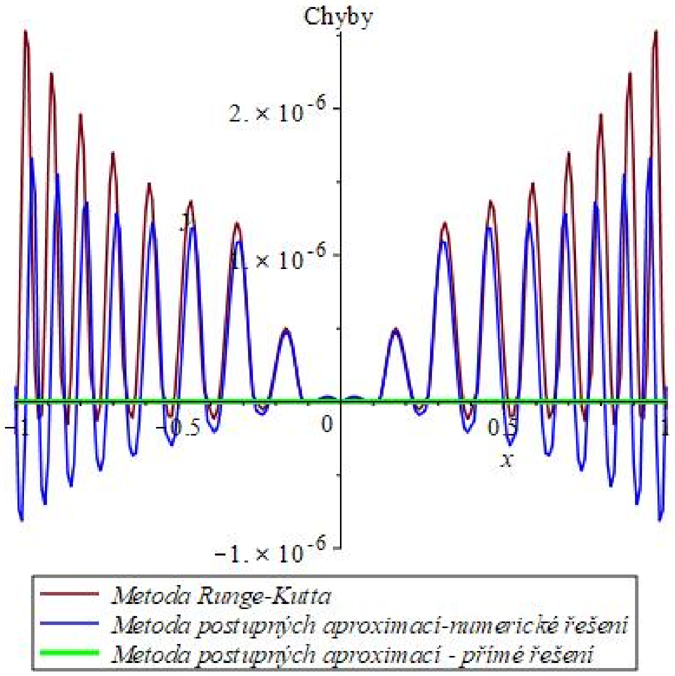
Obr. 4.1: Příklad 1 - řešení a chyby, zdroj: vlastní zpracování

Příklad 4.3 *Uvažujme na intervalu* $[-0.6; 0.6]$ *obyčejnou diferenciální rovnici s počáteční podmínkou*

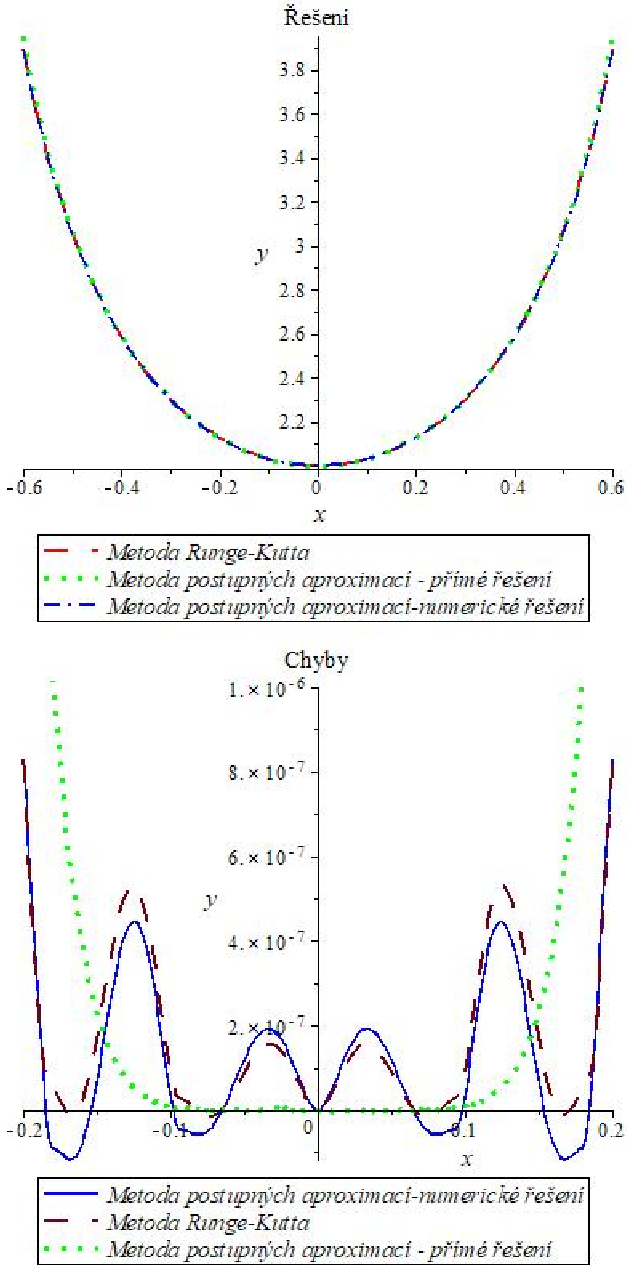
$$y'(x) = \frac{(y(x)^2 + 2cos(x))sin(x)}{cos(x)}, \ y(0) = 2.$$

Z podrobné analýzy současných možností numerických metod řešení okrajových úloh (nejen počáteční) jak obyčejných diferenciálních rovnic bez zpoždění, tak se zpožděními, a z porovnání omezení jejich použitelnosti i přesnosti výpočtů plyne potřeba dané metody zpřesnit, doplnit oblast jejich použitelnosti a případně odvodit univerzálněji použitelný nový postup řešení.





Obr. 4.2: Příklad 2 - řešení a chyby, zdroj: vlastní zpracování



Obr. 4.3: Příklad 3 - řešení a chyby, zdroj: vlastní zpracování

4.4.2 Řešení dynamických systémů se zpožděním

Dynamické modely se obecně popisují pomocí obyčejných diferenciálních rovnic, případně integro-diferenciálních rovnic a takových rovnic se zpožděními nebo obecněji s odkloněnými argumenty.

Všechny v této práci uvedené (a mnohé další) jsou zvláštními případy tzv. funkcionálních diferenciálních rovnic. Po prudkém rozvoji teorie a aplikací obyčejných diferenciálních rovnic se od 19. století, začínají objevovat úlohy, které z této oblasti vybočují. Postupně se objevují modely, při jejichž zkoumání je nutné respektovat nejen vliv faktorů vstupujících do děje v čase t, ale je nutné zohlednit i údaje předcházejících časových intervalů.

Konkrétní úlohy související s řadou nově se objevujících modelů řešili pomocí diferenciálních rovnic s odkloněným argumentem již L. Euler a M. Kondors, ale intenzivnější snahy o řešení těchto úloh se objevují až ve dvacátém století a spojujeme je především s prací V. Volterry.

Před několika desítkami let se největší úsilí vědců při řešení ekonomických problémů zmíněných v předchozích odstavcích zaměřovalo na analýzu modelů popsaných pomocí obyčejných diferenciálních rovnic. Aby však bylo možné zkoumat vlastnosti modelů lépe odrážejících realitu, bylo nutné vzdát se tradičního vyjádření pomocí obyčejných diferenciálních rovnic a začít využívat modelů vyjádřených obyčejné diferenciální rovnice se zpožděními.

Ve starších pracích (např. Euler či Tinbergen) lze najít unikátní postupy numerického řešení těchto konkrétních problémů, které však nelze univerzálně využít pro jiné úlohy. Mezi průkopníky v této oblasti se v 18. století řadili Laplace a Condorcet (Gorecki & Fuksa, 1989; Duncan, 1986). Unikátní, ale izolované postupy lze najít i v současných publikacích (Forrester, 2013). Vědecký pokrok a nové možnosti využití výpočetní techniky po první světové válce vyvolaly potřebu se těmito problémy zabývat intenzivněji.

K rychlému rozvoji teorie diferenciálních rovnic se zpožděním přispěl N. Minorsky na přelomu 30. a 40. let 19. století. Základy teorie stability obyčejných diferenciálních rovnic s odkloněnými argumenty byla propracována Pontryaginem v roce 1942. Po druhé světové válce došlo k rychlému rozvoji této teorie a jejích aplikací.

Následně se pak objevují další práce věnované teorii funkcionálních diferenciálních rovnic (monografie Bellman & Cooke, 1965; Elsgolts & Norkin, 1973; Hale, 1977; Pinney, 1958).

Vývoj teorie významně ovlivnily práce A.D. Myskhise (Bernfeld & Lakshmikantham, 1974; Kolmanovskii & Myshkis, 1992; Myshkis, 1971) a společné práce R. E. Bellmana s dalšími autory (Bellman & Danskin, 1954; Bellman & Cooke, 1965).

Za nejstarší numerické metody určené k řešení diferenciálních rovnice se zpožděným argumentem, kterou lze řešit širší škálu úloh, lze označit metody kombinující již známe postupy řešení pro rovnice bez zpoždění (např. Eulerovy metody a metody Runge-Kutta), (Ascher & Petzold, 1995; Cryer & Tevrnini 1972; Mechee, a kol., 2013) a Bellmanovu metodu kroků (Bellman & Cooke, 1965). Tato metoda využívá znalosti řešení na intervalu předcházejícím čas t. Jedno takové dílčí řešení pak nazýváme jedním krokem.(Marušiak & Olach, 2000; Ralston & Rabinowitz, 1978).

Z dalších způsobů řešení lze zmínit především Laplaceovu transformaci (viz. např. (Kalmár-Nagy, 2009; Yi a kol., 2006), jejíž hlavní myšlenkou je získat pomocí Laplaceovy transformace algebraickou rovnici, vyřešit ji a pomocí zpětné transformace získat původní řešení.

Dále byly pro řešení diferenciálních rovnic s odkloněným argumentem využity například metody využívající rozvoj hledaného řešení do Taylorovy řady (Zwerkin, 1965), kubické splajny (Netravali, 1973), relaxační metody WR (waveform relaxation) (Lelarasmee a kol., 1982; Skeel, 1989).

V 80. letech 20. století věnovali K. L. Cooke a J. Wiener cyklus článků vývoji teorie diferenciálních rovnic s po částech konstantním argumentem (viz. (Cooke & Györi, 1991; Cooke & Györi 1994)), v nichž se autoři zmínili o obtížnosti řešení takových rovnic, a konkrétně o problémech spojených s numerickými výpočty diferenciálních rovnic se zpožděními pojednává i publikace brněnského profesora Z. Pospíšila (Pospíšil, 2004).

Dostupná literatura o řešitelnosti systémů diferenciálních rovnic se zpožděnými argumenty obsahuje řadu výsledků užitečných pro praxi. Obsáhlou a komplexně provedenou analýzu takových rovnic lze najít zejména v (Azbelev, 2001; Azbelev a kol., 2002; Azbelev, a kol., 2007; Bellen & Zennaro, 2013; Bernfeld & Lakshmikantham, 1974; Kanth & Murali, 2018) a (Bobalová & Maňásek, 2007; Kiguradze & Půža, 2003; Kiguradze, 1997a; Maňásek, 2007; Kolmanovskii & Myshkis, 1999) a tam citované literatuře. Podrobně jsou studovány podmínky řešitelnosti, tj. existence a jednoznačnosti, uvedených úloh jak obecných, tak speciálních, podmínky jejich korektnosti (tj. malé závislosti řešení na „malých“ změnách počátečních podmínek a parametrů, nezbytné k numerickému řešení), podmínky nezápornosti řešení a další.

Systematickému popisu metod konstrukce řešení úloh se zpožděními a analýze jejich použitelnosti, podobně podrobně jako je tomu u „klasických“ obyčejných diferenciálních rovnic není věnována dostatečná pozornost, s výjimkou práce (Bellen & Zennaro, 2013), využívající modifikací Runge-Kuta „lokálních“ metod konstrukce řešení rovnic se zpožděním a (Gelashvili & Kiguradze, 1995), obsahující odvození diferenčních schémat aplikací globálního přístupu v rámci teorie Carathéodory.

Někteří autoři se v současné době demonstrují, že právě kategorie diferenciálních rovnic se zpožděným argumentem je vhodná k popisu dynamiky, v níž mají minulé stavy vliv na aktuální stav systému (např. Asea & Zak, 1999; Collard a kol., 2008; Doepke a kol., 2015; Hale & Verduyn Lunel, 1993).

Diferenciální rovnice se zpožděním byly využity k popisu periodického a aperiodického chování ekonomických proměnných v publikacích, jako jsou (Belair & Mackey, 1989;; Howroyd & Russell, 1984; Li, 2003; Matsumoto & Szidarovszky, 2011; Matsumoto & Szidarovszky, 2012; Zhang a kol., 2012).

Dynamické prostředí keynesiánských modelů, v minulosti charakterizované převážně diferenčními rovnicemi, bylo v pracích (Guerrini a kol., 2018; Naimzada & Pireddu, 2014a; Naimzada & Pireddu, 2014b; Naimzada & Pireddu, 2015) popsáno také nelineárními modely využívajícími diferenciální rovnice se zpožděním.

Z dalších případů, kdy je v ekonomii respektování časového zpoždění jedním z důležitých faktorů, můžeme jmenovat modelování finančních systémů. Na tento fakt poukazují Ranjan a Bhardwaj (Ranjan & Bhardwaj, 2015a; Ranjan & Bhardwaj, 2015b). Řízení ekonomického systému v podmínkách nejistoty pomocí klouzavého režimu řízení studovali Wang, Huang a Shen (Wang a kol., 2012).

4.5 Zhodnocení současného stavu vědeckého poznání

Jak vyplývá z předchozích odstavců, řízení podniku se stalo komplexním problémem, neboť na podnik lze pohlížet jako na systém, který si lze přestavit jako skupinu jednotek, které jsou na sobě vzájemně závislé, vzájemně se ovlivňují a zároveň tvoří jednotný celek. Stejně jako v případě jiných systémů, musí jeho části fungovat koordinovaně, aby fungoval celý systém – v našem případě aby byl zajištěn úspěšný provoz podniku. Z toho plyne, že vzájemná propojení je třeba řídit.

Jedním ze základních rysů dynamických modelů v ekonomii a řízení podniku, vytvářených v současné době, jsou časová zpoždění. Je to důsledkem toho, že většina jevů, vyskytujících se v komplexních ekonomických systémech v reálném světě, nemá okamžitý účinek, ale objevuje se s určitým zpožděním. Tato zpoždění mohou být různých typů a mohou nabývat různých forem. Současný výzkum ekonomické dynamiky směřuje k využívání obyčejných diferenciálních rovnic se zpožděnými argumenty. Je tomu tak proto, že některé ekonomické jevy nelze vyčerpávajícím způsobem pomocí obyčejných diferenciálních rovnic náležitě popsat.

Z předchozí analýzy prostředků k matematickému vyhodnocování dynamických modelů se zpožděními také vyplývá, že schází dostatečně široký systematický aparát k realizaci numerických výpočtů, který by současně nebyl závislý pouze na specializovaných softwarových aplikacích a mohl být používán všude tam, kde je k dispozici jakýkoliv program pro numerické řešení počáteční úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice a jejich systémy.

V současné době se numerický výpočet řešení diferenciálních rovnic a jejich systémů realizuje s již neodmyslitelnou výpočetní technikou. Velmi bohatý je software dovolující výpočty konkrétních řešení obyčejných diferenciálních rovnic a jejich systémů bez „odkloněného" (tj. bez zpožděného nebo předcházejícího nebo obecně odkloněného) argumentu. Numericky lze řešit celou řadu dalších kvalitativních otázek, včetně např. oblastí stability řešení, výpočtů řešení obecnějších okrajových úloh než jen počáteční (např. 2 - bodové, spec. periodické), a to s požadovanou přesností. Pro obyčejné diferenciální rovnice a jejich systémy se zpožděními je takový software podstatně omezenější a není ještě vybaven takovými algoritmy, které by umožnily náročnější výpočty požadované praxí. Navíc je obvykle tento specializovaný, leč nedostačující, software součástí nákladných softwarových balíků, např. Maple nebo MATLAB.

Kapitola 5

Nový postup konstrukce řešení modelů dynamických systémů v ekonomice a řízení podniku

Matematické modely dynamických procesů v podnikové ekonomice jsou zřejmě za určitých podmínek, které si v dalším textu ještě upřesníme, zvláštními případy dynamických systémů. V této kapitole bude popsán nový obecný postup řešení dynamických systémů, vyjádřených diferenciálními rovnicemi se zpožděními, které mohou být využity pro popis řady úloh z oblasti dynamického modelování v ekonomice a řízení podniku.

Báze nového postupu numerického řešení nelokálních okrajových úloh pro systémy diferenciálních rovnic se zpožděnými argumenty, použitého v práci, se opírá o aplikaci rozšířené klasické Banachovy věty o pevném bodu (Kolmogorov & Fomin,1975), o princip apriorního odhadu řešení okrajových úloh funkcionálních diferenciálních rovnic a jistou specifickou vlastnost operátorů Volterrova typu, k nimž pravé strany rovnic se zpožděními patří - viz. A a níže postupně uváděná literatura. Podrobné odvození a zdůvodnění používaných postupů je také obsahem teoretické části monografie (Škapa & Novotná, 2019).

V této kapitole uvedená matematické tvrzení (Věty) lze rozdělit na dvě skupiny. V první skupině jsou Věty převzaté ze specializované matematické literatury (viz. jejich citace), dovolující získat v potřebné podobě základní informace o řešitelnosti uvažovaných úloh. Druhou skupinu tvoří Věty, jejich nejčastěji v aplikacích používané Důsledky a v Poznámkách zpřesnění vlastnosti nového metodického postupu ke konstrukci řešení uvažovaných úloh, které jsou na rozdíl od tvrzení z předchozí skupiny plně dokazovány.

5.1 Matematický popis modelů dynamických systémů se zpožděním v ekonomice a řízení podniku

V matematických modelech procesů v oblasti ekonomiky a řízení podniku obvykle, spolu s vlivem uvažovaných proměnných se zpožděním, tyto proměnné figurují i bez zpoždění, tj. s okamžitým vlivem v čase t, navíc často s lineární závislostí. Současně jsou nejčastěji zvažována řešení takových dynamických systémů, nabývajících v daném čase (obvykle počátek) předem daných hodnot, tj. splňující tzv. Cauchyovy (počáteční) podmínky. Takové matematické modely odpovídají systémům diferenciálních rovnic obsahujícím lineární část bez zpoždění a okrajovým podmínkám Cauchyova typu. Specifikace tvaru dynamického systému a okrajových podmínek usnadňuje jak získání potřebných podmínek řešitelnosti úloh, tak použití popsaných postupů řešení v konkrétních případech.

Použití diferenciálních rovnic se zpožděním nám při konstrukci modelu umožňuje vyjádřit „vliv paměti" (historie) jednotlivých veličin a jejich vzájemných vazeb. Může se jednat o vlastnosti samotného systému nebo o zásahy z vnějšího prostředí.

V matematických modelech ekonomických dynamických systémů se často využívají diferenciální rovnice a jejich systémy, jejichž řešení, vyhovující jistým podmínkám, modeluje chování popisovaných veličin v čase t. Obecně se jedná o úlohy o řešitelnosti, vlastnostech, případně konstrukci řešení systémů obecně nelineárních obyčejných diferenciálních rovnic

$$x_i'(t) = f_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \ (i = 1, \dots, n), \tag{5.1}$$

splňující tzv. obecné okrajové podmínky

$$H_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \ (i = 1, \dots, n), \tag{5.2}$$

v nichž funkce $f_1, \dots, f_n$ a tzv. funkcionály $H_1, \dots, H_n$ splňují v teorii těchto úloh odůvodněné požadavky. Použijeme-li, jako v úvodu, vektorového zápisu, lze tuto tzv. okrajovou úlohu (5.1), (5.2) zapsat ve tvaru

$$x'(t) = f(t, x(t)), \ \ H(x) = 0. \tag{5.3}$$

Poznamenejme, že jak je známo z teorie diferenciálních rovnic, každá diferenciální rovnice (systém) vyššího řádu je vyjádřitelná (vyjádřitelný) odpovídajícím systémem (5.1) a okrajovou podmínkou pro studované řešení ve tvaru (5.2). Studium úloh pro diferenciální rovnice (systémy) vyšších řádů v původním tvaru přitom může vést k snazšímu a podrobnějšímu získání popisu řešení. Pro naše účely však budeme uvažovat úlohy (5.1), (5.2) a to v obvykle používaném časovém intervalu $[t_l, t_r]$ pro dostatečně velké t_r.

Poznamenejme také, že zvláštními případy systému (5.1) jsou lineární systémy

$$x_i'(t) = p_{i1}(t)x_1(t) + \ldots + p_{in}(t)x_n(t) + g_i(t) \ (i = 1, \ldots, n), \tag{5.4}$$

a zvláštními případy okrajových podmínek (5.2) podmínky obecné lineární, lineární Cauchyova typu (5.10), počáteční

$$x_i(t_0) = c_{0i} \ (i = 1, \ldots, n), \tag{5.5}$$

2-bodové lineární

$$x_i(t_0) = b_{i1}x_1(t_1) + \ldots + b_{in}x_n(t_1) + c_{0i} \ (i = 1, \ldots, n), \tag{5.6}$$

kde $t_0, t_1 \in [t_l, t_r]$ libovolné a jejichž zvláštním případem jsou jak podmínky počáteční (při $b_{ij} = 0$), tak tzv. periodické (při $t_0 = t_l, \ t_1 = t_r, \ b_{ij} = \delta_i^j$ a $c_{0i} = 0$ pro všechna $i, j = 1, \ldots, n$) a další. Tomuto lineárnímu systému a uvedeným okrajovým podmínkám odpovídají vektorové zápisy (5.15) a

$$x(t_l) = c_0, \text{ resp. } x(t_l) = Bx(t_r) + c_0.$$

Jak již bylo uvedeno, vytvořit matematický model dynamického systému, který výstižně popisuje jeho dynamiku podnikových procesů, je obtížné mimo jiné proto, že v mnoha reálných systémech narážíme na problém zpoždění vlivu některých z modelovaných veličin.

Vhodným prostředkem pro matematický popis těchto vztahů jsou právě funkcionální diferenciální rovnice, jejichž velmi speciální částí je i teorie diferenciálních rovnic se zpožděnými argumenty. Hlavní výhoda těchto modelů spočívá v možnosti simulačních experimentů, které se zaměřují na vliv změn parametrů zahrnutých v modelu na chování sledovaných proměnných.

Soustřeďme se nyní na zvláštní případy systémů funkcionálních diferenciálních rovnic, nejdříve na tzv. systémy diferenciálních rovnic s konstantním zpožděním (uvažovat lze i s více a nekonstantními zpožděními nebo obecněji s „odkloněnými“ argumenty)

$$x_i'(t) = f_i(t, x_i(t - \Delta), \ldots, x_n(t - \Delta)) \ (i = 1, \ldots, n),$$

respektive tzv. lineární systémy diferenciálních rovnic s konstantním zpožděním

$$x_i'(t) = p_{i1}(t)x_i(t - \Delta) + \ldots + p_{in}(t)x_n(t - \Delta) + g_{0i}(t) \ (i = 1, \ldots, n),$$

kde $\Delta \geq 0$ a případně na systémy obsahující jak komponenty řešení se zpožděním, tak bez zpoždění. Vzhledem k této nové situaci je třeba znát chování řešení „před“ aktuálním časem t. Proto musí být podmínky chování řešení doplněny o tomu odpovídající údaj, o „historii“ řešení pro $t \in [t_l - \Delta, t_l)$ například ve tvaru

$$x_i(t) = h_i(t) \text{ pro } t \in [t_l - \Delta, t_l) \ (i = 1, \ldots, n),$$

kde funkce $h_1, \ldots, h_n$ jsou spojité na uvedeném intervalu. Tomu, při použití vektorového zápisu, odpovídají systémy obyčejných diferenciálních rovnic s konstantním zpožděním Δ

$$x'(t) = f(t, x(t - \Delta)), \text{ resp. } x'(t) = P(t)x(t - \Delta) + g_0(t)$$

doplněné podmínkou

$$x(t) = h(t) \text{ pro } t \in [t_l - \Delta, t_l)\,.$$

Pokud budeme v uvažovaném modelu požadovat spojitou návaznost řešení na funkci h, která „historii“ řešení popisuje v čase $t \leq t_l$, pak obecné okrajové podmínky, případně jejich zvláštní případy přejdou pouze do tvaru Cauchyovy počáteční podmínky

$$x(t_l) = h(t_l),$$

respektive

$$x(t) = h(t) \text{ pro } t \in [t_l - \Delta, t_l].$$

Jestliže připustíme i nespojitý přechod od funkce h popisující „historii“ řešení před časem t_l k řešení x uvažovaných systémů diferenciálních rovnic na intervalu $[t_l, t_r]$, může mít funkce x vyhovující okrajové podmínce $H(x) = 0$ a podmínce $x(t) = h(t) \ \ t \in [t_l - \Delta, t_l]$ v bodě t_l nespojitost typu skoku.

Obecněji, v práci uvedená matematická tvrzení jsou proto formulována jak pro lineární, tak nelineární systémy obyčejných diferenciálních rovnic se zpožděními na intervalu $[t_l, t_r]$ ve tvaru

$$x'(t) = P(t)x(t) + \sum_{i=1}^{s} P_i(t)x(\tau_i(t)) + g_0(t), \tag{5.7}$$

resp.

$$x'(t) = P(t)x(t) + f(t, x(\tau_1(t)), \ldots, x(\tau_s(t))), \tag{5.8}$$

kde funkce τ_i $(i = 1, \ldots, s)$ jsou tzv. zpoždění (tj. $\tau_i(t) \leq t$ pro $t \in [t_l, t_r]$ a $i = 1, \ldots, s$) a navíc

$$x(t) = h(t) \text{ pro } t < t_l, \tag{5.9}$$

přičemž P a P_i $(i = 1, \ldots, s)$ jsou maticové funkce řádu n, g je vektorová n-dimenzionální funkce, f je n-dimenzionální vektorová funkce $1 + s \cdot n$ proměnných, h je vektorová n-dimenzionální funkce. Spolu s těmito systémy diferenciálních rovnic požadujeme, aby jejich řešení splňovalo tzv. lineární okrajové podmínky Cauchyova typu

$$x(t_0) = l_0(x) + c_0, \tag{5.10}$$

kde $t_0 \in [t_l, t_r]$, l_0 je lineární vektorový n-dimenzionální funkcionál a c_0 je konstantní vektor dimenze n.

Specifický charakter těchto tzv. okrajových úloh (5.7), (5.9), (5.10) resp. (5.8), (5.9), (5.10) pro systémy se zpožděnými (obecně odkloněnými) argumenty je přitom vhodnější pro naše účely interpretovat ve tvaru

$$x'(t) = P(t)x(t) + \sum_{i=1}^{s} \chi_I(\tau_i(t))P_i(t)x(\tau_i^0(t)) + g(t), \tag{5.11}$$

kde

$$g(t) = g_0(t) + \sum_{i=1}^{s}(1 - \chi_I(\tau_i(t)))P_i(t)h(\tau_i(t))$$

a

$$\tau_i^0(t) = \begin{cases} \tau_i(t) \ pro \ \tau(t) \in I \\ \\ t_l \ pro \ \tau(t) < t_l \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, s)$$

resp.

$$\begin{aligned} x'(t) = \ & P(t)x(t) + f(t, \chi_I(\tau_1(t))x(\tau_1^0(t)) + (1 - \chi_I(\tau_1(t)))h(\tau_1(t)), \ldots, \\ & \chi_I(\tau_1(t))x(\tau_s^0(t)) + (1 - \chi_I(\tau_s(t)))h(\tau_s(t))), \end{aligned} \tag{5.12}$$

a současně okrajovou podmínku (5.10) doplnit o podmínku (5.9) - t.j. o popis řešení x vlevo od bodu t_l na

$$x(t_0) = l_0(x) + c_0, \ x(t) = h(t) \text{ pro } t < t_l \tag{5.13}$$

Zřejmě zvláštním případem obecně nelineárního systému (5.8) je lineární systém (5.7) - stačí položit

$$f(t, x(\tau_1(t)), \ldots, x(\tau_s(t))) = \sum_{i=1}^{s} P_i(t)x(\tau_i(t)) + g_0(t).$$

Společnými zvláštními případy jsou lineární systémy s jedním zpožděním

$$x'(t) = P(t)x(t) + P_1(t)x(\tau(t)) + g_0(t), \tag{5.14}$$

resp. bez zpoždění

$$x'(t) = P(t)x(t) + g(t), \tag{5.15}$$

a zvláštním případem nelineárního systému (5.8) s vydělenou lineární částí je systém obyčejných diferenciálních rovnic ve tvaru

$$x'(t) = P(t)x(t) + f(t, x(t)). \tag{5.16}$$

Zvláštním případem podmínek (5.13) je například počáteční (Cauchyova) podmínka

$$x(t_0) = c_0,\ x(t) = h(t) \text{ pro } t < t_l \tag{5.17}$$

nejčastěji používaná v praxi, periodická okrajová podmínka

$$x(t_l) = x(t_r),\ x(t) = h(t) \text{ pro } t < t_l, \tag{5.18}$$

lineární 2-bodová, případně m-bodová podmínka, integrální podmínka a další.

Přesto, že obecná matematická část úvah přirozeně využívá co nejobecnějších předpokladů o charakteristikách uvažovaných matematických modelů tzv. okrajových úloh (5.7), (5.9), (5.10), resp. (5.8), (5.9),(5.10) - lebesquovská integrabilita maticových funkcí P, P_i $(i = 1, \ldots, s)$ a vektorové funkce g, měřitelnost zpoždění τ_i $(i = 1, \ldots, s)$, carathéodoryovskost vektorové funkce f, spojitost a případně ohraničenost vektorové funkce h a linearita funkcionálu l_0, stačí v úvahách o ekonomických modelech použít jen zvláštní případy těchto obecných možností.

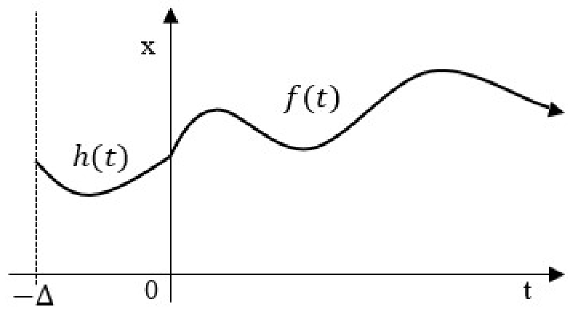
V konkrétních matematických modelech ekonomických dynamických procesů v podnikovém řízení jsou na intervalu $I = [t_l, t_r]$

- *koeficienty maticových funkcí P, P_i $(i = 1, \ldots, s)$ a vektorové funkce g_0 resp. g spojité a nebo „po částech“*[1] *spojité a h spojitá a příp. ohraničená pro $t < t_l$*

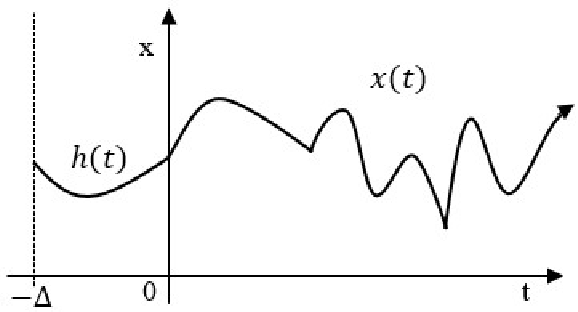
- *zpoždění $\tau_i(t) \equiv t - \Delta_i(t)$, kde Δ_i jsou nezáporné a spojité nebo po částech spojité funkce $(i = 1, \ldots, s)$*

- *komponenty vektorové funkce f jsou vzhledem k t spojité nebo po částech spojité a vzhledem k x spojité*

- *lineární vektorový funkcionál l_0 budeme uvažovat v m-bodovém tvaru $\sum_{j=1}^{m} B_j x(t_j)$, kde B_j $(j = 1, \ldots, m)$ jsou čtvercové matice řádu n reálných čísel a $t_l \le t_1 < t_2 < \ldots < t_m \le t_r$.*



Obr. 5.1: „Hladká“ křivka spojitě navazující na historickou funkci, zdroj: vlastní zpracování



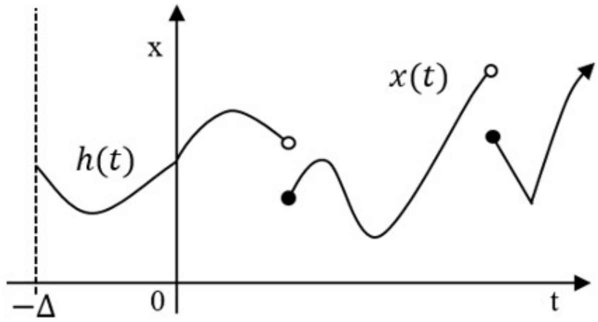
Obr. 5.2: Křivka s „hroty“ spojitě navazující na historickou funkci, zdroj: vlastní zpracování

V případě „jen“ po částech spojitých komponent systémů je grafem každé komponenty řešení na intervalu $[t_l, t_r]$ spojitá křivka, která zde může mít neprázdnou (v případě splnění předpokladů ekonomických dynamických modelů konečnou) množinu bodů, v nichž nelze konstruovat tečny, tzv. „hroty“. Toto řešení ilustruje obrázek 5.2.

Poznámka 2 Případ, kdy Δ_i $(i = 1, \ldots, s)$ jsou kladné konstanty (nuly), popisuje systémy s konstantními zpožděními (bez zpoždění).

Poznámka 3 Při $l_0 \equiv 0$ je podmínka (5.10) Cauchyovou (počáteční) podmínkou, při $t_0 = t_l$, $m = 1$, $t_1 = t_r$, $B_1 = E$ a $c_0 = 0$ je m-bodová podmínka (5.10) zvláštní 2 bodovou tzv. periodickou okrajovou podmínkou.

[1]Funkci ϕ budeme nazývat po částech spojitou na intervalu I, je-li na intervalu I omezená a má zde nejvýše konečný počet bodů nespojitosti.



Obr. 5.3: Po částech spojitá křivka spojitě navazující na historickou funkci, zdroj: vlastní zpracování

Současně s mírou obecnosti předpokladů požadovaných po pravé straně uvažovaných systémů diferenciálních rovnic (5.7), resp. (5.8) je vázán i charakter řešení uvažovaných okrajových úloh (5.7), (5.9), (5.10), resp. (5.8), (5.9), (5.10). Ve zmíněné obecnosti je na intervalu $[t_l, t_r]$ řešením tzv. absolutně spojitá vektorová funkce x vyhovující skoro všude systému (5.7), resp. (5.8) a okrajovým podmínkám (5.13). To odpovídá tzv. carathéodoryovskému pojetí řešení obyčejných diferenciálních rovnic, jehož teorie se rozvíjí velmi intenzivně v posledních padesáti letech.

Za předpokladu spojitosti všech do děje vstupujících komponent systémů je řešením spojitá vektorová funkce x, mající spojitou i první derivaci a vyhovující okrajovým podmínkám (5.10). Toto pojetí řešení je tzv. klasickým (spojitě diferencovatelným) řešením diferenciálních rovnic. Pokud komponenty uvažovaných systémů budou po částech spojité (v uvedeném smyslu), vzhledem k t je řešením uvažovaných úloh spojitá vektorová funkce x vyhovující okrajovým podmínkám (5.10), která ale v bodech poruch spojitosti komponent uvažovaného systému nemusí mít derivaci. Takové řešení lze také popsat termíny spojitá a po částech diferencovatelná funkce, vyhovující dané rovnici (systému). Přitom i tato dvě speciálnější pojetí řešení a s nimi spojené předpoklady o vlastnostech uvažovaných rovnic jsou zvláštními případy obecné carathéodoryovské koncepce teorie diferenciálních rovnic. Velmi podstatně se rozdíly uvedených koncepcí projeví v metodice celé teorie a v geometrické interpretaci řešení uvažovaných úloh. Grafem každé komponenty řešení v případě spojitých komponent systémů je „hladká“ křivka (v každém bodě intervalu $[t_l, t_r]$ lze konstruovat tečnu) - viz. obrázek 5.1.

5.2 Případ lineárního ekonomického modelu

Výhodou dynamických modelů v oblasti ekonomiky a řízení podniku popsaných pomocí lineárních systémů obyčejných diferenciálních rovnic se zpožděními je jejich jednoduchost, což je důležité pro aplikaci modelů v praxi. Při konstrukci těchto modelů je však nutné ověřit, zda správnost výsledku není ovlivněna faktem, že skutečné vztahy se obvykle odchylují od předpokládané linearity. I přes jisté nepřesnosti je možné s jistotou říct, že tyto modely poskytuji velmi užitečné informace pro rozhodování. Běžný přístup ke složitějším, nelineárním, problémům je jejich linearizace. Ekonomické modely, popisované lineárními vztahy, byly intenzivně zkoumány od 30. let minulého století a opírá se o ně současná ekonometrie.

V této práci jsou v kapitole 6 jako ilustrativní příklady nového postupu podrobněji analyzovány lineární dynamické modely popisující trh s drůbežím masem a modely řízení zásob.

Popis níže použité matematické symboliky, definice používaných pojmů a z literatury převzatá potřebná tvrzení jsou uvedena v příloze na str. 172.

5.2.1 Lineární případ se zpožděním

Uvažujme nejdříve na uzavřeném intervalu $I = [t_l, t_r]$ lineární okrajové úlohy pro lineární systémy obyčejných diferenciálních rovnic se zpožděními (5.7), (5.9), (5.10).
S využitím charakteristické funkce χ_I intervalu I označme

$$p(x)(t) = P(x)x(t) + \sum_{i=1}^{s} \chi_I(\tau_i(t))P_i(t)x(\tau_i^0(t)) + g(t),$$

kde

$$\tau_i^0(t) = \begin{cases} \tau_i(t) \text{ pro } \tau_i(t) > t_l \\ t_l \text{ pro } \tau_i(t) \leq t_l \end{cases} \quad (i = 1, \ldots, s),$$

$$g(t) = g_0(t) + \sum_{i=1}^{s} (1 - \chi_I(\tau_i(t)))P_i(t)h(\tau_i(t))$$

a

$$l(x) = x(t_0) - l_0(x).$$

Z vlastností $P, P_i \in L(I; R^{n\times n})$ $(i = 1, \ldots, s)$, $g \in L(I; R^n)$, $\tau_i : I \to R$ $(i = 1, \ldots, s)$ jsou měřitelné funkce, $l_0 : C(I; R^n) \to R^n$ je lineární ohraničený funkcionál, $t_0 \in I$ a $c_0 \in R^n$, které jsou garantovány „předpoklady ekonomických dynamických modelech“ plyne, že okrajové úlohy (5.7), (5.9), (5.10) jsou zvláštními případy úlohy

$$x'(t) = p(x)(t) + g(t) \tag{5.19}$$

s lineárními okrajovými podmínkami

$$l(x) = c_0, \tag{5.20}$$

kde $p \in \; C\,(I; R^n) \;\to\; L\,(I; R^n)$ je lineární silně ohraničený operátor a $l\,:\,C(I; R^n) \;\to\; R^n$ je lineární ohraničený funkcionál. Z výše uvedeného konkrétního tvaru operátoru p navíc plyne, že je i Volterrův vzhledem k bodu $t_* = t_l$.

Vektorová funkce x absolutně spojitá na intervalu I se nazývá řešení lineárního systému funkcionálních diferenciálních rovnic (5.19), jestliže skoro všude na intervalu I vyhovuje rovnici (5.19). Řešením lineární okrajové úlohy (5.19), (5.20) rozumíme řešení systému (5.19) splňující podmínku (5.20).

V práci (Kiguradze & Půža, 1997a) byla odvozena kritéria jednoznačné řešitelnosti okrajové úlohy (5.19), (5.20) jak v plné obecnosti, tak ve vybraných zvláštních případech, a byly řešeny otázky nezápornosti a korektnosti řešení. Konstrukci řešení okrajových úloh (5.19), (5.20) však zatím nebyla, přes dílčí výsledky (Bobalová & Maňásek, 2007; Maňásek, 2007; Novotná, 2012), věnována dostatečná pozornost. Tento nedostatek částečně řeší práce (Půža & Novotná, 2018), přičemž dříve publikované výsledky jsou jejími zvláštními případy.

Pro lineární okrajovou úlohu (5.19), (5.20) je popsána metoda konstrukce jejího řešení prostřednictvím posloupnosti řešení přidružených jednodušších lineárních okrajových úloh. Jsou odvozeny podmínky použitelnosti této metody postupných aproximací v obecném i řadě speciálních případů, je dokázána stabilita uvedené metody v uvedeném smyslu a postupy jsou ilustrovány příklady řešenými v programu Maple.

Základem postupu umožňujícího formulaci postačujících, případně nutných a postačujících podmínek jednoznačné řešitelnosti úlohy (5.19), (5.20) je fredholmovost této lineární úlohy.

Tvrzení 5.1 *(viz. (Kiguradze & Půža, 1997a) - Theorem 1.1)*
Nechť $p \in \; C\,(I; R^n) \;\to\; L\,(I; R^n)$ je lineární silně ohraničený operátor a $l : C(I; R^n) \to R^n$ je lineární ohraničený funkcionál. Lineární okrajová úloha (5.19), (5.20) *má právě jedno řešení tehdy a jenom tehdy, když přidružená homogenní okrajová úloha*

$$x'(t) = p(x)(t), \;\; l(x) = 0 \tag{5.21}$$

má pouze triviální řešení.

S pomocí tohoto tvrzení lze integrací a iterováním obdržet postačující podmínky jednoznačné řešitelnosti úlohy (5.19), (5.20) a s využitím volterrovskosti operátoru p i nutné a postačující podmínky jednoznačné řešitelnosti této úlohy. Významnou úlohu přitom hraje následující tvrzení.

Tvrzení 5.2 *(viz. (Kiguradze & Půža, 1997a) - Lemma 1.1)*
Jestliže lineární silně ohraničený operátor $p : C(I; R^n) \to L(I; R^n)$ je Volterrův vzhledem k $t_* \in I$, pak existuje takové $\eta \in L(I; R)$, že pro libovolné $x \in C(I; R^n)$ platí

1. $\|p(x)(t)\| \le \eta(t)\|x\|_{t_*,t}$ *pro skoro všechna* $t \in I$
2. $\|p^k(x)(t)\| \le \frac{1}{k!} \mid \int_{t_*}^{t} \eta(s)ds \mid^k \|x\|_{t_*,t}$ *pro* $t \in I$ $(k = 1, 2, \ldots)$,

kde $\|x\|_{t_*,t} = max\,\{\|x(s)\| : s \in I_{t_*,t}\}$.

Pro ilustraci v práci (Půža & Novotná, 2018) odvozených tvrzení presentujeme následující, která obsahuje jak kriteria jednoznačné existence řešení, tak popis jeho konstrukce.

Věta 5.1 *(viz. (Kiguradze & Půža, 1997a) - Theorem 1.2´)*
Nechť $p : C(I, R^n) \to L(I; R^n)$ je lineární silně ohraničený Volterův operátor vzhledem k bodu $t_* \in I$ a $l : C(I; R^n) \to R^n$ lineární ohraničený funkcionál, $g \in L\,(I; R^n)$ a $c_0 \in R^n$. Pak lineární okrajová úloha (5.19), (5.20) *je jednoznačně řešitelná tehdy a jenom tehdy, když existují $k, m \in N$ a $A \in R_+^{n\times n}$ tak, že matice Λ_k je regulární,*

$$r(A) < 1, \tag{5.22}$$

a pro všechna řešení $x \in \tilde{C}(I, R^n)$ homogenní okrajové úlohy (5.21) *je*

$$|p^{k,m}(x)|_C \le A|x|_C. \tag{5.23}$$

Poznámka 4 Předpoklady tohoto tvrzení a případně důsledků dokázaných v (Kiguradze & Půža, 1997a), resp. (Kiguradze & Půža, 2003), garantují i tzv. korektnost (spojitou závislost řešení na změnách počátečních podmínek a pravých stran) uvažovaných lineárních úloh, nezbytnou pro úspěšné numerické řešení těchto úloh.

Věta 5.2 *(viz. (Půža & Novotná, 2018) - Theorem 2.)*
Nechť jsou splněny předpoklady Věty 5.1, podmínka (5.23) *platí na $C(I; R^n)$ a $x \in \tilde{C}(I; R^n)$ je řešením okrajové úlohy* (5.19), (5.20). *Pak pro libovolné $x_0 \in C(I; R^n)$ a každé $\nu \in N$ mají právě jedno řešení $x_\nu \in \tilde{C}(I; R^n)$ i okrajové úlohy*

$$x_\nu'(t) = p(x_{\nu-1})(t) + g(t), \tag{5.24}$$

$$x_\nu(t_0) = \Lambda_k^{-1}\left[c_0 - l(p^k(x_{\nu-1})) - l\left(\sum_{i=1}^{k} p^{i-1}(\hat{g})\right)\right], \tag{5.25}$$

a platí

$$\lim_{\nu\to\infty} \|x - x_\nu\|_C = 0. \tag{5.26}$$

Důkaz: Z předpokladů věty plyne, že úloha (5.19), (5.20) má podle Věty 5.1 právě jedno řešení x. Integrací rovnosti (5.19), její násobnou iterací, využitím okrajové podmínky (5.20) a předpokladu regularity při k-té iteraci, obdržíme pro řešení x naší úlohy i rovnice

$$\begin{aligned} x(t) &= c + p^1(x)(t) + \hat{g}(t) = \\ &= p^2(x)(t) + (E + p^1(E)(t))c + (\hat{g}(t) + p^1(\hat{g})(t)) = \quad \ldots = \\ &= p^k(x)(t) + \textstyle\sum_{i=1}^k p^{i-1}(E)(t)c + \sum_{i=1}^k p^{i-1}(\hat{g})(t) = \quad \ldots = \\ &= p^{k,m}(x)(t) + D^{k,m}(\hat{g}, c_0)(t), \end{aligned}$$

kde

$$c = \Lambda_k^{-1}\left[c_0 - l(p^k(x)) - l\left(\sum_{i=1}^{k} p^{i-1}(\hat{g})\right)\right]$$

respektive

$$x = Tx = \mathbf{T}x,$$

kde $T, \mathbf{T} : C(I; R^n) \to C(I; R^n)$ jsou spojité operátory

$$\begin{aligned} Tx &= c + p^1(x) + \hat{g} = p^{k,1}(x) + D^{k,1}(\hat{g}, c_0), \\ \mathbf{T}x &= p^{k,m}(x) + D^{k,m}(\hat{g}, c_0) \end{aligned}$$

a

$$\mathbf{T} = T^m = T(T^{m-1}).$$

Stačí dokázat, že operátor $\mathbf{T}$ je kontrakcí. Buďte proto $x, y \in C(I, R^n)$ libovolné vektorové funkce, pak podle (5.23)

$$|\mathbf{T}x - \mathbf{T}y|_C = |p^{k,m}(x - y)|_c \leq A|x - y|_C,$$

kde $A \in R_+^{n\times n}$ a $r(A) < 1$. Odtud plyne, že uvedený operátor $\mathbf{T}$ je kontrakcí s Lipschtzovou konstantou $q = r(A) \in [0, 1)$.

Protože $T : C(I; R^n) \to C(I; R^n)$ je spojitý a $T^m = \mathbf{T}$ je kontrakcí, z Tvrzení A.2 plyne, že i rovnice $x = Tx$ má právě jedno řešení x, které je současně řešením naší okrajové úlohy a které lze získat metodou postupných aproximací $x_\nu = Tx_{\nu-1}$ ($\nu \in N$), kde je $x_0 \in C(I; R^n)$ libovolná, tj. prostřednictvím řešení úloh (5.24), (5.25).

Poznámka 5 Výše popsaná metoda konstrukce řešení (metoda postupných aproximací) je v jistém smyslu stabilní - je-li x řešením úlohy (5.19), (5.20) a $\bar{x}_\nu$ ($\nu \in N$) řešením úlohy

$$\bar{x}_\nu'(t) = p(\bar{x}_{\nu-1})(t) + g(t) + \bar{g}_\nu(t), \; l(\bar{x}_\nu) = c_0 + \bar{c}_\nu,$$

přičemž

$$\lim_{\nu \to \infty} \left(\int_{t_l}^{t_r} |\bar{g}_\nu(t)| dt + |\bar{c}_\nu| \right) = 0,$$

pak $\bar{x}_\nu$ konverguje stejnoměrně na I k řešení x.

Označme $u_\nu(t) = x(t) - x_\nu(t)$, $t \in I$. Potom u_ν vyhovuje rovnicím

$$u_\nu'(t) = p(u_{\nu-1})(t) + D^{k,m}(\hat{\bar{g}}_\nu, \bar{c}_\nu).$$

Z uvedené podmínky a spojitosti $D^{k,m}$ plyne, že $\lim_{\nu \to \infty} D^{k,m}(\hat{\bar{g}}_\nu, \bar{c}_\nu) = 0$ a z vlastností operátoru plyne $p^{k,m}$, že $\lim_{\nu \to \infty} u_\nu = 0$. Odtud vyplývá tvrzení (viz. též práce (Půža & Novotná, 2018)).

V práci (Půža & Novotná, 2018) uvedená tvrzení popisují metody postupných aproximací řešení úloh obecnějších i přímo popisujících lineární dynamické ekonomické systémy. Například volbou $l(x) \equiv x(t_0)$ obdržíme z Důsledku 1 publikace (Půža & Novotná, 2018) resp. Věty 5.2, kritérium jednoznačné řešitelnosti Cauchyovy počáteční úlohy pro obecný lineární systém s Volterrovským operátorem.

Důsledek 5.1 *Nechť $p : C(I, R^n) \to L(I; R^n)$ je lineární silně ohraničený Volterrův operátor vzhledem k $t_* \in I$, $g \in L(I, R^n)$, $t_0 \in I$ a $c_0 \in R^n$. Pak Cauchyova počáteční lineární úloha*

$$x'(t) = p(x)(t) + g(t), \; x(t_0) = c_0$$

má právě jedno řešení x, pro libovolné $x_0 \in C(I; R^n)$ a každé $\nu \in N$ má jediné řešení x_ν i úloha

$$x_\nu'(t) = p(x_{\nu-1})(t) + g(t), x_\nu(t_0) = c_0$$

a platí (5.26).

Důkaz: Položme $l(x) = x(t_0)$. Zřejmě pro každé $k \in N$

$$\Lambda_k = l\left(\sum_{i=1}^{k} p^{i-1}(E)\right) = \sum_{i=1}^{k} p^{i-1}(E)(t_0) = E$$

a $l(p^k(x)(t) = \int_{t_0}^{t_0} p(p^{k-1}(x))(s)ds = 0 = \int_{t_0}^{t_0} p(p^{k-1}(\hat{g}))(s)ds$. Proto též $\Lambda_k^{-1} = E$ a $p^{k,m}(x)(t) = p^m(x)(t)$.

Protože p je Volterrovský, existuje podle Lemmy 5.2 $m \in N$ a matice A s prvky menšími než $\frac{1}{2n}$ tak, že platí podmínky (5.22) i (5.23). Tvrzení plyne z Věty 5.2.

Důsledek 5.2 *Nechť* $P, P_1 \in L(I; R^{n\times n})$, *funkce* $\tau : I \to R$ *je spojitá a* $\tau(t) \le t$ *na* I, $g_0 \in L(I; R^n)$, $t_0 \in I$, $c_0 \in R^n$ *a* h *je na intervalu* $(-\infty, 0)$ *spojitá a ohraničená. Pak Cauchyova počátečné úloha pro lineární systém s jedním (obecně nekonstantním) zpožděním* (5.14), (5.17) *má právě jedno řešení* x, *pro libovolné* $x_0 \in C(I; R^n)$ *a každé* $\nu \in N$ *má jediné řešení* x_ν *i počáteční úloha*

$$\begin{aligned} x_\nu'(t) = \ & P(t)x_{\nu-1}(t) + \chi_I(\tau(t))P_1(t)x_{\nu-1}(\tau^0(t)) + \\ & + (1 - \chi_I(\tau(t)))\, P_1(t)h(\tau(t)) + g_0(t), \\ x_\nu(t_0) = \ & c_0, \end{aligned} \tag{5.27}$$

kde

$$\tau^0(t) = \begin{cases} \tau(t) \ \text{pro} \ \tau(t) > t_l \\ t_l \ \text{pro} \ \tau(t) \le t_l, \end{cases}$$

a platí (5.26).

Poznámka 6 V případě požadavku spojité návaznosti řešení x počáteční úlohy (5.14), (5.17) na funkci h popisující řešení x pro $t < (\le)\ t_l$, nahradíme konstantu c_0 hodnotou $\lim_{t\to t_l^-} h(t)$.

Analogické tvrzení lze z Důsledku 5.1 odvodit i pro Cauchyovu počáteční úlohu pro lineární systém s libovolným konečným počtem zpoždění (5.7).

O jednoznačné existenci a konstrukci řešení okrajové úlohy

$$x'(t) = p(x)(t) + g(t), \ x(t_0) = l_0(x) + c_0, \tag{5.28}$$

vhodné pro použití v modelech ekonomických procesů, lze analogicky odvodit i následující tvrzení.

Věta 5.3 *(viz. (Škapa & Novotná, 2019), Theorem 5.3)*
Nechť $p : C(I, R^n) \to L(I; R^n)$ *je lineární silně ohraničený Volterrův operátor vzhledem k* $t_* \in I$, $l_0 : C(I; R^n) \to R^n$ *lineární ohraničený funkcionál*, $t_0 \in I$, $g \in L(I; R^n)$ *a* $c_0 \in R^n$. *Jestliže existují* $k, m \in N$ *a* $A \in R^{n\times n}$ *tak, že matice* $\Lambda_k = E - l_0\left(\sum_{i=1}^k p^{i-1}(E)\right)$ *je regulární*, $r(A) < 1$ *a podmínka* (5.23) *platí na* $C(I; R^n)$, *pak úloha* (5.28) *má právě jedno řešení* x, *pro libovolné* $x_0 \in C(I; R^n)$ *a každé* $\nu \in N$ *má jednoznačné řešení* x_ν *i počáteční úloha*

$$x_\nu'(t) = p(x_{\nu-1})(t) + g(t),$$

$$x_\nu(t_0) = \Lambda_k^{-1}[c_0 + l_0(p^k(x_{\nu-1})) + \sum_{i=1}^{k} l_0(p^{i-1}(\hat{g}))]$$

a platí (5.26).

Důkaz: Analogicky důkazu Věty 5.2 garantují předpoklady podle Věty 5.1 existenci právě jednoho řešení x úlohy (5.28). Integrací rovnosti (5.19), její násobnou iterací a využitím okrajové podmínky (5.20) s $l(x) = x(t_0) - l_0(x)$ při k-té iteraci odvodíme, že toto řešení x uvažované úlohy je i řešením rovnice $x = \mathbf{T}x$, kde operátor $\mathbf{T} : C(I; R^n) \to C(I; R^n)$ je definována vztahem

$$\mathbf{T}x = p^{k,m}(x) + D^{k,m}(\hat{g}, c_0),$$

kde

$$p^{k,m}(x) = p^m(x)(t) + \left[\sum_{i=1}^{m} p^{i-1}(E)(t)\right] \Lambda_k^{-1} l_0(p^k(x)),$$

$$D^{k,m}(\hat{g}, c_0) = \left[\sum_{i=1}^{m} p^{i-1}(E)\right] \Lambda_k^{-1}[c_0 + l_0 \sum_{i=1}^{k}(p^{i-1}(\hat{g})) + \sum_{i=1}^{m} p^{i-1}(\hat{g})].$$

Operátor $\mathbf{T}$ je tedy spojitý, označíme-li T zobrazení definované na $C(I; R^n)$

$$Tx = p^{k,1}(x) + D^{k,1}(\hat{g}, c_0),$$

je zřejmě $T : C(I; R^n) \to C(I; R^n)$ spojitý operátor a $T^m = T(T^{m-1}) = \mathbf{T}$. Protože pro každé $x, y \in C(I; R^n)$ je

$$|\mathbf{T}x - \mathbf{T}y|_c = |p^{k,m}(x - y)|_c \leq A|x - y|_c,$$

kde, podle předpokladu věty, je $r(A) < 1$, je operátor $\mathbf{T}$ kontrakcí s Lipschitzovou konstantou $q = r(A) \in [0, 1)$ a z Tvrzení A.2 plyne, že rovnice $x = Tx$ má právě jedno řešení x, které je současně řešením okrajové úlohy (5.28) a které lze získat popsanou metodou postupných aproximací.

Například volbou $p(x)(t) = P(t)x(t) + \chi_I(\tau(t))P_1(t)x(\tau^0(t))$, $t_0 = t_l$ a $l_0(x) = Bx(t_r)$, kde $B \in R^{n\times n}$, obdržíme řešení 2-bodové lineární úlohy obsahující pro $B = E$ periodickou úlohu.

Důsledek 5.3 *Nechť* $P, P_1 \in L(I; R^{n\times n})$, *funkce* $\tau : I \to R$ *je spojitá a* $\tau(t) \leq t$ *na* I, $g_0 \in L(I; R^n)$, $c_0 \in R^n$, h *je na intervalu* $(-\infty, 0)$ *spojitá a ohraničená a* $B \in R^{n\times n}$. *Jestliže matice*

$$\Lambda_1 = E - B,$$

resp.

$$\Lambda_2 = E - B + B\int_{t_l}^{t_r} (P(t) + \chi_I(\tau(t))P_1(t))dt$$

je regulární a existuje $m \in N$ *a matice* $A \in R^{n\times n}$ *tak, že* $r(A) < 1$ *a podmínka* (5.23) *s* $k = 1$ *resp.* $k = 2$ *platí na* $C(I; R^n)$*, pak má lineární úloha* (5.14),

$$x(t_l) = Bx(t_r) + c_0,\ x(t) = h(t) \text{ pro } t < t_l$$

jediné řešení x*, pro libovolné* $x_0 \in C(I; R^n)$ *a každé* $\nu \in N$ *má jediné řešení* x_ν *má také úloha* (5.27),

$$x_\nu(t_l) = \Lambda_1^{-1}\left[c_0 + B\int_{t_l}^{t_r} (p(x_{\nu-1})(t) + g(t))dt\right]$$

resp.

$$x_\nu(t_l) = \Lambda_2^{-1}\left[c_0 + B\int_{t_l}^{t_r}\left(p\left(\int_{t_l}^{\cdot} p(x_{\nu-1})(s)ds\right)(t) + p(\hat{g})(t) + g(t)\right)dt\right]$$

a platí (5.26).

Důsledek 5.4 *Nechť* $P, P_1 \in L(I; R^{n\times n})$*, funkce* $\tau : I \to R$ *je spojitá a* $\tau(t) \leq t$ *na* I*,* $g_0 \in L(I; R^n)$*,* $c_0 \in R^n$*,* h *je na intervalu* $(-\infty, t_l)$ *spojitá a ohraničená, matice* $\Lambda = \int_{t_l}^{t_r}(P(t) + \chi_I(\tau(t))P_1(t))dt$ *je regulární a existuje* $m \in N$ *a matice* $A \in R^{n\times n}$ *tak, že* $r(A) < 1$ *a podmínka*(5.23) *platí na* $C(I; R^n)$*. Pak má lineární systém* (5.14) *právě jedno řešení* x *vyhovující podmínce* (5.18)*, pro libovolné* $x_0 \in C(I; R^n)$ *a každé* $\nu \in N$ *má jediné řešení* x_ν *také úloha* (5.27),

$$x_\nu(t_l) = \Lambda^{-1}\int_{t_l}^{t_s}\left[p\left(\int_{t_l}^{\cdot} p(x_{\nu-1})(s)ds + \hat{g}\right)(t) + g(t)\right]dt$$

a platí (5.26)

5.2.2 Lineární případ s oddělenou částí bez zpoždění

Využijme nyní tvaru uvažovaného systému lineárních diferenciálních rovnic s oddělenou částí bez zpoždění a okrajových podmínek v Cauchyově tvaru:

$$x'(t) = P(t)x(t) + p_0(x)(t) + g(t), \tag{5.29}$$

$$x(t_0) = l_0(x) + c_0, \tag{5.30}$$

kde $P \in L(I, R^{n\times n})$, operátor $p_0 : \quad C(I, R^n) \to L(I, R^n)$ je lineární silně ohraničený a Volterrův vzhledem k $t_\star \in I$, funkcionál $l_0 : C(I, R^n) \to R^n$ je lineární ohraničený, $t_0 \in I$, $g \in L(I, R^n)$ a $c_0 \in R^n$.

V práci (Škapa & Novotná, 2019) je popsána metoda konstrukce řešení této úlohy prostřednictvím posloupnosti řešení přidružených jednodušších lineárních okrajových úloh, využívající znalosti Greenova operátoru přidružené úlohy. To mezi jiným dovoluje využít pro konstrukci řešení takových úloh na uzavřeném intervalu $I \subset R$ další postupy.

Obecné tvrzení o jednoznačné řešitelnosti úlohy (5.29), (5.30) je uvedeno ve Větě 2 (Půža & Novotná, 2018).

Věta 5.4 *((Kiguradze & Půža, 2003) Theorem 1.3.2)*
Nechť $P_0 \in L(I, R^{n\times n})$, operátor $p_0 : C(I, R^n) \to L(I, R^n)$ je silně ohraničený, $t_0 \in I$, funkcionál $l_0 : C(I, R^n) \to R^n$ je lineární ohraničený a $g \in L(I, R^n)$, $c_0 \in R^n$ a homogenní úloha

$$x'(t) = P_0(t)x(t),\ x(t_0) = l_0(x) \tag{5.31}$$

má pouze triviální řešení. Nechť dále pro každé $x \in C(I, R^n)$ platí nerovnost

$$\int_{t_l}^{t_r} |G_0(t, s)p_0(x)(s)|ds \leq A|x|_C, \tag{5.32}$$

kde G_0 je Greenova matice úlohy (5.31) a $A \in R_+^{n\times n}$ je matice, vyhovující podmínce

$$r(A) < 1. \tag{5.33}$$

Pak má úloha (5.29), (5.30) právě jedno řešení $x \in \tilde{C}(I, R^n)$.

Důkaz: Označíme-li $p(x)(t) = P_0(t)x(t) + p_0(x)(t)$ a $l(x) = x(t_0) - l_0(x)$, pak z předpokladů věty plyne, že jsou splněny i předpoklady věty Theorem 1.3.2 (Kiguradze & Půža, 2003). Úloha (5.29), (5.30) má tedy právě jedno řešení $x \in \tilde{C}(I, R^n)$.

Věta 5.5 *(viz. (Škapa & Novotná, 2019), Theorem 5.5.)*
Nechť jsou splněny předpoklady Věty 5.4 a $x \in \tilde{C}(I; R^n)$ je řešením okrajové úlohy (5.29), (5.30). *Pak pro libovolné $x_0 \in C(I, R^n)$ a každé $\nu \in N$ má jediné řešení x_ν i úloha*

$$x'_\nu(t) = P_0(t)x_\nu(t) + p_0(x_{\nu-1})(t) + g(t), \tag{5.34}$$

$$x_\nu(t_0) = l_0(x_\nu) + c_0, \tag{5.35}$$

a platí (5.26).

Důkaz: Z Věty 5.4 plyne jednoznačná existence řešení uvažované úlohy. Dále, je-li x řešením okrajové úlohy (5.29), (5.30), je i řešením úlohy

$$x'(t) = P_0(t)x(t) + g_0(t), \; l(x) = c_0, \tag{5.36}$$

kde $g_0(t) = p_0(x)(t) + g(t)$, která má právě jedinou fundamentální matici $Y_0 \in C(I, R^{n\times n})$ a jedinou Greenovu matici $G_0 : I \times I \to R^{n\times n}$ takové, že řešení okrajové úlohy (5.36) lze vyjádřit Greenovou formulí

$$x(t) = Y_0(t)c_0 + \int_{t_l}^{t_r} G_0(t,s)g_0(s)ds.$$

Označme dále

$$Tx = Y_0(t)c_0 + \int_{t_l}^{t_r} G_0(t,s)[p_0(x)(s) + g(s)]ds.$$

Řešení okrajové úlohy (5.29), (5.30) zřejmě vyhovuje rovnici $x = Tx$, kde operátor $T : C(I; R^n) \to C(I; R^n)$ je spojitý a kontraktivní, neboť z předpokladů věty plyne, že pro každé $x, y \in C(I, R^n)$

$$|Tx - Ty|_c \leq \int_{t_l}^{t_r} |G_0(t,s)p_0(x-y)(s)|ds \leq A|x-y|_c$$

je $r(A) < 1$. Operátor T je tedy kontraktivní s Lipschitzovou konstantou $q = r(A) \in [0,1)$.

Z věty o pevném bodu Tvrzení A.1 plyne, že řešení rovnice $x = Tx$ lze najít jako stejnoměrnou limitu na intervalu I konvergující posloupnosti řešení x_ν úloh $x_\nu = Tx_{\nu-1}$ ($\nu \in N$), kde $x_0 \in C(I, R^n)$ je libovolná, tedy úloh (5.34), (5.35).

Věta 5.6 *(viz. (Škapa & Novotná, 2019), Theorem 5.6)*
Nechť $P \in L(I, R^{n\times n})$, pro $t, s \in I$ platí podmínka

$$\left(\int_s^t P(\xi)d\xi\right) P(t) = P(t)\left(\int_s^t P(\xi)d\xi\right), \tag{5.37}$$

$p_0 : C(I, R^n) \to L(I, R^n)$ je silně ohraničený lineární operátor, $t_0 \in I$, $l_0 : C(I, R^n) \to R^n$ je lineární ohraničený funkcionál a homogenní úloha

$$x'(t) = P(t)x(t), \; x(t_0) = 0 \tag{5.38}$$

má pouze triviální řešení. Nechť dále pro každé $x \in C(I, R^n)$ platí nerovnosti

$$|p_0(x)(t)| \leq P_0(t)|x|_C, \; |l_0(x)| \leq \Lambda_0|x|_C,$$

a
$$exp\left(\int_{t_0}^{t} P(s)ds\right)\Lambda_0 + |\int_{t_0}^{t} exp\left(\int_{s}^{t} P(\xi)d\xi\right) P_0(s)ds| \le A,$$
kde $\Lambda_0, A \in R_+^{n\times n}$*,* $P_0 \in L(I, R_+^{n\times n})$ *a* $r(A) < 1$*.*

Pak pro libovolné $g \in L(I, R^n)$ *a* $c_0 \in R^n$ *má úloha (5.29), (5.30) právě jedno řešení* $x \in \tilde{C}(I, R^n)$*.*

Důkaz: Nejdříve ukážeme, že za uvedených předpokladů má úloha (5.29), (5.30) právě jedno řešení. K tomu, stačí podle věty Theorem 1.1.1. (Kiguradze & Půža, 2003) prokázat, že přidružená homogenní úloha

$$x'(t) = P(t)x(t) + p_0(x)(t),\ x(t_0) = l_0(x)$$

má pouze triviální řešení. Označme proto x řešení přidružené homogenní úlohy. Potom, podle věty Theorem 1.3.2. (Kiguradze & Půža, 2003)

$$x(t) = exp\left(\int_{t_0}^{t} P(s)ds\right) l_0(x) + \int_{t_0}^{t} exp\left(\int_{s}^{t} P(\xi)d\xi\right) p_0(x)(s)ds$$

a odtud z předpokladů věty postupně plyne

$$|x|_C \le A|x|_C,$$

odtud $(E - A)\,|x|_C \le 0$ a s použitím (5.33) $x(t) \equiv 0$ na I.

Věta 5.7 *Nechť jsou splněny předpoklady Věty 5.6 a* $x \in \tilde{C}(I; R^n)$ *je řešením okrajové úlohy* (5.29), (5.30)*. Pak pro libovolné* $x_0 \in C(I, R^n)$ *a každé* $\nu \in N$ *má jediné řešení* x_ν *i úloha (5.34),*

$$x_\nu(t_0) = l_0(x_{\nu-1}) + c_0 \tag{5.39}$$

a platí (5.26)*.*

Důkaz: Z věty 5.6 plyne, že uvažovaná úloha má právě jedno řešení $x \in \tilde{C}(I; R^n)$. Pak je vektorová funkce x také řešením rovnice $x = Tx$, kde

$$(Tx)(t) = exp\left(\int_{t_0}^{t} P(s)ds\right)(l_0(x) + c_0) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} exp\left(\int_{s}^{t} P(\xi)d\xi\right)[p_0(x)(s) + g(s)]\, ds.$$

Zobrazení T je spojitý operátor $T : C(I; R^n) \to C(I; R^n)$ a pro každé $x, y \in C(I; R^n)$ je

$$
\begin{aligned}
|Tx - Ty| \leq \;& exp\left(\int_{t_0}^t P(s)ds\right) |l_0(x-y)| + \\
& +|\int_{t_0}^t exp\left(\int_s^t P(\xi)d\xi\right) p_0(x-y)(s)ds| \\
\leq \;& \left[exp\left(\int_{t_0}^t P(s)ds\right) \Lambda_0 + |\int_{t_0}^t exp\left(\int_s^t P(\xi)d\xi\right) P_0(s)ds|\right] |x-y|_c \\
\leq \;& A|x-y|_c
\end{aligned}
$$

a protože $A \in R^{n\times n}$, $r(A) < 1$ je operátor T kontrakcí s Lipschitzovou konstantou $q = r(A) \in [0, 1)$.

Z Tvrzení A.1 pak plyne nejen existence jediného řešení rovnice $x = Tx$ a tedy i uvažované okrajové úlohy, ale i jeho konstrukce metodou postupných aproximací řešení prostřednictvím úloh $x_\nu = Tx_{\nu-1}$ ($\nu \in N$), které odpovídají okrajovým úlohám (5.34), (5.39), přičemž funkce $x_0 \in C(I; R^n)$ libovolně.

Poznámka 7 Výše uvedená metoda postupných aproximací je opět v dříve uvedeném smyslu stabilní.

Pro aplikace teorie dynamických systémů se zpožděním je například vhodný důsledek pro případ obecných zpoždění a důsledek pro případ zpoždění konstantních.

Důsledek 5.5 *Nechť matice $P, P_i \in L(I, R^{n\times n})$ $(i = 1, \dots, \bar{s})$, P splňuje na intervalu I podmínku (5.37), úloha* (5.38) *má pouze triviální řešení, funkce $\tau_i : I \to R$ $(i = 1, \dots, \bar{s})$, jsou spojité, $\tau_i(t) \leq t$ pro $t \in I$ a $h : (-\infty, t_l) \to R^n$ je spojitá ohraničená funkce.*

Pak má počáteční úloha (5.7), (5.17) pro libovolná $g \in L(I, R^n)$ a $c_0 \in R^n$ jediné řešení $x \in \tilde{C}(I, R^n)$; pro libovolné $x_0 \in C(I, R^n)$ a každé $\nu \in N$ má jediné řešení x_ν i úloha

$$x'_\nu(t) = P(t)x_\nu(t) + \Sigma_{i=1}^{\bar{s}} \chi_I(\tau_i(t))P_i(t)x_{\nu-1}(\tau_i^0(t))$$

$$+\Sigma_{i=1}^{\bar{s}} \left(1 - \chi_I(\tau_i(t))\right) P_i(t)h(\tau_i(t)) + g(t), \tag{5.40}$$

$$x_\nu(t_0) = c_0 \tag{5.41}$$

kde

$$\tau_i^0(t) = \begin{cases} \tau_i(t) & pro\ \tau_i(t) \geq t_l \\ t_l & pro\ \tau_i(t) < t_l \end{cases} \quad (i = 1, \dots, \bar{s}). \tag{5.42}$$

a platí (5.26).

Důkaz: Označme

$$(T_0x)(t) = exp\left(\int_{t_0}^{t} P(s)ds\right) c_0 +$$

$$+\int_{t_0}^{t} exp\left(\int_{s}^{t} P(\xi)d\xi\right)\left[\sum_{i=1}^{\bar{s}} \chi_I(\tau_i(s))P_i(s)x(\tau_i^0(s))\right] ds$$

a

$$g_0(t) = \int_{t_0}^{t} exp\left(\int_{s}^{t} P(\xi)d\xi\right)\left[\sum_{i=1}^{\bar{s}}(1-\chi_I(\tau_i(s)))P_i(s)h(\tau_i(s)) + g(s)\right] ds.$$

Zřejmě je zobrazení $T = T_0 + g_0 : C(I; R^n) \to C(I; R^n)$ spojité. Dokážeme, že pro dostatečně velké $m \in N$ je operátor $\mathbf{T} = T^m = T(T^{m-1})$ kontrakcí.

Buďte $x, y \in C(I; R^n)$ libovolné, pak $Tx - Ty = T_0(x-y)$ a T_0 je lineární spojitý a Volterrův operátor vzhledem k t_l. Z Tvrzení 5.2 plyne existence matice A s prvky menšími než $\frac{1}{2n}$ a $m \in N$ takové, že pro každé $x \in C(I; R^n)$ $|T^m(x)|_c \le A|x|_c$. Operátor $\mathbf{T}$ je tedy kontrakcí s Lipschitzovskou konstantou $q = r(A) \in [0,1)$ a tvrzení důsledku plyne z Tvrzení A.2.

Poznámka 8 Zvláštní případy výše uvedených tvrzení pro případy lineárních systémů bez zpoždění odpovídají tvrzením o konstrukci řešení lineárních úloh I. Kiguradze (Kiguradze, 1986). Stačí zvážit důsledky pro okrajové úlohy

$$x'(t) = P_d(t)x(t) + P_{\bar{d}}(t)x(t) + g(t),$$

$$x(t_0) = l_0(x) + c_0.$$

Důsledek 5.6 *Nechť* $\Delta_i \in R_+$ $(i = 1, \ldots, \bar{s})$, $h : [t_l - \Delta, t_l) \to R^n$, *kde je* $\Delta = max\,\{\Delta_1, \ldots \Delta_{\bar{s}}\}$, *spojitá funkce,* $P = diag(p_1, \ldots, p_n)$, $P_i \in L(I, R^{n\times n})$ *a existuje matice* A *taková, že* $r(A) < 1$ *a na intervalu* I

$$|\int_{t_0}^{t} exp\left(\int_{s}^{t} P(\xi)d\xi\right) \Sigma_{i=1}^{\bar{s}}\chi_I(s-\Delta_i)|P_i(s)|ds| \le A.$$

Pak počáteční úloha

$$x'(t) = P(t)x(t) + \Sigma_{i=1}^{\bar{s}}P_i(t)x(t-\Delta_i) + g(t), \tag{5.43}$$

(5.17) má pro každé $g \in L(I, R^n)$ *a* $c_0 \in R^n$ *jediné řešení* $x \in \tilde{C}(I, R^n)$, *pro libovolné* $x_0 \in C(I, R^n)$ *a každé* $\nu \in N$ *má jediné řešení* x_ν *i úloha*

$$\begin{aligned} x_\nu'(t) = \; & P(t)x_\nu(t) + \Sigma_{i=1}^{\bar{s}}\chi_I(t-\Delta_i)P_i(t)x_{\nu-1}(t-\Delta_i) \\ & + \Sigma_{i=1}^{\bar{s}}(1-\chi_I(t-\Delta_i))P_i(t)h(t-\Delta_i) + g(t), \end{aligned} \tag{5.44}$$

(5.41) a platí (5.26).

Příklad konstrukce řešení

Pro ilustraci výpočtů (k řešení konvergujících) aproximací řešení dané úlohy je použito pouze takového počtu aproximací, jejichž grafy jsou v daných měřítkách rozlišitelné; přitom je v níže uvedených obrázcích označena … „tečkovaně“ funkce „historie“ u, $- - -$ „startovací funkce“ x_0 iteračního procesu, $- \cdot -\cdot$ čerchované aproximace řešení a plnou čarou —— poslední vypočítaná aproximace řešení x_ν.

Příklad 5.1 *Na intervalu* $I = [0, 3]$ *řešme počáteční úlohu*

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\frac{1}{2}x(t) + 2x(t-1) - y(t-1) + sin(t), \\ y'(t) &= x(t) - y(t) + 2y(t-1) + 1, \end{aligned}$$

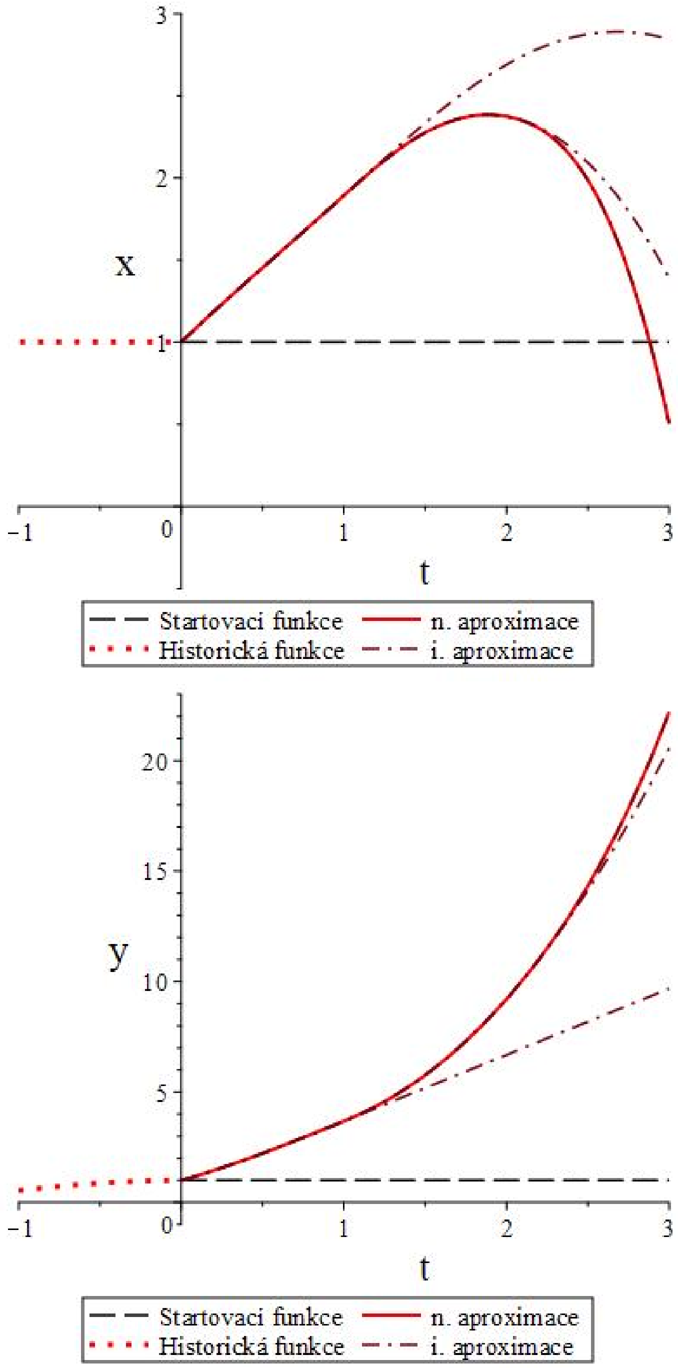
$$\begin{aligned} x(t) = 1, \quad y(t) = cos(t) \quad pro\ t \in [-1, 0]\,, \\ x(0) = 1 \qquad y(0) = 1. \end{aligned}$$

a) Volbou $x_0(t) = 1,\ y_0(t) = 1$ *obdržíme 4. aproximaci řešení úlohy, viz. obrázek 5.4.*

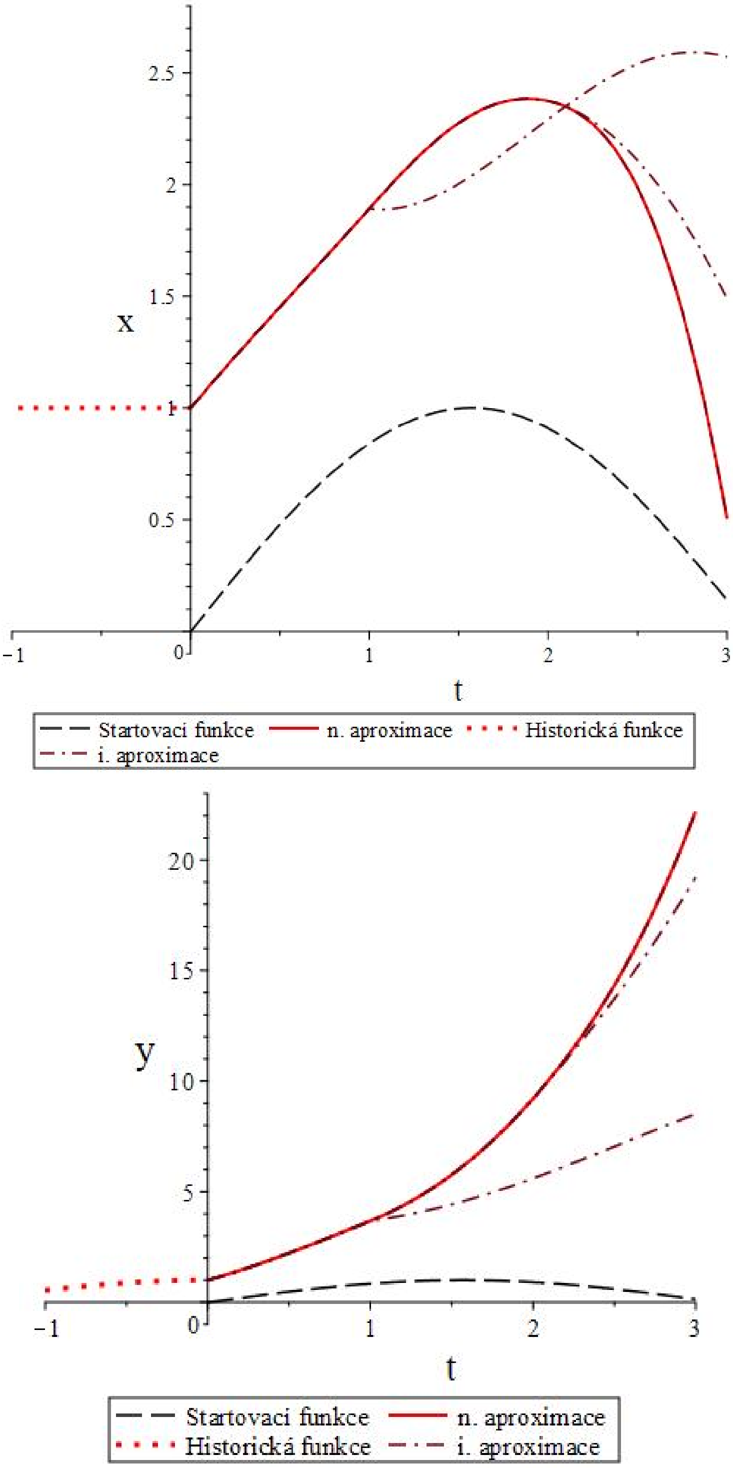
Řešení je invariantní k volbě „počátečních“ funkcí, jak ilustrují následující dva příklady.

b) Volbou $x_0(t) = sin(t),\ y_0(t) = sin(t)$ *obdržíme 4. aproximaci řešení úlohy, viz. obrázek 5.5.*

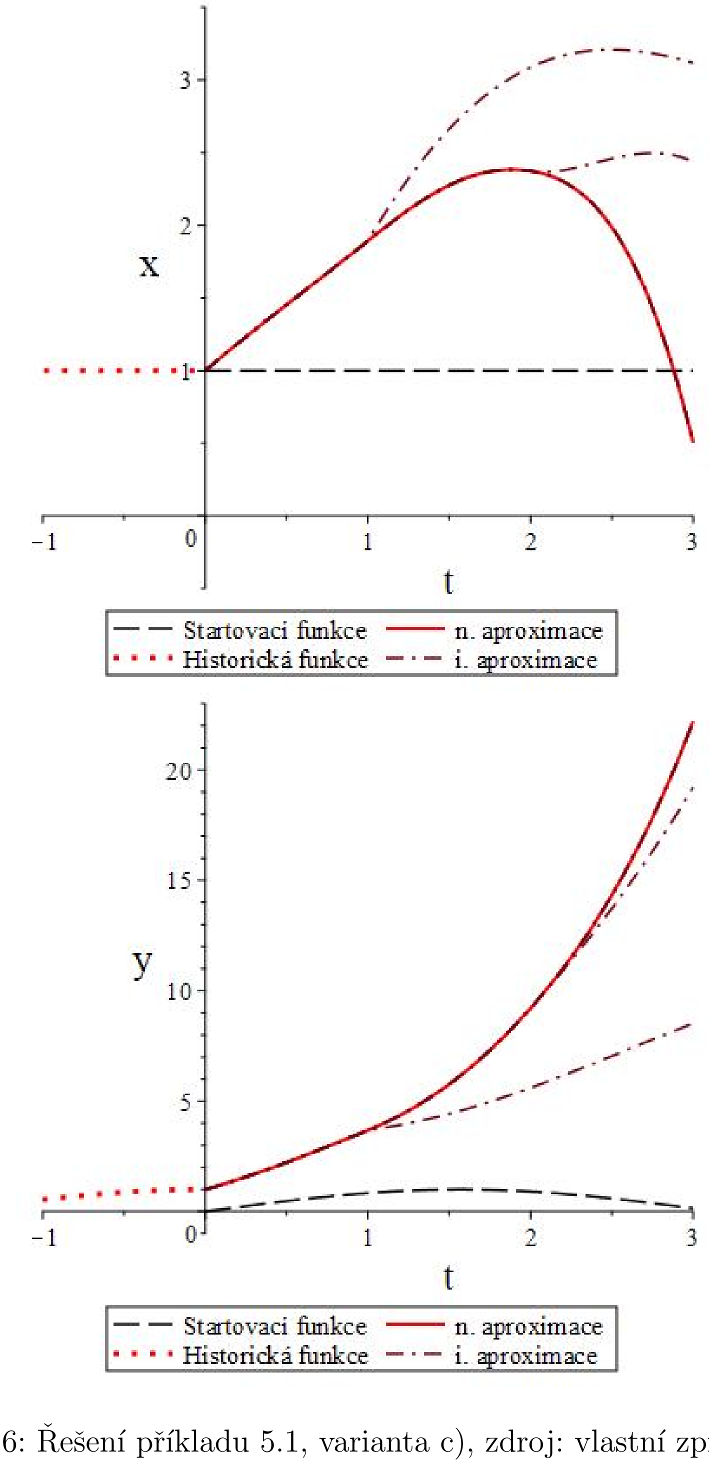
c) Volbou $x_0(t) = 1,\ y_0(t) = sin(t)$ *obdržíme 5 aproximaci řešení úlohy, viz. obrázek 6.6.*



Obr. 5.4: Řešení příkladu 5.1, varinta a), zdroj: vlastní zpracování



Obr. 5.5: Řešení příkladu 5.1, varianta b), zdroj: vlastní zpracování



Obr. 5.6: Řešení příkladu 5.1, varianta c), zdroj: vlastní zpracování

5.3 Případ nelineárního ekonomického modelu

Neustále narůstající požadavek na komplexnost ekonomických modelů je úzce spojen s rostoucí složitostí vzájemných vztahů mezi jednotlivými proměnnými. V mnoha případech již není možné spoléhat pouze na jejich lineární závislost či na dostatečnou přesnost v případě, kdy lineární vztah má nahradit vztah nelineární. Nelineární dynamické modely lze využít v mnoha oblastech ekonomiky a řízení podniku, lze jimi popsat například výrobní cyklus, ekonomický růst nebo ekonomický chaos.

V této práci jsou v kapitole 6 blíže analyzovány nelineární dynamické modely z oblasti ekonomiky a řízení podniku, které nemohou být zcela efektivně popsány pomocí lineárních vztahů. Jedná se především o model reakce trhu akcií na informaci o novém produktu, model systému výroby, skladování a prodeje a model detekce kybernetických útoků na počítačovou síť podniku.

Popis níže použité matematické symboliky, definice používaných pojmů a z literatury převzatá potřebná tvrzení jsou uvedena v kapitole Přílohy na str. 172.

Uvažujme nyní okrajové úlohy pro nelineární dynamické systémy se zpožděními na intervalu $I = [t_l, t_r]$ a uvažujme je ve tvaru (5.8)

$$x'(t) = P(t)x(t) + f(t, x(\tau_1(t)), \ldots, x(\tau_s(t))),$$

s doplňujícími a lineárními okrajovými podmínkami (5.9), (5.10),

$$x(t) = h(t) \text{ pro } t < t_l,$$

$$x(t_0) = l_0(x) + c_0,$$

kde $P \in L(I; R^{n\times n})$, $f \in K(I \times R^{s\times n}; R^n)$, $\tau_j \in C(I; R)$, $\tau_j(t) \le t$ pro $t \in I$ $(j = 1, \ldots, s)$, $g \in L(I; R^n)$, $t_0 \in I$, $l_0 : C(I; R^n) \to R^n$ je lineární spojitý vektorový n-dimenzionální funkcionál, $c_0 \in R^n$ a $h : (-\infty, t_l) \to R^n$ je spojitá a ohraničená vektorová funkce dimenze n.

Analogicky k úvahám o řešitelnosti lineárních okrajových úloh pro systémy se zpožděními je vhodnějším vyjádřením uvažovaného nelineárního systému se zpožděními tvar (5.12)

$$\begin{aligned} x'(t) = \; & P(t)x(t) + f[t, \chi_I(\tau_1(t))x(\tau_1^0(t)) + (1 - \chi_I(\tau_1(t)))h(\tau_1(t)), \ldots, \\ & \chi_I(\tau_1(t))x(\tau_s^0(t)) + (1 - \chi_I(\tau_s(t)))h(\tau_s(t))], \end{aligned}$$

kde opět χ_I je charakteristická funkce intervalu I a τ_j^0 je „zúžení“ zpoždění τ_j na intervalu I.

Řešením systému (5.8) budeme rozumět vektorovou funkci $x \in \tilde{C}(I, R^n)$, která pro skoro všechna $t \in I$ vyhovuje systému (5.12) a řešením okrajové úlohy (5.8), (5.13)

$$x(t_0) = l_0(x) + c_0,\ x(t) = h(t) \text{ pro } t < t_l$$

řešení systému (5.12) splňující podmínky (5.13).

Uvedená úloha (5.8), (5.9), (5.10) je přitom zvláštním případem obecné nelineární úlohy pro systémy tzv. funkcionálních diferenciálních rovnic

$$x'(t) = F(x)(t),\ H(x) = 0, \tag{5.45}$$

kde operátor $F : C(I; R^n) \to L(I; R^n)$ a funkcionál $H : C(I; R^n) \to R^n$ jsou spojité, přičemž pro každé $\rho \in R_+$ je

$$sup\{\|F(x)\| : x \in C(I; R^n), \|x\|_C \leq \rho\} \in L(I; R_+)$$

a

$$sup\{\|H(x)\| : x \in C(I; R^n), \|x\|_C \leq \rho\} < +\infty.$$

Řešením této regulární úlohy rozumíme každou funkci $x \in \tilde{C}(I; R^n)$ pro skoro všechna $t \in I$ splňující danou funkcionální diferenciální rovnici a vyhovující uvedené okrajové podmínce.

K naplnění pro konstrukci řešení takových okrajových úloh nezbytných podmínek jejich jednoznačné řešitelnosti je publikovaný princip apriorního odhadu (viz. (Kiguradze & Půža, 1997b)). Pro naše účely využijeme jeho důsledku.

Důsledek 5.7 *Nechť existují $\rho \in R_+$, lineární silně ohraničený operátor $p : C(I; R^n) \to L(I; R^n)$ a lineární ohraničený funkcionál $l : C(I; R^n) \to R^n$ tak, že okrajová úloha* (5.21)

$$x'(t) = p(x)(t),\ l(x) = 0$$

má pouze triviální řešení a pro každé $\lambda \in (0, 1)$ a libovolné řešení x okrajové úlohy

$$x'(t) = p(x)(t) + \lambda[F(x)(t) - p(x)(t)],$$
$$l(x) = \lambda[l(x) - H(x)]$$

je $\|x\|_C \leq \rho$. Pak úloha (5.45) *má alespoň jedno řešení.*

Z řady publikovaných tvrzení o jednoznačné řešitelnosti regulárních nelokálních okrajových úloh, jejichž odvození se opírá o princip apriorního odhadu, vyberme kriteria pro systémy obyčejných diferenciálních rovnic se zpožděnými argumenty.

Pro základ aplikace metody postupných aproximací pro konstrukci řešení nejčastěji studovaných úloh postačuje následující dvojice tvrzení o existenci a jednoznačnosti úlohy

$$x'(t) = diag(p(t))x(t) + f(t, x(t), x(\tau(t))), \tag{5.46}$$

$$x(t_0) = l_0(x) + c_0 \text{ a } x(t) = h(t) \text{ pro } t < t_l, \tag{5.47}$$

tj. úlohy

$$\begin{gathered} x'(t) = diag(p(t))x(t) + \\ +f[t, x(t), \chi_I(\tau(t))x(\tau^0(t)) + (1 - \chi_I(\tau(t)))h(\tau(t))], \end{gathered} \tag{5.48}$$

$$x(t_0) = l_0(x) + c_0, \tag{5.49}$$

kde $p \in L(I; R^n)$, $f \in K(I \times R^{2n}; R^n)$, $t_0 \in I$, $l_0 : C(I; R^n) \to R^n$ je lineární ohraničený funkcionál, $c_0 \in R^n$, $\tau \in C(I; R)$, $\tau(t) \leq t$ na I,

$$\tau^0(t) = \begin{cases} \tau(t) \text{ pro } \tau(t) > t_l \\ \tau_l \text{ pro } \tau(t) \leq t_l \end{cases}$$

a $h : (-\infty, t_l) \to R^n$ je spojitá a ohraničená funkce.

Tvrzení jsou uvedena v modifikované podobě.

Věta 5.8 *(viz. (Gelashvili & Kiguradze, 1995), Corrolary 1.2")*
Nechť $p(t)sgn(t - t_0) \leq 0$ *na* I*, na množině* $I \times R^{2n}$

$$Sgn\,[(t - t_0)x]\, f(t, x, y) \leq P_1(t)|x| + P_2(t)|y| + g(t) \tag{5.50}$$

a na množině $C(I; R^n)$

$$|l_0(x)| \leq \Lambda_0 |x|_C, \tag{5.51}$$

kde $P_1, P_2 \in L(I; R_+^{n\times n})$*,* $g \in L(I; R^n)$*,* $\Lambda_0 \in R_+^{n\times n}$ *a pro matici* $A \in R_+^{n\times n}$ *takovou, že na intervalu* I

$$\delta \left[\Lambda_0 + \left|\int_{t_0}^{t} [P_1(s) + \chi_I(\tau(s))P_2(s)]\, ds\right|\right] \leq A \tag{5.52}$$

je $r(A) < 1$*, kde* $\delta \in (0, 1]$ *tak, že* $diag(exp \int_{t_0}^{t} p(s)sgn(s - t_0)ds) \leq \delta E$*. Pak má úloha* (5.46)*,* (5.47) *alespoň jedno řešení* $x \in \tilde{C}(I; R^n)$*.*

Důkaz: Obecným řešením homogenního systému $x'(t) = diag(p(t))x(t)$ je zřejmě funkce $x(t) = diag(exp \int_{t_0}^{t} p(s)c$, kde $c \in R^n$, a tedy řešením pomocné homogenní úlohy

$$x'(t) = diag(p(t))x(t),\ x(t_0) = 0$$

je $x(t) \equiv 0$.

Uvažujme nyní řešení x okrajové úlohy

$$x'(t) = diag(p(t))x(t) + \lambda f[t, x(t), \chi_I(\tau(t))x(\tau^0(t)) + (1 - \chi_I(\tau(t)))h(\tau(t))],$$

$$x(t_0) = \lambda[l_0(x) + c_0]$$

pro libovolné $\lambda \in (0, 1)$. Vynásobením 1. rovnice $Sgn[(t - t_0)x(t)]$, integrací od t_0 po t a využitím 2. rovnice postupně dostaneme

$$|x(t)| = diag(exp \int_{t_0}^{t} p(s)sgn(s - t_0)ds)|x(t_0)| +$$

$$+\lambda| \int_{t_0}^{t} diag(exp \int_{s}^{t} p(\xi)sgn(\xi - t_0)d\xi)Sgn[(s - t_0)x(s)]$$

$$f[s, x(s), \chi_I(\tau(s))x(\tau^0(s)) +$$

$$+(1 - \chi_I(\tau(s)))h(\tau(s))]ds \leq$$

$$\leq \delta[\Lambda_0|x|_C + |c_0| + | \int_{t_0}^{t} P_1(s)|x(s)|ds| +$$

$$+| \int_{t_0}^{t} \chi_I(\tau(s))P_2(s)|x(\tau^0(s))|ds| + | \int_{t_0}^{t} g(s)ds|] \leq$$

$$\leq A|x|_C + \delta(|c_0| + |g|_L).$$

Odtud plyne, že $(E - A)|x|_C \leq \delta(|c_0| + |g|_L)$ a protože $r(A) < 1$, pak $\|x\|_C \leq \rho = \|(E - A)^{-1}\delta(|c_0| + |g|_L)\|$. Tvrzení o existenci řešení úlohy (5.46), (5.47) plyne z Důsledku 5.7.

Věta 5.9 *(viz. (Gelashvili & Kiguradze, 1995) Corrolary 1.5")*
Nechť $p(t)sgn(t - t_0) \leq 0$ *na* I*, na množině* $I \times R^{2n}$

$$Sgn\,[(t - t_0)(x - \bar{x})]\,[f(t, x, y) - f(t, \bar{x}, \bar{y})] \leq P_1(t)|x - \bar{x}| + P_2(t)|y - \bar{y}| \tag{5.53}$$

a na množině $C(I; R^n)$ *platí nerovnost* (5.51)*, kde maticové funkce* P_1, P_2*, číslo* $\delta \in (0, 1]$ *a matice* Λ_0 *a* A *splňují předpoklady předchozí Věty 5.8. Pak má úloha* (5.46)*,* (5.47) *právě jedno řešení* $x \in \tilde{C}(I; R^n)$.

Důkaz: Položme v podmínce (5.53) $\bar{x} \equiv \bar{y} \equiv 0$. Z této podmínky plyne podmínka (5.50), v níž $g(t) = Sign[(t-t_0)x]f(t,0,0)$. Podle předchozí věty má tedy uvažovaná úloha alespoň jedno řešení.

Předpokládejme, že úloha (5.46), (5.47) má dvě řešení x a $\bar{x}$ a označme $u = x - \bar{x}$. Pak $u \in \tilde{C}(I;R^n)$ vyhovuje okrajové úloze

$$u'(t) = diag(p(t))u(t) + f(t, x(t), x(\tau(t))) - f(t, \bar{x}(t), \bar{x}(\tau(t)))$$

$$u(t_0) = l_0(u).$$

Násobením 1. rovnice $Sgn[(t-t_0)(x(t)-\bar{x})]$, integrací od t_0 po t a využitím okrajové podmínky postupně dostaneme

$$|u(t)| \leq diag(exp \int_{t_0}^t p(s)sgn(s-t_0)ds)|u(t_0)| +$$

$$+ | \int_{t_0}^t diag(exp \int_s^t p(\xi)sgn(\xi - t_0)d\xi) Sgn[(s-t_0)(x(s)-\bar{x}(s))]$$

$$[f(s, x(s), x(\tau(s))) - f(s, \bar{x}(s), \bar{x}(\tau(s)))]ds| \leq$$

$$\leq \delta \left[|u(t_0)| + |\int_{t_0}^t P_1(s)|u(s)|ds| + |\int_{t_0}^t \chi_I(\tau(s))P_2(s)|u(\tau^0(s))|ds| \right] \leq$$

$$\leq A|u|_C$$

a protože $r(A) < 1$, vyplývá odtud, že $|u|_C \leq (E-A)^{-1}\Theta$, tj., že $u(t) \equiv 0$ na intervalu I, tedy $x(t) \equiv \bar{x}(t)$ na I.

Poznámka 9 Citovaná tvrzení z práce (Gelashvili & Kiguradze, 1995) plynou z předchozích dvou vět volbou $p(t) \equiv p \in R^n \backslash R^n_+$, $P_1(t) + \chi_I(\tau(t))P_2(t) \equiv P \in R^{n\times n}_+$ a příp. $\delta = 1$ a specifikací funkcionálu okrajových podmínek.

Poznámka 10 Analogicky lze odvodit kriteria jednoznačné existence řešení lineárních okrajových úloh pro nelineární systémy s s-zpožděními.

Pro Cauchyovu počáteční úlohu z předchozích vět plyne

Důsledek 5.8 *Nechť je $p(t)sgn(t-t_0) \leq 0$ na I a na množině $I \times R^{2n}$ splněna nerovnost* (5.53)*, kde maticové funkce $P_1, P_2 \in L(I; R^{n\times n}_+)$ a existuje matice $A \in R^{n\times n}_+$ taková, že $r(A) < 1$ a na intervalu I*

$$\delta | \int_{t_0}^t [P_1(s) + \chi_I(\tau(s))P_2(s)]\, ds| \leq A.$$

Pak úloha (5.46), (5.17) *má právě jedno řešení.*

Věta 5.10 *(viz. (Škapa & Novotná, 2019), Theorem 5.3)*
Nechť jsou splněny předpoklady Věty 5.9 a $x \in \tilde{C}(I; R^n)$ *je řešením okrajové úlohy* (5.46), (5.47)*. Pak pro libovolné* $x_0 \in C(I; R^n)$ *a každé* $\nu \in N$ *má jediné řešení* x_ν *i úloha*

$$\begin{gathered} x_\nu'(t) = diag(p(t))x_\nu(t) + \\ + f[t, x_{\nu-1}(t), \chi_I(\tau(t))x_{\nu-1}(\tau^0(t)) + (1 - \chi_I(\tau(t)))h(\tau(t))] \end{gathered} \tag{5.54}$$

$$x_\nu(t_0) = l_0(x_{\nu-1}) + c_0 \tag{5.55}$$

a platí (5.26)*.*

Důkaz: Z předpokladů věty plyne, že úloha (5.46), (5.47) má podle Věty 5.9 právě jedno řešení $x \in \tilde{C}(I; R^n)$. Označíme-li pro toto řešení

$$g_0(t) = f[t, x(t), \chi_I(\tau(t))x(\tau^0(t)) + (1 - \chi_I(\tau(t))h(\tau(t))],$$

pak je x také řešením úlohy

$$x'(t) = diag(p(t))x(t) + g_0(t), \;\; x(t_0) = l_0(x) + c_0.$$

Stejně tak každá z úloh (5.54), (5.55) má, jakožto lineární počáteční úloha, pro každé $\nu \in N$ právě jedno řešení $x_\nu \in \tilde{C}(I; R^n)$.

Označme $u_\nu(t) = x(t) - x_\nu(t)$, $t \in I$. Pak na intervalu I pro vektorovou funkci $u_\nu \in \tilde{C}(I; R^n)$ platí

$$u_\nu'(t) = diag(p(t))u_\nu(t) + [f(t, x(t), x(\tau(t))) - f(t, x_{\nu-1}(t), x_{\nu-1}(\tau(t)))],$$

$$u_\nu(t_0) = l_0(u_{\nu-1})$$

a po vynásobení 1. rovnice $Sgn[(t-t_0)u_{\nu-1}(t)]$, integrací od t_0 po t a využitím okrajové podmínky postupně obdržíme

$$\begin{gathered} |u(t)_\nu| \leq diag(exp \int_{t_0}^t p(s)sgn(s - t_0)ds)|u_\nu(t_0)| + \\ +|\int_{t_0}^t diag(exp \int_s^t p(\xi)sgn(\xi - t_0)d\xi)Sgn[(s - t_0)u_{\nu-1}(s)] \\ [f(s, x(s), x(\tau(s))) - f(s, x_{\nu-1}(s), x_{\nu-1}(\tau(s)))]ds| \leq \\ |l_0(u_{\nu-1})| + |\int_{t_0}^t [P_1(s)|u_{\nu-1}(s)| + \chi_I(\tau(s))P_2(s)|u_{\nu-1}(\tau^0(s))|]ds| \leq \\ \leq A|u_{\nu-1}|_C. \end{gathered}$$

Odtud plyne, že $|u_\nu|_C \leq A|u_{\nu-1}|_C \leq A^2|u_{\nu-2}|_C \leq \ldots \leq A^\nu|u_0|_C$ a protože $r(A) < 1$, $\lim_{\nu\to\infty} A^\nu = \Theta$ a tedy $\lim_{\nu\to\infty} \|x - x_\nu\| = 0$, tj. platí tvrzení věty.

Důsledek 5.9 *Nechť jsou splněny předpoklady Důsledku 5.8 a* $x \in \tilde{C}(I; R^n)$ *je řešením počáteční úlohy* (5.46), (5.17). *Pak pro libovolné* $x_0 \in C(I; R^n)$ *a každé* $\nu \in N$ *má jediné řešení* x_ν *i úloha* (5.54), (5.41) *a platí* (5.26).

Vzhledem k tomu, že operátor

$$(T_0 x)(t) = \delta \int_{t_0}^{t} [P_1(s)x(s) + \chi_I(\tau(s))P_2(s)x(\tau^0(s)]ds$$

je Volterrův a tedy pro jeho iterace platí Tvrzení 5.2, plyne z Důsledku 5.9 (analogicky Důsledku 5.5).

Důsledek 5.10 *Nechť je* $p(t)sgn(t - t_0) \leq 0$ *na* I *a na množině* $I \times R^{2n}$ *je splněna nerovnost* (5.53), *kde maticové funkce* $P_1, P_2 \in L(I; R^{n \times n})$, *funkce* $\tau \in C(I; R)$, $\tau(t) \leq t$ *pro* $t \in I$ *a* $h : (-\infty, t_l) \to R^n$ *je spojitá ohraničená.*

Pak má počáteční úloha (5.46), (5.17) *právě jedno řešení* $x \in \tilde{C}(I; R^n)$, *pro libovolné* $x_0 \in C(I; R^n)$ *a každé* $\nu \in N$ *má jediné řešení* x_ν *i úloha* (5.54), (5.41) *a platí* (5.26).

Poznámka 11 Numerické procesy popsané ve Větě 5.10 a příp. v Důsledku 5.8 - 5.10 jsou stabilní ve stejném smyslu, jak bylo uvedeno u lineárních úloh - viz. Poznámka 5 a Poznámka 7 v odstavcích 5.2.1 a 5.2.2, tj. je-li x řešením úlohy (5.46), (5.47) a $\bar{x}_\nu$ řešením úloh

$$\bar{x}'_\nu(t) = diag(p(t))\bar{x}_\nu(t) + f(t, \bar{x}_{\nu-1}(t), \bar{x}_{\nu-1}(\tau(t))) + \bar{g}_\nu(t),$$

$$\bar{x}_\nu(t_0) = l_0(\bar{x}_{\nu-1}) + c_0 + \bar{c}_\nu,$$

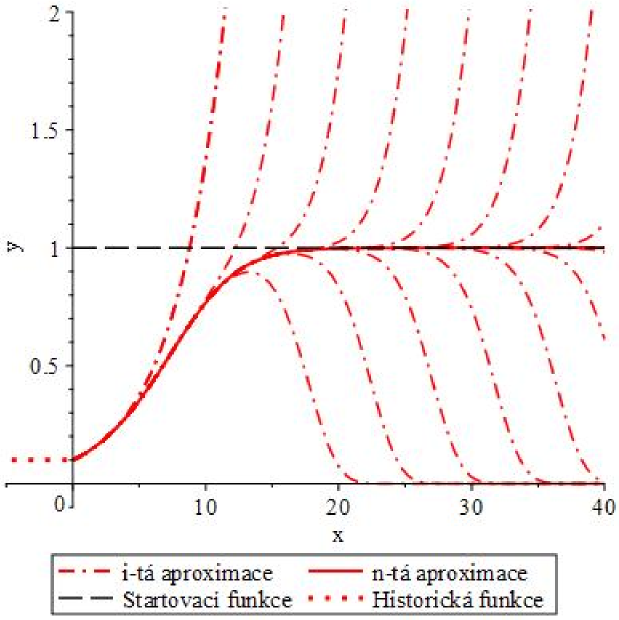
přičemž

$$\lim_{\nu \to \infty} (\int_{t_l}^{t_r} |\bar{g}_\nu(t)|dt + |\bar{c}_\nu|) = 0,$$

pak $\bar{x}_\nu$ konverguje stejnoměrně na I k řešení x.

Příklad konstrukce řešení

Pro ilustraci výpočtů (k řešení konvergujících) aproximací řešení dané úlohy je použito pouze takového počtu aproximací, jejichž grafy jsou v daných měřítkách rozlišitelné; přitom je v níže uvedených obrázcích označena ... „tečkovaně“ funkce „historie“ u, $- - -$ „startovací funkce“ x_0 iteračního procesu, $- \cdot -\cdot$ čerchované aproximace řešení a plnou čarou —— poslední vypočítaná aproximace řešení x_ν.



Obr. 5.7: Řešení příkladu 5.2, varinta 1, zdroj: vlastní zpracování

Příklad 5.2 *Na intervalu $I = [0, 40]$ řešme počáteční úlohu*

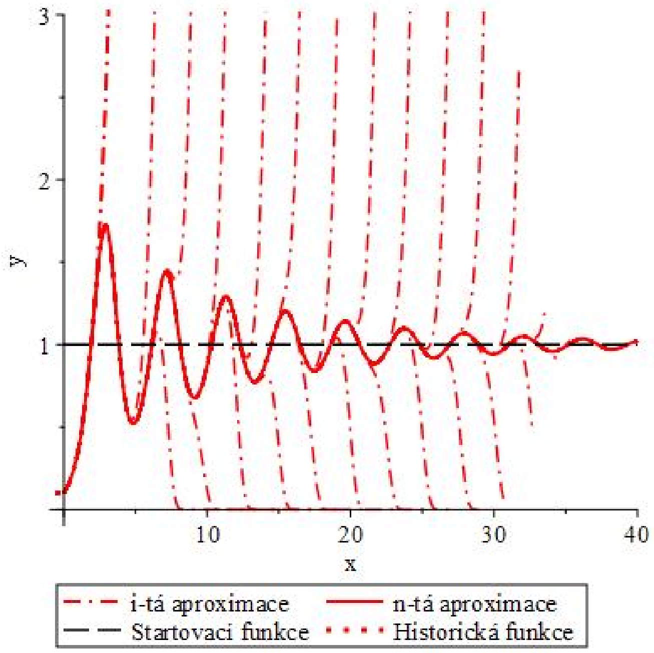
$$x'(t) = ax(t)(1 - x(t-1)),$$

s $x(t) = 0,1$ pro $t \in [-1, 0]$, a počáteční podmínkou $x(0) = 0$. Úloha je lokálními metodami řešena v (Bellen & Zennaro, 2013).

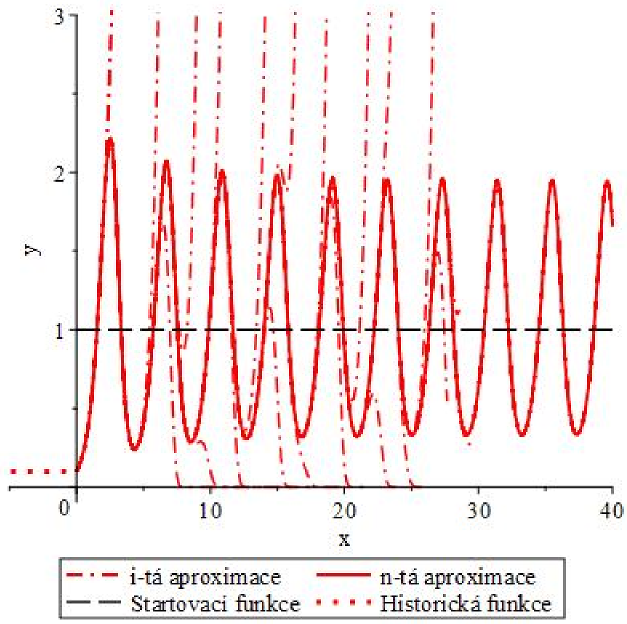
a) Volbou $x_0(t) = 1$ a $a = 0,3$ obdržíme po 60. aproximaci řešení úlohy, viz. obrázek 5.7.

b) Volbou $x_0(t) = 1$ a $a = 1,4$ obdržíme po 60. aproximaci řešení úlohy, viz. obrázek 5.8.

c) Volbou $x_0(t) = 1$ a $a = 1,7$ obdržíme po 60. aproximaci řešení úlohy, viz. obrázek 5.9.



Obr. 5.8: Řešení příkladu 5.2, varinta 2, zdroj: vlastní zpracování



Obr. 5.9: Řešení příkladu 5.2, varinta 3, zdroj: vlastní zpracování

5.4 Aplikace nového postupu na řešení ekonomického modelu

V tomto odstavci bude demonstrováno na původní úloze cyklu stavby lodí (Tinbergen, 1931), že díky naší teorii lze původní řešení s úspěchem rozšířit a získat tak výrazně přesnější informaci o chování zkoumaného modelu.

Ve svém článku s názvem „A Shipbuilding cycle?“ J. Tinbergen (Tinbergen, 1931), (Tinbergen, 1959) demonstruje vztah mezi loďařským průmyslem a přepravními tarify pro dopravu zboží jako typ tzv. „základní fluktuace“. Toto téma je obecnou ukázkou zajímavých charakteristik následků teorie ekonomických fluktuací, které má velký význam pro loďařský průmysl, proto si vysloužilo velkou pozornost J. Tinbergena.

Fluktuace v loďařském průmyslu podle Tinbergena do značné míry určuje kolísání v růstu celkové nosnosti obchodního loďstva určité země. Objem stavby lodí do značné míry závisí na výši přepravního tarifu pro dopravu zboží. Ta je naopak korelována s celkovou dostupnou tonáží lodí. Vzrůst celkové nosnosti se projeví pravděpodobně již v roce následujícím po zvýšení sazby, jelikož ve třicátých letech minulého století trvalo zhotovení nové lodi právě jeden rok. Tento jev lze označit za tzv. opožděnou korelaci.

Výše zmíněné souvislosti vedou k následujícímu výzkumnému problému: Jak velká by byla celková nosnost lodí a úroveň jejího zvyšování, pokud by popsané vztahy neměly žádné výjimky?

Tento vztah, který Tinbergen nazývá „reakční mechanismus“, bude v mnoha případech vést k cyklickému pohybu, nazývanému „cyklus stavby lodí“ neboli „the shipbuilding cycle“.

Popsané vztahy jsou základem pro ten nejdůležitější - vztah mezi vzrůstem celkové nosnosti lodí a úrovní celkové nosnosti lodí o dva roky dříve.

Problém Tinbergen popisuje následovně:

- úroveň stavby lodí je funkcí poptávky majitelů lodí po přepravní kapacitě,
- výše přepravního tarifu závisí především na nabídce přepravních kapacit majitelů lodí.

Vliv dalších faktorů je dle Tinbergena zanedbatelný. Tinbergen uvažuje celkovou změnu tonáže jako funkci času, označme ji $f(t)$. Rychlost změny celkové tonáže v čase t označuje $f'(t)$ a odvozuje, že snížení či navýšení celkové tonáže závisí na intenzitě, se kterou budou dopravci reagovat (předpokládá, že intenzita reakce je konstantní). Stavba lodí, případně rychlost změny tonáže souvisí s tonáží v čase $t - \Delta$. Tinbergenova rovnice má potom následující tvar:

$$f'(t) = -af(t-\Delta),\ t \in [0,T]\,. \tag{5.56}$$

kde Δ je zpoždění ($\Delta > 0$, konstanta), a je intenzita reakce, ($a > 0$, konstanta), T konec sledovaného období.

Při analýze modelu vychází z předpokladu, že řešení $f(t)$ je mimo interval $[0,T]$ již dáno:

$$f(t) = h(t), t \in [-\Delta, 0]\,, \tag{5.57}$$

kde $h(t)$ je jistá daná funkce (pro zjednodušení spojitá) a že řešení rovnice (5.56) spojitě navazuje na funkci $h(t)$, tedy přirozeně požadujeme, aby řešení rovnice (5.56) splňovalo počáteční podmínku

$$f(0) = h(0). \tag{5.58}$$

Tinbergen charakterizuje čtyři případy závislosti na hodnotách součinu parametrů a a Δ:

I. $a\Delta \leq \frac{1}{e} \approx 0.37$, jinými slovy v případě krátkého zpoždění a malé intenzity reakce nenastane žádný cyklický pohyb, pouze jednostranná adaptace k rovnováze $f(t) = 0$, což odpovídá trendu,

II. $a\Delta \in \left(0.37, \frac{\pi}{2}\right)$, získáme ztlumenou sinusoidu (sinusovou vlnu), tedy postupné přibližování k rovnováze plynulým snižováním amplitudy (velikostí) fluktuací.

III. $a\Delta = \frac{\pi}{2}$, získáme čistou sinusoidu, to znamená cyklický pohyb s konstantní amplitudou.

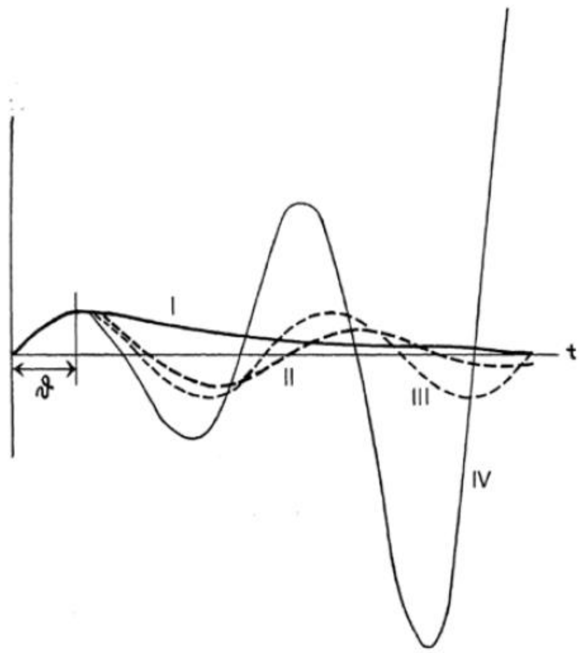
IV. $a\Delta > \frac{\pi}{2}$, získáme sinusoidu s amplitudou rostoucí v čase.

Výše uvedený model (5.56), (5.57), (5.58) je lineární diferenciální rovnicí s konstantním zpožděním a počáteční podmínkou. Pro numerické řešení tohoto počátečního problému bylo využito Důsledku 5.2. a to s použitím řešení posloupnosti úloh

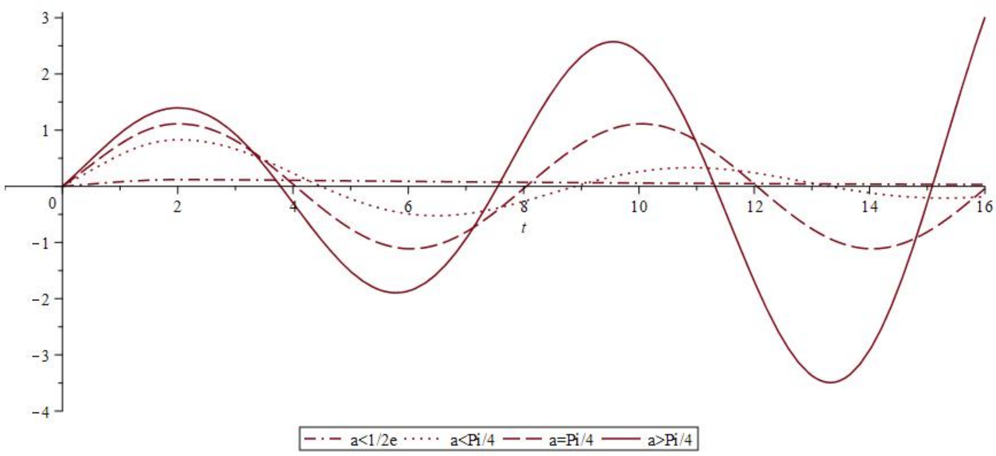
$$x'_\nu(t) = -a\chi_I(t-\Delta)x_{\nu-1}(t-\Delta) - a(1-\chi_I(t-\Delta))h(t-\Delta),$$

$$x_\nu(0) = h(0),$$

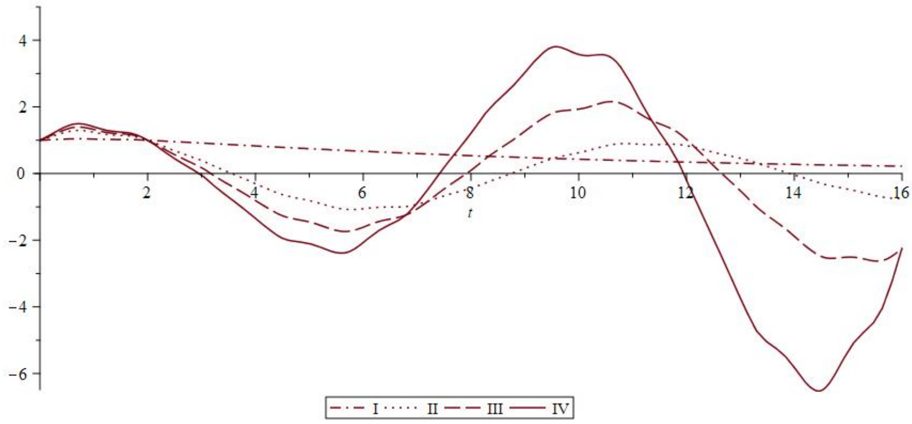
kde $t \in I = [0,T]$, $\nu \in N$, $a, \Delta \in R_+$, $h \in C([-\Delta, 0]; R)$ a $x_0 \in C(I; R)$.



Obr. 5.10: Řešení úlohy 5.56 původní metodou, zdroj: (Tinbergen, 1959)



Obr. 5.11: Řešení úlohy 5.56 novým postupem, zdroj: vlastní zpracování na základě (Novotná & Šustrová, 2015)



Obr. 5.12: Řešení úlohy 5.56 v případě nekonstantního zpoždění, zdroj: vlastní zpracování na základě (Novotná & Šustrová, 2015)

Pro demonstraci možností nového přístupu k řešení původního problému v (Novotná & Šustrová, 2015) se předpokládalo, že „historický vývoj“ před okamžikem $t = 0$ lze simulovat funkcí $h(t) = cos(t)$. Parametr a byl volen podle Tinbergenových závěrů $a\Delta \leq \frac{1}{e} \approx 0.37$, $a\Delta \in \left(0.37, \frac{\pi}{2}\right)$, $a\Delta = \frac{\pi}{2}$, $a\Delta > \frac{\pi}{2}$, parametr $\Delta = 2$. Výsledek řešení je evidentně v souladu se závěry, které učinil Tinbergen.

V případě, že „historická funkce“ je tvaru $h(t) = 2\sin(t) + 1$, získáváme řešení, z nichž je patrná stejná závislost délky cyklu na parametru a, nicméně evidentně se mění absolutní délka cyklu. V článku (Novotná & Šustrová, 2015) se také analyzuje situace, kdy je průběh cyklu ovlivňován i samotnou délkou časového zpoždění.

Předpoklad konstantního zpoždění je umělý, ve skutečnosti bude délka zpoždění kolísat. Proto byla v článku (Novotná & Šustrová, 2015) uvažována situace, že zpoždění $\Delta(t)$ není konstantní, ale je funkcí času t. Parametr a pak byl zvolen podle Tinbergenových závěrů.

Kapitola 6

Aplikace nového postupu v oblasti ekonomiky a řízení podniku

Jak již bylo zmíněno v úvodních kapitolách této práce, modelování složitých problémů v oblasti ekonomiky a řízení podniku s sebou přináší nutnost vyrovnat se s faktem, že vztahy jednotlivých veličin mají v čase proměnlivý charakter. Klasický model z oblasti podnikového prostředí je však obvykle omezen na vztahy a vzájemné propojení v konkrétním okamžiku a eliminuje vliv faktorů z předchozích období. V této kapitole budou uvedeny úlohy, na kterých je demonstrována možnost uplatnění nových poznatků prezentovaných v habilitační práci z oblasti podpory rozhodování v oblasti ekonomiky a řízení podniku, využívající teorii diferenciálních rovnic se zpožděným argumentem.

Díky počítačovému zpracování úloh pak bylo možné v publikacích výsledky prezentovat graficky.

Rozhodování v ekonomice a řízení podniku

Smyslem podnikání je tvorba zisku, který je obvykle jeho hlavním cílem a motivací. Je také významným kritériem při rozhodování o základních otázkách ekonomiky podniku, například o objemu výroby, nových výrobcích či investicích. Podnikové cíle ovlivňují rozhodování podnikového managementu o využití práce, volbě technologií, výši kapitálu případně o způsobu zpracování informací. Tyto zdroje jsou k dispozici v omezeném množství a úkolem managementu podniku je rozhodnout o jejich využití tak, aby byly splněny cíle podniku (uspokojování potřeb zákazníků, maximalizace zisku, maximalizace hodnoty podniku, maximalizace podílu na trhu atd.), které by měly zohledňovat kromě ekonomických aspektů i ekologické a sociální činnosti podniku. Z toho vyplývá, že podnikové cíle obvykle nejsou redukovány pouze na jeden, tím narůstá množství a složitost problémů k vyřešení, aby byly cíle naplněny.

Řízení podniku můžeme vnímat jako souhrn takových činností, které vedou k zajištění podnikatelského procesu a dosažení cíle podniku. Manažeři podniku se musí orientovat v dynamicky se vyvíjejícím prostředí, kde je velmi nesnadné předvídat budoucí vývoj a musí rychle a adekvátně reagovat na časté změny probíhající v tržním okolí, nestačí je pouze přijmout. Spokojenost zákazníka tedy úzce souvisí se schopností podnikového managementu rozpoznat jeho požadavky a pohotově se jim přizpůsobit. Pouze takový podnik, který je schopen pružně reagovat, splnit požadavky zákazníků a poskytovat jim kvalitní služby, získá nové zákazníky, udrží si ty stávající, zvýší svoji konkurenceschopnost a následně i prosperitu.

V souvislosti s rozvojem podniku a zvyšováním jeho výkonnosti musí vlastník nebo manažer rozhodovat o změnách, s nimiž je spojeno riziko neúspěchu a určitá nejistota. Řízení podniku je tedy spojeno s rozhodováním a moderně pojaté strategie podniku se ve stále vetší míře zaměřují i na oblast přímé podpory manažerského rozhodování. Manažerské rozhodnutí je obecně charakterizováno jako výběr nejvhodnějšího rozhodnutí z mnoha nabízených a zkoumaných alternativ, které se týkají nejisté budoucnosti a sledují efektivní naplnění podnikových cílů (Petřík, 2009).

Proces manažerského rozhodování lze chápat jako průběžný proces, který je třeba provádět na všech úrovních řízení podniku a mají značný dopad, který můžeme sledovat v čase:

- strategická (dlouhodobá) rozhodnutí,
- taktická (střednědobá) rozhodnutí,
- operativní (krátkodobá) rozhodnutí.

Ad) operativní (krátkodobá) rozhodování

Operativní rozhodování se týká samotné transformace vstupů a zahrnuje např.: alokaci zdrojů, stanovení ceny a objemu výroby, určení výše výdajů na marketing a výzkum a vývoj. Rozhodování tohoto typu probíhá permanentně a je v rámci podniku decentralizováno. Většina těchto rozhodnutí se opakuje, a kromě rizika a nejistoty jsou charakterizována i relativně krátkým intervalem mezi vznikem potřeby takového rozhodnutí, jeho uskutečněním a efekty z něho vyplývajícími. (Straková a kol., 2017)

Ad) taktická (střednědobá) rozhodnutí
Taktická rozhodnutí jsou rozhodnutí podpůrná. Vytvářejí procedury k získávání zdrojů, k zajištění vhodné vnitřní struktury a požadovaného toku informací.
Ad) strategická (dlouhodobá) rozhodnutí
Strategická rozhodnutí se na rozdíl od výše zmíněných typů týkají vztahu mezi podnikem a jeho vnějším prostředím. Takový druh je tedy nevyhnutelně centralizován na nejvyšší úrovni řízení podniku, neboť se dotýká veškerých zdrojů podniku. Strategická rozhodnutí jsou relativně méně častá a jejich důsledky se projevují až po určité době. (Straková a kol, 2017)

Manažerské rozhodování je vždy podstatou řízení podniku. Můžeme na něj pohlížet jako na výběr z několika možných variant řešení určité rozhodovací úlohy ve vymezených podmínkách. Manažerské rozhodování o daném problému má dva vzájemně související aspekty, a to obsahový aspekt charakterizující věcný rozhodovací problém a formální aspekt zaměřený na potřebný způsob a algoritmus řešení rozhodovacího problému (Knapová, 2008).

Samotná kvalita rozhodování je ovlivněna osobností jednotlivých manažerů – zejména jejich znalostmi, schopnostmi a dovednostmi, typem řešeného problému, vybaveností moderními technickými prostředky řízení a komunikace, časovým horizontem rozhodování, změnami ve vnějším prostředí podniku a podnikatelským rizikem, které provází v tržní ekonomice všechny podnikatelské aktivity. Jedná se o celou řadu dynamicky se měnících procesů, které se vyznačují různým stupněm informovanosti manažerů a také určitým logickým sledem návaznosti rozhodovacích procesů, a to od dlouhodobě orientovaných procesů až po řízení v reálném čase. (Ulverová, 2009).

V současné době již podnikový management nemůže svá rozhodnutí provádět pouze na základě zkušeností a úvahy, že se události z minulosti budou opakovat. Proto je potřeba se důsledně soustředit na kvalitně provedenou analýzu a prognózu vývoje zkoumaného jevu. Řešení rozhodovacích problémů podniku probíhá jako kontinuální proces, které můžeme rozložit na několik etap:

- identifikace rozhodovacího problému a jeho zmapování,
- analýza a formulace problému a stanovení kritérií pro hodnocení variant (definování hodnotící funkce a metody výběru),
- příprava a formulování variant řešení - tomuto bodu bude ještě věnována pozornost,
- stanovení důsledků pro jednotlivé varianty řešení a výběr nejvhodnější varianty řešení.

Různé varianty řešení mohou být v některých případech evidentní, řešení složitějších problémů však vyžaduje vytvoření různých variant, což nám umožní vhodně vytvořený model.

Na podniky působí jak vnitřní, tak vnější faktory, které se vzájemně ovlivňují a simulace často zůstává jedinou vhodnou metodou zkoumání chování těchto dynamických systémů. Její nespornou výhodou je využití modelu zkoumaného problému při hledání vhodného řešení, protože provádění experimentů v reálném prostřední podniků je obvykle spojeno s obtížemi a rizikem negativního dopadu, nebo i s nemožností experiment provést. Simulační experimenty se obvykle zaměřují na zjištění, jaký je vliv změn parametrů obsažených v modelu na chování determinovaných stavových veličin.

Teoretickým základem takovýchto simulací je systémová dynamika a s ní související systémové myšlení. Pro modelování a simulaci můžeme na podnik nazírat jako na otevřený systém, který vstupy ze svého okolí transformuje na výstupy – jinými slovy transformuje hmoty a energie, tedy vstupy převzaté z okolí, do podoby výstupů pro okolí. Jedná se o množinu prvků se vzájemnými vazbami zaměřenými na dosažení určitého stanoveného cíle. Tímto cílem je uspokojování potřeb spotřebitelů při dodržení principu hospodárnosti. Okolí podniku představují dodavatelé, odběratelé, peněžní ústavy, věřitelé, trh práce, právní normy, správní orgány a další (Lanča & Sedláček, 2005).

Z důvodu velkého množství zpětných vazeb a celkové složitosti není jednoduché chování dynamického systému v podnikovém prostředí pochopit a analyzovat. Simulační model nám umožní rychle a bez rizika odhadovat a porovnávat důsledky různých scénářů a dále s nimi experimentovat. Výsledné modely, popisující zkoumané varianty, jsou vyjádřeny objekty, jejich výstupy jsou obvykle grafy a tabulky, které usnadňují manažerům jejich práci. Pro modely některých procesních problémů je dokonce možné využít data reálného procesu a simulace pak pracuje s aktuálními daty v reálném čase. Simulace se tak může stát spojujícím článkem mezi teoretickým popisem chování zkoumaného systému a jeho skutečným chováním v praxi a mohou být vhodně využity při strategickém i operativním rozhodování.

V následující části habilitační práce se zaměříme na vybrané dynamické modely z různých oblastí rozhodování v prostředí podniku, které mohou sloužit a slouží k tomu, aby manažera upozornily na vzájemné závislosti mezi změnami a problémy s těmito změnami související.

Softwarová podpora

Specializovaných programů, schopných řešit konkrétní matematické úlohy, je velká řada což je dáno historickým vývojem, kdy tyto programy vznikaly v závislosti na potřebách jednotlivých univerzit či výzkumných pracovišť. Mezi matematické programy můžeme zařadit i programy zaměřené na tvorbu grafů (např. Graph, Gnuplot), statistické programy (např. Statistica, Origin, SPSS), případně programy, umožňující mimo jiné provádět numerické výpočty (např. MATLAB, Scilab, Maple). Některé z nich byly vytvořeny komplexněji a umožňují řešit některé úlohy integrálního a diferenciálního počtu, tvorbu grafů, numerické výpočty a mnoho dalšího.

Standardním jazykem používaným v matematických programech je obvykle angličtina. Některé programy nabízejí i další jazyky, nicméně většina názvů funkcí (příkazů) vychází z angličtiny (např. simplify, solve, atd.).

Současně s potřebou zohlednit v dynamických modelech časové zpoždění vyvstala potřeba numericky řešit diferenciální rovnice se zpožděním, což vedlo i k poptávce po dostupném, účinném a robustním software, umožňujícím řešit tyto typy problémů. Bylo tedy potřeba vytvořit software zohledňující problémy specifické pro diferenciální rovnice se zpožděním. Diskuzi o těchto otázkách lze najít v (Baker a kol.,1995; Thompson & Shampine, 2001) a (Thompson & Shampine, 2006). Jednou z prvních dostupných možností bylo použití řešitele dmrode (Neves, 1975), používajícího kubickou Hermitovu interpolaci. Při konstrukci *dklag6* (Corwin a kol., 1997) simulovali retardované a neutrální diferenciální rovnice se zpožděním závislým na stavu. Řešení je založené na metodě Runge-Kutta. Jemu je blízké řešení v jazyku Fortran 90/95, kterým je *dde_solver* (Thompson & Shampine, 2006)).

Další využívanou možností bylo řešit diferenciální rovnice se zpožděným programem *xppaut* (Ermentrout, 2002). Použití softwaru založeného na třídě obecných lineárních metod se také diskutuje v (Hoppensteadt & Jackiewicz, 2006) nebo (Bellen & Zennaro, 2013).

V případě řešení úloh z ekonomiky a řízení podniku popsaných v následující kapitole byl využíván systému Maple, vyvinutý v Kanadě na University of Waterloo. Maple lze považovat za víceúčelový matematický softwarový nástroj, umožňující uživateli řešit výpočty symbolicky a využívat široké spektrum funkcí. Tento systém poskytuje pokročilé, vysoce výkonné matematické výpočetní jádro s plně integrovanou numerikou a symbolikou.

Další výhodou systému Maple je, že kromě možnosti provádět analytické výpočty se vzorci zvládá i numerické výpočty a výsledky je možné zobrazit i graficky. Tento systém tedy poskytuje podporu pro využívání kvantitativních metod pro praxi, aplikační úlohy, vědecké výpočty pro mnoho oborů aj., což je mimo jiné dáno i tím, že jsou k dispozici i specializované knihovny.

6.1 Model systému výroby, skladování a prodeje

Vedení podniku musí činit rozhodnutí nejen o tom, co a v jakém množství bude podnik vyrábět a jakou použijí technologii, ale i jak nastaví cenu svého výrobku a jak upozorní spotřebitele na přítomnost svého výrobku na trhu apod. Rozhodování podniku v teorii mikroekonomie je zpravidla zúženo na dva základní problémy: na volbu výstupu a volbu ceny.

Model, popisující proces výroby a prodeje zboží pomocí soustavy nelinárních rovnic přibližují články Grigoriava a Khailov (Grigorieva & Khailov, 2005), (Grigorieva & Khailov, 2015). Při sestavení modelu vycházeli z principů, blíže popsaných například v (Lancaster, 2012). V článcích se podrobně diskutují možnosti řešení z hlediska teorie optimálního řízení. Uplatnění Pontrjaginova principu při řešení podobného problému ve své stati popisují Grigoriava a Khailov v publikaci (Grigorieva & Khailov, 2015). Autoři (Gorski & Lokshin, 2002) přibližují nelineární matematický model mikroekonomického systému, který vyrábí a prodává zboží každodenní potřeby.

V tomto odstavci uvažujeme nelineární matematický model dynamického ekonomického systému, který se zabývá výrobou, skladováním a prodejem spotřebního zboží. Model vycházející z publikací (Grigorieva & Khailov, 2005) a (Gorski & Lokshin, 2002), na rozdíl od modelu původního, však zohledňuje, že změny způsobené postupnou spotřebou na straně zákazníka a poškozením zboží na straně prodejce se projeví s jistým zpožděním, tedy že systém je ovlivňován změnami v minulosti. Model lze na intervalu $t \in [0, T]$ vyjádřit takto:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= u(t) - n(p)(Y - x_2(t))x_1(t) + k_1 x_1(t - \Delta_1) \\ x_2'(t) &= n(p)(Y - x_2(t))x_1(t) + k_2 x_2(t - \Delta_2) \end{aligned} \tag{6.1}$$

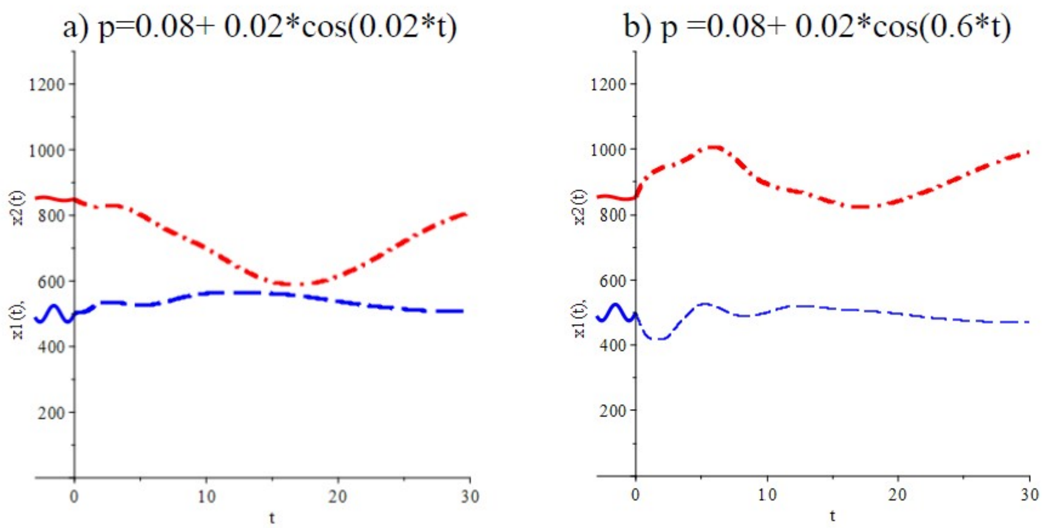
$$x_1(0) = x_1^0,\ x_2(0) = x_2^0. \tag{6.2}$$

V systému uvažujeme proměnné x_1 - množství zboží na trhu a x_2 – zásoby zákazníků, a proto jsou nezáporné.

Jako parametry figurují u – hladina produkce, k_1 – míra „zničení“ zboží, k_2 – míra spotřeby, p – prodejní cena, n – koeficient míry prodeje pro kazivé zboží $n(p) = \frac{n_0}{p}$ (n_0 je vhodná konstanta), Y – poptávka. Parametry Δ_1 a Δ_2 vyjadřují dobu potřebnou k zachycení změny proměnných x_1 a x_2 a budeme je nadále nazývat zpožděním. Parametry $Y,\ k_1,\ k_2$ jsou konstanty.

Přirozeným důsledkem požadavku spojité návaznosti řešení $x_i(t)$ z intervalu $[0,T]$ k „historické“ funkci $h_i(t)$ $(t \in [-\Delta_i, 0])$ je zpřesnění počáteční podmínky řešení $x_i(t)$ (6.2) s $x_i^0 = h_i(0)$ $i = 1, 2$.

Tento model může být využit při plánování výroby, nebo jako součást modelů řešících otázky kooperace, nebo naopak konkurence.



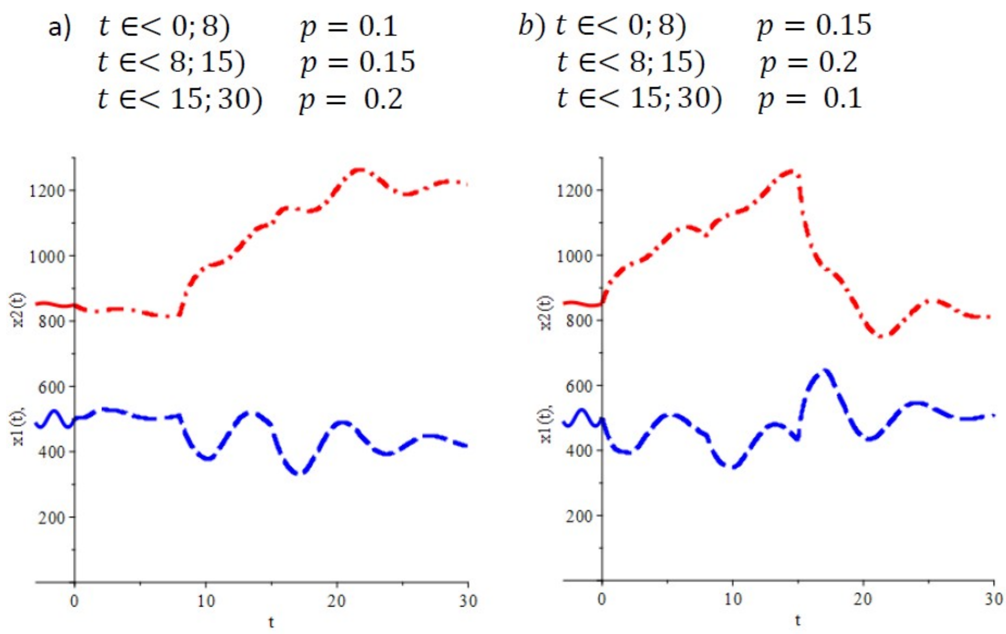
Obr. 6.1: Vliv kolísání ceny na chování modelu 6.1, zdroj: vlastní zpracování na základě (Novotná & Škapa, 2018)

Jedná se o systém dvou nelineárních rovnic se dvěma zpožděními a separovatelnou lineární částí bez zpoždění. Pro numerické řešení tohoto počátečního problému (blíže popsaného v kapitole 5.3) bylo využito (5.9), resp. (5.10) a to s použitím řešení posloupnosti úloh:

$$\begin{aligned}
x'_{1\nu}(t) = \;& u(t) + [a_1 + b_1 x_{2\nu-1}(t)]x_{1\nu}(t) + \\
& + c_1[\chi_I(t-\Delta_1)x_{1\nu-1}(t-\Delta_1) + (1-\chi_I(t-\Delta_1))h_1(t-\Delta_1)], \\
\\
x'_{2\nu}(t) = \;& [a_2 + b_2 x_{2\nu}(t)]x_{1\nu-1}(t) + \\
& + c_2[\chi_I(t-\Delta_2)x_{2\nu-1}(t-\Delta_2) + (1-\chi_I(t-\Delta_2))h_2(t-\Delta_2)], \\
\\
& x_i(0) = h_i(0), \;\; (i = 1, 2)
\end{aligned} \tag{6.3}$$

kde $t \in I = [0,T]$, $\nu \in N$, $a_i, b_i, c_i \in R$, $\Delta_i \in R_+$ $h_i \in C([-\Delta_i, 0]; R)$, a $x_{i0} \in C(I; R)$ $(i = 1, 2)$.

Ilustrativní příklad v článku (Novotná & Škapa, 2018) vychází z reálné situace a používá data výrobního podniku, dodávajícího plastové kelímky



Obr. 6.2: Vliv postupného navyšování ceny na chování modelu 6.1, zdroj: vlastní zpracování na základě (Novotná & Škapa, 2018)

podnikům působícím v oblasti vendingu, neboli prodeji a provozování prodejních automatů, zejména automatů na kávu, což je specifický sektor služeb. Současné prostředí pro podnik znamená, že se musí vyrovnávat s tlakem na snížení cen při neustálém zvyšování nákladů na provoz. Lze také pozorovat, že se zvyšuje konkurenční boj, což vede k nutnosti důsledně se snažit o optimalizaci procesů.

Podniky provozující automaty na kávu je zásobují na frekventovaných místech, kde je nutno zboží doplňovat několikrát týdně. Proto je třeba, aby dodavatelé kelímků velmi pružně reagovali na jejich požadavky na dodávku. Na druhou stranu, dodavatelé „pevných“ částí pro naplnění automatu mají nízkou vyjednávací sílu, neboť existuje řada potenciálních dodavatelů, za které mohou být vyměněni, a zároveň s mnohými funguje spolupráce na bázi vzájemné podpory.

V (Novotná & Škapa, 2018) byl sestaven model, simulující určitou situaci na trhu a byl zkoumán vliv změny historických funkcí a prodejní ceny produktu na jeho chování.

Grafy na obrázku 6.1 popisují situaci, kdy cena kolísá kolem hladiny, která je v průměru nižší, než cena původní, nicméně je pro podnik stále ještě přijatelná. V případě, že připustíme poměrně rychlé kolísání cen, vidíme, že dochází k nestabilní situaci na trhu, která si bude klást požadavky na velmi pružné přizpůsobování výroby. V případě, že ke změnám ceny dochází v delším období, situace na trhu se postupně stabilizuje.

Cena se však obvykle nemění spojitě, ale „skokem“. Grafy, ilustrující tuto situaci vidíme na obrázku 6.2. V tomto případě byly simulovány dvě situace. V prvním případě byla cena postupně navyšována a na grafu vidíme, že zásoby zákazníků kolísají a zřejmě by v delším období došlo ke stabilizaci. Zásoby na trhu výrazně vzrostli, což svědčí o tom, že výrobce na změnu prodejní ceny citlivě reaguje. V případě, kdy se po navýšení cena opět vrátila na původní hladinu, se jak hladina zásob zákazníků, tak množství zboží na trhu adekvátně přizpůsobuje i když s výrazným výkyvem v období, následujícím po změně ceny.

6.2 Řízení zásob podniku - efekt biče

Soudobé dodavatelské řetězce jsou často náchylné k nestabilitě objednávek, s níž souvisí tzv. efekt biče (bullwhip-effect), který je v některých případech též nazývaný efektem zesílení (amplification effect).

První zmínky o efektu biče můžeme najít v pracech Forrester (Forrester, 2013), (Forrester, 1958). V jiných příspěvcích, např. (Buchmeister a kol., 2014; Warburton, 2004b) můžeme najít další podklady o volatilitě zásob, popisující podobný problém jako efekt biče. Stejně tak BeerGame (Sterman, 1989), která je určena pro účely výuky teorie řízení zásob, vykazuje stejný jev. V 90. letech efekt biče zažil podnik Procter& Gamble při výrobě a související poptávce po plenkách Pampers. Ačkoliv poptávka byla konstantní, objednával velkoobchod, který byl firmou Procter & Gamble zásobován, velmi rozdílná množství zásob. To vedlo k obtížnému plánování kapacit ve výrobě a tvorbě zásob na každém výrobním stupni.

Většina z těchto podkladů je však zaměřená na prokázání existence efektu biče, nebo na identifikaci jeho příčiny, případně na stanovení možných protiopatření.

V průběhu let byly provedeny studie, které se tohoto jevu týkají a taktéž na toto téma existuje rozsáhlá literatura (mimo jiné (Costantino a kol., 2013; Chatfield a kol., 2004; Lee a kol., 2000)). Pro zkoumání problému byly využity různé možnosti, které poskytuje například teorie pravděpodobnosti, teorie řízení (Disney a kol., 2004; Geary a kol., 2006), matematická analýza (Csík a kol.,2010; Warburton, 2004b), lineární analýza stability nebo pravděpodobnostní způsob řízení zásob a teorie chaosu. Z dalších studií je možno uvést např. studii (Kim a kol., 2008), zkoumající dvě volatility pomocí systémové dynamiky modelu a kde jsou odvozeny podmínky oscilace.

Uvažujeme matematický model řízení zásob, rozšířený o order-up-to politiku doplňování zboží, na intervalu $[0, T]$ ve tvaru:

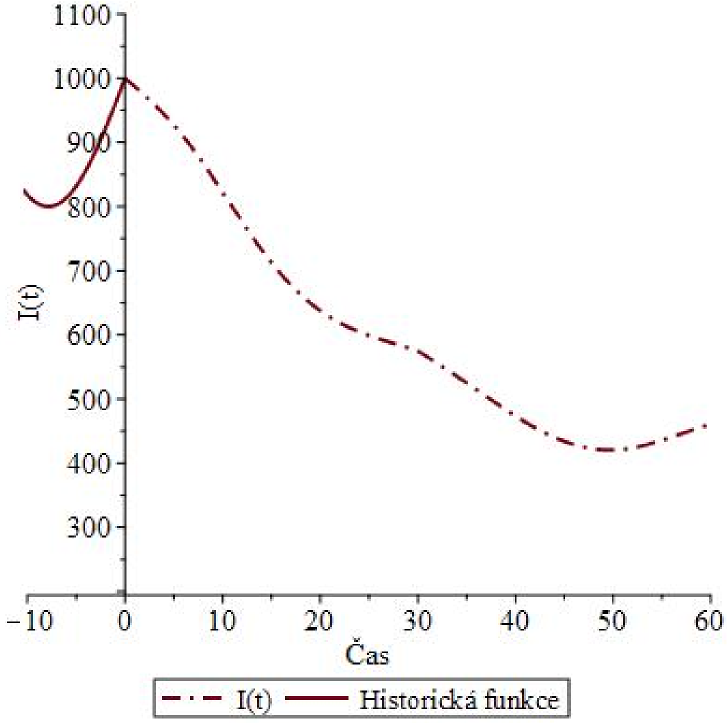
$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \left(\frac{1}{K}(I_p - I(t-\Delta)\right) - D(t) & \text{pro} \quad I(t-\Delta) \leq I_p \\ -D(t) & \text{pro} \quad I(t-\Delta) > I_p \end{cases} \tag{6.4}$$

$$I(t-\Delta) = I_h(t-\Delta) \text{ pro } t \in [0, \Delta] \tag{6.5}$$

Přitom přirozeným důsledkem spojité návaznosti řešení $I(t)$ z intervalu $[0, T]$ k „historické" funkci $I_h(t)$ ($t \in [-\Delta, 0]$) je počáteční podmínka řešení $I(t)$ rovnice (6.4) ve tvaru:

$$I(0) = I_h(0)$$

a požadovaná hladina zásob $I_p > 0$, časové zpoždění dodávek $\Delta > 0$ a $K > 0$ jsou konstanty, $D(t)$ a $I_h(t)$ spojité funkce.



Obr. 6.3: Hladina zásob - nekonstatní poptávka, nekonstantní historická funkce, zdroj: vlastní zpracování na základě (Novotná, 2015)

Výše uvedený model vychází z předpokladu, že obchodníci se snaží minimalizovat výši svých zásob a současně je udržet na úrovni umožňující pokrýt běžné výkyvy v poptávce. Požadavek na dodání určitého množství zboží $D(t)$ (velikost poptávky za časovou jednotku) je vždy uspokojen. Účelem řízení zásob je udržování aktuální úrovně zásob $I(t)$ okolo požadované hodnoty I_p.

V souladu s realitou pak předpokládáme, že existuje určitá časová prodleva mezi objednáním a dodáním zboží - Δ, způsobená například časem nutným pro přepravu zboží. Z toho plyne, že množství zboží, přijatého na sklad v okamžiku t je shodné s objednávkou v čase předcházejícím. S tím, jak jsou zásoby postupně odčerpávány v souladu s poptávkou, je jejich hladina zpětně doplňována na požadovanou úroveň. V případě nečekaného zvýšení poptávky jsou zásoby postupně doplňovány, ale díky volitelnému parametru K je umožněno jejich doplnění rozložit do delšího časového období.

Tento model (6.4), (6.5) je lineární diferenciální rovnicí s konstantním zpožděním a počáteční podmínkou. Pro numerické řešení tohoto počátečního problému bylo využito Důsledku 5.2 a to s použitím řešení posloupnosti úloh

$$
\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \left[\frac{1}{K}\left[(\chi_I(t-\Delta)I_{\nu-1}(t-\Delta)\right] + \right. & \\ \frac{1}{K}\left[(1-\chi_I(t-\Delta))I_h(t-\Delta)\right] + & \text{pro} \quad I(t-\Delta) \leq I_p \\ \left. +\frac{1}{K}I_p - D(t)\right] & \\ & \\ -D(t) & \text{pro} \quad I(t-\Delta) > I_p \end{cases} \tag{6.6}
$$

kde $t \in I = [0, T]$, $\nu \in N$, $K, \Delta \in R_+$, $D \in L(I; R)$, $I_h \in C([-\Delta, 0]; R)$ a $I_0 \in C(I; R_+)$.

V článku (Novotna, 2015) byly analyzovány podmínky, za kterých řešení osciluje, a situace, kdy historická funkce a funkce poptávky nejsou konstantní.

Byly použity tyto hodnoty: $I_h(t) = 1000 + 200 sin(0,2t)$, $t \in < -10, 0 >$, $D(t) = 20 + 5 sin(0,2t)$, $t \in < 0, 60 >$, $I_p = 1000$, $K = 25$, $\Delta = 10$.

Jedná o případ, kdy parametry modelu nevedou k oscilatorickému řešení. Nicméně nekonstantnost funkcí $I_h(t)$ a $D(t)$ se na řešení projeví ve smyslu mírného kolísání a na obrázku 6.6 vidíme, že se zásoby v delším časovém horizontu ustálí na hladině, která je nižší, než byla hladina před časem $t = 0$.

6.3 Řízení zásob podniku - částečný backlogging

Nejistotu při řízení zásob může vyvolat například nadměrná spotřeba či prodloužená dodací lhůta. Pojistná zásoba má za úkol vykrývat poruchy v dodávkách či poptávce.

Problémem optimalizace a řízení zásob v případě, že je třeba zohlednit i proměnlivou dodací lhůtu, se zabývali autoři (Bandaly, Satir & Shanker, 2016). (Heydari, a kol. 2018) řešili problematiku dodavatelských řetězců v souvislosti s různými způsobi dopravy. (Kumar & Rajput, 2015) představili model pro řízení zásob rychle se kazícího zboží, řešený pomocí fuzzy logiky s časově závislou poptávkou a částečným backloggingem. Model řízení zásob, vytvořený autory (Chowdhury, Ghosh & Chaudhuri, 2017), zohledňuje i inflaci a časovou hodnotu peněz.

V tomto odstavci budeme uvažovat model rovnováhy zásob rozšířený o order-up-to politiku doplňování zboží s částečným backlogging, popisující situaci, kdy zboží není dodáváno nepřetržitě, ale pouze v předem definovaných okamžicích.

Uvažujeme matematický model na intervalu $[0, T]$ ve tvaru:

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \frac{1}{K_1}(I_p - I_{poj}) + \frac{1}{K_2}(I_{poj} - I(t-\Delta)) - D(t) & I(t-\Delta) < I_{poj} \\ \frac{1}{K_1}(I_p - I(t-\Delta)) - D(t) & I(t-\Delta) \in [I_{poj}; I_p] \\ -D(t) & I(t-\Delta) > I_p, \end{cases} \tag{6.7}$$

kde

$$I(t-\Delta) = h(t-\Delta) \text{ pro } t \in [0, \Delta].$$

Model vychází z předpokladu, že cílem obchodníků je plně uspokojit poptávku $D(t)$, díky výši zásob $I(t)$, která počítá i s náhodnými vlivy. Proto je aktuální úroveň zásob udržována okolo tzv. požadované hodnoty I_p. Hladina zásob je tedy postupně snižována tak, aby byla uspokojována poptávka $D(t)$ a je také zvyšována o množství zboží, přijatého na sklad.

V našem modelu řízení zásob bude kromě hladiny I_p zohledněna i výše pojistné zásoby I_{poj}. Budeme předpokládat, že v případě poklesu zásob pod hladinu pojistné zásoby, změní se potřeba rozložit doplnění zásob do delšího období a alespoň část zboží je třeba doplnit v kratším časovém horizontu.

V tomto případě je třeba zavést dva volitelné parametry K_1 a K_2, že pro dodávku zboží je od okamžiku objednání nutno počítat s prodlevou Δ, způsobenou podmínkami na straně dodavatele a případně i dobou přepravy.

Přitom přirozeným důsledkem spojité návaznosti řešení $I(t)$ z intervalu $[0, T]$ na spojitou „historickou“ funkci $h(t)$, $t \in [-\Delta, 0]$ je počáteční podmínka řešení $I(t)$ rovnice (6.7) ve tvaru:

$$I(0) = h(0).$$

Z podstaty výše uvedeného modelu přitom plyne, že $I_p > 0$, $I_{poj} > 0$, $\Delta > 0$, $K_1, K_2 > 0$ jsou konstanty, $D(t)$ a $h(t)$ spojité funkce. Označíme-li pravou stranu rovnice (6.7) $L(I)(t)$, pak ji můžeme zapsat také ve tvaru

$$\frac{dI(t)}{dt} = L(I)(t),\ t \in [0, T] \tag{6.8}$$

a vzhledem k její konstrukci se jedná o lineární nehomogenní diferenciální rovnici s konstantním zpožděním, s po částech konstantním koeficientem a po částech spojitou nehomogenitou.

Výše uvedený model vystihuje reálnou situaci, se kterou se při řízení zásob můžeme setkat, pouze částečně. Pokud se budeme chtít reálné situaci přiblížit co nejblíže, musíme také zohlednit fakt, že zboží obvykle není naskladňováno nepřetržitě, dokonce ani nemusí být naskladňováno v pravidelných intervalech. Proto je nutné model ještě mírně modifikovat a vzít v potaz fakt, že naskladnění probíhá pouze v určitých podintervalech intervalu $[0, T]$.

Označme si nyní T_s množinu všech podintervalů z $[0, T]$, kdy dochází k naskladnění zboží. Pak nově upravený model můžeme vyjádřit s pomocí vztahu (6.8) takto:

$$\begin{gathered} \frac{dI(t)}{dt} = \begin{cases} L(I)(t)\ pro\ t \in T_S \\ -D(t)\ pro\ t \notin T_S \end{cases}, \\ I(t-\Delta) = h(t-\Delta) \text{ pro } t \in [0, \Delta]. \end{gathered} \tag{6.9}$$

Jestliže označíme charakteristickou funkci množiny T_s

$$\chi_{T_S}(t) = \begin{cases} 1\ pro\ t \in T_S \\ 0\ pro\ t \notin T_S \end{cases},$$

pak lze úlohu (6.9) vyjádřit ve tvaru

$$\begin{gathered} \tfrac{dI(t)}{dt} = \chi_{T_S}(t) L(I)(t) - (1 - \chi_{T_S}(t)) D(t)\ pro\ t \in [0, T], \\ I(t-\Delta) = h(t-\Delta) \text{ pro } t \in [0, \Delta], \end{gathered} \tag{6.10}$$

respektive

$$\frac{dI(t)}{dt} = \Big\{ \Big[\frac{1}{K_1}(I_p - I_{poj}) + \frac{1}{K_2}(I_{poj} - I_\Delta(t-\Delta)) \Big] \chi_{poj}(I_\Delta(t-\Delta)) +$$
$$\frac{1}{K_1}(I_p - I_\Delta(t-\Delta))(1-\chi_{poj}(I_\Delta(t-\Delta)))(1-\chi_p(I_\Delta(t-\Delta))) \Big\} \chi_{T_S}(t)$$
$$-D(t),$$

$$I(0) = h(0), \tag{6.11}$$

přičemž

$$I_\Delta(t-\Delta) = \chi_{[0,T]}(t-\Delta) I(t-\Delta) + (1-\chi_{[0,T]}(t-\Delta)) h(t-\Delta)$$

a

$$\chi_{[0,T]}(t) = \begin{cases} 1 \; pro \; t \in [0,T] \\ 0 \; pro \; t \notin [0,T] \end{cases} .$$

Přitom uvedené předpoklady modelu plně vyhovují výše zmíněné obecné teorii funkcionálních diferenciálních rovnic, podle níž pro rovnici (6.7) stačí uvažovat lebesgueovsky integrovatelné koeficienty a nehomogenity (funkce po částech konstantní i po částech spojité na intervalu $[0,T]$ takovými jsou). Proto lze na rovnici (6.11) aplikovat numerický postup konstrukce řešení a v citované literatuře metodu postupných aproximací. Pro numerické řešení tohoto počátečního problému bylo využito Důsledku 5.2 a to s použitím řešení posloupnosti úloh

$$\frac{dI_n(t)}{dt} = \chi_{T_S}(t) L(I_{n-1})(t) - (1-\chi_{T_S}(t)) D(t) \; pro \; t \in [0,T],$$
$$I_n(t-\Delta) = h(t-\Delta) \text{ pro } t \in [0,\Delta], \tag{6.12}$$

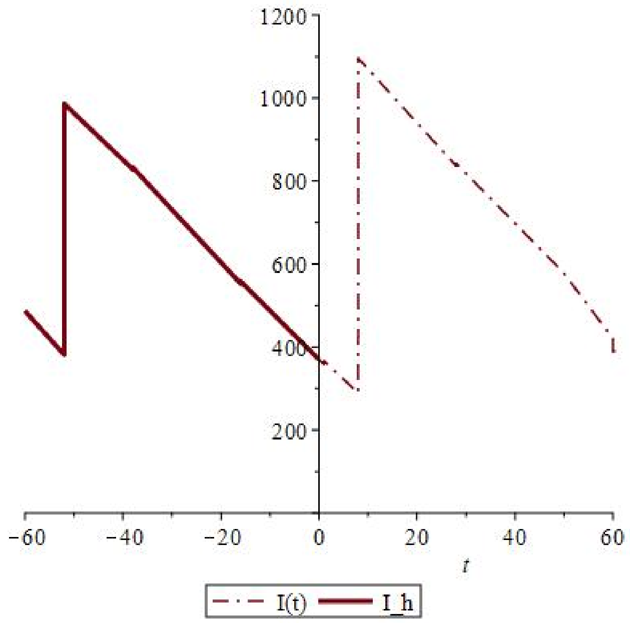
respektive

$$\frac{dI_n(t)}{dt} =$$
$$\Big[\frac{1}{K_1}(I_p - I_{poj}) + \frac{1}{K_2}(I_{poj} - I_{\Delta n-1}(t-\Delta)) \Big] \chi_{poj}(I_{\Delta n-1}(t-\Delta)) \chi_{T_S}(t) +$$
$$\frac{1}{K_1}(I_p - I_{\Delta n-1}(t-\Delta))(1-\chi_{poj}(I_{\Delta n-1}(t-\Delta)))(1-\chi_p(I_{\Delta n-1}(t-\Delta)))$$
$$\chi_{T_S}(t) - D(t),$$

$$I_n(0) = h(0), \tag{6.13}$$

kde

$$I_{\Delta n-1}(t-\Delta) = \chi_{[0,T]}(t-\Delta)) I_{n-1}(t-\Delta) + (1-\chi_{[0,T]}(t-\Delta)) h(t-\Delta),$$



Obr. 6.4: Hladina zásob - skutečný vývoj, zdroj: vlastní zpracování na základě (Novotna & Sustrova, 2018)

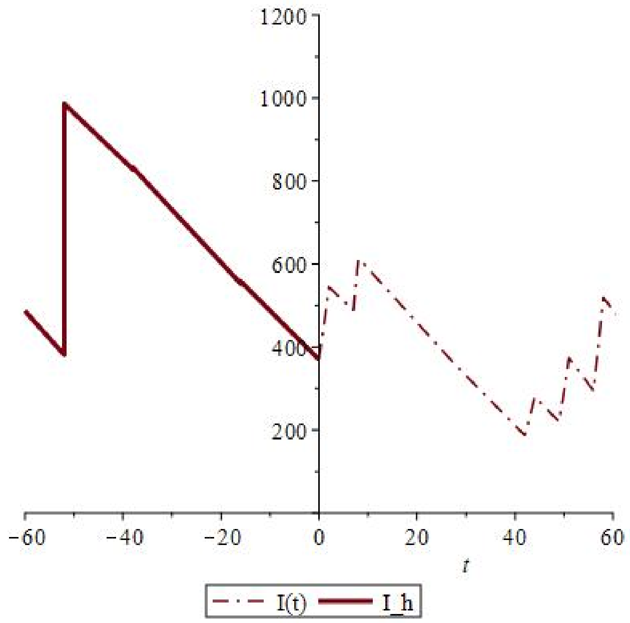
$$\chi_p(I(t)) = \begin{cases} 1 \; pro \; I(t) > I_p \\ 0 \; pro \; I(t) \leq I_p \end{cases},$$

$$\chi_{poj}(I(t)) = \begin{cases} 1 \; pro \; I(t) < I_{poj} \\ 0 \; pro \; I(t) \geq I_{poj} \end{cases}.$$

Jak již bylo uvedeno v kapitole 6.2, je vhodně zvolený způsob řízení zásob jednou z možností jak dosáhnout snížení nákladů na držení zásob, k optimalizaci vnitřních procesů podniku a následně i ke zvýšení zisku. Proces řízení zásob zahrnuje činnosti jako je analýza, plánování, prognóza, operativní řízení a kontrola prováděných operací a volba vhodného způsobu řízení zásob vede i ke zvýšení kvality zákaznických služeb.

Navržený model výpočtu rovnováhy zásob byl aplikován na konkrétní situace z obchodní praxe a podrobné řešení prezentováno v (Novotna & Sustrova, 2018). Byla použita data reálné společnosti, zabývající se velkoobchodním prodejem se spojovacím materiálem.

Při řešení autorky vycházely ze skutečnosti, že společnost nakupuje v rámci dodavatelského řetězce od asijského výrobce a musí předpokládat dobu dodání objednaného zboží až 60 dní od objednání. Interval objednání je přibližně



Obr. 6.5: Hladina zásob - modelová situace, nekonstantní historická funkce, zdroj: vlastní zpracování na základě (Novotna & Sustrova, 2018)

1 měsíc, tedy 20 pracovních dní a průměrná velikost objednávky je 800 jednotek. Požadavkem podniku bylo optimalizovat náklady na zboží zkrácením intervalu objednávek a snížením množství objednaného množství, což by mělo mít za následek snížení nákladů na skladování zboží.

Jak je vidět z grafu na obrázku 6.4 tuto úlohu s úspěchem řešit a díky tomu výrazně snížit riziko nedostatku zásob na jedné straně a na druhé straně snížit náklady na skladování.

6.4 Reakce investorů na uvedení nového produktu na trh

Předpovídat např. zda se nějaký konkrétní výrobek stane hitem, je při různorodosti spotřebitelských preferencí téměř nemožné. Naopak se dá velmi dobře ukázat, že pro různé struktury společenských vazeb se může významně lišit dynamika šíření výrobku (rychlost, skokové změny apod.). Nové produkty přitom hrají významnou roli při vytváření a udržování konkurenčních výhod firmy. Společnosti, schopné opakovaně uvádět na trh nové produkty, mají bezpochyby výhodnější postavení v konkurenčním prostředí trhu, zejména pokud se jedná o kótované společnosti. Každé další oznámení o uvedení nového produktu na trh je potom záležitostí, která se týká převážné většiny akcionářů.

Investoři mnohdy docházejí k rozhodnutí o tom, zda koupit nebo prodat na základě informací o chování ostatních. Avšak drobné rozdíly v počátečních podmínkách mohou mít v dlouhodobém horizontu závažné důsledky. Uvedení nového produktu na trh kótovanou společností potom bývá často považováno za signál, předpovídající výkyvy na burze cenných papírů.

V současné době se předmětem zájmu mnoha výzkumných prací stává právě případný vliv oznámení o novém produktu na chování burzy cenných papírů (Chen & Wang, 2014; Lee & Chen, 2009). Většina těchto studií však pohlíží na události na burze optikou statistické analýzy a ztrácí ze zřetele vliv, který má uvedení nového výrobku na akciový trh.

Tento proces může být ovlivňován různými faktory, jako je citlivost investora na informace a jeho psychický stav, nebo chování ostatních investorů a celkové prostřední akciového trhu. Způsob, jakým jsou lidé ovlivňováni, byl interpretován jako proces, blízký procesu virové infekce v teorii virové dynamiky a lze předpokládat, že je analogický s procesem tzv. „viral marketingu“.

Teorie virálního marketingu a virální reklamy (Hayes & King, 2014; Schulze a kol., 2014) měly revoluční dopady na marketing. Sociální sítě, kde se virální marketing hojně využívá, jsou považovány za velmi efektivní marketingovou platformu pro obchodníky (Faruque a kol., 2016). Virální marketing (viral marketing) představuje metodu, která slouží k dosažení exponenciálního růstu povědomí o značce (nebo produktu či službě) prostřednictvím neřízeného šíření informací mezi lidmi. Toto lavinovité šíření lze přirovnat k virové epidemii – odtud název této metody (Hao & Wang, 2016). Publikace (Lopez-Fernandez, 2015) pak dává virální marketing do širších souvislostí, včetně zamyšlení nad společenskou odpovědností firem. Autoři příspěvku (Arcos a kol., 2014) konstatují, že virální marketing může být výhodný při uvedení nového produktu na trh, avšak jeho účinnost a měření kampaní může být slabým místem této strategie.

Proces šíření informace o o novém produktu lze rozdělit na několik fází, což odpovídá i publikacím (Hao & Wang, 2016) a (Connelly a kol., 2010) pro $t \in I = [0; T]$:

$$\begin{aligned} \tfrac{dI(t)}{dt} &= \lambda - d_1 I(t) + \beta I(t) S(t), \\ \tfrac{dI^*(t)}{dt} &= \beta I(t-\tau(t)) S(t-\tau(t)) - d_2 I^*(t), \\ \tfrac{dS(t)}{dt} &= -d_3 S(t) + k I(t), \end{aligned} \tag{6.14}$$

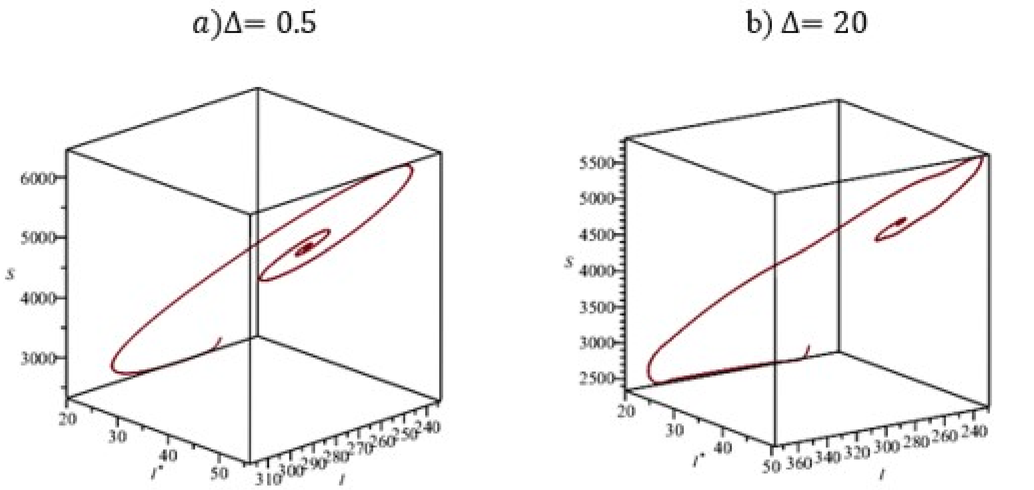
a požadujeme, aby řešení tohoto systému bylo spojitým pokračováním funkcí popisujících chování procesu v čase $t < 0$, kde λ, d_1, d_2, d_3 a β jsou kladné konstanty a spojitá funkce $\tau(t) \leq t$ definovaná na intervalu I je zpoždění reakce. Požadujeme tedy, aby

$$I(t) = I_h(t), I^*(t) = I^*_h(t), S(t) = S_h(t),\ t \leq 0, \tag{6.15}$$

kde historické funkce $I_h(t), I^*_h(t), S_h(t)$ jsou spojité a nezáporné, případně ohraničené, což odpovídá počáteční podmínce

$$I(0) = I_h(0) = I_0,\ I^*(0) = I^*_h(0) = I^*_0,\ S(0) = s_h(0) = S_0, \tag{6.16}$$

s nezápornými I_0, I^*_0, S_0.



Obr. 6.6: Vliv délky zpoždění na chování modelu šíření informace, zdroj: vlastní zpracování na základě (Novotná & Škapa, 2017)

Výše uvedený model popisuje vliv uvedení nového produktu na trh na chování investorů za předpokladu, že odezva investorů není okamžitá a zohledňuje čas nutný pro rozhodnutí.

Při sestavování modelu se předpokládalo, že jeden investor investuje pouze do jedné akcie, počet potenciálních investorů je $I(t)$, počet akcionářů $I^*(t)$.

Potenciální investoři mají přirozený zdroj, který reprezentuje konstanta λ a míru jeho poklesu, tj. míru opuštění akciového trhu, reprezentuje konstanta d_1. Dále předpokládáme, že prvotní nabídka akcií byla nejdříve nabídnuta několika institucionálním investorům a v čase $t = 0$ bylo zahájeno obchodování na burze.

Intenzita „signálu“ uvedení nového produktu na trh $S(t)$ je pak odvozená od výše investice do reklamy v čase t a součin $\beta I(t)S(t)$ vyjadřuje citlivost trhu na informace.

Za předpokladu, že potenciální investor vnímal signál v okamžiku $t-\tau(t)$, vyhodnocuje ho v intervalu $(t-\tau(t), t)$, hodnota $\beta I(t-\tau(t))S(t-\tau(t))$ je přírůstek akcionářů v čase t a d_2 míra přirozeného poklesu počtu akcionářů. Parametr d_3 pak ovlivňuje velikost změny signálu a parametr k reprezentuje míru kontaktu akcionářů a potenciálních investorů.

Samotný signál se v průběhu času mění nejen v souvislosti s reklamou a šířením informace v mediích, ale je také uvolňován průběžně. Potenciální investory samozřejmě mohou, kromě vlastního úsudku, významně ovlivnit i stávající akcionáři prostřednictvím mezilidské komunikace. Proto mohou někteří akcionáři mít vliv na intenzitu signálu $S(t)$.

Jedná se o systém tří nelineárních rovnic se zpožděním a separovatelnou lineární částí bez zpoždění. Pro numerické řešení tohoto počátečního problému bylo využito Důsledku 5.9, resp. 5.10 a to s použitím řešení posloupnosti úloh

$$
\begin{aligned}
&x'_\nu = a - bx_\nu(t) + cx_\nu(t)z_{\nu-1}(t)\\[1ex]
&y'_\nu = c\chi(t-\Delta(t))x_{\nu-1}(t-\Delta(t))z_{\nu-1}(t-\Delta(t)) +\\
&+c(1-\chi(t-\Delta(t)))h_1(t)h_3(t)] - d_2y_\nu(t)\\[1ex]
&z'_\nu = -ez_\nu(t) + gx_{\nu-1}(t)\\[1ex]
&x_\nu(0) = h_1(0),\ y_\nu(0) = h_2(0),\ z_\nu(0) = h_3(0),
\end{aligned}
\tag{6.17}
$$

kde $t \in I = [0, T]$, $\nu \in N$, $a, b, c, d, e, g \in R$, h_i $(i = 1, 2, 3)$ jsou spojité, nezáporné a ohraničené funkce a $x_0, y_0, z_0 \in C(I; R)$.

Příspěvek (Novotná & Škapa, 2017) prezentuje možnost řešení nelineárního dynamického modelu pomocí nové teorie tzv. funkcionálních diferenciálních rovnic, konkrétně globální metodou postupných aproximací. V rámci aplikační části je prezentována možnost jeho řešení v konkrétním případě a pomocí simulace na počítači je demonstrováno chování modelu.

Tento model je také v souladu s teorií sentimentu, která tvrdí, že velká vlna pozitivního sentimentu nepřiměřeně ovlivní růst ceny akcie, jejíchž ocenění je již tak vysoké, a v případě, když se nenaplní očekávané velké zisky (např. z nového výrobku), pak investoři odcházejí.

Aplikace tohoto modelu za použití reálných dat může být velmi užitečná pří pro snížení rizika potenciálních investorů, neboť co může být pro investora horšího, než koupit akcii firmy, která rostla (mnohdy bouřlivě), a on nakoupil na vrcholu, a potom sleduje pokles, či dokonce pád ceny akcií firmy, a to i přestože firma hlásí zvyšující se prodeje nového výrobku.

6.5 Podniková data a jejich ohrožení

Firemní procesy v podnicích jsou čím dál více závislé na službách informačních a komunikačních technologií (ICT) a tím roste pracovní zátěž IT oddělení a také nároky na jeho řízení. Podnikové procesy v podniku existují proto, aby s jejich pomocí mohl podnik dosáhnout svých cílů determinovaných podnikovou strategií. Podoba podnikových procesů proto vychází z podnikové strategie. ICT služby (služby informačních a komunikačních technologií) jsou podpůrné služby pro podnikové procesy.

Informační útoky na počítačové sítě jsou problémem, u kterého denně narůstá stupeň hrozby.

Jako příklad můžeme uvést kybernetický útok v německých ocelárnách (Kovacs, 2014) nebo zničení téměř jedenácti jaderných zařízení v Iránu (Kelley, 2013). Rozsáhlou analýzu stávající literatury, která se zabývá kybernetickou bezpečností, provedli autoři článku (Bordoff a kol., 2017).

Skutkovými podstatami kybernetické kriminality od historie po současnost včetně prognózy dalšího vývoje se zabývá monografie (Smejkal, 2018). Autor se podrobně věnuje různým aspektům kriminality spojeným s počítači, sítěmi, Internetem, virtuálním prostorem, sociálními sítěmi a dalšími fenomény.

Okamžitá reakce odborníků na kybernetické útoky umožňuje identifikovat slabé stránky počítačových sítí, které jsou pak chráněny programy, zvanými „patch“. Tyto záplaty jsou však k dispozici s určitým zpožděním a útočníci mají dostatek času na zneužití této chyby, a to i přesto, že o nich vědí výrobci operačních systémů i dalšího softwaru. Tento stav je nevyhovující jak pro soukromé podniky a jejich management, tak pro vedení státních organizací, které se podle své úřední povinnosti musí zabývat důležitými nebo tajnými informacemi.

Uvažujeme dynamický systém „informační útok - počítačové sítě“ bez zpětné vazby. Systém má následující součásti: klient A, server B, uživatel na straně klienta, lokální síť, ke které je server připojen. Tento model je popsán interakcí mezi klientem A a serverem B bez zpětné vazby a vlivem lokální sítě na server s tokem požadavků. Pomocí bilančních poměrů zapisujeme dynamický systém požadavků a odpovědí ve tvaru dvou diferenciálních rovnic.

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= \lambda(t) - \mu_1 x_1(t) + \tfrac{x_1^2(t)\mu_1}{1+x_1(t)} \\ x_2'(t) &= \mu_2 x_1(t-\Delta) - x_2(t) - \mu_2 \tfrac{x_1^2(t-\Delta)}{1+x_1(t-\Delta)} - \tfrac{x_2^2(t-\Delta)}{1+x_2(t)}, \end{aligned} \tag{6.18}$$

kde $x^T = (x_1(t), x_2(t))$ - je vektor fázových proměnných, počet jejich složek odpovídá počtu „paketů", které jsou v daném okamžiku $t \geq 0$ na i-tém uzlu $(i = 1, 2)$, $\lambda(t)$ jsou příchozí datové toky z externích objektů.

Nechť $\lambda(t) > 0$ je požadavek vyslaný uživatelem A (vstup); Δ je čas zpoždění přenosu informací z A do B; x_1 jsou pakety v A určené k odeslání na B (požadavky); x_2 jsou pakety v B určené k odeslání serverem do místní sítě (odpovědi); μ_1, μ_2 je kapacita šířky pásma (bandwidth) příslušných uzlů, „informační útoky" a „počítačové sítě" $g(x) = \frac{x^2}{1+x}$ - funkce využití paketů.

V tomto modelu (6.19) odpovídá první rovnice uzlu „user-client" a druhá - uzlu „server-user".

Na intervalu $I = [0, T]$ dostatečné délky je uvažovaný systém dvou obyčejných diferenciálních rovnic nelineární a s jedním zpožděním na 1. komponentě (1. proměnné). Pro numerický výpočet řešení jeho počáteční úlohy zadání přirozeně doplňme o podmínky v bodě 0 a o popis chování řešení před časem 0, tj. zabývejme se numerickým řešením úlohy

$$
\begin{gathered}
x_1'(t) = \lambda(t) - \mu_1 x_1(t) + g(x_1(t)) \\
x_2'(t) = \mu_2 x_1(t-\Delta) - x_2(t) - \mu_2 g(x_1(t-\Delta)) + g(x_2(t-\Delta)), \\
x_1(t-\Delta) = h_1(t-\Delta) \ pro \ t \in [0; \Delta] \ x_2(0) = h_2,
\end{gathered}
\tag{6.19}
$$

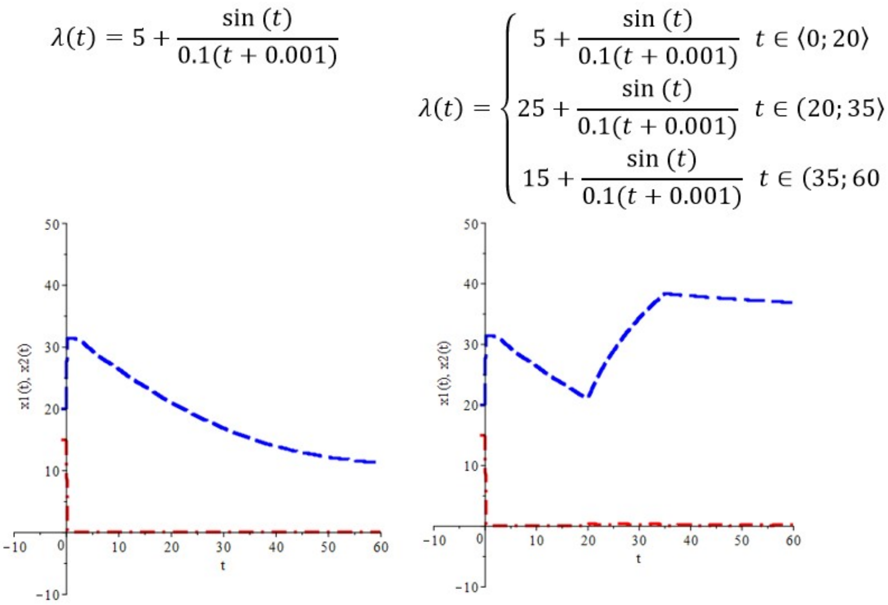
kde $\mu_1, \mu_2, h_2 \in R_+$, funkce $\lambda \in L(I; R_+)$, $\Delta \in C(I; R_+)$, $h_1 \in C([-\Delta, 0]; R_+)$ a $g = \frac{x^2}{1+x_i} : R_+ \to R_+$.

Pro numerické řešení tohoto počátečního problému (blíže popsaný v kapitole 5.2.2) bylo použito tvrzení (5.5) a využívá úlohy ve tvaru

$$
\begin{gathered}
x_1'(t) = \lambda(t) - \mu_1 x_1(t) + g(x_1(t)) \\
x_2'(t) = \mu_2 \left[(\chi_I(t-\Delta) x_1(t-\Delta) + (1 - \chi_I(t-\Delta)) h_1(t)) \right] - x_2(t) \\
-\mu_2 \left[(\chi_I(t-\Delta) g(x_1(t-\Delta)) + (1 - \chi_I(t-\Delta)) g(h_1(t)) \right] + g(x_2(t)) \\
x_1(0) = h_1(0) \ \ x_2(0) = h_2,
\end{gathered}
\tag{6.20}
$$

konkrétně posloupnosti úloh

$$
\begin{gathered}
x_1'(t) = \lambda(t) - \mu_1 x_{1\nu}(t) + g(x_{1\nu}(t)) \\
x_2'(t) = \mu_2 \left[(\chi_I(t-\Delta) x_{1\nu-1}(t-\Delta) + (1-\chi_I(t-\Delta))h_1(t))\right] - x_{2\nu}(t) \\
-\mu_2 \left[(\chi_I(t-\Delta) g(x_{1\nu-1}(t-\Delta)) + (1-\chi_I(t-\Delta))g(h_1(t))\right] + g(x_{2\nu}(t)) \\
x_1(0) = h_1(0) \quad x_2(0) = h_2.
\end{gathered}
\tag{6.21}
$$



Obr. 6.7: Vliv funkce $\lambda(t)$ na řešení modelu, zdroj: vlastní zpracování na základě (Dzhalladova a kol., 2019)

Analyzovaný model detekce kybernetických útoků (Dzhalladova, Novotná a kol., 2019) je založený na soustavě nelineárních diferenciálních rovnic se zpožděním a umožňuje nám získat kvalitativní řešení (portrét) dynamických soustav pomocí obecné teorie Poincaré-Lyapunova, který určuje na existenci výjimečných (stacionárních) bodů, cyklů (periodických trajektorií) a jejich vzájemném uspořádání.

Při studiu nelineární soustavy se zpožděním, která modelovala dynamiku v soustavě „informační útok - počítačová síť", bylo zjištěno, že průběh funkce $\lambda(t)$ má významný vliv na řešení modelu, jak je vidět na obrázku 6.7. V reálné situaci lze očekávat, že právě tato funkce nebude mít charakter konstanty, ale že její hodnoty budou kolísat.

6.6 Šíření informace o emisi nové akcie na kapitálovém trhu

Akciové společnosti vydávají na veřejném trhu cenných papírů, tj. na burze či mimoburzovním trhu, své akcie s cílem získat kapitál pro další rozvoj nebo s cílem zvýšit vlastní prestiž a důvěryhodnost. Hovoří se o takzvaných emisích akcií. Pokud společnost vydává na veřejném trhu své akcie poprvé, hovoříme o prvotních nebo primárních emisích (IPO - Initial Public Offering). Protože se s primární emisí stává z uzavřené a v soukromých rukou vlastněné akciové společnosti společnost přístupná široké veřejnosti, hovoří se o primárních emisích jako o „uvedení na veřejný trh".

Samotným procesem představení nové emise akcii uváděné na burzu cenných papírů a veřejný trh se zabýval Meluzín a kol. (2018) a Škapa a Meluzín (2007).

Burzy s cennými papíry ve vyspělých ekonomikách se postupně změnily z prezenční burzy na burzu elektronickou. Tato změna v systému obchodování s sebou nese fakt, že obchodování na ní není omezeno žádným konkrétním místem v regionálním smyslu, protože obchodovat je možné odkudkoliv. Účastníci trhu cenných papírů jsou dobře informovaní (předpokládáme lehkou formu hypotézy efektivního trhu) a používají stále dokonalejší typy modelů pro řízení investičních a finančních rizik, investiční analýzy a správu aktiv. Způsobem, jakým lze data z akciových trhů vyhodnocovat se zabývají ve své práci (Weng a kol., 2018). (Sohangir and Wang, 2018) naopak řeší jakým způsobem najít správný zdroj informací. Pomocí nástrojů z oblasti topologie popisuje chovní investorů na akciovém trhu (Oldham, 2017).

V dalších úvahách předpokládejme, že proces lze považovat za analogický s procesem viral marketingu.

Velmi stručně můžeme jednotlivé fáze popsat jako

„Awareness" - potenciální investoři zachytili informaci o emisi nové akcie a zpracovávají ji v podvědomí,

„Evaluation" – potenciální investoři zvažují své možnosti a vyhodnocují, zda je pro ně investice výhodná,

„Investment" – v této fázi již dospěl potenciální investor k rozhodnutí, investici realizuje a mění se z potenciálního investora na akcionáře. Je třeba také uvažovat, že doba τ, kterou potenciální investor potřebuje na vyhodnocení situace, není zanedbatelná.

Celý model můžeme vyjádřit takto:

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} &= p - qI(t) + \xi I(t)\left(1 - \frac{I(t)}{I_{max}}\right) - \beta I(t)S(t) \\ \frac{dI^*(t)}{dt} &= \beta I(t-\tau)S(t-\tau) - \delta(t)I^*(t) \\ \frac{dS(t)}{dt} &= -d_3 S(t) + kI(t) \end{aligned} \tag{6.22}$$

kde $\delta(t) = \frac{23\left(1-e^{-0,044t}\right)+100e^{-0,044t}}{100}$, $p,\ q,\ \xi,\ I_{max},\ d_3,\ \beta$ a k jsou kladné konstanty, a požadujeme

$$I(0) = I_0,\ I^*(0) = I_0^*,\ S(0) = S_0, \tag{6.23}$$

přičemž $I_0,\ I_0^*,\ S_0$ jsou kladné konstanty.

Pro $t < 0$ dále definujeme, že

$$I(t) = I_h(t),\ I^*(t) = I_h^*(t),\ S(t) = S_h(t), \tag{6.24}$$

kde historické funkce $I_h(t),\ I_h^*(t),\ S_h(t)$ jsou spojité a nezáporné.

Do modelu tedy vstupuje proměnná $I(t)$ „počet potenciálních investorů" (jeden investor investuje pouze do jedné akcie)a proměnná „počet akcionářů", označená jako $I^*(t)$.

Vyjděme z předpokladu, že prvotní nabídka akcií byla v průběhu Road Show nabídnuta několika institucionálním investorům a v čase $t = 0$ bylo zahájeno obchodování na burze a tímto okamžikem začali být uspokojováni drobní investoři, resp. fyzické osoby. Tudíž intenzita „signálu" S je odvozená od výše investice do reklamy.

Parametr q vyjadřuje podíl investorů, kteří opouští trh. Reprezentuje tedy míru opuštění akciového trhu q. Pro větší přiblížení realitě ještě do modelu začleníme také růst počtu potenciálních investorů $\xi I(t)\left(1 - \frac{I(t)}{I_{max}}\right)$, kde ξ je míra růstu potenciálních investorů. Obvykle je tento parametr vyšší než q.

I_{max} je maximální kapacita akciového trhu a intenzita informace o nové emisi je označena jako $S(t)$. V modelu je třeba zohlednit i citlivost trhu na informace, kterou reprezentuje kladná konstanta β.

Míru přirozeného poklesu počtu akcionářů označíme $\delta(t)$. Pro sestavení rovnice časového úbytku informace z druhotné dlouhodobé paměti za předpokladu spojitého procesu učení i zapomínání v čase byla využita teorie prezentovaná v (Stríženec, 1966).

Míru změny signálu označíme jako d_3, související jak s výší investice do reklamy a šířením informací, tak s faktem, že potenciální investoři jsou do jisté míry vůči signálu rezistentní.

Je třeba ještě vzít v úvahu, že informace se šíří také mezilidským kontaktem, který samozřejmě existuje i mezi akcionáři a potenciálními investory.

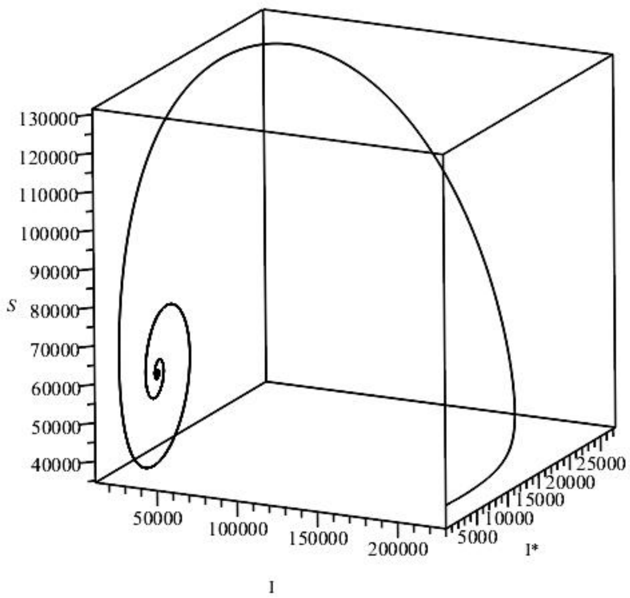
Část potenciálních investorů bylo osloveno v průběhu Road Show a zbývající část se o možnosti nové investice dozvídá zprostředkovaně, přes burzu či přes manažera emise, který bude zodpovědný za průběh emise. Míru kontaktu mezi akcionáři a potenciálními investory reprezentuje parametr k.

Jedná se o systém tří nelineárních rovnic s konstantním zpožděním τ a separovatelnou lineární částí bez zpoždění. Pro numerické řešení tohoto počátečního problému bylo využito Důsledku 5.9 resp. 5.10 a to s použitím řešení posloupnosti úloh

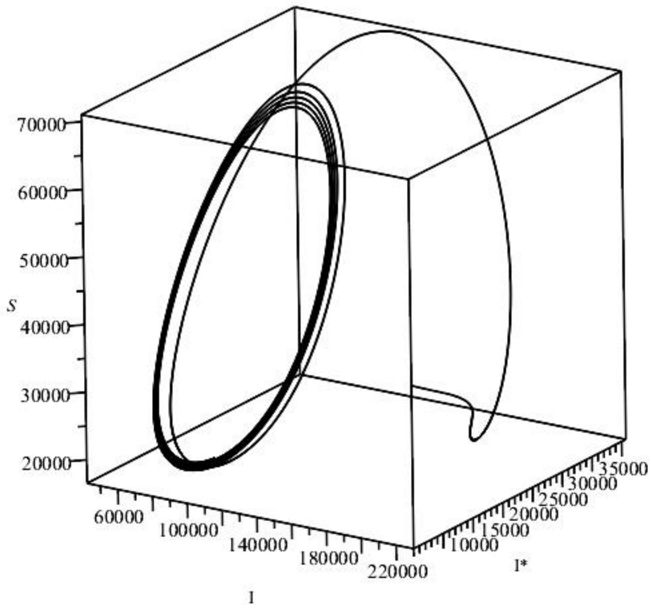
$$\begin{aligned} \frac{dI_n(t)}{dt} &= p - qI_n(t) + \xi I_n(t)\left(1 - \frac{I_n(t)}{I_{max}}\right) - \beta I_n(t)S_n(t) \\ \frac{dI_n^*(t)}{dt} &= \beta I_{n-1}(t-\tau)S_{n-1}(t-\tau) - \delta(t)I_n^*(t) \\ \frac{dS_n(t)}{dt} &= -d_3S_n(t) + kI_n(t),\ t \geq 0 \end{aligned} \tag{6.25}$$

kde $n \in N$, $\delta(t) = \frac{23\left(1-e^{-0,044t}\right)+100e^{-0,044t}}{100}$,

$$I_n(t) = I_h(t),\ I_n^*(t) = I_h^*(t),\ S_n(t) = S_h(t),\ pro\ t < 0 \tag{6.26}$$



Obr. 6.8: Případ, kdy se situace na burze stabilizuje, zdroj: vlastní zpracování



Obr. 6.9: Případ nestabilní situace na burze, zdroj: vlastní zpracování

Prezentovaný model (Novotná a kol. 2020) zkoumá mechanismus šíření informace v procesu IPO v prostředí burzy cenných papírů a výsledky modelování znázorňují důsledky chování systému jako celku, a to z pohledu emitenta i investora.

Graf 6.8 zobrazuje situaci po uvedení podniku na burzu, kdy v prvních dnech obchodování si podnik kupuje větší a větší počet investorů (zejména privátních). Vidíme, že v prvních týdnech obchodování prudce klesá počet potenciálních investorů, zatímco počet investorů naopak krátkodobě vzrůstá. Současně můžeme pozorovat zvýšení intenzity signálu S v období poklesu zájmu o akcii, který má ale výrazně slabší odezvu, než tomu bylo v prvních dnech.

Zhruba po ročním obchodování se ustálí počet investorů, což je spojeno i s prvním ročním vykazováním hospodářských výsledků existence podniku na burze, a porovnáním predikovaných hospodářských výsledků.

Graf 6.9 demonstruje situaci, kdy podnik nemá jasně vymezenou strategii a tato strategie není vhodně komunikována s investory, manažeři emise dávají víc a víc prostředků na reklamu. Podnik se nevhodně prezentuje a proto kolísají jak počty investorů, tak potenciálních investorů a podnik se postupně stává nedůvěryhodným.

6.7 Nabídka a poptávka na trhu s drůbežím masem

Zdrojem bohatství a moci jsou v současném světě potom především informace a schopnost s nimi efektivně nakládat. Jsou to právě informace, které rozhodují o tom, který subjekt či jednotlivec bude v dnešní společnosti úspěšný a který nikoli. Pokud chce být podnikatel úspěšný, potřebuje mít přehled o prostředí a nových trendech, což ho může v budoucnu ochránit před odbytovými potížemi, poklesem tržeb nebo snižováním zisku. Pro úspěšnou ekonomickou situaci tedy je nutná rychlost hodnocení informací, získávání nových zdrojů, efektivní komunikace, spolupráce mezi lidmi atp. Například rozvoj zemědělství do značné míry ovlivňuje všechny odvětví výroby, navazující na produkci komodit zemědělského původu, proto je pro odběratele zemědělských produktů důležité mít možnost předvídat budoucí jeho pohyby.

Typickým znakem současného ekonomického vývoje ve světě je růst vzájemné závislosti a propojení trhů jednotlivých národních ekonomik i nadnárodních uskupení ve formě globalizačních procesů. Vstup na jednotný trh má však zásadní dopad na ekonomické postavení domácností i podniků. Při konstrukci strategie podniku je proto nutné využívat nástroje, vhodné pro zkoumání možných dopadů hospodářsko-politických opatření. V tomto případě jsou hojně využívány modely založené na výpočtu všeobecné rovnováhy, zohledňují makroekonomický rámec.

Hlavní myšlenku rovnováhy trhu, kterou intuitivně přestavil A. Smith, zpracoval do podoby samostatné teorie obecné rovnováhy L. Walras.

Vědecký přínos L.a Walrase k rozvoji ekonomie byl plně doceněn až po jeho smrti, především po druhé světové válce díky J. R. Hicksovi a I. Fisherovi. Autoři G. Debreu a K. J. Arrow pak potvrdili konzistenci teorie celkové rovnováhy, včetně vymezení podmínek existence. Za striktních podmínek podali teoretický matematický důkaz Walrasovy hypotézy, že přizpůsobovací procesy vyústí do stabilní rovnováhy.

V současné době se můžeme setkat například publikacemi, které zkoumají Walrasovu dynamiku na experimentálních trzích (Crockett a kol., 2011; Donier & Bouchaud, 2016; Hubbard, 2013; Hirota a kol., 2005), statěmi zabývajícími se ekonomickou rovnováhou (viz. například (Anello a kol., 2011; Bobalová & Novotná, 2015; Codognato a kol., 2015; Donato a kol., 2008; Jofré a kol., 2007).

Dalším příkladem lineárního dynamického modelu je rovnice popisující chování trhu a vycházející z předpokladu Walrasovy teorie, že relativní změna tržní ceny v čase se řídí rovnicí rovnováhy mezi poptávkou a nabídkou:

$$p'(t) = k_1(d_1 - s_1 + d_2p(t) - s_2p(t - \Delta)). \tag{6.27}$$

Model vychází z předpokladu Walrasovy teorie (Walras, 1984), že relativní změna tržní ceny $p(t)$ v čase t se řídí rovnicí rovnováhy mezi poptávkou $D(p(t))$ a nabídkou $S(p(t))$. Přirozeným požadavkem spojité návaznosti řešení $p(t)$ z intervalu $[0, T]$ k „historické“ funkci

$$p(t) = p_h(t), t \in [-\Delta, 0], \tag{6.28}$$

kde o funkci $p_h(t)$ pro zjednodušení předpokládáme, že je spojitá, je počáteční podmínka řešení $p(t)$ ve tvaru

$$p(0) = p_h(0), \tag{6.29}$$

kde $k_1,\ d_1,\ d_2,\ s_1,\ s_2,\ \Delta$ jsou konstanty ($\Delta > 0$).

Pokud chceme analyzovat dynamiku cen, výroby a spotřeby zejména u komodit, můžeme vycházet z předpokladu Walrasovy teorie. Základní dynamická formalizace tohoto vztahu je pak následující:

$$p' = f(D(p) - S(p)), \tag{6.30}$$

přičemž vlastnosti tohoto modelu budeme dále analyzovat s využitím lineární aproximace. Nyní předpokládejme, že nabídka reaguje na změny ceny s určitým zpožděním. To lze matematicky formalizovat takto:

$$D(p(t)) = d_1 + d_2 p(t),\ d_2 < 0, S(p(t)) = s_1 + s_2 p(t - \Delta),\ s_2 > 0, \tag{6.31}$$

kde Δ vyjadřuje dobu potřebnou k realizaci změny dodávek v závislosti na vývoji cen a budeme ji nadále nazývat zpožděním. Pro numerické řešení tohoto počátečního problému bylo využito Důsledku 5.5 a Důsledku 5.6. a to s použitím řešení posloupnosti úloh

$$x'_\nu(t) = a + b x_\nu(t) + c\chi_I(t-\Delta) x_{\nu-1}(t-\Delta) + c(1-\chi_I(t-\Delta))h(t-\Delta), \tag{6.32}$$

$$x_\nu(0) = h(0), \tag{6.33}$$

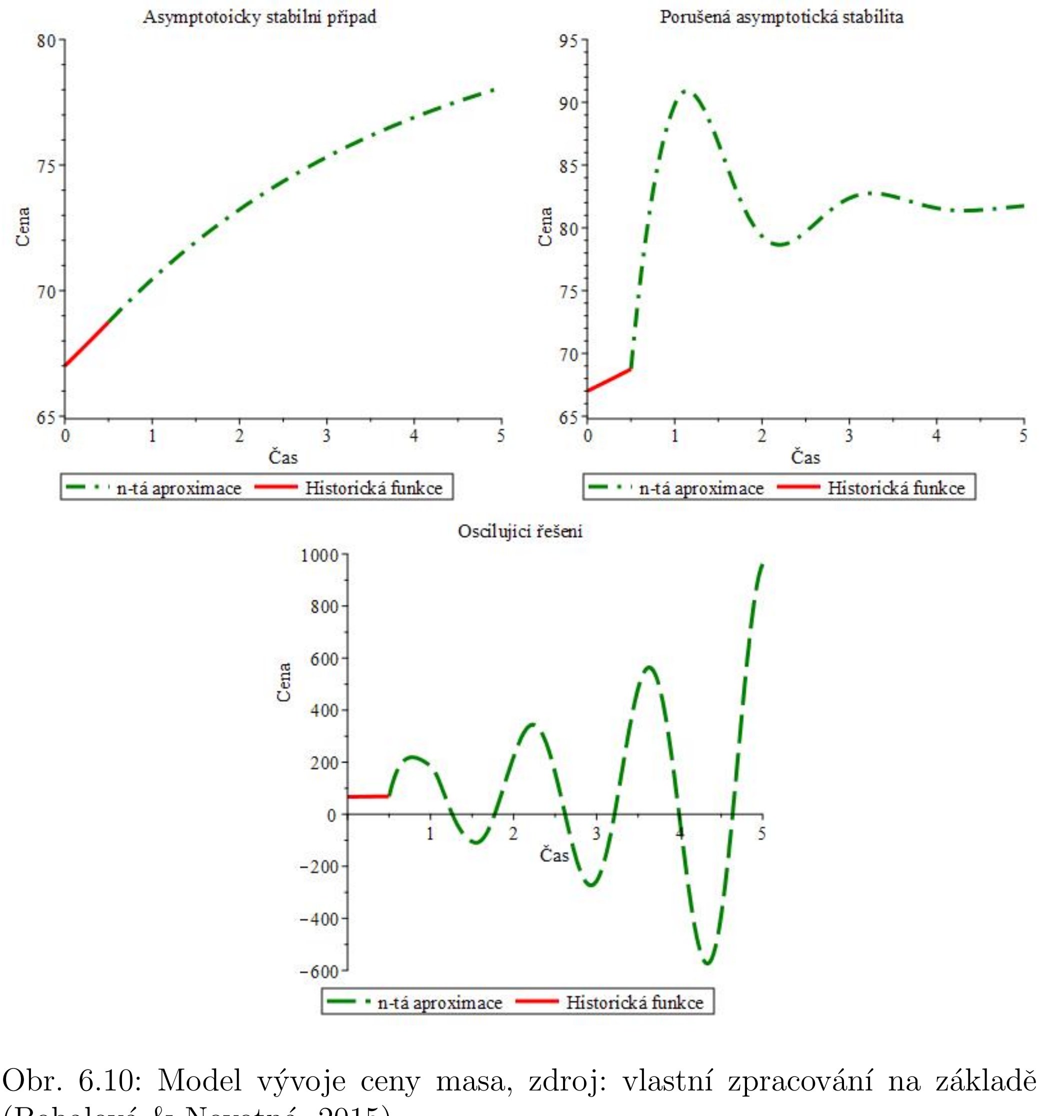
kde $t \in I = [0, T]$, $\nu \in N$, $a, b, c, \Delta \in R$, $\Delta > 0$, $h \in C([-\Delta, 0]; R)$ a $x_0 \in C(I; R)$.

Cílem práce (Bobalová & Novotná, 2015) je analyzovat chování modelu z hlediska oscilatoričnosti v případě změny vstupního parametru. V rámci aplikační části této publikace pak byla demonstrována konstrukce řešení modelu a ukázka řešení v podmínkách České Republiky.

Délka zpoždění odpovídá schopnosti drůbežářů přizpůsobit se změnám na trhu, což je jeden rok. Byl analyzován vliv koeficientu k_1, představující citlivost trhu na změny podmínek.

Na základě podmínek, za kterých řešení osciluje, uvedených v článku (Bobalová & Novotná, 2015) byla vypočtena hodnota koeficientu citlivosti trhu k_1, při jejímž překročení řešení osciluje, nebo přestane být asymptoticky stabilní.

Vypočtené řešení pro konkrétní hodnoty k_1 jsou znázorněny na obrázku 6.10. Pro $k_1 = 0,1$ se jedná o situaci, kdy je velmi malá citlivost trhu a řešení se přibližuje rovnovážnému stavu bez kmitů. Z grafu je patrné, že je monotónní a roste ke konstantní hodnotě. V případě $k_1 = 1$ je splněna podmínka, za které řešení osciluje a současně můžeme pozorovat postupné přibližování rovnovážnému stavu, tedy neustále se snižující amplitudu kmitů. Poslední graf je pro případ $k_1 = 7$. Zde vidíme sinusové vlny s amplitudou, jež se v čase zvyšuje a není zde možné docílit rovnovážného stavu.



Obr. 6.10: Model vývoje ceny masa, zdroj: vlastní zpracování na základě (Bobalová & Novotná, 2015)

Kapitola 7

Přínos práce pro vědu, praxi a pedagogickou činnost

Přínosy habilitační práce lze spatřovat ve třech rovinách, a to jak v rovině teoretické, tak praktické a následně i pedagogické. Všechny uvedené roviny jsou silně provázány a jak úvodní analytická, tak i navazující a hlavní realizační část habilitační práce s již ověřenými návrhy nových postupů zkoumání a prognózování ekonomických dynamických systémů se zpožděními mají svůj přínos, jak je uvedeno v jednotlivých částech habilitační práce a nyní souhrnně v jejím závěru.

7.1 Přínos pro vědu

Potřebná podrobná analýza chování dynamických ekonomických systémů a zejména takových systémů se zpožděními, umožňující citlivěji a přesněji reagovat na změny vstupních údajů a jejich vliv na chování systému, vyžaduje aparát umožňující takové otázky řešit.

Teoretickým přínosem této habilitační práce je návrh nového postupu řešení dynamických modelů v ekonomice a řízení podniku, určených pro podporu manažerském rozhodování.

Výsledky výzkumu představují posun v poznání problematiky řešení úloh dynamického modelování v ekonomice a řízení podniku. V práci prezentované nové postupy konstrukce řešení dynamických systémů používaných v ekonomice a řízení podniku, jsou formulovány tak, aby zohlednily co největší počet různých faktorů, ovlivňující chování modelovaného ekonomického systému, včetně vlivu časového zpoždění.

Teoretické přínosy této habilitační práce lze také spatřit v jednotlivých dílčích návrzích postupů pro různé typy konkrétních dynamických modelů, využívaných pro podporu manažerského rozhodování (viz. ilustrativní příklady v kapitole 6 a další publikace autorky). Jedná se o:

- návrh postupu řešení dynamických modelů, popsaných pomocí lineárních systémů,
- návrh postupu řešení dynamických modelů, popsaných pomocí pomocí nelineárních systémů.

Nový postup řešení byl navržen tak, aby byl vhodný pro široké spektrum modelů pro podporu rozhodování v manažerské praxi a navíc umožnil využívat standardní software, tedy aby nebyl vázán na použití vysoce specializovaného programového vybavení pro řešení systémů diferenciálních rovnic se zpožděnými argumenty.

Nově získané výsledky úvah o řešitelnosti a vlastnostech řešení takovýchto úloh, opírající se o tzv. princip apriorního odhadu - nyní dovolují použít princip pevného bodu a s ním vázané metody postupných aproximací. Tento postup je základem ke konstrukci řešení dynamických ekonomických systémů se zpožděními i bez zpoždění.

Dalším přínosem práce je shrnutí současného poznání z oblasti teorie dynamického modelování v ekonomice a řízení podniku i z hlediska možností jejich řešení.

Výstupy habilitační práce tedy přispívají k obohacení současného stavu poznání řešeného tématu jak svým širším a snazším použitím při numerických výpočtech řešení konkrétních úloh z oblasti dynamického modelování v ekonomii, tak v oblasti teorie okrajových úloh pro funkcionální diferenciální rovnice a je tak součástí rozvoje těchto oblastí vědy.

7.2 Přínos pro podnikovou praxi

K významným trendům současnosti patří studovat nejrůznější modelové situace, orientovat se v simulovaných podmínkách, hledat východiska, optimální řešení apod. Řada aplikací z různých vědních oborů i závěry teoretické matematiky v posledních letech ukazují, že modely, založené na dynamických vazbách, velmi dobře popisují složité chování stavových proměnných, jako které mohou v ekonomice sloužit například investice, spotřeba, zásoby a další.

Praktický přínos této práce souvisí především s vytvořením metodického postupu, s jehož pomocí lze nyní numericky řešit i úlohy neřešitelné běžně dostupným software, včetně široké třídy dalších tzv. okrajových úloh (jejich nejjednodušším případem je právě úloha počáteční).

Vytvořené postupy usnadňují simulování důsledků různých změn vstupních parametrů dynamických modelů a to umožňuje v manažerské praxi popisovat chování reálného ekonomického systému se zahrnutím zpožděného vlivu exogenních i endogenních proměnných.

Následná analýza chování tohoto modelu, který simuluje ekonomický systém reálněji, může navíc významně přispět ke kvalitnější predikci či optimalizaci chování reálných objektů a tím například k zvyšování produktivity práce, efektivity řídících procesů i všech ostatních činností odehrávajících se uvnitř podniku.

Nejnovější matematické metody, aplikované v oblasti ekonomiky a řízení podniku nám umožňují pracovat s modely, které nám umožňují předvídat chování analyzovaného systému a zohlednit širokou škálu faktorů, které na chování mají vliv. Z celé řady možností, kdy lze uplatnit nový postup řešení dynamického modelu se zpožděním v ekonomice a řízení podniku, nyní připomeňme alespoň některé, které byly podrobněji popsány v kapitole 6.

Tlak na zlepšování hospodářského výsledku podniku ve finále vede k tomu, že je k dispozici stále méně zdrojů, které by stály mezi jednotlivými součástmi. Typickým příkladem je eliminace zásob z dodavatelských řetězců. Při menším objemu zásob je pro organizaci obtížnější reagovat na neočekávaná zpoždění výroby, požadavky zákazníků a další. To znamená, že součásti podniku, k nimž bylo v minulosti možné přistupovat jako k vzájemně nezávislým, je nyní nezbytné koordinovat, aby bylo možné tyto nepředvídané situace úspěšně zvládat.

Velmi důležitou roli v řízení podniku, obchodu nebo výroby, tedy hraje řádná správa zásob. Díky ní podnik získává schopnost udržovat dostatečnou úroveň zásob pro nepřetržitou výrobu a prodej při současném dosažení minimálních nákladů podniku spojených se skladováním zboží. Při nákupu většího množství zboží lze často snížit náklady na objednání, avšak na druhou stranu vážou zásoby nemalé množství finančních prostředků. Právě v tomto případě lze s úspěchem uplatnit výsledky této habilitační práce, jak je vidět například z dříve uvedeného příkladu řešení rovnováhy zásob rozšířenou o order-up-to politiku doplňování zboží v kapitole 6.2.

Dnešní výrobce musí vycházet z předpokladu, že je jeho úspěšnost z velké části závislá na dvou aspektech – na kvalitě zákaznického servisu a na kvalitě výrobku. Pokud chce výrobce zvýšit svoji konkurenceschopnost, musí se na oba dva aspekty plně soustředit. Existuje mnoho studií, zaměřených buď na chování zákazníka, nebo na proces výroby, avšak velmi nízkou měrou jsou zastoupeny publikace, řešící oba problémy současně. V této práci byl představen v kapitole 6.1 dynamický ekonomický model podnikového systému, popisující současně proces výroby a prodeje spotřebního zboží.

Typickým znakem současného ekonomického vývoje ve světě je růst vzájemné závislosti a propojení trhů jednotlivých národních ekonomik i nadnárodních uskupení ve formě globalizačních procesů. Rozsáhlejší trh vytváří předpoklady pro nárůst konkurence ekonomických subjektů, což ve svém důsledku umožňuje lepší alokaci výrobních faktorů směrem k efektivnějším činnostem a vytváří tak předpoklady pro zvyšování konkurenceschopnosti na světovém trhu. Vstup na jednotný trh má však zásadní dopad na výsledky ekonomické aktivity jak jednotlivých národohospodářských odvětví, tak na ekonomické postavení domácností i podniků. Při tvorbě strategií ekonomického rozvoje je proto nutné využívat nástroje, vhodné pro zkoumání možných dopadů hospodářsko-politických opatření. Nově formulovaný přístup k řešení nám umožňuje úspěšné využití postupu konstrukce řešení modelu, popsaného pomocí diferenciálních rovnic se zpožděním v případě modelování tržních vztahů, jak bylo demonstrováno na příkladu trhu s drůbežím masem v kapitole 6.7.

7.3 Přínos pro pedagogickou činnost

V rovině pedagogické je tato práce přirozeně využita v rámci komplexního rozvoje výukové činnosti ve vzdělávacím procesu na Fakultě podnikatelské VUT v Brně a to jak v bakalářském, tak magisterském studiu. V základních kurzech ekonomických disciplín a matematiky alespoň zmínka o prezentovaném přístupu k analýze a predikci chování ekonomických dynamických systémů, v magisterském studiu více podrobnějším výkladem a ilustrativními příklady použití v níže uvedených předmětech umožní pedagogům zefektivnit výuku v souladu se stále se zvyšujícími požadavky na vysokoškolské vzdělávání.

Samo téma i ekonomické a matematické metody s ním svázané jsou nadstavbou a doplňkem základních disciplin vyučovaných na vysoké škole ekonomického směru. Vliv časového zpoždění v ekonomických dynamických systémech lze studentům prezentovat na ukázkách řešených modelů a to i díky možnosti vizualizace výsledků. Mimořádný význam pro další pedagogickou práci mí aktuální rozsáhlá rešeršní část práce, která dává ucelený náhled na problematiku. Lze ji také využít k ilustraci efektivního využití aktuálních matematických přístupů řešení dříve nedostatečně studovaných procesů, k inspiraci doktorandů i mladých odborných asistentů.

Získané nové poznatky lze začlenit jak do dílčích ekonomických disciplin, v nichž se prezentují obecné studie ekonomických modelů, tak partií užité matematiky, kde se prezentují odpovídající matematické metody pro analýzu i predikci jeho chování.

Poznatky, získané při zpracování teoretické i praktické části habilitační práce jsou v současné době autorkou práce postupně implementovány do výuky předmětů, zejména „Matematické modelování“ a „Matematická ekonomie“, konkrétně v tématech, zabývajících se spojitými dynamickými modely v ekonomii (viz. sylaby předmětů - Příloha str. 178 a str. 180) a byl součástí konzultací a návodů k řešení kvalitativních otázek chování konkrétních dynamických modelů doktorandů a mladších spolupracovníků.

Kapitola 8

Závěr

Nejnovější matematické metody, aplikované v oblasti podpory rozhodování v podnikové praxi nám umožňují pracovat s modely přesněji popisujícími reálné děje, které dovolí predikovat chování analyzovaného systému a zohlednit širší škálu faktorů, než bylo možné uvažovat v předchozích obdobích. V důsledku toho se významně zvýší kvalita rozhodovacího procesu. Při specifikaci struktury dynamických modelů z oblasti podnikové ekonomiky můžeme jejich dynamický charakter přesněji popsat zahrnutím zpožděných exogenních i endogenních proměnných, a pokud jsme schopni odhadnout hodnotu jednotlivých parametrů modelu, je možné učinit závěry o dalším chování systému, o možnostech jeho stabilizace a případně sledovat vliv jednotlivých parametrů modelu na jeho řešení.

Řada modelů z oblasti ekonomiky a řízení podniku, z nichž tato práce některé prezentuje, ukazují, že modely využívající lineární i nelineární systémy obyčejných diferenciálních rovnic se zpožděním, mohou významně usnadnit analýzu velmi složitého chování stavových veličin, která je významnou součástí rozhodovacího procesu.

Postup numerických řešení takových modelů, uvedený v této habilitační práci, je nový a liší se od postupů používaných v softwarových balících různých programů pro řešení matematických problémů. Při jeho aplikaci však není třeba použít speciální software pro rovnice se zpožděními, ale je pro něj naprosto dostačují „klasický“ software pro řešení úloh bez zpoždění, který je v současné době již velmi rozpracovaný. Porovnáním výsledků a mezí použitelnosti byla demonstrována jeho účinnost.

Jak demonstrují konkrétní příklady z oblasti ekonomiky a řízení podniku, při použití dynamických ekonomických modelů se zpožděním dovoluje nový postup v průběhu analýzy jejich chování měnit např. délku časového zpoždění, interval řešení, případně další parametry úlohy, mající bezprostřední význam pro daný model. Prezentovaná metodika tak umožňuje snazší analýzu vlivu změn jednotlivých parametrů. Získané výsledky, za předpokladu, že matematický model odpovídá reálné situaci, dovolují modelovat dopad jak historie analyzovaného procesu a míru jejího vlivu, tak vliv změn všech uvedených charakteristik a prohloubit tak znalosti nutné pro zodpovědné rozhodování.

Aplikace nově vytvořeného postupu numerického řešení dynamických ekonomických modelů se zpožděními ukázalo jak novou možnost jednotného způsobu řešení „klasických" problémů této oblasti (dříve řešené různými metodami), tak možnost jejich širší analýzy i cestu k podrobnému studiu do této doby neřešených úloh dynamických modelů z oblasti ekonomiky a řízení podniku se zpožděními (např. nekonstantními).

Podstatou nového přístupu k numerickému řešení „složitější" úlohy se zpožděními je jeho získání prostřednictvím limity posloupnosti úloh bez zpoždění. Řešení takových dílčích úloh přitom získáváme standardními metodami numerické matematiky.

Procesy související s řízením a ekonomikou podniku mohou být popsány, vedle prozatím používaného tradičního způsobu, také nepřesnými, nejistými, ale současně i důležitými „měkkými" informacemi. Pro vyjádření nejistoty ve vstupních informacích může být v mnoha případech vhodně využita také teorie fuzzy množin a místo využití „klasických" diferenciálních rovnic lze řešený model popsat pomocí fuzzy diferenciální rovnice. Mnoho těchto problémů však není v současné době díky své složitosti řešeno. Právě tato problematika otevírá nové dimenze pro další výzkum, který by měl být zaměřen na problematiku řešení dynamických modelů vhodných pro podporu rozhodování v podniku v podmínkách neurčitosti a nejistoty pomocí vhodně modifikovaného postupu který byl popsán v této habilitační práci.

Literatura

[1] AGHABAGHERY, R., A. HASHEMI GOLPAYEGANI a L. ESMAEILI, 2020. A new method for organizational process model discovery through the analysis of workflows and data exchange networks. *Social Network Analysis and Mining.* **10**(1), 1-10. DOI: 10.1007/s13278-020-0623-5. ISSN 1869-5450. Dostupné také z: http://link.springer.com/10.1007/s13278-020-0623-5

[2] ALHARBI, S. a M. NADERPOUR, 2016. E-Commerce Development Risk Evaluation Using MCDM Techniques. In: *Lecture Notes in Business Information Processing.* Plymouth; United Kingdom: Springer Verlag, 2016-05-18. DOI: 10.1007/978-3-319-32877-5_7. ISBN 978-331932876-8. ISSN 18651348. Dostupné také z: http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-32877-5_7

[3] ALLEN, R.G.D., 1959. *Introductory Mathematical Economics.* 1. London: THE MACMILLAN PRESS. ISBN 978-1-349-81549-4.

[4] ALLEN, R.G.D., 1971. *Matematická ekonomie.* Překlad Martin Černý. Praha: Academia, 782, [1] s. ISBN 99-00-00258-X.

[5] ANDERSON, Ch.M., Ch.R. PLOTT, K. SHIMOMURA a S. GRANAT, 2004. Global Instability in Experimental General Equilibrium: The Scarf Example. *Journal of Economic Theory.* **115**(2), 1-7. DOI: 10.1016/s0022-0531(03)00184-4.

[6] ANDREEVA, E.A., V.B. KOLMANOVSKII a L.E. SHAIKHET, 1992. *Upravlenie sistemami s posledeistviem.* Moskva: Nauka, Glav. red. fiziko-matematicheskoi lit-ry. ISBN 5020142360.

[7] ANDRIANSYAH, A. a G. MESSINIS, 2019. Stock prices, exchange rates and portfolio equity flows. *Journal of Economic Studies.* **46**(2), 399-421. DOI: 10.1108/JES-12-2017-0361. ISSN 0144-3585. Dostupné také z: https://www.emerald.com/insight/content/doi/10.1108/JES-12-2017-0361/full/html

[8] ANELLO, G., M.B. DONATO, M. MILASI, G. FRANCO a M. De LUCA, 2011. Variational methods for equilibrium problems involving quasi-concave utility functions. *Optimization and Engineering*. **13**(2), 45-54. DOI: 10.1007/978-1-4899-1358-6_5.

[9] AQLAN, F., S.S. LAM a S. RAMAKRISHNAN, 2014. An integrated simulation—optimization study for consolidating production lines in a configure-to-order production environment. *International Journal of Production Economics*. **148**(1), 51-61. DOI: 10.1016/j.ijpe.2013.11.006. ISSN 09255273. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0925527313004659

[10] ARCOS, V., S. GUTIÉRREZ a R. HERNANZ, 2014. Business application of viral marketing and Electronic Word-of-mouth. Firm opinions. *Cuadernos de Gestin*. **14**(1), 15-31. DOI: 10.5295/cdg.120348va. ISSN 11316837.

[11] ARMINGER, G., D. ENACHE a T. BONNE, 1997. Analyzing Credit Risk Data: A Comparison of Logistic Discrimination, Classification Tree Analysis, and Feedforward Networks. *Computational Statistics*. **12**(2), 293-310. ISSN 1613-9658.

[12] ASEA, P.K. a P.J. ZAK, 1999. Time-to-build and cycles. *Journal of economic dynamics and control*. **23**(8), 1155-1175.

[13] ASCHAUER, G., M. GRONALT a Ch. MANDL, 2015. Modelling interrelationships between logistics and transportation operations — a system dynamics approach. *Management Research Review*. **38**(5), 505-539. DOI: 10.1108/MRR-11-2013-0271. ISSN 2040-8269. Dostupné také z: https://www.emerald.com/insight/content/doi/10.1108/MRR-11-2013-0271/full/html

[14] ASCHER, U.M. a L.R. PETZOLD, 1995. The Numerical Solution of Delay-Differential-Algebraic Equations of Retarded and Neutral Type. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. **32**(5), 1635-1657. DOI: 10.1137/0732073. ISSN 0036-1429. Dostupné také z: http://epubs.siam.org/doi/10.1137/0732073

[15] AUST, G. a U. BUSCHER, 2014. Cooperative advertising models in supply chain management: A review. *European Journal of Operational Research*. **234**(1), 1-14. DOI: 10.1016/j.ejor.2013.08.010. ISSN 03772217. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0377221713006759

[16] AZBELEV, N.V., 2001. Twenty-Five Years of the Perm Seminar on Functional-Differential Equations. *Differential Equations*. **37**(8), 1194-1198. DOI: 10.1023/A:1012492107367. ISSN 00122661. Dostupné také z: http://link.springer.com/10.1023/A:1012492107367

[17] AZBELEV, N.V., E.I. BRAVIY a S.A. GUSARENKO, 2002. On Effective Sufficient Conditions for Solvability of Variational Problems. Functional Differential Equations. *FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS*. **2002**(9), 57-70.

[18] AZBELEV, N.V., L.F. RAKHMATULLINA a V.P. MAKSIMOV, 2007. *Introduction to the theory of functional differential equations: methods and applications*. 1. New York: Hindawi Publishing Corporation. ISBN 978-9775945495.

[19] BACHMAN, G. a L. NARICI, 2000. *Functional analysis*. 2. Mineola, N.Y.: Dover Publications. ISBN 978-048-6402-512.

[20] BAKER, C.T.H., C.A.H. PAUL a D.R. WILLÉ, 1995. Issues in the numerical solution of evolutionary delay differential equations. *Advances in Computational Mathematics*. **3**(1), 171-196. DOI: 10.1007/BF02988625. ISSN 1019-7168. Dostupné také z: http://link.springer.com/10.1007/BF02988625

[21] BAMBI, M., G. FABBRI a F. GOZZI, 2012. Optimal policy and consumption smoothing effects in the time-to-build AK model. *Economic Theory*. **50**(3), 635-669. DOI: 10.1007/s00199-010-0577-3. ISSN 0938-2259. Dostupné také z: http://link.springer.com/10.1007/s00199-010-0577-3

[22] BANDALY, D., A. SATIR a L. SHANKER, 2016. Impact of lead time variability in supply chain risk management. *International Journal of Production Economics*. **180**, 88-100. DOI: 10.1016/j.ijpe.2016.07.014. ISSN 09255273. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0925527316301608

[23] BEKLARYAN, G., 2019. Aggregated Simulation Model of a Region: Problems of Krasnoyarsk Region. *Economics and the Mathematical Methods*. **55**(3), 47-61. DOI: 10.31857/S042473880005769-4. ISSN 04247388. Dostupné také z: https://emm.jes.su/s042473880005769-4-1/

[24] BELAIR, J. a M.C. MACKEY, 1989. Consumer memory and price fluctuations in commodity markets: An integrodifferential model. *Journal of Dynamics and Differential Equations*. **1**(3), 299-325. DOI: 10.1007/BF01053930. ISSN 1040-7294. Dostupné také z: http://link.springer.com/10.1007/BF01053930

[25] BELLEN, A. a M. ZENNARO, 2013. *Numerical methods for delay differential equations*. 1. Oxford: OUP Oxford. ISBN 978-0-19-967137-3.

[26] BELLMAN, R. a K.L COOKE, 1965. On the computational solution of a class of functional differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. **12**(3), 495-500. DOI: 10.1016/0022-247X(65)90017-X. ISSN 0022247X. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0022247X6590017X

[27] BELLMAN, R.E. a J.M. DANSKIN, 1954. *A Survey of the Mathematical Theory of Time-Lag, Retarded Control, and Hereditary Processes*. Santa Monica, CA: RAND Corporation.

[28] BENHABIB, J. a A. RUSTICHINI, 1991. Vintage capital, investment, and growth. *Journal of Economic Theory*. **55**(2), 323-339. DOI: 10.1016/0022-0531(91)90043-4. ISSN 00220531. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0022053191900434

[29] BERNFELD, S.R. a V. LAKSHMIKANTHAM, 1974. *An introduction to nonlinear boundary value problems*. New York: Academic Press. ISBN 01-209-3150-8.

[30] BIANCA, C., M. FERRARA a L. GUERRINI, 2013. The Cai model with time delay: existence of periodic solutions and asymptotic analysis. *Applied Mathematics & Information Sciences*. **7**(1), 21-27.

[31] BIJULAL, D., J. VENKATESWARAN a N. HEMACHANDRA, 2011. Service levels, system cost and stability of production—inventory control systems. *International Journal of Production Research*. **49**(23), 7085-7105. DOI: 10.1080/00207543.2010.538744. ISSN 0020-7543.

[32] BOBALOVÁ, M. a L. MAŇÁSEK, 2007. On Constructing a Solution of a Multi- point Boundary Value Problem. In: *CDDE 2006: Colloquium on differential and difference equations: [Brno, September 5-8, 2006]: proceedings*. Brno: Masaryk University. ISSN 978-80-210-4414- 2.

[33] BOBALOVÁ, M. a V. NOVOTNÁ, 2015. The Use of Functional Differential Equations in the Model of the Meat Market with Supply Delay. In: *Procedia - Social and Behavioral Sciences*. Elsevier. DOI: 10.1016/j.sbspro.2015.11.406. ISSN 18770428. Dostupné také z: http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1877042815057535

[34] BOCKELIE, A. a P. BELOBABA, 2017. Incorporating ancillary services in airline passenger choice models. *Journal of Revenue and Pricing Management*. **16**(6), 553-568. DOI: 10.1057/s41272-017-0100-6. ISSN 1476-6930. Dostupné také z: http://link.springer.com/10.1057/s41272-017-0100-6

[35] BORDOFF, S., Q. CHEN a Z. YAN, 2017. Cyber Attacks, Contributing Factors, and Tackling Strategies. *International Journal of Cyber Behavior, Psychology and Learning*. **7**(4), 68-82. DOI: 10.4018/IJCBPL.2017100106. ISSN 2155-7136. Dostupné také z: http://services.igi-global.com/resolvedoi/resolve.aspx?doi=10.4018/IJCBPL.2017100106

[36] BOUCEKKINE, R., O. LICANDRO a Christopher PAUL, 1997. Differential-difference equations in economics: On the numerical solution of vintage capital growth models. *Journal of Economic Dynamics and Control*. **21**(2-3), 347-362. DOI: 10.1016/S0165-1889(96)00935-9. ISSN 01651889. Dostupné také z: http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0165188996009359

[37] BRANDENBURG, M., K. GOVINDAN, J. SARKIS a S. SEURING, 2014. Quantitative models for sustainable supply chain management: Developments and directions. *European Journal of Operational Research*. **233**(2), 299-312. DOI: 10.1016/j.ejor.2013.09.032. ISSN 03772217. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S037722171300787X

[38] BROCK, W.A. a M.S. TAYLOR, 2010. The Green Solow model. *Journal of Economic Growth*. **15**(2), 127-153. DOI: 10.1007/s10887-010-9051-0. ISSN 1381-4338. Dostupné také z: http://link.springer.com/10.1007/s10887-010-9051-0

[39] BUCHMEISTER, B., D. FRISCIC a I. PALCIC, 2014. Bullwhip Effect Study in a Constrained Supply Chain. *Procedia Engineering*. **2014**(69), 63-71. DOI: 10.1016/j.proeng.2014.02.204. ISSN 18777058. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1877705814002069

[40] BUCKI, R. a P. SUCHÁNEK, 2020. Information Modelling of the Storage-Distribution System. *Agents and Multi-agent Systems: Technologies and Applications 2019.* Singapore: Springer Singapore, 2020-06-20, **2020**(1), 367-376. Smart Innovation, Systems and Technologies. DOI: 10.1007/978-981-13-8679-4_30. ISBN 978-981-13-8678-7. Dostupné také z: http://link.springer.com/10.1007/978-981-13-8679-4_30

[41] CAI, D., 2012. An economic growth model with endogenous carrying capacity and demographic transition. *Mathematical and Computer Modelling.* **55**(3-4), 432-441. DOI: 10.1016/j.mcm.2011.08.022. ISSN 08957177. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0895717711005024

[42] CAI, J., X. CHEN a M. DAI, 2018. Portfolio Selection with Capital Gains Tax, Recursive Utility, and Regime Switching. *Management Science.* **64**(5), 2308-2324. DOI: 10.1287/mnsc.2016.2650. ISSN 0025-1909. Dostupné také z: http://pubsonline.informs.org/doi/10.1287/mnsc.2016.2650

[43] CAPUTO, M., 2012. The Convergence of Economic Developments. *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics.* **16**(2), 1558-3708. DOI: 10.1515/1558-3708.1986. ISSN 1558-3708. Dostupné také z: https://www.degruyter.com/view/j/snde.2012.16.issue-2/1558-3708.1986/1558-3708.1986.xml

[44] CAPUTO, M., 2014. The evolution and homogeneity of EU economies (with an econometric approach). *Meccanica.* **49**(9), 2237-2246. DOI: 10.1007/s11012-014-9966-1. ISSN 0025-6455. Dostupné také z: http://link.springer.com/10.1007/s11012-014-9966-1

[45] CIEŚLIK, A. a G. HIEN TRAN, 2019. Determinants of outward FDI from emerging economies. *Equilibrium.* **14**(2), 209-231. DOI: 10.24136/eq.2019.010. ISSN 2353-3293. Dostupné také z: http://economic-research.pl/Journals/index.php/eq/article/view/1592

[46] CIPRA, T., 2015. *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou.* Vydání III., v Ekopressu II. Praha: Ekopress. ISBN 978-80-87865-18-7.

[47] CODOGNATO, G., S. GHOSAL a S. TONIN, 2015. Atomic Cournotian traders may be Walrasian. *Journal of Economic Theory.* **159**(1),

1-14. DOI: 10.1016/j.jet.2015.05.005. ISSN 00220531. Dostupné také z: http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0022053115000848

[48] COGOLLO-FL-REZ, J.M. a A.A. CORREA-ESPINAL, 2019. Analytical modeling of supply chain quality management coordination and integration: A literature review. *Quality Management Journal*. **26**(2), 72-83. DOI: 10.1080/10686967.2019.1580553. ISSN 1068-6967. Dostupné také z: https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/10686967.2019.1580553

[49] COLLARD, F., O. LICANDRO a L. PUCH, 2008. The short run dynamics of optimal growth models with delays. *Annales d'Economie et Statistique*. **90**(1), 127-144. ISSN 0769-489X.

[50] CONNELLY, B.L., S.T. CERTO, R.D. IRELAND a Ch.R. REUTZEL, 2010. Signaling Theory: A Review and Assessment. *Journal of Management*. **37**(1), 39-67. DOI: 10.1177/0149206310388419. ISSN 0149-2063. Dostupné také z: http://journals.sagepub.com/doi/10.1177/0149206310388419

[51] COOKE, K.L. a I. GYURI, 1994. Numerical approximation of the solutions of delay differential equations on an infinite interval using piecewise constant arguments. *Computers & Mathematics with Applications*. **28**(1-3), 81-92. DOI: 10.1016/0898-1221(94)00095-6. ISSN 08981221. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0898122194000956

[52] COOKE, K. L. a J. WIENER, 1991. A survey of differential equations with piecewise continuous arguments. *Delay Differential Equations and Dynamical Systems*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1991-9-28, **1991**(1475), 1-15. Lecture Notes in Mathematics. DOI: 10.1007/BFb0083475. ISBN 978-3-540-54120-2. Dostupné také z: http://link.springer.com/10.1007/BFb0083475

[53] CORWIN, S.P., D. SARAFYAN a S. THOMPSON, 1997. DKLAG6: a code based on continuously imbedded sixth-order Runge-Kutta methods for the solution of state-dependent functional differential equations. *Applied Numerical Mathematics*. **24**(2-3), 319-330. DOI: 10.1016/S0168-9274(97)00029-9. ISSN 01689274. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0168927497000299

[54] COSTANTINO, F., G. DI, A. SHABAN a M. TRONCI, 2013. Exploring the Bullwhip Effect and Inventory Stability in a Seasonal Supply

Chain. *International Journal of Engineering Business Management.* **2013**(5), 1-12. DOI: 10.5772/56833.

[55] COURNOT, A., 1838. *Recherches sur les Principes Mathematiques de la Theorie des Richesses.* 1. Paris: Hachette.

[56] CROCKETT, S., R. OPREA a Ch. PLOTT, 2011. Extreme Walrasian Dynamics: The Gale Example in the Lab. *American Economic Review.* **101**(7), 3196-3220. DOI: 10.1257/aer.101.7.3196.

[57] CRYER, C.W. a L. TAVERNINI, 1972. The Numerical Solution of Volterra Functional Differential Equations by Euler-s Method. *SIAM Journal on Numerical Analysis.* **9**(1), 105-129. DOI: 10.1137/0709012. ISSN 0036-1429. Dostupné také z: http://epubs.siam.org/doi/10.1137/0709012

[58] CSÍK, A.G., T.L. HORVÁTH a P. FOLDESI, 2010. An Approximate Analytic Solution of the Inventory Balance Delay Differential Equation. *Acta Technica Jaurinensis.* **3**(3), 231-256.

[59] CUI, X., J. GAO a Y. SHI, 2019. Multi-period mean—variance portfolio optimization with management fees. *Operational Research.* **2019**(1), 1-22. DOI: 10.1007/s12351-019-00482-4. ISSN 1109-2858. Dostupné také z: http://link.springer.com/10.1007/s12351-019-00482-4

[60] ČERNÍK, V., E. FARKAŠOVÁ a J. VICENÍK, 1987. *Teória poznania: (Úvod do dialektiky ako logiky poznania).* 2. preprac. vyd. Bratislava: Pravda.

[61] ČÍŽEK, F., 1969. *Filosofie, metodologie,věda.* 1. Praha: Svoboda.

[62] D'ALBIS, H. a E. AUGERAUD - VERON, 2008. Endogenous Retirement and Monetary Cycles. *Mathematical Population Studies.* **15**(4), 214-229. DOI: 10.1080/08898480802440786. ISSN 0889-8480. Dostupné také z: http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/08898480802440786

[63] D'ALBIS, H. a E. AUGERAUD - VERON, 2009. Competitive Growth in a Life-Cycle Model: Existence and Dynamics. *International Economic Review.* **50**(2), 459-484. DOI: 10.1111/j.1468-2354.2009.00537.x. ISSN 00206598. Dostupné také z: http://doi.wiley.com/10.1111/j.1468-2354.2009.00537.x

[64] DALGAARD, C.J. a H. STRULIK, 2011. Energy distribution and economic growth. *Resource and Energy Economics*. **33**(4), 782-797. DOI: 10.1016/j.reseneeco.2011.04.004. ISSN 09287655. Dostupné také z: http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0928765511000273

[65] DAS, A., K. LAHIRI a Y. ZHAO, 2019. Inflation expectations in India: Learning from household tendency surveys. *International Journal of Forecasting*. **35**(3), 980-993. DOI: 10.1016/j.ijforecast.2019.03.007. ISSN 01692070. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0169207019300561

[66] DEMIREL, G., B.L. MACCARTHY, D. RITTERSKAMP, A. R. CHAMPNEYS a T. GROSS, 2019. Identifying dynamical instabilities in supply networks using generalized modeling. *Journal of Operations Management*. **65**(2), 136-159. DOI: 10.1002/joom.1005. ISSN 0272-6963. Dostupné také z: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/joom.1005

[67] DISNEY, S.M., D.R. TOWILL a W. van de VELDE, 2004. Variance amplification and the golden ratio in production and inventory control. *International Journal of Production Economics*. **90**(3), 295-309. DOI: 10.1016/j.ijpe.2003.10.009.

[68] DOEPKE, M., M. HAZAN a Y.D. MAOZ, 2015. The Baby Boom and World War II: A Macroeconomic Analysis. *The Review of Economic Studies*. **82**(3), 1031-1073. DOI: 10.1093/restud/rdv010. ISSN 0034-6527. Dostupné také z: https://academic.oup.com/restud/article-lookup/doi/10.1093/restud/rdv010

[69] DOHNAL, M., 1997. A Qualitative Approach to Pattern Identification for Financial Data Mining. *Journal of Computational Intelligence in Finance*. **5**(3), 27-36. ISSN 1941-3971.

[70] DONATO, M. B., M. MILASI a C. VITANZA, 2008. Dynamic Walrasian price equilibrium problem: evolutionary variational approach with sensitivity analysis. *Optimization Letters*. **2**(1), 113-126. DOI: 10.1007/s11590-007-0047-4. ISSN 1862-4472. Dostupné také z: http://link.springer.com/10.1007/s11590-007-0047-4

[71] DONIER, J. a J.P. BOUCHAUD, 2016. From Walras- auctioneer to continuous time double auctions: a general dynamic theory of supply and demand. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*. **2016**(12), 123-406. DOI: 10.1088/1742-5468/aa4e8e. ISSN 1742-5468.

[72] DOSTÁL, P., 2017. *Soft computing v podnikatelství a veřejné správě*. 1. Brno: Akademické nakladatelství CERM. ISBN 978-80-7204-958-5.

[73] DUBOIS, D. a H.M. PRADE, 1980. *Fuzzy sets and systems: theory and applications*. 4. New York: Academic Press. ISBN 978-012-2227-509.

[74] DUIJN, J. J. Van, 1983. *The long wave in economic life*. 4. Boston: Unwin Hyman. ISBN 00-433-0331-5.

[75] DUNN, W. N., 2012. *Public policy analysis: an introduction*. 5th ed. Boston: Pearson. ISBN 02-052-5257-5.

[76] DYKHTA, V. a O SAMSONIUK, 2003. Optimalnoe impulsnoe upravlenie s prilozheniiaami. *Fizmatlit*. 2000, (1). ISSN 978-5-9221-0877-5.

[77] DZHALLADOVA, I. a kol, 2019. Design and Analysis of a Model for Detection of Information Attacks in Computer Networks. *ECONOMIC COMPUTATION AND ECONOMIC CYBERNETICS STUDIES AND RESEARCH*. **53**(3/2019), 95-112. DOI: 10.24818/18423264/53.3.19.06. ISSN 0424-267X

[78] ELSGOLTS, L.E. a S.B. NORKIN, 1973. *Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments*. New York: Academic Press. ISBN 0122377508.

[79] ERMENTROUT, B., 2002. *Simulating, Analyzing, and Animating Dynamical Systems: A Guide to XPPAUT for Researchers and Students* [online]. Pittsburgh: University of Pittsburgh [cit. 2020-01-19]. ISBN 978-0-89871-819-5. Dostupné z: https://epubs.siam.org/doi/book/10.1137/1.9780898718195

[80] FARUQUE, S.A., M.A. KHATUN a M.S. RAHMAN, 2016. Modelling direct marketing campaign on social networks. *International Journal of Business Information Systems*. **22**(4), 422-435. DOI: 10.1504/IJBIS.2016.077836. ISSN 1746-0972. Dostupné také z: http://www.inderscience.com/link.php?id=77836

[81] FENG, L., Y.L. CHAN a L.E. CÁRDENAS-BARR-N, 2017. Pricing and lot-sizing polices for perishable goods when the demand depends on selling price, displayed stocks, and expiration date. *International Journal of Production Economics*. **185**(1), 11-20. DOI: 10.1016/j.ijpe.2016.12.017. ISSN 09255273. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0925527316303966

[82] FERRARA, M., L. GUERRINI a G.M. BISCI, 2013. Center Manifold Reduction and Perturbation Method in a Delayed Model with a Mound-Shaped Cobb-Douglas Production Function. *Abstract and Applied Analysis*. **2013**, 1-6. DOI: 10.1155/2013/738460. ISSN 1085-3375. Dostupné také z: http://www.hindawi.com/journals/aaa/2013/738460/

[83] FERRARA, M., L. GUERRINI a M. SODINI, 2014. Nonlinear dynamics in a Solow model with delay and non-convex technology. *Applied Mathematics and Computation*. **228**, 1-12. DOI: 10.1016/j.amc.2013.11.082. ISSN 00963003. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0096300313012514

[84] FIALA, P., 2010. *Operační výkum: nové trendy*. 1. Praha: Professional Publishing. ISBN 978-807-4310-362.

[85] FISCHER, J., T.A. GARDNER, E.M. BENNETT a kol., 2015. Advancing sustainability through mainstreaming a social—ecological systems perspective. *Current Opinion in Environmental Sustainability*. **14**(1), 144-149. DOI: 10.1016/j.cosust.2015.06.002. ISSN 18773435. Dostupné také z: http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1877343515000548

[86] FORRESTER, J.W., 1958. Industrial dynamics-a major breakthrough for decision making. *Harvard Business Review*. **36**(4), 37-66.

[87] FORRESTER, J.W., 2013. *Industrial Dynamics*. 2. Cambridge: Martino Fine Books. ISBN 978-1614275336.

[88] FRANKE, R., 2018. Reviving Kalecki-s business cycle model in a growth context. *Journal of Economic Dynamics and Control*. **91**(1), 157-171. DOI: 10.1016/j.jedc.2017.12.009. ISSN 01651889. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0165188917302579

[89] GEARY, S., S.M. DISNEY, D.R. TOWILL, F. CAMPUZANO a J. MULA, 2006. On bullwhip in supply chains-historical review, present practice and expected future impact. *International Journal of Production Economics*. **101**(1), 23-35. DOI: 10.1007/978-0-85729-719-8_3.

[90] GELASHVILI, Sh. a I. KIGURADZE, 1995. On multi-point boundary value problems for systems of functional differential and difference equations. *Memoirs on differential equations and mathematical physics*. Tbilisi: Georgian academy of sciences, (5), 1-113. ISSN 1512-0015.

[91] GOLDBERG, D.E., 1989. *Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning*. 1. Reading, Mass.: Addison-Wesley Pub. Co. ISBN 978-0201157673.

[92] GORI, L., L. GUERRINI a M. SODINI, 2018. Disequilibrium dynamics in a Keynesian model with time delays. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. **58**(1), 119-130. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.06.014. ISSN 10075704. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1007570417302228

[93] GORSKI, A.A. a B.Y. LOKSHIN, 2002. A mathematical model of goods production and sale for production supervision and planning. *Fundam. Prikl. Mat.* Moscow, **8**(1), 39-45.

[94] GOVINDAN, K., H. SOLEIMANI a D. KANNAN, 2015. Reverse logistics and closed-loop supply chain: A comprehensive review to explore the future. *European Journal of Operational Research*. **240**(3), 603-626. DOI: 10.1016/j.ejor.2014.07.012. ISSN 03772217. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0377221714005633

[95] GRIGORIEVA, E.V. a E.N. KHAILOV, 2005. Attainable Set of a Nonlinear Controlled Microeconomic Model. *Journal of Dynamical and Control Systems*. **11**(2), 157-176. DOI: 10.1007/s10883-005-4168-8. ISSN 1079-2724. Dostupné také z: http://link.springer.com/10.1007/s10883-005-4168-8

[96] GRIGORIEVA, E.V. a E.N. KHAILOV, 2015. Optimal production—sales strategies for a company at changing market price. *Revista de Matemtica: Teoria y Aplicaciones*. **22**(1), 89-94. DOI: 10.15517/rmta.v22i1.17557. ISSN 2215-3373. Dostupné také z: http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/matematica/article/view/17557

[97] GROESSER, S.N. a N. JOVY, 2016. Business model analysis using computational modeling: a strategy tool for exploration and decision-making. *Journal of Management Control*. **27**(1), 61-88. DOI: 10.1007/s00187-015-0222-1. ISSN 2191-4761. Dostupné také z: http://link.springer.com/10.1007/s00187-015-0222-1

[98] GRUSZKA, J. a J. SZWABIŃSKI, 2020. Best portfolio management strategies for synthetic and real assets. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. **539**(1), 1-19. DOI: 10.1016/j.physa.2019.122938. ISSN 03784371. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0378437119316656

[99] GUERRINI, L., 2013. Hopf bifurcation in endogenous labor shift model under dual economy. *International Journal of Mathematical Analysis.* **7**(1), 1257-1262. DOI: 10.12988/ijma.2013.13123. ISSN 13147579. Dostupné také z: http://www.m-hikari.com/ijma/ijma-2013/ijma-25-28-2013/13123.html

[100] GUERRINI, L. a M. SODINI, 2014. Dynamic Properties of the Solow Model with Bounded Technological Progress and Time-to-Build Technology. *The Scientific World Journal.* **2014**(1), 1-8. DOI: 10.1155/2014/908629. ISSN 2356-6140. Dostupné také z: http://www.hindawi.com/journals/tswj/2014/908629/

[101] GUERRINI, L., M. SODINI a L. GORI, 2018. Time delays, population, and economic development. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science.* **28**(5), 36-46. DOI: 10.1063/1.5024397. ISSN 1054-1500. Dostupné také z: http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.5024397

[102] HALDANE, J.B.S., 1934. A Contribution to the Theory of Price Fluctuations. *The Review of Economic Studies.* **1**(3), 186-195. DOI: 10.2307/2967482. ISSN 0034-6527. Dostupné také z: https://academic.oup.com/restud/article-lookup/doi/10.2307/2967482

[103] HALE, J.K., 1977. *Theory of Functional Differential Equations.* New York: Springer-Verlag New York. ISBN 978-1-4612-9894-6.

[104] HALE, J.K. a S.M. VERDUYN LUNEL, 1993. *Introduction to functional differential equations.* New York: Springer-Verlag. Applied mathematical sciences (Springer-Verlag New York Inc.), v. 99. ISBN 978-0-387-94076-2.

[105] HAO, F. a T. WANG, 2016. A multi-stage -infection- model of stock investors' reaction to new product announcement signal. *Mathematical Methods in the Applied Sciences.* **39**(18), 5670-5681. DOI: 10.1002/mma.3952. ISSN 01704214. Dostupné také z: http://doi.wiley.com/10.1002/mma.3952

[106] HAYES, J.L. a K.W. KING, 2014. The Social Exchange of Viral Ads: Referral and Coreferral ofÂ Ads Among College Students. *Journal of Interactive Advertising.* **14**(2), 98-109. DOI: 10.1080/15252019.2014.942473. ISSN 1525-2019. Dostupné také z: http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/15252019.2014.942473

[107] HENDL, J., 2016. *Kvalitativní výzkum: základní teorie, metody a aplikace.*Čtvrté, přepracované a rozšířené vydání. Praha: Portál. ISBN 978-802-6209-829.

[108] HEYDARI, J., P. ZAABI-AHMADI a T.M. CHOI, 2018. Coordinating supply chains with stochastic demand by crashing lead times. *Comput Oper Res.* **100**(1), 394-403. DOI: 10.1016/j.cor.2016.10.009. ISSN 03050548. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S030505481630257X

[109] HIROTA, M. a kol., 2005. Divergence, closed cycles and convergence in scarf environments: experiments in the dynamics of generalequilibrium systems. *Social Science Working Paper.* **2005**(1).

[110] HOPPENSTEADT, F.C. a Z. JACKIEWICZ, 2006. Numerical solution of a problem in the theory of epidemics. *Applied Numerical Mathematics.* **56**(3-4), 533-543. DOI: 10.1016/j.apnum.2005.04.019. ISSN 01689274. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0168927405000887

[111] HOWROYD, T.D. a A.M. RUSSELL, 1984. Cournot oligopoly models with time delays. *Journal of Mathematical Economics.* **13**(2), 97-103. DOI: 10.1016/0304-4068(84)90009-0. ISSN 03044068. Dostupné také z: http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0304406884900090

[112] HUBBARD, T.P., 2013. Trade and transboundary pollution: quantifying the effects of trade liberalization on CO 2 emissions. *Applied Economics.* **46**(5), 483-502. DOI: 10.1080/00036846.2013.857000. ISSN 0003-6846. Dostupné také z: http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00036846.2013.857000

[113] CHATFIELD, D.C., a kol., 2004. The Bullwhip Effect-Impact of Stochastic Lead Time, Information Quality, and Information Sharing: A Simulation Study. *Production and Operations Management.* **13**(4), 340-353. DOI: 10.1111/j.1937-5956.2004.tb00222.x.

[114] CHAUDHARY, V., R. KULSHRESTHA a S. ROUTROY, 2018. State-of-the-art literature review on inventory models for perishable products. *Journal of Advances in Management Research.* **15**(3), 306-346. DOI: 10.1108/JAMR-09-2017-0091. ISSN 0972-7981. Dostupné také z: https://www.emerald.com/insight/content/doi/10.1108/JAMR-09-2017-0091/full/html

[115] CHEN, W. a W. WANG, 2014. Global exponential stability for a delay differential neoclassical growth model. *Advances in Difference Equations.* **2014**(1). DOI: 10.1186/1687-1847-2014-325. ISSN 1687-1847.

[116] CHOBOT, M. a A. TURNOVCOVÁ, 1980. *Modely rozhodovania v konfliktních situáciách a za neurčitosti.* Bratislava: Alfa. Matematické metódy v ekonomike.

[117] CHOWDHURY, R., S.K. GHOSH a K.S. CHAUDHURI, 2017. An Optimal Inventory Replenishment Policy for a Perishable Item with Time Quadratic Demand and Partial Backlogging with Shortages in All Cycles. *International Journal of Applied and Computational Mathematics.* **3**(2), 1001-1017. DOI: 10.1007/s40819-016-0162-y. ISSN 2349-5103. Dostupné také z: http://link.springer.com/10.1007/s40819-016-0162-y

[118] JACKOWSKA-ZDUNIAK, B. a kol., 2015. Numerical Analysis of Two Coupled Kaldor-Kalecki Models with Delay. *Acta Physica Polonica A.* **127**(3a), A-70-A-74. DOI: 10.12693/APhysPolA.127.A-70. ISSN 0587-4246. Dostupné také z: http://przyrbwn.icm.edu.pl/APP/PDF/127/a127z3ap12.pdf

[119] JOFRÉ, A., R.T. ROCKAFELLAR a R.J.B. WETS, 2007. Variational Inequalities and Economic Equilibrium. *Mathematics of Operations Research.* **32**(1), 32-50. DOI: 10.1287/moor.1060.0233. ISSN 0364-765x. Dostupné také z: http://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/moor.1060.0233

[120] JUGLAR, C., 1969. *Des crises commerciales et de leur retour peiriodique en France, en Angleterre, et aux Eotats-Unis.* 2. ed. New York: B. Franklin.

[121] KADDAR, A., S.E. SAHBANI a H.T. ALLAOUI, 2018. Fluctuations in a delayed PEGI model with economic characteristics of population. *Journal of Nonlinear Systems and Applications.* **2018**, 52-56.

[122] KALECKI, M., 1935. A Macrodynamic Theory of Business Cycles. *Econometrica.* **3**(3), 327-344. DOI: 10.2307/1905325. ISSN 00129682. Dostupné také z: https://www.jstor.org/stable/1905325?origin=crossref

[123] KALMÁR-NAGY, T., 2009. Stability analysis of delay-differential equations by the method of steps and inverse Laplace transform.

Differential Equations and Dynamical Systems. **17**(1-2), 185-200. DOI: 10.1007/s12591-009-0014-x. ISSN 0971-3514. Dostupné také z: http://link.springer.com/10.1007/s12591-009-0014-x

[124] KANTH, A.S.V. a P. MURALI MOHAN KUMAR, 2018. Numerical Method for a Class of Nonlinear Singularly Perturbed Delay Differential Equations Using Parametric Cubic Spline. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation.* **19**(3-4), 357-365. DOI: 10.1515/ijnsns-2017-0126. ISSN 1565-1339. Dostupné také z: http://www.degruyter.com/view/j/ijnsns.2018.19.issue-3-4/ijnsns-2017-0126/ijnsns-2017-0126.xml

[125] KASSIM, F.A.I., A.H. NAWAWI, B.M. HANIPAH a T.K. HWA, 2016. A system dynamic model - Based model for making decision to run PPP projects in Malaysia: Management (Thories and methodologies of enterprise management). In: *2016 6th International Conference on Information Communication and Management (ICICM).* IEEE, 2016. DOI: 10.1109/INFOCOMAN.2016.7784216. ISBN 978-1-5090-3495-6. Dostupné také z: http://ieeexplore.ieee.org/document/7784216/

[126] KELLER, A.A., 2010. Generalized delay differential equations to economic dynamics and control. In: *AMERICAN-MATH'10 Proceedings of the 2010 American conference on Applied mathematics.* Cambridge, USA: WSEAS Press. ISBN 978-960-474-150-2. ISSN 1790-2769.

[127] KELLEY, M.B., 2013. The Stuxnet Attack On Iran-s Nuclear Plant Was -Far More Dangerous- Than Previously Thought. In: *Business Insider* [online]. New York: Business Insider [cit. 2018-03-06]. Dostupné z: http://www.businessinsider.com/stuxnet-was-far-more-dangerous-than-previous-thought-2013-11

[128] KIGURADZE, I.T., 1986. Periodic solutions of systems of nonautonomous ordinary differential equations. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR.* **39**(4), 308-315. DOI: 10.1007/BF01158003. ISSN 0001-4346. Dostupné také z: http://link.springer.com/10.1007/BF01158003

[129] KIGURADZE, I.T. a B. PŮŽA, 2005. On the Well-posedness of Nonlinear Boundary Value Problems for Functional Differential Equations. *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics.* Georgia: Publishing House GCI, **34**(34), 149-152.

[130] KIGURADZE, I.T. a B. PŮŽA, 1997a. On boundary value problems for systems of linear functional differential equations. *Czechoslovak Math. J.* Praha, **47**(2), 341-373.

[131] KIGURADZE, I.T. a B. PŮŽA, 1997b. On Boundary Value Problems for Functional Differential Equations. *Mem. Differential Equations Math. Phys.* **1997**(12), 106-113.

[132] KIGURADZE, I.T. a B. PŮŽA, 2003. *Boundary value problems for systems of linear functional differential equations.* 1. Brno: Masaryk University, 104 s. ISBN 80-210-3106-9.

[133] KIM, I. a kol., 2008. Measuring endogenous supply chain volatility: Beyond the bullwhip effect. *European Journal of Operational Research.* **189**(1), 172-193. DOI: 10.4018/9781599045887.ch009.

[134] KINDLER, E., 1980. *Simulační programovací jazyky.* 1. Praha: SNTL.

[135] KITCHIN, J., 1923. Cycles and Trends in Economic Factors. *The Review of Economics and Statistics.* **5**(1), DOI: 10.2307/1927031. ISSN 00346535. Dostupné také z: https://www.jstor.org/stable/1927031?origin=crossref

[136] KLEINKNECHT, A., 1981. Observations on the Schumpeterian swarming of innovations. *Futures.* **13**(4), 293-307. DOI: 10.1016/0016-3287(81)90145-2. ISSN 00163287. Dostupné také z: http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0016328781901452

[137] KNAPOVÁ, B., 2008. Business as Result of Managerial Decision Making. *Český finanční a účetní časopis.* **2008**(1), 56-61. DOI: 10.18267/j.cfuc.257. ISSN 18022200. Dostupné také z: http://cfuc.vse.cz/doi/10.18267/j.cfuc.257.html

[138] KODERA, J., J. RADOVÁ a T. VAN QUANG, 2012. A modification of Kaldor-Kalecki model and its analysis. In: *30th International Conference Mathematical Methods in Economics.* Karviná, Czech Republic: Silesian University in Opava, School of Business Administration. ISBN 978-80-7248-779-0.

[139] KOLMANOVSKII, V.B. a A.D. MYSHKIS, 1999. *Introduction to the theory and applications of functional differential equations.* Boston: Kluwer Academic Publishers. Mathematics and its applications (Kluwer Academic Publishers), v. 463. ISBN 978-0792355045.

[140] KOLMANOVSKII, V.B. a A.D. MYSHKIS, 1992. *Applied theory of functional differential equations*. Boston: Kluwer Academic Publishers, xv, 234 p. Mathematics and its applications (Kluwer Academic Publishers), 85. ISBN 07-923-2013-1.

[141] KOLMOGOROV, A.N. a S.V. FOMIN, 1975. *Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy: [určeno [též] pro posl. vys. škol techn. a universit]*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury. Teoretická knižnice inženýra.

[142] KOVACS, E., 2014. Cyberattack on German Steel Plant Caused Significant Damage: Report. In: *Security Week* [online]. Boston: Wired Business Media [cit. 2018-03-06]. Dostupné z: https://www.securityweek.com/cyberattack-german-steel-plant-causes-significant-damage-report

[143] KOZLOVSKYI, S., L. SHAULSKA, A. BUTYRSKYI, N. BURKINA a Y. POPOVSKYI, 2018. The marketing strategy for making optimal managerial decisions by means of smart analytics. *Innovative Marketing*. **14**(4), 1-18. DOI: 10.21511/im.14(4).2018.01. ISSN 18142427. Dostupné také z: https://businessperspectives.org/innovative-marketing/issue-304/the-marketing-strategy-for-making-optimal-managerial-decisions-by-means-of-smart-analytics

[144] KRAWIEC, A. a M. SZYDLOWSKI, 1999. The Kaldor-Kalecki business cycle model. *Annals of Operations Research*. **89**, 89-100. DOI: 10.1023/A:1018948328487. ISSN 02545330. Dostupné také z: http://link.springer.com/10.1023/A:1018948328487

[145] KRAWIEC, A. a M. SZYDLOWSKI, 2017. Economic growth cycles driven by investment delay. *Economic Modelling*. **67**(1), 175-183. DOI: 10.1016/j.econmod.2016.11.014. ISSN 02649993. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0264999316307283

[146] KŘIVÝ, I. a E. KINDLER, 2001. *Simulace a modelování*. 1. Ostrava: Ostravská univerzita. Učební texty Ostravské univerzity. ISBN 80-704-2809-0.

[147] KUIPERS, B., 1986. Qualitative simulation. *Artificial Intelligence*. **29**(3), 289-338. DOI: 10.1016/0004-3702(86)90073-1. ISSN 00043702. Dostupné také z: http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0004370286900731

[148] KULIKOV, D.A., 2019. The generalized Solow model. *Journal of Physics: Conference Series*. **1205**(1), 1-6. DOI: 10.1088/1742-6596/1205/1/012033. ISSN 1742-6588. Dostupné také z: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1205/1/012033

[149] KUMAR, S. a U.S. RAJPUT, 2015. Fuzzy Inventory Model for Deteriorating Items with Time Dependent Demand and Partial Backlogging. *Applied Mathematics*. **06**(03), 496-509. DOI: 10.4236/am.2015.63047. ISSN 2152-7385. Dostupné také z: http://www.scirp.org/journal/doi.aspx?DOI=10.4236/am.2015.63047

[150] KUZNETS, S., 1940. Schumpeter's Business Cycles. *The American Economic Review*. **3**(2), 257—271.

[151] KVASNIČKA, V., 2000. *Evolučné algoritmy*. 1. Bratislava: Vydavatelstvo STU. ISBN 80-227-1377-5.

[152] LANCASTER, K., 2012. *Mathematical economics*. Dotisk. New York: Courier Corporation. ISBN 978-048-6145-044.

[153] LANČA, J. a J. SEDLÁČEK, 2005. *Manažerské účetnictví: distanční studijní opora*. Brno: Masarykova univerzita v Brně, Ekonomicko-správní fakulta. ISBN 80-210-3643-5.

[154] LANKHUIZEN, M. a M. THISSEN, 2019. The implications of re-exports for gravity equation estimation, NAFTA and Brexit. *Spatial Economic Analysis*. **14**(4), 384-403. DOI: 10.1080/17421772.2019.1623419. ISSN 1742-1772. Dostupné také z: https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/17421772.2019.1623419

[155] LARSON, A.B., 1964. The Hog Cycle as Harmonic Motion. *Journal of Farm Economics*. **46**(2), 375-386. DOI: 10.2307/1236542. ISSN 10711031. Dostupné také z: https://academic.oup.com/ajae/article-lookup/doi/10.2307/1236542

[156] LAVE, Ch.A. a J.G. MARCH, 1975. *An introduction to models in the social sciences*. 1. New York: Harper & Row. ISBN 978-006-0438-616.

[157] LEATHY, K., 1994. The Overfitting Problem in Perspective, AI Expert, No. 9. ISSN: 0888-3785. *AI Expert*. **5**(9), 34-41. ISSN 0888-3785.

[158] LEE, H.L., K.C.SO a Ch.S. TANG, 2000. The Value of Information Sharing in a Two-Level Supply Chain. *Management Science*. **46**(5), 626-643. DOI: 10.1287/mnsc.46.5.626.12047.

[159] LEE, R.P. a Q. CHEN, 2009. The Immediate Impact of New Product Introductions on Stock Price: The Role of Firm Resources and Size *. *Journal of Product Innovation Management.* **26**(1), 97-107. DOI: 10.1111/j.1540-5885.2009.00337.x. ISSN 07376782.

[160] LELARASMEE, E., A.E. RUEHLI a A.L. SANGIOVANNI-VINCENTELLI, 1982. The Waveform Relaxation Method for Time-Domain Analysis of Large Scale Integrated Circuits. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems.* **1**(3), 131-145. DOI: 10.1109/TCAD.1982.1270004. ISSN 0278-0070. Dostupné také z: http://ieeexplore.ieee.org/document/1270004/

[161] LI, H., Y.J. WU a Y. CHEN, 2020. Time is money: Dynamic-model-based time series data-mining for correlation analysis of commodity sales. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* **370**(1), 1-10. DOI: 10.1016/j.cam.2019.112659. ISSN 03770427. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0377042719306648

[162] LI, L., 2003. Several differential equation models in economic system. *Journal of the Graduate School of the Chinese Academy of Science.* **20**(3), 273—278.

[163] LI, L., X. QU a G. ZHANG, 2015. An Efficient Algorithm Based on Eigenfunction Expansions for Some Optimal Timing Problems in Finance. *SSRN Electronic Journal.* **2015**(1), 1-36. DOI: 10.2139/ssrn.2605742. ISSN 1556-5068. Dostupné také z: http://www.ssrn.com/abstract=2605742

[164] LI, R., Y.L. CHAN, Ch.T. CHANG a L. E. CÁRDENAS-BARR-N, 2017. Pricing and lot-sizing policies for perishable products with advance-cash-credit payments by a discounted cash-flow analysis. *International Journal of Production Economics.* **193**(1), 578-589. DOI: 10.1016/j.ijpe.2017.08.020. ISSN 09255273. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0925527317302724

[165] LIZ, E. a G. ROST, 2013. Global dynamics in a commodity market model. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* **398**(2), 707-714. DOI: 10.1016/j.jmaa.2012.09.024. ISSN 0022247X. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0022247X12007561

[166] LOPEZ-FERNANDEZ, A. M., 2015. *Corporate social responsibility and business growth: collateral effects on business and society.* 1. New York: Nova Publishers. ISBN 978-163483322-6.

[167] LOZANO, R., A. CARPENTER a F.J. LOZANO, 2014. Critical reflections on the Chemical Leasing concept. *Resources, Conservation and Recycling.* **86**(1), 53-60. DOI: 10.1016/j.resconrec.2014.02.003. ISSN 09213449. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0921344914000482

[168] LUCAS, R.E., 1976. Econometric Policy Evaluation: A Critique. *The Phillips curve and labor markets.* New York: American Elsevier Pub. Co. ISBN 0444110070.

[169] MCGARVEY, B. a B. M. HANNON, 2004. *Dynamic modeling for business management: an introduction.* New York: Springer. ISBN 03-874-0461-9.

[170] MACKEY, M.C., 1989. Commodity price fluctuations: Price dependent delays and nonlinearities as explanatory factors. *Journal of Economic Theory.* **48**(2), 497-509. DOI: 10.1016/0022-0531(89)90039-2. ISSN 00220531. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0022053189900392

[171] MAŇÁSEK, L., 2007. On constructing a solution of a boundary value problem for functional differential equations. In: *Proceedings of Equadiff 11.* Bratislava: Comenius University Press. ISBN 237-244978-80-227-2624-5.

[172] MANKIW, N.G., D. ROMER a D.N. WEIL, 1992. A Contribution to the Empirics of Economic Growth. *The Quarterly Journal of Economics.* **107**(2), 407-437. DOI: 10.2307/2118477. ISSN 0033-5533. Dostupné také z: https://academic.oup.com/qje/article-lookup/doi/10.2307/2118477

[173] MARUŠIAK, P. a R. OLACH, 2000. *Funkcionálne diferenciálne rovnice.* Žilina: EDIS. ISBN 80-710-0714-5.

[174] MAŘÍK, V., O. ŠTĚPNIČKOVÁ a J. LAŽANSKÝ, 2001. *Umělá inteligence 3.* 1. Praha: Academia. ISBN 80-200-0472-6.

[175] MATSUMOTO, A. a F. SZIDAROVSZKY, 2011. *Delay differential neoclassical growth model.* **78**(3), 272-289. DOI: 10.1016/j.jebo.2011.01.014. ISSN 01672681. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0167268111000369

[176] MATSUMOTO, A. a F. SZIDAROVSZKY, 2012. Nonlinear delay monopoly with bounded rationality. *Chaos, Solitons & Fractals*. **45**(4), 507-519. DOI: 10.1016/j.chaos.2012.01.005. ISSN 09600779. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0960077912000252

[177] MATSUMOTO, A. a F. SZIDAROVSZKY, 2013. Asymptotic Behavior of a Delay Differential Neoclassical Growth Model. *Sustainability*. **5**(2), 440-455. DOI: 10.3390/su5020440. ISSN 2071-1050. Dostupné také z: http://www.mdpi.com/2071-1050/5/2/440

[178] MATSUMOTO, A. a F. SZIDAROVSZKY, 2016. Delay Kaldor—Kalecki Model Revisited. *Essays in economic dynamics* [online]. New York, NY: Springer Berlin Heidelberg [cit. 2018-11-26]. ISBN 978-981-10-1520-5.

[179] MECHEE, M. a kol., 2013. Directly Solving Special Second Order Delay Differential Equations Using Runge-Kutta-Nystrem Method. *Mathematical Problems in Engineering*. **2013**(1), 1-7. DOI: 10.1155/2013/830317. ISSN 1024-123X. Dostupné také z: http://www.hindawi.com/journals/mpe/2013/830317/

[180] MELUZÍN, T. a kol., 2018. The impact of rumours related to political and macroeconomic uncertainty on IPO success: evidence from a qualitative model. *TRANSFORMATIONS IN BUSINESS & ECONOMICS*. **17**(2), 148-169.

[181] MENSCH, G., 1975. *Das technologische Patt: Innovationen uberwinden die Depression*. 1. Frankfurt am Main: Umschau Verlag. ISBN 978-3524006437.

[182] MIDRIGAN, V. a D.Y. XU, 2014. Finance and Misallocation: Evidence from Plant-Level Data. *American Economic Review*. **104**(2), 422-458. DOI: 10.1257/aer.104.2.422. ISSN 0002-8282. Dostupné také z: http://pubs.aeaweb.org/doi/10.1257/aer.104.2.422

[183] MINSKY, M., 1996. *Konštrukcia mysle*. Přeložil Ján HABDÍK. Bratislava: Archa. Filozofia do vrecka. ISBN 80-7115-107-6.

[184] MOLNÁR, Z., 2012. *Pokročilé metody vědecké práce*. 1. Zeleneč: Profess Consulting. Věda pro praxi (Profess Consulting). ISBN 978-80-7259-064-3.

[185] MOORE, H.L., 2016. Cours d'Économie Politique. By VILFREDO PARETO, Professeur l'Université de Lausanne. Vol. I. Pp. 430. I896. Vol. II. Pp. 426. I897. Lausanne: F. Rouge. *The ANNALS of the American Academy of Political and Social Science*. **9**(3), 128-131. DOI: 10.1177/000271629700900314. ISSN 0002-7162. Dostupné také z: http://journals.sagepub.com/doi/10.1177/000271629700900314

[186] MYSHKIS, A.D., 1971. *Linear Differential Equations with Delayed Argument.* 2. Moscow: Nauka.

[187] NAIMZADA, A. a M. PIREDDU, 2014a. Dynamics in a nonlinear Keynesian good market model. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. **24**(1), 24-36. DOI: 10.1063/1.4870015. ISSN 1054-1500. Dostupné také z: http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.4870015

[188] NAIMZADA, A. a M. PIREDDU, 2014b. Dynamic behavior of product and stock markets with a varying degree of interaction. *Economic Modelling*. **41**, 191-197. DOI: 10.1016/j.econmod.2014.05.014. ISSN 02649993. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0264999314001813

[189] NAIMZADA, A. a M. PIREDDU, 2015. *Real and financial interacting markets: A behavioral macro-model*. **77**(1), 111-131. DOI: 10.1016/j.chaos.2015.05.007. ISSN 09600779. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0960077915001435

[190] NEMYCKII, V.V., 1962. Topological problems of the theory of dynamical systems. *Amer. Math. Soc. Transi.* **5**(1), 414-497.

[191] NETRAVALI, A. N., 1973. Spline Approximation to the Solution of the Volterra Integral Equation of the Second Kind. *Mathematics of Computation*. **27**(121), 99-106. DOI: 10.2307/2005250. ISSN 00255718. Dostupné také z: https://www.jstor.org/stable/2005250?origin=crossref

[192] NEVES, K. W., 1975. Algorithm 497: Automatic Integration of Functional Differential Equations [D2]. *ACM Transactions on Mathematical Software*. **1**(4), 369-371. DOI: 10.1145/355656.355662. ISSN 00983500. Dostupné také z: http://portal.acm.org/citation.cfm?doid=355656.355662

[193] NOVOTNÁ, V., 2012. Dynamic Model of Phillips Curve Using the Maple System. In: *Innovation and Sustainable Economic Competitive Advantage From Regional Development to World Economies*. Istanbul: IBIMA Publishing. ISBN 978-0-9821489-7-6.

[194] NOVOTNÁ, V., 2015. Numerical Solution of the Inventory Balance Delay Differential Equation. *International Journal of Engineering Business Management*. Rijeka, **7**(1), 1-9. DOI: 10.5772/60113. ISSN 1847-9790.

[195] NOVOTNÁ, V. a B. PŮŽA, 2015. *Výpočetní metody: studijní text pro denní a kombinovanou formu studia*. 1. Brno: Akademické nakladatelství CERM. ISBN 978-802-1452-480.

[196] NOVOTNÁ, V. a S. ŠKAPA, 2017. Dynamic model of new product launch impact on stock market participants. In: *The Role of Management in the Economic Paradigm of the XXIst Century*. Bucharest: Bucharest University of Economic Studies. ISBN 2286-1440.

[197] NOVOTNÁ, V., S. ŠKAPA a T. MELUZÍN, 2020. Solving Dynamic Model of Information Dissemination in Capital Markets. *Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research,*. Bucharest, ISSN 0424-267X.(v recenzním řízení)

[198] NOVOTNÁ, V. a S. ŠKAPA, 2017. Dynamic model of new product launch impact on stock market participants. In: *The Role of Management in the Economic Paradigm of the XXIst Century*. Bucharest: Bucharest University of Economic Studies. ISBN 2286-1440.

[199] NOVOTNÁ, V. a T. ŠUSTROVÁ, 2015. Solving Macroeconomic Model Using Methods of Functional Analysis. *Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research*. Bucharest, **2015**(3), 253-266.

[200] NOVOTNA, V. a T. SUSTROVA, 2018. Order Management System Proposal Using Inventory Balance Equation with Non-continuous Replenishment. *Periodica Polytechnica Social and Management Sciences*. Budapest, **26**(1), 1-9. DOI: 10.3311/PPso.9017. ISSN 1587-3803. Dostupné také z: https://pp.bme.hu/so/article/view/9017

[201] NUÕ, G. a B. MOLL, 2018. Social optima in economies with heterogeneous agents. *Review of Economic Dynamics*. **28**(1), 150-180. DOI: 10.1016/j.red.2017.08.003. ISSN 10942025. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1094202517300686

[202] OCHRANA, F., 2009. *Metodologie vědy: úvod do problému*. V Praze: Karolinum. ISBN 978-802-4616-094.

[203] OLDHAM, M., 2017. Introducing a Multi-Asset Stock Market to Test the Power of Investor Networks. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation.* **20**(4), 1-22. DOI: 10.18564/jasss.3497. ISSN 1460-7425. Dostupné také z: http://jasss.soc.surrey.ac.uk/20/4/13.html

[204] PÁRTLOVÁ, P., J. STRAKOVÁ a J. PÁRTLOVÁ, 2017. *Strategický management: studijní opora pro kombinované studium : bakalářský studijní program.* 4. České Budějovice: Vysoká škola technická a ekonomická v Českých Budějovicích. ISBN 978-80-7468-106-6.

[205] PETŘÍK, T., 2009. *Ekonomické a finanční řízení firmy: manažerské účetnictví v praxi.* 2., výrazně rozš. a aktualiz. vyd. Praha: Grada. ISBN 978-802-4730-240.

[206] PINNEY, E., 1958. *Ordinary difference-differential equations.* Berkeley: University of California Press.

[207] POKORNÝ, Miroslav, 1996. *Umělá? inteligence v modelování a řízení.* 1. Praha: BEN - technická literatura. ISBN 80-901-9844-9.

[208] POPKOVA, E.G. a V.N. OSTROVSKAYA, 2018. *Perspectives on the use of new information and communication technology (ICT) in the modern economy.* 1. New York, NY: Springer Berlin Heidelberg, 1178 s. ISBN 978-331-9908-342. 10.1007/978-3-319-90835-9_74.

[209] POSPÍŠIL, Z., 2004. Diferenciální rovnice se zpožděním a program R-language. In: *XXII mezinárodní kolokvium o řízení osvojovacího procesu.*. Vyškov: VVŠ -PV FEM. ISBN 80-7231-116-6.

[210] POSPÍŠIL, Z., 2015. *Diskrétní deterministické modely.* Brno: MUNI. ISBN 978-80-210-8095-9.

[211] PŮŽA, B. a V. NOVOTNÁ, 2018. On the construction of solutions of general linear boundary value problems for systems of functional differential equations. *Miskolc Mathematical Notes.* Miskolc, **19**(2), 1063-1078.

[212] QUESNAY, F., 1980. *Tableau économique.* Tokyo: Bibliothe-que de la Faculté des sciences économiques, Université Nihon.

[213] RALSTON, A. a P. RABINOWITZ, 1978. *A first course in numerical analysis.* 2d ed. New York: McGraw-Hill. ISBN 978-0070511583.

[214] RANJAN, A. a R. BHARDWAJ, 2015a. Bifurcation Analysis in Economic System Dynamics. *Indian Journal of Industrial and Applied Mathematics*. **6**(1), 49-56. DOI: 10.5958/1945-919X.2015.00004.3. ISSN 0973-4317.

[215] RANJAN, A. a R. BHARDWAJ, 2015b. Bifurcation Analysis of Time Delay in Economic System Dynamics. *Indian Journal of Industrial and Applied Mathematics*. **6**(2), 196-204. DOI: 10.5958/1945-919X.2015.00014.6. ISSN 0973-4317.

[216] RAVI KANTH, A.S.V. a P. MURALI MOHAN KUMAR, 2018. Numerical Method for a Class of Nonlinear Singularly Perturbed Delay Differential Equations Using Parametric Cubic Spline. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*. **19**(3-4), 357-365. DOI: 10.1515/ijnsns-2017-0126. ISSN 1565-1339. Dostupné také z: http://www.degruyter.com/view/j/ijnsns.2018.19.issue-3-4/ijnsns-2017-0126/ijnsns-2017-0126.xml

[217] REICHEL, J., 2009. *Kapitoly metodologie sociálních výzkumů*. Praha: Grada. Sociologie (Grada). ISBN 978-802-4730-066.

[218] REICHSTEIN, T. a I. BRUSCH, 2019. The decision-making process in viral marketing-A review and suggestions for further research. *Psychology & Marketing*. **36**(11), 1062-1081. DOI: 10.1002/mar.21256. ISSN 0742-6046. Dostupné také z: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/mar.21256

[219] RICH, E. a K. KNIGHT, 1991. *Artificial intelligence*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill. ISBN 978-0070522633.

[220] ŘEZANKOVÁ, H., 2007. *Analýza dat z dotazníkových šetření*. Praha: Professional Publishing. ISBN 978-80-86946-49-8.

[221] SEBERA, M., 2012. *Vybrané kapitoly z metodologie*. 1. Brno: Masarykova univerzita. ISBN 978-80-210-5963-4.

[222] SHORIKOV, A.F. a Y.S. RASSADINA, 2013. Dynamic optimization of the complex adaptive controlling by the structure of enterprise-s product range. *Economy of Region*. **2013**(1), 176-184. DOI: 10.17059/2013-2-19. ISSN 20726414. Dostupné také z: http://www.economyofregion.com/archive/2013/45/2134/pdf/

[223] SCHULZE, Ch., L. SCHULER a B. SKIERA, 2014. Not All Fun and Games: Viral Marketing for Utilitarian Products. *Journal of Marketing*.

78(1), 1-19. DOI: 10.1509/jm.11.0528. ISSN 0022-2429. Dostupné také z: http://journals.ama.org/doi/abs/10.1509/jm.11.0528

[224] SCHUMPETER, J.A., 1987. *Theorie der wirtschaftlichen Entwicklung: eine Untersuchung uber Unternehmergewinn, Kapital, Kredit, Zins und den Konjunkturzyklus.* 7. Berlin: Duncker u. Humblot. ISBN 3-428-01388-3.

[225] SIMONOV, P.M., 2003. Issledovanie ustoichivosti reshenij nekotorych dinamičeskich modelyach mikro - i makroekonomiki. *Vestnik PGTU.* 1. **2003**(1), 88-93. ISSN 1993-0550.

[226] SIMONOV, P.M. a A.S. USTINOV, 2009. An approach towards quality evaluation of management of budget funds (financial management) in the governmental sector. *Vestnik Permskogo Universiteta nauchnyj zhurnal: Economics Series.* 1. **2009**(1), 63-69. ISSN 1994-9960.

[227] SKEEL, R.D., 1989. Waveform Iteration and the Shifted Picard Splitting. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing.* **10**(4), 756-776. DOI: 10.1137/0910046. ISSN 0196-5204. Dostupné také z: http://epubs.siam.org/doi/10.1137/0910046

[228] SMEJKAL, V., 2018. *Kybernetická kriminalita.* 2. rozšířené a aktualizované vydání. Plzeň: Vydavatelství a nakladatelství Aleš Čeněk. ISBN 978-80-7380-720-7.

[229] SOHANGIR, S., D. WANG, A. POMERANETS a T.M. KHOSHGOFTAAR, 2018. Big Data: Deep Learning for financial sentiment analysis. *Journal of Big Data.* **5**(1), -. DOI: 10.1186/s40537-017-0111-6. ISSN 2196-1115. Dostupné také z: https://journalofbigdata.springeropen.com/articles/10.1186/s40537-017-0111-6

[230] SOLOW, R.M., 1956. A Contribution to the Theory of Economic Growth. *The Quarterly Journal of Economics.* **70**(1), 65-94. DOI: 10.2307/1884513. ISSN 00335533. Dostupné také z: https://academic.oup.com/qje/article-lookup/doi/10.2307/1884513

[231] STERMAN, J.D., 1989. Optimal policy for a multi-product, dynamic, nonstationary inventory problem. *Management Science.* **1989**(12), 206-222.

[232] STRÍŽENEC, M., 1966. *Psychológia a kybernetika.* 1. Bratislava: Vydavateľstvo Slovenskej akadémie vied. Psychologické výskumy.

[233] SWAN, T.W., 1956. Economic Growth and Capital Accumulation. *Economic Record.* **32**(2), 334-361. DOI: 10.1111/j.1475-4932.1956.tb00434.x. ISSN 0013-0249. Dostupné také z: http://doi.wiley.com/10.1111/j.1475-4932.1956.tb00434.x

[234] ŠKAPA, S. a T. MELUZÍN, 2011. Determining risk characteristics of IPO stock indexes. *Economics and management.* **2011**(16), ISSN 1198-1203.

[235] ŠKAPA, S. a V. NOVOTNÁ, 2019. *Application of Dynamic Modelling in Economics.* Brno: VUTIUM. 149 s. ISBN 978-80-214-5809-3

[236] SYNEK, M., V. HOFFMANN a I. MACKENZIE, 2013. The History and Development of Business Economics Science. *Politická ekonomie.* **61**(4), 536-554. DOI: 10.18267/j.polek.915. ISSN 00323233. Dostupné také z: http://polek.vse.cz/doi/10.18267/j.polek.915.html

[237] SZYDlOWSKI, M. a A. KRAWIEC, 2005. The stability problem in the Kaldor—Kalecki business cycle model. *Chaos, Solitons & Fractals.* **25**(2), 299-305. DOI: 10.1016/j.chaos.2004.11.012. ISSN 09600779. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0960077904007209

[238] ŠKAPA, S. a V. NOVOTNÁ, 2019. *Application of Dynamic Modelling in Economics.* Brno: VUTIUM. ISBN 978-80-214-5809-3.

[239] THOMPSON, S. a L.F. SHAMPINE, 2001. Solving Delay Differential Equations in MATLAB. *Applied Numerical Mathematics.* **2001**(37), 441-458.

[240] THOMPSON, S. a L.F. SHAMPINE, 2006. A friendly Fortran DDE solver. *Applied Numerical Mathematics.* **56**(3-4), 503-516. DOI: 10.1016/j.apnum.2005.04.027. ISSN 01689274. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0168927405000966

[241] TINBERGEN, J., 1931. Ein Schiffbauzyklus? *Weltwirtschaftliches Archiv.* **1931**(34), 152—164.

[242] TINBERGEN, J., 1959. *A Shipbuilding Cycle?: In Klaasen, L.H., L.M. Koyck a H.J. Witteween (eds.), Jan Tinbergen - selected papers.* 1. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.

[243] TITOV, N.I. a V.K. USPENSKII, 2013. *Modelirovanie sistem s zapazdyvaniem.* 3. Moskva: Book on Demand. ISBN 13: 978-5458304221.

[244] TSOUKALAS, L.H. a R.E. UHRIG, 1997. *Fuzzy and neural approaches in engineering.* 1. New York: Wiley. ISBN 04-711-6003-2.

[245] ULVEROVÁ, M., 2009. *Optimalizační modely pro podporu strategického rozhodování.* Brno. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství. Vedoucí práce RNDr. Pavel Popela, Ph.D.

[246] VACHEK, J. a O. LEPIL, 1990. *Modelování a modely ve vyučované fyzice.* 2. Praha: Státní pedagogické nakladatelství. Edice metodických příruček.

[247] VAN GELDEREN, J., 1996. Springtide: reflections on industrial development and price movements. *Long wave theory.* 1. Brookfield, Vt., US: E. Elgar Pub. ISBN 1852789549.

[248] VERANI, S., 2018. Aggregate consequences of dynamic credit relationships. *Review of Economic Dynamics.* **29**(1), 44-67. DOI: 10.1016/j.red.2017.12.001. ISSN 10942025. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1094202517301047

[249] VOELKEL, M.A., A.L. SACHS a U.W. THONEMANN, 2020. An aggregation-based approximate dynamic programming approach for the periodic review model with random yield. *European Journal of Operational Research.* **281**(2), 286-298. DOI: 10.1016/j.ejor.2019.08.035. ISSN 03772217. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0377221719307052

[250] VONDRÁK, I., 2009. *Umělá inteligence a neuronové sítě.* 3. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava. ISBN 978-80-248-1981-5.

[251] WALRAS, L., 1984. *Elements of pure economics, or, The theory of social wealth.* 8. Philadelphia, PA: Orion Editions. ISBN 978-0879912536.

[252] WANG, J., X. ZHANG, H. WANG a M. ZHANG, 2019. Optimal parking supply in bi-modal transportation network considering transit scale economies. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review.* **130**(1), 207-229. DOI: 10.1016/j.tre.2019.09.003. ISSN 13665545. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1366554519300055

[253] WANG, L. a X.P. WU, 2009. Bifurcation analysis of a Kaldor-Kalecki model of business cycle with time delay. *Electronic Journal*

of Qualitative Theory of Differential Equations. **2009**(27), 1-20. DOI: 10.14232/ejqtde.2009.4.27. ISSN 14173875.

[254] WANG, Z., X. HUANG a H. SHEN, 2012. Control of an uncertain fractional order economic system via adaptive sliding mode. *Neurocomputing*. **83**(1), 83-88. DOI: 10.1016/j.neucom.2011.11.018. ISSN 09252312. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0925231211007181

[255] WARBURTON, R. D.H., 2004a. An exact analytical solution to the production inventory control problem. *International Journal of Production Economics*. **92**(1), 81-96. DOI: 10.1016/j.ijpe.2003.09.014. ISSN 09255273. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0925527303003153

[256] WARBURTON, R.D.H., 2004b. An Analytical Investigation of the Bullwhip Effect. *Production and Operations Management*. **13**(2), 150-160. DOI: 10.1111/j.1937-5956.2004.tb00151.x.

[257] WENG, B., L. LU, X. WANG, F.M. MEGAHED a W. MARTINEZ, 2018. Predicting Short-Term Stock Prices using Ensemble Methods and Online Data Sources. *Expert Systems with Applications*. **112**(1), 258-273. DOI: 10.1016/j.eswa.2018.06.016. ISSN 09574174. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0957417418303622

[258] WERAIKAT, D., M.K. ZANJANI a N. LEHOUX, 2016. Coordinating a green reverse supply chain in pharmaceutical sector by negotiation. *Computers and Industrial Engineering*. **93**(1), 67-77. DOI: 10.1016/j.cie.2015.12.026. ISSN 03608352. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0360835215005069

[259] WINSTON, W.L. a J.B. GOLDBERG, 2004. *Operations research: applications and algorithms*. 4th ed. Belmont, CA: Thomson/Brooks/Cole. ISBN 05-344-2362-0.

[260] WU, J.C. a J. ZHANG, 2019. A shadow rate New Keynesian model. *Journal of Economic Dynamics and Control*. **107**(1), 1-29. DOI: 10.1016/j.jedc.2019.103728. ISSN 01651889. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0165188919301289

[261] WU, X.P., 2012. Zero—Hopf bifurcation analysis of a Kaldor—Kalecki model of business cycle with delay. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. **13**(2), 736-754. DOI:

10.1016/j.nonrwa.2011.08.013. ISSN 14681218. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1468121811002409

[262] YI, S., A.G. ULSOY a P.W. NELSON, 2006. Solution of Systems of Linear Delay Differential Equations via Laplace Transformation. In: *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*. San Diego, CA, USA: IEEE, 2006. DOI: 10.1109/CDC.2006.377712. ISBN 1-4244-0171-2. ISSN 0191-2216. Dostupné také z: http://ieeexplore.ieee.org/document/4177221/

[263] ZADEH, L.A., 1965. Fuzzy sets. *Information and Control*. **8**(3), 338-353. DOI: 10.1016/S0019-9958(65)90241-X. ISSN 00199958. Dostupné také z: http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S001999586590241X

[264] ZHANG, H., P. RUSMEVICHIENTONG a H. TOPALOGLU, 2017. Assortment Optimization under the Paired Combinatorial Logit Model. *SSRN Electronic Journal*. **2017**(1), 1-95. DOI: 10.2139/ssrn.3012401. ISSN 1556-5068. Dostupné také z: https://www.ssrn.com/abstract=3012401

[265] ZHEN, L., D. ZHUGE a Sh. ZHU, 2017. Production stage allocation problem in large corporations. *Omega*. **73**(1), 60-78. DOI: 10.1016/j.omega.2016.11.009. ISSN 03050483. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0305048316302171

[266] ZVYAGIN, L. S., 2016. System modeling in marketing research. In: *2016 XIX IEEE International Conference on Soft Computing and Measurements (SCM)*. St. Petersburg: IEEE, 2016. DOI: 10.1109/SCM.2016.7519740. ISBN 978-1-4673-8919-8. Dostupné také z: http://ieeexplore.ieee.org/document/7519740/

[267] ZWERKIN, T.S., 1965. A modification of finite difference methods for integrating ordinary differential equations with non-smooth solutions. *Trudy Sem. Teor. Diff. Uraw. Otkl. Argumentom*. **1965**(3), 2221-232.

Seznam obrázků

3.1 Konceptuální schéma, zdroj: vlastní zpracování 18

4.1 Příklad 1 - řešení a chyby, zdroj: vlastní zpracování 55
4.2 Příklad 2 - řešení a chyby, zdroj: vlastní zpracování 56
4.3 Příklad 3 - řešení a chyby, zdroj: vlastní zpracování 57

5.1 „Hladká“ křivka spojitě navazující na historickou funkci, zdroj: vlastní zpracování 68
5.2 Křivka s „hroty“ spojitě navazující na historickou funkci, zdroj: vlastní zpracování 68
5.3 Po částech spojitá křivka spojitě navazující na historickou funkci, zdroj: vlastní zpracování 69
5.4 Řešení příkladu 5.1, varinta a), zdroj: vlastní zpracování . . . 84
5.5 Řešení příkladu 5.1, varianta b), zdroj: vlastní zpracování . . . 85
5.6 Řešení příkladu 5.1, varianta c), zdroj: vlastní zpracování . . . 86
5.7 Řešení příkladu 5.2, varinta 1, zdroj: vlastní zpracování 94
5.8 Řešení příkladu 5.2, varinta 2, zdroj: vlastní zpracování 95
5.9 Řešení příkladu 5.2, varinta 3, zdroj: vlastní zpracování 95
5.10 Řešení úlohy 5.56 původní metodou, zdroj: (Tinbergen, 1959) 98
5.11 Řešení úlohy 5.56 novým postupem, zdroj: vlastní zpracování na základě (Novotná & Šustrová, 2015) 98
5.12 Řešení úlohy 5.56 v případě nekonstantního zpoždění, zdroj: vlastní zpracování na základě (Novotná & Šustrová, 2015) . . 99

6.1 Vliv kolísání ceny na chování modelu 6.1, zdroj: vlastní zpracování na základě (Novotná & Škapa, 2018) 106
6.2 Vliv postupného navyšování ceny na chování modelu 6.1, zdroj: vlastní zpracování na základě (Novotná & Škapa, 2018) 107
6.3 Hladina zásob - nekonstatní poptávka, nekonstantní historická funkce, zdroj: vlastní zpracování na základě (Novotná, 2015) . 110
6.4 Hladina zásob - skutečný vývoj, zdroj: vlastní zpracování na základě (Novotna & Sustrova, 2018) 115

6.5 Hladina zásob - modelová situace, nekonstantní historická funkce, zdroj: vlastní zpracování na základě (Novotna & Sustrova, 2018) 116
6.6 Vliv délky zpoždění na chování modelu šíření informace, zdroj: vlastní zpracování na základě (Novotná & Škapa, 2017) . . . 118
6.7 Vliv funkce $\lambda(t)$ na řešení modelu, zdroj: vlastní zpracování na základě (Dzhalladova a kol., 2019) 123
6.8 Případ, kdy se situace na burze stabilizuje, zdroj: vlastní zpracování 126
6.9 Případ nestabilní situace na burze, zdroj: vlastní zpracování . 127
6.10 Model vývoje ceny masa, zdroj: vlastní zpracování na základě (Bobalová & Novotná, 2015) 131

Příloha A

Upřesnění terminologie a značení

Jak již bylo poznamenáno v úvodu práce, v posledních desetiletích se věnovalo problematice diferenciálních rovnic se zpožděním několik různých autorů, díky čemuž se rozšířil počet publikací zabývajících se touto problematikou. Současně se ale používaly odlišné způsoby formálního zápisu, což bylo motivované potřebami autorů.

Pro popis dynamických modelů, jejich vlastností i metod jejich zkoumání včetně metody konstrukce jejich řešení je v této práci použita symbolika a terminologie teorie tzv. funkcionálních diferenciálních rovnic použité v publikacích (Půža & Novotná, 2018; Škapa & Novotná, 2019) a v nich citované literatuře, zejména v základních publikacích tzv. tbiliské školy obyčejných diferenciálních rovnic (Kiguradze & Půža, 2003; Kiguradze & Půža, 1997a; Kiguradze & Půža, 2005; Kiguradze & Půža, 1997b):

$R = \,]-\infty, +\infty[\,$, $R_+ = [0, \infty[\,$;

$I = [t_l, t_r] \subset R$ uzavřený interval;

δ_i^k je tzv. Kroneckerovo delta

$$\delta_i^k = \begin{cases} 1 \; pro \; i = k \\ 0 \; pro \; i \neq k; \end{cases}$$

χ_I je charakteristická funkce na intervalu I, t.j.

$$\chi_I(t) = \begin{cases} 1 \; pro \; t \in I \\ 0 \; pro \; t \notin I \end{cases} ;$$

R^n je n-dimenzionální prostor sloupcových vektorů, $x = (x_i)_{i=1}^n$ s komponentami $x_i \in R$ $(i = 1, \dots, n)$ a normou

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|;$$

$R^{n\times n}$ je prostor $n \times n$-matic $X = (x_{ik})_{i,k=1}^n$ s komponentami $x_{ik} \in R$ $(i, k = 1, \dots, n)$ a normou

$$\|X\| = \sum_{i,k=1}^{n} |x_{ik}|;$$

$R_+^n = \left\{(x_i)_{i=1}^n \in R^n : \ x_i \geq 0 \ (i = 1, \dots, n)\right\};$

$R_+^{n\times n} = \left\{(x_{ik})_{i,k=1}^n \in R^{n\times n} : \ x_{ik} \geq 0 \ (i, k = 1, \dots, n)\right\};$

jestliže x, $y \in R^n$ a X, $Y \in R^{n\times n}$, pak

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in R_+^n, \ X \leq Y \Leftrightarrow Y - X \in R_+^{n\times n};$$

jestliže $x = (x_i)_{i=1}^n \in R^n$ a $X = (x_{ik})_{i,k=1}^n \in R^{n\times n}$, pak

$$|x| = (|x_i|)_{i=1}^n, \ |X| = (|x_{ik}|)_{i,k=1}^n;$$

$\det(X)$ je determinant matice X;

X^{-1} je matice inverzní k X;

$r(X)$ je spektrální poloměr matice X;

E jednotková matice;

Θ je nulová matice;

jestliže $x = (x_i)_{i=1}^n$, pak

$$diag(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x_n \end{pmatrix};$$

$$Sgn(x) = diag\ (sgn\ x_1, \dots, sgn\ x_n);$$

jestliže $X = (x_{ij})_{i,j=1}^n \in R^{n\times n}$, pak

$$X_d = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

a

$$X_{\bar{d}} = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & 0 & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix};$$

$C(I; R^n)$ je prostor spojitých vektorových[1] funkcí $x : I \to R^n$ s normou

$$\|x\|_C = \max \left\{ \|x(t)\| : t \in I \right\};$$

jestliže $x = (x_i)_{i=1}^n \in C(I; R^n)$, pak

$$|x|_C = (\|x_i\|_C)_{i=1}^n;$$

$\tilde{C}(I; R^n)$ je prostor absolutně spojitých vektorových funkcí $x : I \to R^n$ s normou

$$\|x\|_{\tilde{C}} = \|x\|_C + \|x'\|_L;$$

$C(I; R^{n\times n})$ je množina spojitých maticových funkcí $X \to R^{n\times n}$;

$L(I; R^n)$ je prostor spojitých vektorových funkcí $x : I \to R^n$ jejichž komponenty jsou integrovatelné s normou

$$\|x\|_L = \int_{t_l}^{t_r} \|x(t)\| \, dt;$$

jestliže $x = (x_i)_{i=1}^n \in L(I; R^n)$, pak

$$|x|_L = (\|x_i\|_L)_{i=1}^n;$$

$L(I; R^{n\times n})$ je prostor integrovatelných maticových funkcí $X : I \to R^{n\times n}$;

$K(I \times R^m; R)$ je množina funkcí $f : I \times R^m \to R$, které splňují podmínky carathéodory, tj. f je lebesquovsky integrabilní na intervalu I vzhledem k první proměnné, spojitá vzhledem k druhé vektorové proměnné a pro každé $\rho > 0$ existuje lebesquovsky integrovatelná funkce ω taková, že pro skoro všechna $t \in I$ a všechna $x \in R^m$ s $\|x\| \le \rho$, je $\|f(t, x)\| \le \omega(t)\|x\|$;

$K(I \times R^m; R^n)$ je množina vektorových funkcí $f : I \times R^m \to R^n$ jejichž každá komponenta vyhovuje podmínkám carathéodory.

[1] Vektorová (maticová) funkce je spojitá, integrovatelná atd., pokud jsou takové všechny její složky.

Řekneme, že lineární operátor $p : C(I; R^n) \to L(I; R^n)$ se nazývá:

silně ohraničený (strongly bounded), jestliže existuje měřitelná funkce $\eta : I \to R_+$ taková, že $\|p(x)(t)\| \leq \eta(t)\|x\|_C$ pro $t \in I$ a každé $x \in C(I, R^n)$;

Volterrovský vzhledem k $t_* \in I$, jestliže pro libovolné $t \in I$ a funkci $x \in C(I, R^n)$ takovou, že $x(s) = 0$ pro $s \in I_{t_*,t}$ platí rovnost $p(x)(s) = 0$ pro skoro všechna $s \in I_{t_*,t}$, kde

$$I_{t_*,t} = \begin{cases} [t_*, t] \; pro \; t_* \leq t \\ [t, t_*] \; pro \; t < t_*. \end{cases}$$

Řekneme, že lineární funkcionál $l : C(I; R^n) \to R^n$ je ohraničený, jestliže existuje $\alpha \in R_+$ taková, že $\|l(x)\| \leq \alpha\|x\|_C$ pro každé $x \in C(I; R^n)$.

Jestliže $p : C(I; R^n) \to L(I; R^n)$ je lineární operátor, pak zobrazení $|p|$ takové, že

$$|p(x)| \leq |p|(|x|) \text{ pro každé } x \in C(I; R^n).$$

označuje pozitivní operátor $|p| : C(I; R^n) \to L(I; R^n)$.

Jestliže $Z \in C(I; R^{n\times n})$ je maticová funkce se sloupci $z_1, \dots, z_n$ a operátor $p : C(I; R^n) \to L(I; R^n)$ je lineární, resp. funkcionál $l : C(I; R^n) \to R^n$ je lineární, pak $p(Z)$ označuje maticovou funkci se sloupci $p(z_1), \dots, p(z_n)$, resp. $l(z)$ konstantní matici se sloupci $l(z_1), \dots, l(z_n)$.

Jsou-li $p : C(I; R^n) \to L(I; R^n)$ lineární operátor a $l : C(I; R^n) \to R^n$ lineární funkcionál, $x \in C(I; R^n)$, $k, m \in N$ a $t_0 \in I$, pak označme:

$$p^0(x)(t) = p^{k,0}(x)(t) = x(t),$$

$$p^k(x)(t) = \int_{t_0}^{t} p(p^{k-1}(x))(s)ds,$$

$$\Lambda_k = l\left(\sum_{i=1}^{k} p^{i-1}(E)\right),$$

jestliže je matice Λ_k regulární, pak

$$p^{k,m}(x)(t) = p^m(x)(t) - \left[\sum_{i=1}^{m} p^{i-1}(E)(t)\right] \Lambda_k^{-1} l\left(p^k(x)\right),$$

a jsou-li $g \in L(I;R^n)$ a $c_0 \in R^n$ označme

$$D^{k,m}(\hat{g}, c_0)(t) =$$

$$= \left[\Sigma_{i=1}^m p^{i-1}(E)(t)\right] \Lambda_k^{-1} \left[c_0 - l\left(\sum_{i=1}^k p^{i-1}(\hat{g})\right)\right] + \sum_{i=1}^m p^{i-1}(\hat{g})(t),$$

kde $\hat{g}(t) = \int_{t_0}^t g(s)ds$.

Buď (X,d) metrický prostor a $T : X \to X$ zobrazení prostoru X do sebe. Řekneme, že T je kontraktivní zobrazení (stručně kontrakce), jestliže existuje reálné číslo $q \in [0;1)$ takové, že pro všechna $x, y \in X$

$$d(Tx, Ty) \leq q\, d(x, y)$$

Poznámka 12

1. Lineární operátor $p : C(I;R^n) \to L(I;R^n)$ ve tvaru

   $$p(x)(t) = P(t)x(t),$$

   resp.

   $$p(x)(t) = \sum \chi_I(\tau_l(t))P_i(t)x(\tau_i^0(t)),$$

   případně jejich součet, kde P, P_i a τ_i $(i = 1, \ldots, s)$ splňují předpoklady ekonomických dynamických modelů, je Volterrův vzhledem k t_l.

2. Kontraktivní zobrazení je spojité[1].

3. Každý normovaný prostor $(X; \|\cdot\|)$ je metrickým prostorem s metrikou $d(x,y) = \|x - y\|$.

4. Posloupnost $\{x_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ prvků metrického prostoru (X,d) se nazývá konvergentní k prvku $x_0 \in (X,d)$, jestliže pro každé $\epsilon > 0$ existuje $\nu_0 \in N$ tak, že pro každé $\nu \in N$, $\nu \geq \nu_0$ je $d(x_\nu, x_0) < \epsilon$. Posloupnost $\{x_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ metrického prostoru (X,d) se nazývá cauchyovská, jestliže pro každé $\epsilon > 0$ existuje $\nu_0 \in N$ tak, že pro každé $\mu, \nu \in N$ $\mu, \nu \geq \nu_0$ je $d(x_\mu, x_\nu) < \epsilon$.

5. Prostor $C(I;R^n)$ je úplný[2] metrický prostor.

[1] Zobrazení $T : X \to X$ se nazývá spojité zobrazení metrického prostoru $(X;d)$ do sebe, jestliže pro každé $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x, y \in X$, $d(x,y) < \delta$ je $d(Tx, Ty) < \epsilon$.

[2] Metrický prostor $(X;d)$ se nazývá úplný, jestliže je v něm každá cauchyovská posloupnost konvergentní

Tvrzení A.1 *(Kolmogorov & Fomin, 1975) Každé kontraktivní zobrazení T úplného metrického prostoru (X, d) do sebe má právě jeden pevný bod x, přičemž $x = lim_{\nu \to \infty} x_\nu$, kde $x_\nu = Tx_{\nu-1}$ pro každé $\nu \in N$ a $x_0 \in X$ je libovolný.*

Tvrzení A.2 *(Kolmogorov & Fomin, 1975) Buď T spojité zobrazení úplného metrického prostoru (X, d) do sebe takové,že $\mathbf{T} = T^m$ je kontrakcí. Pak má rovnice $Tx = x$ právě jedno řešení $x = lim_{\nu \to \infty} x_\nu$, kde pro každé $\nu \in N$ $x_\nu = Tx_{\nu-1}$ a $x_0 \in X$ je libovolný.*

Poznámka 13

1. Prvek $x \in (X, d)$, pro který $Tx = x$, se nazývá pevný bod zobrazení T a číslo q Lipschitzovou konstantou kontrakce T. Tvrzení A.1 je v literatuře uváděno pod označením „Princip kontraktivního zobrazení“,„princip pevného bodu“, „Banachova věta o kontrakci“... Tvrzení A.2 je odvozeno například v monografii (Kolmogorov & Fomin, 1975).

2. Nechť $T : X \to X$ je spojité zobrazení úplného metrického prostoru (X, d) do sebe a existuje $m \in N$ tak, že zobrazení $\mathbf{T} = T^m = T(T^{m-1})$ je kontrakcí s Lipschitzovou konstantou $q \in [0, 1)$. Pak pro νm-tou aproximaci $x_{\nu m} = T^m x_{(\nu-1)m}$ řešení x rovnice $x = Tx$, kde $x_0 \in (X, d)$ libovolně, platí
$$d(x, x_{\nu m}) \leq \frac{q^\nu}{1-q} d(0; x_0).$$

3. Nechť $T : X \to X$ je spojité zobrazení úplného metrického prostoru $C(I; R^n)$ do sebe a existuje $m \in N$ tak, že pro zobrazení $\mathbf{T} = T^m$ a každé $x, y \in C(I; R^n)$ platí
$$|\mathbf{T}x - \mathbf{T}y|_C \leq A|x - y|_C,$$
kde $A \in R_+^{n \times n}$ a $r(A) < 1$. Pak zobrazení $\mathbf{T}$ je kontrakcí s Lipschitzovou konstantou $q = r(A)$.

Na závěr výčtu obvykle užívaného označení a terminologie v teorii obecných funkcionálních diferenciálních rovnic, zdůrazněme, že předpoklady typické v úvahách o ekonomických dynamických modelech jsou garantem jejich „carathéodoryovskosti“ a že tedy lze k jejich zkoumání použít nových metod carathéodoryovského přístupu a případně z obecnějších výsledků této teorie získávat potřebné důsledky (spojitá závislost řešení na spojitých změnách modelu, nezápornost řešení, ...).

Příloha B

Sylaby předmětů

B.1 Matematická ekonomie

Karta předmětu MATEMATICKÁ EKONOMIE

Název a typ předmětu

Kód	OmaeP	MATEMATICKÁ EKONOMIE
povinný, volitelný		**Povinný**
akademický rok		**2019/2020**
vyučován v jazyce		**čeština**

Rozsah předmětu — Kreditové hodnocení v daném studijním programu

hodin celkem	**52 h**	počet kreditů	**6**
- Přednáška	**26 h (13 x 2 h)**	studijní program	**magisterský navazující**
- Cvičení	**26 h (13 x 2 h)**	ročník	**2**
		semestr	**zimní**

Způsob zakončení předmětu

zápočet a zkouška

Charakteristika získaných vědomostí a dovedností a cíle předmětu

Předmět je zaměřen na přesnou matematickou formulaci ekonomických modelů a zároveň vhodnou ekonomickou interpretaci těchto modelů.
Studenti se seznámí se základy tvorby spojitých a nespojitých dynamických modelů v ekonomii. Ke tvorbě matematických modelů jsou používány vybrané diferenciální a diferenční rovnice prvního a druhého řádu. Cílem předmětu je představit spojité a diskrétní ekonomické dynamické systémy s důrazem na matematickou formulaci, ekonomickou interpretaci a verifikaci výsledků. Matematická teorie je ilustrována příklady z dynamických systémů vyskytujících se v ekonomické teorii.

Garant předmětu zodpovědný za naplnění cílů výuky a koordinaci jeho výuky

Půža Bedřich, doc. RNDr., CSc.	
vyučující	Mgr. Veronika Novotná, Ph.D.

Pracoviště

Kód	ÚI	ÚSTAV INFORMATIKY
Fakulta	FP	**Fakulta podnikatelská**

Prerekvizity - výčet věcí, které musí student znát před studiem daného předmětu

Mikroekonomie, Makroekonomie, Matematika I, Matematika II

Obsah předmětu

Anotace

Studenti se seznámí se základy tvorby spojitých a nespojitých dynamických modelů v ekonomii. Ke tvorbě matematických modelů jsou používány vybrané diferenciální a diferenční rovnice prvního a druhého řádu. Cílem předmětu je představit spojité a diskrétní ekonomické dynamické systémy s důrazem na matematickou formulaci, ekonomickou interpretaci a verifikaci výsledků. Matematická teorie je ilustrována příklady z dynamických systémů vyskytujících se v ekonomické teorii.

1. Úvod do teorie dynamických systémů a dynamických modelů v ekonomii – základní pojmy.
2. Diskrétní dynamické systémy - diferenční rovnice
3. Matematické modelování dynamické rovnováhy – diskrétní dynamický pavučinový model
4. Diskrétní dynamické systémy - modelování statické agregátní makroekonomické rovnováhy
5. Diskrétní dynamické systémy – dynamika inflace x nezaměstnanost
6. Spojité dynamické systémy opakování a prohloubení základních pojmů z teorie diferenciálních rovnic
7. Matematické modelování dynamické rovnováhy - spojitý dynamický pavučinový model
8. Spojité dynamické systémy – Walrasův model všeobecné rovnováhy
9. Spojité dynamické systémy – Solowův růstový model
10. Spojité dynamické systémy – Philipsův model pro uzavřenou ekonomiku
11. Modely hospodářského cyklu
12. Opakování. Rezerva.

Osnova předmětu

Obecná osnova předmětu

1. Úvod do teorie dynamických systémů a dynamických modelů v ekonomii – základní pojmy.
2. Diskrétní dynamické systémy - diferenční rovnice.
3. Matematické modelování dynamické rovnováhy – diskrétní dynamický pavučinový model.
4. Diskrétní dynamické systémy - modelování statické agregátní makroekonomické rovnováhy.
5. Diskrétní dynamické systémy – dynamika inflace x nezaměstnanost.
6. Spojité dynamické systémy - opakování a prohloubení základních pojmů.
7. Spojité dynamické systémy v teorii diferenciálních rovnic.
8. Matematické modelování dynamické rovnováhy - spojitý dynamický pavučinový model.
9. Spojité dynamické systémy – Walrasův model všeobecné rovnováhy.
10. Spojité dynamické systémy – Solowův růstový model.
11. Spojité dynamické systémy – Philipsův model pro uzavřenou ekonomiku.
12. Modely hospodářského cyklu.
13. Opakování. Rezerva.

Přednáška

Cvičení

Literatura

Literatura, na níž je předmět vystavěn

1. ALLEN, R. G. D. Matematická ekonomie. Přeložil Martin ČERNÝ. Praha: Academia, 1971.

Doporučená literatura

2. CHIANG, A. C. Fundamental methods of mathematical economics. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1984. ISBN 0-07-010813-7.
3. POLOUČKOVÁ, A. a E. OŠŤÁDALOVÁ. Diferenciální a diferenční rovnice. Ostrava: Vysoká škola báňská - Technická univerzita, 2003. ISBN 80-248-0267-8.

Typy výuky

Obecná osnova předmětu, Přednáška, Cvičení

Vymezení kontrolované výuky a způsob jejího provádění a formy nahrazování zameškané výuky

Pravidla ukončení předmětu a klasifikace

Zápočet studenti získají na základě úspěšné prezentace seminární práce na zvolené téma.

ZKOUŠKA: Zkouška je písemná.
V její první části řeší student vypracuje během 20 minut odpovědi na teoretické otázky.
Ve druhé části zkoušky student vypracuje během 40 minut příklady. (Jako pomůcku může použít doporučená skripta.)

B.2 Matematické modelování

Název a typ předmětu

Kód	KmmP	MATEMATICKÉ MODELOVÁNÍ
povinný, volitelný		**Povinně volitelný**
akademický rok		**2019/2020**
vyučován v jazyce		**čeština**

Rozsah předmětu — Kreditové hodnocení v daném studijním programu

hodin celkem	**26 h**	počet kreditů	**3**
- Přednáška	**26 h (13 x 2 h)**	studijní program	**bakalářský**
		ročník	**2**
		semestr	**zimní**

Způsob zakončení předmětu

zkouška

Charakteristika získaných vědomostí a dovedností a cíle předmětu

Student získá schopnost porozumět a popsat řešení vybraných ekonomických problémů s využitím předchozích i nově nabytých znalostí matematických,
Student dokáže aplikovat dosavadní i nově nabyté matematické znalosti při řešení vybraných ekonomických problémů
Cílem předmětu je seznámit studenta s modely matematické ekonomie a ekonomickými modely využívajícími matematický aparát a s přesnou matematickou formulací v oblasti ekonomických modelů a zároveň vhodnou ekonomickou interpretaci těchto modelů.

Garant předmětu zodpovědný za naplnění cílů výuky a koordinaci jeho výuky

Novotná Veronika, Mgr., Ph.D.	
vyučující	Mgr. Veronika Novotná, Ph.D.

Pracoviště

Kód	ÚI	ÚSTAV INFORMATIKY
Fakulta	FP	**Fakulta podnikatelská**

Prerekvizity - výčet věcí, které musí student znát před studiem daného předmětu

Základní poznatky z Matematika 1 a 2: vlastnosti čísel, derivace, integrál, průběh funkcí jedné proměnné, analýza funkce dvou proměnných
Základní poznatky z mikroekonomie a makroekonomie.

Obsah předmětu

Anotace

Předmět je zaměřen na přesnou matematickou formulaci ekonomických modelů a zároveň vhodnou ekonomickou interpretaci těchto modelů.

Osnova předmětu

Obecná osnova předmětu

Předmět je zaměřen na přesnou matematickou formulaci ekonomických modelů a zároveň vhodnou ekonomickou interpretaci těchto modelů. Po úspěšném absolvování předmětu budou studenti schopni používat matematiku jako nástroj pro hlubší pochopení ekonomie a aplikovat nabyté matematické znalosti při řešení vybraných ekonomických problémů.

1. Matematické modelování v ekonomii. Klasifikace ekonomicko-matematických modelů.
2. Matematické modelování v ekonomii - základní matematické prostředky pro zkoumání funkcí v ekonomii.
3. Interpolace a aproximace funkcí. Interpolace algebraickými polynomy. Lagrangeova interpolační metoda. Aproximace metodou nejmenších čtverců.
4. Matematická analýza vybraných ekonomických závislostí - rozhodování spotřebitele.
5. Matematická analýza vybraných ekonomických závislostí - model produkce s více vstupy.
6. Metody matematické analýzy a matematické programování. Modely nedokonalých trhů. Hodnocení efektivnosti produkce.
7. Toková veličina v ekonomii – investice a akumulace kapitálu. Analýza vybraných ekonomických funkcí.
8. Funkční závislost jako nástroj pro modelování makroekonomických jevů. Statické modely rovnováhy. Statické pojetí multiplikátoru, akcelerátor. Matematické odvození modelu IS-LM.
9. Matematický základ spojitých dynamických modelů v ekonomii. Analogie diskrétních a spojitých modelů. Diferenciální rovnice jako nástroj pro modelování spojitých makroekonomických dynamických procesů.
10. Diferenciální rovnice jako nástroj pro modelování spojitých mikroekonomických dynamických procesů.
11. Matematický základ diskrétních dynamických modelů v ekonomii. Diferenční rovnice jako nástroj pro modelování diskrétních makroekonomických dynamických procesů.
12. Diferenční rovnice jako nástroj pro modelování diskrétních mikroekonomických dynamických procesů.
13. Aplikace diferenčních a diferenciálních rovnic ve vybraných mikroekonomických modelech. Spojité a diskrétní modely v logistice.

Přednáška

Po úspěšném absolvování předmětu budou studenti schopni používat matematiku jako nástroj pro hlubší pochopení ekonomie a aplikovat nabyté matematické znalosti při řešení vybraných ekonomických problémů.

1. Matematické modelování v ekonomii. Klasifikace ekonomicko-matematických modelů.
2. Matematické modelování v ekonomii - základní matematické prostředky pro zkoumání funkcí v ekonomii.
3. Interpolace a aproximace funkcí. Interpolace algebraickými polynomy. Lagrangeova interpolační metoda. Aproximace metodou nejmenších čtverců.
4. Matematická analýza vybraných ekonomických závislostí - rozhodování spotřebitele.
5. Matematická analýza vybraných ekonomických závislostí - model produkce s více vstupy.
6. Metody matematické analýzy a matematické programování. Modely nedokonalých trhů. Hodnocení efektivnosti produkce.
7. Toková veličina v ekonomii – investice a akumulace kapitálu. Analýza vybraných ekonomických funkcí.
8. Funkční závislost jako nástroj pro modelování makroekonomických jevů. Statické modely rovnováhy. Statické pojetí multiplikátoru, akcelerátor. Matematické odvození modelu IS-LM.
9. Matematický základ spojitých dynamických modelů v ekonomii. Analogie diskrétních a spojitých modelů. Diferenciální rovnice jako nástroj pro modelování spojitých makroekonomických dynamických procesů.
10. Diferenciální rovnice jako nástroj pro modelování spojitých mikroekonomických dynamických procesů.
11. Matematický základ diskrétních dynamických modelů v ekonomii. Diferenční rovnice jako nástroj pro modelování diskrétních makroekonomických dynamických procesů.
12. Diferenční rovnice jako nástroj pro modelování diskrétních mikroekonomických dynamických procesů.
13. Aplikace diferenčních a diferenciálních rovnic ve vybraných mikroekonomických modelech. Spojité a diskrétní modely v logistice.

Literatura

Literatura, na níž je předmět vystavěn

1. MEZNÍK, I. Úvod do matematické ekonomie pro ekonomy. 2. vyd. Brno: CERM, s.r.o., 2017. 189 s. ISBN 978-80-214-5512-2.
2. GROS, I.; DYNTAR, J. Matematické modely pro manažerské rozhodování. 2. upravené a rozšířené vyd. Praha: Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, 2015. 303 s. ISBN 978-80-7080-910-5.

Doporučená literatura

3. PRAŽÁK, P. Diferenční rovnice s aplikacemi v ekonomii. Hradec Králové: Gaudeamus, 2013. 360 s. ISBN 978-80-7435-268-3.
4. BUTCHER, J. C. (John Charles). Numerical methods for ordinary differential equations. Third edition. Chichester: Wiley, 2016. 513 s. ISBN 978-1-119-12150-3.
5. CHIANG, A. C.; WAINWRIGHT, K. Fundamental methods of mathematical economics. 4th ed. Boston: McGraw-Hill/Irwin, 2005. 688 s. ISBN 0-07-010910-9.

Typy výuky

Obecná osnova předmětu, Přednáška

Vymezení kontrolované výuky a způsob jejího provádění a formy nahrazování zameškané výuky

Účast na přednáškách je nepovinná.

Pravidla ukončení předmětu a klasifikace

Forma zkoušky je písemná, přičemž vyučující si vyhrazuje právo ústního dozkoušení. Maximální počet bodů ze zkoušky je 100 bodů, přičemž student musí získat minimálně 50 bodů aby získal hodnocení alespoň E.

Příloha C

Životopis autorky

1. **Jméno a příjmení:** Veronika Novotná
2. **Narozena:** 29.3.1974 ; Brno
3. **Vzdělání:**

2011 – 2012	Doplňující pedagogické studium pro zaměstnance VUT v Brně na ICV VUT v Brně.
1997 – 2002	Studium doktorandského studia na Fakultě podnikatelské VUT v Brně, obor Řízení a ekonomika podniku. Studium úspěšně ukončené obhájením disertační práce na téma „Optimalizace portfolia na BCPP".
1992 – 1997	Studium na Masarykově Universitě v Brně, Přírodovědecké fakultě obor matematika-ekonomie. Studium úspěšně ukončené obhájením diplomové práce na téma „Finanční matematika".
1988 – 1992	Studium na gymnáziu na ulici Vídeňská v Brně.

4. **Zaměstnání:**

2019 - dosud	Zástupkyně ředitele Ústavu informatiky Fakulty podnikatelské VUT v Brně
2017 - dosud	Členka akademického senátu Fakulty podnikatelské VUT v Brně
2015 - 2019	Tajemnice pro vědu a výzkum Ústavu informatiky Fakulty podnikatelské VUT v Brně
2002 – dosud	Zaměstnána na Fakultě podnikatelské VUT v Brně v pozici odborného asistenta.
1997 – 2002	Zaměstnána na Fakultě podnikatelské VUT v Brně v pozici technického pracovníka.

5. **Pedagogická praxe:**

   Přednášející předmětů:
   Matematika 1, Matematika 2, Statistika, Aplikovaná statistika, Výpočetní metody, Matematické modelování, Matematická ekonomie

   Cvičící předmětů:
   Aplikovaná statistika, Statistika, Výpočetní metody, Matematika 1, Matematika 2, Matematická ekonomie

6. **Jazykové znalosti:** Angličtina, ruština

7. **Odborné zájmy:** Pracuje s ekonomickými modely a jejich konstrukcemi, zejména se zabývá okrajovými úlohami pro diferenciální rovnice se zpožděným argumentem a pokročilými metodami umělé inteligence.

8. **Projekty:**

2020-dosud	Projekt specifického výzkumu - Modelování a optimalizace podnikových procesů v podmínkách digitální transformace – zodpovědná řešitelka
2019-2020	Projekt programu Erasmus+ KA107 Mezinárodní kreditová mobilita 2019-1-CZ01-KA107-061099 - autorka projektu
2019	Analýza nedostatků informačních systémů ve firmách Smluvní výzkum č. 002602/2019/00 - členka týmu
2017-2019	Projekt specifického výzkumu - Informační a znalostní management v éře Průmyslu 4.0 – zodpovědná řešitelka
2016 – 2018	Vývoj nových metod řešení dynamických modelů řízení podniků GA16-03796S - členka týmu
1999 – 2000	Výzkum strategického řízení v českých firmách MSM 265100018 - členka týmu

Příloha D

Vědecké a odborné publikace autorky

Knižní publikace, monografie

1. ŠKAPA, S. a V. NOVOTNÁ, 2019. *Application of Dynamic Modelling in Economics*. Brno: VUTIUM. 149 s. ISBN 978-80-214-5809-3

Články ve vědeckých recenzovaných časopisech s impakt faktorem

1. DZHALLADOVA, I., S. ŠKAPA, V. NOVOTNÁ a A. BABYNYUK, 2019. Design and Analysis of a Model for Detection of Information Attacks in Computer Networks. *Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research*. **53**(3), 95-112. DOI: 10.24818/18423264/53.3.19.06. ISSN 0424-267X.

2. MUKHIGULASHVILI, S. a V. NOVOTNÁ, 2019. Some two-point problems for second order integro-differential equations with argument deviations. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*. **54**(2), 459-476. DOI: 10.12775/TMNA.2019.045. ISSN 1230-3429.

3. NOVOTNÁ, V., 2014. Feedback influence on the behavior of financial system. *Computation and Economic Cybernetics Studies and Research*. Bucharest, **2014**(1), 217-232. ISSN 0424-267X.

4. NOVOTNÁ, V. a M. BOBALOVÁ, 2018. Optimal replenishment policy for deteriorating and non deteriorating items. *Engineering Economics*. **29**(3), 272 - 280. DOI: 10.5755/j01.ee.29.3.14204. ISSN 2029-5839.

5. NOVOTNÁ, V. a S. ŠKAPA, 2018. Solving microeconomic model using methods of functional analysis. *Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research,*. Bucharest, **2018**(1), 77-88. ISSN 0424-267X.

6. NOVOTNÁ, V. a T. ŠUSTROVÁ, 2015. Solving Macroeconomic Model Using Methods of Functional Analysis. *Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research*. Bucharest, **2015**(3), 253-266.

7. PŮŽA, B. a V. NOVOTNÁ, 2018. On the construction of solutions of general linear boundary value problems for systems of functional differential equations. *Miskolc Mathematical Notes*. Miskolc, **19**(2), 1063-1078.

Články ve vědeckých recenzovaných časopisech SCOPUS

1. ŠKAPA, S. a V. NOVOTNÁ *A Bootstrap Estimation of Expected Risk And Return of Strategy Equity Indices: Periodica Polytechnica Social and Management Sciences*. Budapest. **2020**(1),1-10. ISSN: 1587-3803.

2. MUKHIGULASHVILI, S. a V. NOVOTNÁ *The periodic problem for the second order integro-differential equations with distributed deviation* Mathematica Bohemica. Praha. **2020**(1), 1-17. DOI: 10.21136/MB.2020.0061-19. ISSN: 0862-7959.

3. BYCHKOV, A. S., V. NOVOTNA, V. I. SHEVCHENKO a A. V. SHEVCHENKO, 2019. Improvement of the Model of Computer Epidemics Based on Expanding the Set of Possible States of the Information Systems Objects. *Journal of Automation and Information Sciences*. **51**(11), 34-49. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v51.i11.40. ISSN 1064-2315.

4. BYCHKOV, A. S., O. N. SUPRUN, J. KŘÍŽ a V. NOVOTNÁ, 2019. On the Issue of Stability of Hybrid Automata by a Part of Variables. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019, **51**(10), 23-30. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v51.i10.20. ISSN 1064-2315.

5. JANKOVÁ, M., V. NOVOTNÁ a T. VARYŠOVÁ, 2013. Functions of several variables analysis applied in inventory management. *Acta Universitatis Agriculturae et Silviculturae Mendelianae Brunensis*. Brno, **61**(7), 2221-2227. DOI: 10.11118/actaun201361072221. ISSN 1211-8516.

6. NOVOTNÁ, Veronika, 2015. Numerical Solution of the Inventory Balance Delay Differential Equation. *International Journal of Engineering Business Management*. Rijeka, **7**(1), 1-9. DOI: 10.5772/60113. ISSN 1847-9790.

7. NOVOTNA, V. a T. SUSTROVA, 2018. Order Management System Proposal Using Inventory Balance Equation with Non-continuous Replenishment. *Periodica Polytechnica Social and Management Sciences*. Budapest, **26**(1), 1-9. DOI: 10.3311/PPso.9017. ISSN 1587-3803. Dostupné také z: https://pp.bme.hu/so/article/view/9017

8. NOVOTNÁ, V. a V. ŠTĚPÁNKOVÁ, 2015. Parameter Estimation for Dynamic Model of the Financial System. *Acta Universitatis Agriculturae et Silviculturae Mendelianae Brunensis*. Brno, **63**(6), 2051-2055. DOI: 10.11118/actaun201563062051. ISSN 1211-8516. Dostupné také z: https://acta.mendelu.cz/63/6/2051/

9. PŮŽA, B., D. Y. KHUSAINOV, V. NOVOTNA a A. V. SHATYRKO, 2018. Investigation of Uniform by Delay Stability of Nontrivial Equilibrium Point of One Population Model. *Journal of Automation and Information Sciences*. **50**(9), 25-37. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v50.i9.20. ISSN 1064-2315.

Články ve vědeckých recenzovaných časopisech bez impakt faktoru

1. BUDÍK, J., J. LUHAN a V. NOVOTNÁ, 2011. Use of Genetic Algorithms in Economic Decision Making Processes. *Systémová integrace*. Praha, **2011**(1), 57-63. ISSN 1210-9479.

2. DVOŘÁK, J., J. LUHAN a V. NOVOTNÁ, 2013. Dynamický model elektronického obchodu. *Scientific papers of the University of Pardubice: Series D*. Pardubice, **27**(2), 47-58. ISSN 1211-555X.

3. LUHAN, J. a V. NOVOTNÁ, 2012. Modelování Phillipsovy křivky s podporou systému Maple. *Systémová integrace*. Praha, **2012**(1), 151-163. ISSN 1210-9479.

4. NOVOTNÁ, V., 2012. Application of Delay Differential Equations in the Model of the Relationship Between Unemployment and Inflation. *Trendy ekonomiky a managementu*. Brno, **6**(10), 77-82. ISSN 1802-8527.

5. NOVOTNÁ, V., 2011. Ověření slabých míst informačních systémů. *Trendy ekonomiky a managementu.* **4**(7), 38-47. ISSN 1802-8527.

6. NOVOTNÁ, V., 2010. Trend Forecasting in Capital Markets with Neural Networks in MatLab. *Center for Investigations into Information Sytems.* Zlín, **2010**(2), 1-3. ISSN 1214-9489.

7. NOVOTNÁ, V. a J. LUHAN, 2013. Model pro podporu strategického řízení elektronického obchodu. *Systémová integrace.* Praha, **20**(1), 105-115. ISSN 1210-9479.

Články v odborných časopisech

1. DZHALLADOVA, I., D. KHUSAINOV, V. NOVOTNÁ a B. PŮŽA, 2016. Influence delay effekts in the convergence of solution in nonlinear systems. *Visnik kiivskogo nacionalnogo universitetu imeni Tarasa Ševčenka.* **16**(1), 32-35. ISSN 1728-2276.

2. DZHALLADOVA, I., D. KHUSAINOV, V. NOVOTNÁ a B. PŮŽA, 2016. Research of the effectivness of advertising in conditions of the manufacturers competition. *Visnik kiivskogo nacionalnogo universitetu imeni Tarasa Ševčenka.* Kyiv, **16**(1), 27-31. ISSN 1728-2276.

3. KHUSAINOV, D., V. NOVOTNÁ a B. PŮŽA, 2016. The estimates of convergence of linear systems solutions with aftereffect in the neighborhood of point of the rest. *Bulletin Kiev University, series: physics and Mathematics.* Kyiv, **2016**(2), 141-146. ISSN 1812-5409.

4. KŘÍŽ, J., J. LUHAN a V. NOVOTNÁ, 2013. ICT Support for Creative Teaching of Mathematic Disciplines. *Interdisciplinary Studies Journal.* Helsinky, **2**(3), 89-101. ISSN Interdisciplinary Studies Journal.

5. LUHAN, J. a V. NOVOTNÁ, 2013. Impact of the Past on E—Commerce Behaviour. *Paripex - Indian Journal Of Research.* Gujarat, **2**(10), 101-105. DOI: 10.15373/22501991. ISSN 22501991.

6. LUHAN, J., V. NOVOTNÁ a V. OBROVÁ, 2011. January Effect at Czech Capital Market. *Intellectual Economics.* Vilnius, **5**(4), 602-612. ISSN 1822-8011.

7. NOVOTNÁ, V. a V. ONDRÁK, 2016. Electronic Communication in Private Doctors- Surgeries in the Czech Republic. *Journal of Eastern Europe Research in Business and Economics.* **2016**(1), 1-10. DOI: 10.5171/2016.398531. ISSN 21690367.

Příspěvky ve sbornících národních / mezinárodních sympózií a konferencí evidovaných ve WOS

1. BOBALOVÁ, M. a V. NOVOTNÁ, 2015. The Use of Functional Differential Equations in the Model of the Meat Market with Supply Delay. In: *Procedia - Social and Behavioral Sciences*. Elsevier. DOI: 10.1016/j.sbspro.2015.11.406. ISSN 18770428.

2. BUDÍK, J., J. LUHAN a V. NOVOTNÁ, 2011. Creation Of Investment Portfolio On The Basis Of Purchasing Selected Trading Signals. In: *Proceedings of The 17th International Business Information Management Association Conference*. Milano: IBIMA Publishing. ISBN 978-0-9821489-6-9.

3. BUDÍK, J., J. LUHAN a V. NOVOTNÁ, 2011. Preferences of Applicants for Study at the Faculty of Business and Management, Brno University of Technology. In: *Innoviation and Knowledge Management A Global Competitive Advantage*. Kuala Lumpur: INIMA Publishing. ISBN 978-0-9821489-5-2.

4. FENDRYCHOVÁ, M., J. LUHAN a V. NOVOTNÁ, 2014. Outsourcing in the Healthcare System of the Czech Republic. In: *Vision 2020: Sustainable Growth, Economic Development, and Global Competitiveness*. Valencia: IBIMA Publishing. ISBN 978-0-9860419-2-1.

5. JANATA, M., J. LUHAN a V. NOVOTNÁ, 2013. Information Sources influencing the Decision Process of University Applicants In South Moravian District of Czech republic. In: *The 21st International Business Information Management Association Conference*. Vídeň: IBIMA Publishing. ISBN 978-0-9860419-0-7.

6. KRIZ, J., V. NOVOTNA a J. LUHAN, 2012. Software Solution of Delay Differential Equations. In: *2012 Third World Congress on Software Engineering*. Wuhan University of Technology: IEEE, 2012. DOI: 10.1109/WCSE.2012.47. ISBN 978-1-4673-4546-0.

7. KŘÍŽ, J., J. LUHAN a V. NOVOTNÁ, 2012. Využití informačních a komunikačních technologií jako efektivního nástroje pro terciární vzdělávání. In: *Znalosti pro tržní praxi 2012*. Olomouc: UP v Olomouci. ISBN 978-80-87533-04-8.

8. KŘÍŽ, J. a V. NOVOTNÁ, 2012. The Impact of ICT Level on the Value of Regional GDP. In: *Innovation Vision 2020*. Barcelona: IBIMA Publishing. ISBN 978-0-9821489-8-3.

9. LUHAN, J. a V. NOVOTNÁ, 2014. Health care market in the czech republic in the information society. In: *8th International Scientific Conference Business and Management 2014*. Vilnius: Vilnius Gediminas Technical University. ISBN 978-609-457-651-5.

10. LUHAN, J. a V. NOVOTNÁ, 2015. ICT Use in EU According to National Models of Behaviour. In: *Procedia - Social and Behavioral Sciences*. Kaunas: Elsevier. DOI: 10.1016/j.sbspro.2015.11.407. ISSN 18770428.

11. LUHAN, J. a V. NOVOTNÁ, 2012. Temporary Inefficiency of Financial Markets. In: *Innovation and Sustainable Economic Competitive Advantage From Regional Development to World Economies*. Istanbul: IBIMA Publishing. ISBN 978-0-9821489-7-6.

12. LUHAN, J., V. NOVOTNÁ a V. OLEŠOVSKÝ, 2017. The Dynamic Model of System Development in the Area of E-government. In: *IBIMA Conference proceedings*. Madrid: IBIMA Publishing. ISBN 978-0-9860419-9-0.

13. LUHAN, J., V. NOVOTNÁ a V. OBROVÁ, 2011. Weekend Effect at Czech Capital Market. In: *1st international scientific concerence „Practice and research in private public sector-11"*. Vilnius: Mykolas Romeris University. ISSN 2029-7378.

14. LUHAN, J., V. NOVOTNÁ a V. OBROVÁ, 2011. ICT Development and its Effect on GDP in the Czech Republic Regions. In: *International Scientific Conference „Whither Our Economies"*. Vilnius: Mykolas Romeris University. ISSN 2029-8501.

15. NEUWIRTH, B. a V. NOVOTNÁ, 2015. Information Security in the Surgeries of Private Doctors. In: *Innovation Management and Sustainable Economic Competitive Advantage: From Regional Development to Global Growth*. Madrid: IBIMA Publishing. ISBN 978-0-9860419-5-2.

16. NEUWIRTH, B., V. NOVOTNÁ a S. ŠKAPA, 2017. E-Government and Corruption in East European Countries. In: *IBIMA Conference proceedings*. Madrid: IBIMA Publishing. ISBN 978-0-9860419-9-0.

17. NOVOTNA, V., 2012. The Impact of the Inflation and Unemployment Values from the Previous Period on the Phillips Curve. In: *The 7th International Scientific Conference „Business and Management 2012." Selected papers*. Vilnius, Lithuania: Vilnius Gediminas Technical University Publishing House Technika, 2012. DOI: 10.3846/bm.2012.021. ISBN 9786094571169.

18. NOVOTNÁ, V., 2013. Use of Information Technologies by Healthcare Professionals of South Moravia Region in Communication with Patients. In: *Creating Global Competitive Economies: 2020 Vision Planning*. Roma: IBIMA Publishing. ISBN 978-0-9860419-1-4.

19. NOVOTNÁ, V., 2016. The Solution Options of an E-shop Model. In: *Vision 2020: Innovation Management, Development Sustainability, and Competitive Economic Growth*. Madrid: IBIMA Publishing. ISBN 978-0-9860419-8-3.

20. NOVOTNÁ, V., 2014. The Attitude Of Private Doctors In The Czech Republic Towards Electronic Communication. In: *Crafting Global Competitive Economies: 2020 Vision Strategic Planning & Smart Implementation*. Milano: IBIMA Publishing. ISBN 978-0-9860419-3-8.

21. NOVOTNÁ, V., 2012. Dynamic Model of Phillips Curve Using the Maple System. In: *Innovation and Sustainable Economic Competitive Advantage From Regional Development to World Economies*. Istanbul: IBIMA Publishing. ISBN 978-0-9821489-7-6.

22. NOVOTNÁ, V. a S. ŠKAPA, 2017. Dynamic model of new product launch impact on stock market participants. In: *The Role of Management in the Economic Paradigm of the XXIst Century*. Bucharest: Bucharest University of Economic Studies. ISBN 2286-1440.

23. NOVOTNÁ, V. a S. ŠKAPA, 2018. Walras dynamic model with the influence of history. In: *Inovation Management and Education Excellence through Vision 2020*. Milano: IBIMA Publishing. ISBN 978-0-9998551-0-2.

24. NOVOTNÁ, V. a S. ŠKAPA, 2017. A Nonlinear Microeconomic Model of Goods Production and Sale Using Functional Analysis. In: *Proceedings of the INTERNATIONAL MANAGEMENT CONFERENCE: The Role of Management in the Economic Paradigm of the XXIst Century*. Bucharest: Management Academic Society in Romania.

25. NOVOTNA, V. a T. VARYSOVA, 2015. The Application of Functions of Several Variables Analysis in an Optimal Replenishment Policy for Deteriorating Items. In: *Procedia Economics and Finance*. London: Elsevier. DOI: 10.1016/S2212-5671(15)00535-3. ISSN 22125671.

26. NOVOTNÁ, V. a T. VARYŠOVÁ, 2014. Solving of Economic Model Using Modern Methods. In: *Vision 2020: Sustainable Growth, Economic Development, and Global Competitiveness*. Valencia: IBIMA Publishing. ISBN 978-0-9860419-2-1.

27. NOVOTNÁ, V. a T. VARYŠOVÁ, 2013. Impact analysis of changes in parameters on profit in inventory management, 2013. In: *The 22nd International Business Information Management Association Conference*. Rome: IBIMA Publishing. ISBN 978-0-9860419-1-4.

Příspěvky ve sbornících národních / mezinárodních sympózií a konferencí a příspěvky ve sbornících odborných konferencí

1. DOSKOČIL, R., B. NEUWIRTH a V. NOVOTNÁ, 2018. The Potential of Using Public Cloud in Public Administration Environment. In: *Teoria şi practica administrării publice*. Kišiněv: Academy of Public Administration. ISBN 978-9-975301-97-8.

2. HŘEBÍČEK, J., V. NOVOTNÁ a B. PŮŽA, 2016. Modelling socio-ecological problems with delay. Case study on environmental damage. In: *International Congress on Environmental Modelling and Software*. Toulouse: iEMSs. ISBN 978-8-890357-45-9.

3. KŘÍŽ, J. a V. NOVOTNÁ, 2012. Názory studentů FP VUT v Brně na využití ICT v předmětech matematika a statistika. In: *Internationa colloquium on the Management of educational Process*. Brno: Univerzita obrany. ISBN 978-80-7231-865-0.

4. NEUWIRTH, B. a V. NOVOTNÁ, 2011. Vztah studentů FP VUT k matematice a výpočetní technice. In: *10th International conference APLIMAT*. Bratislava: FME STU. ISBN 978-80-89313-51-8.

5. NOVOTNÁ, V., 2004. Neural Networks on capital market. In: *Management, economics and business development in the new european conditions*. Brno: FP VUT. ISBN 80-214-2661-6.

6. NOVOTNÁ, V., 2016. The Dynamic Model of E-Government System Development. In: *TEORIA ŞI PRACTICA ADMINISTRĂRII PUBLICE*. Kišiněv: Academy of Public Administration. ISBN 9789975301961.

7. NOVOTNÁ, V., 2004. Optimalizace portfolia na BCPP metodou kritické linie. In: *3rd international conference Aplimat*. Bratislava: Slovak University of technogy in Bratislava. ISBN 80-227-1996-X.

8. NOVOTNÁ, V., S. ŠKAPA a B. NEUWIRTH, 2019. Analysis of a Non-Linear Dynamic Financial System. In: *PROCEEDINGS OF THE 13th INTERNATIONAL MANAGEMENT CONFERENCE: Management Strategies for High Performance*. Brno 13: Editura ASE. ISSN 2286-1440.