

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

FAKULTA STAVEBNÍ

ÚSTAV FYZIKY



Habilitační práce

Využití modelování a bílého šumu ve stavební akustické defektoskopii

Mgr. Jan Martinek, Ph.D.

V Brně 30. srpna 2017

Prohlašuji, že jsem habilitační práci *Využití modelování a bílého šumu ve stavební akustické defektoskopii* vypracoval sám za použití pramenů uvedených v seznamu literatury.

Obsah

1	Úvod	6
2	Modelování elastických vln	8
2.1	Podélné kmity	8
2.1.1	Vyhledávání maxim	12
	Popis algoritmu	13
	Test algoritmu na generovaných datech	14
2.1.2	Experiment a výsledky	16
2.1.3	Závěr	17
2.1.4	Teplotní závislost frekvence podélných kmitů hliníkové tyče	17
2.2	Poissonův poměr	23
2.3	Příčné kmity	25
2.3.1	Euler–Bernoulliho teorie	25
2.3.2	Modální analýza a metoda konečných prvků	35
	Ověření experimentem	37
2.4	Příčné kmity, řada vázaných oscilátorů	42
2.5	Tlumení kmitů	45
2.6	Torzní kmity	50
2.6.1	Torzní kmity tyče čtyřhranného průřezu	51
2.6.2	Experimentální ověření	53
2.7	Podélné kmity tyče čtvercového průřezu	54

2.8	Modální analýza kvádrového vzorku	57
3	Dynamika soustavy vázaných oscilátorů	62
3.1	Rozbor sil, podélná a příčná vlna	63
3.2	Tlumení podélných vln	64
3.3	Tlumení příčných vln	65
3.4	Podélná a příčná vlna včetně tlumení	67
3.5	Odhad paměťových nároků	68
3.6	Vizualizace výsledků	69
3.7	Simulace poškození materiálu	72
	3.7.1 Poškození materiálu vznikem krychlové dutiny	72
	3.7.2 Poškození materiálu zeslabením vazby mezi elementy	74
3.8	Závěr	74
4	Vývoj měřicí metody	76
4.1	LTI – Linear Time Invariant systém	76
4.2	Odezva na impuls	77
	4.2.1 Výpočet odezvy na impuls $H(t)$	79
	4.2.2 Vstupní signál ve tvaru δ funkce	80
	4.2.3 Vstupní signál ve tvaru bílého šumu	81
4.3	Způsoby generování bílého šumu	82
	4.3.1 Bílý šum vytvořený pomocí inverzní Fourierovy transformace	83
	4.3.2 Speciální případ bílého šumu, delta funkce	84
	4.3.3 Binární generátor bílého šumu	85
4.4	Generátor na bázi posuvných registrů	85
	4.4.1 XOR operátor	88
4.5	Softwarová implementace	89
	4.5.1 Arduino generátor MLS s H-mostem	94

Jednočipový mikropočítač	94
H-most	95
Řídící obvody pro MOSFET tranzistory	96
Vlastnosti generátoru MLS s H-mostem	96
4.6 Generátor MLS na bázi měřicí karty	98
4.7 Asymetrický binární zesilovač	100
4.8 Budiče, detektory a vazební prvky	103
4.8.1 Kontaktní reproduktor	103
4.8.2 Vazební prostředky	104
4.8.3 Snímače	105
5 Měření cementových vzorků	106
5.1 Kontinuální měření frekvence kmitů schnoucího maltového vzorku	107
5.1.1 Experiment a výsledky	107
5.2 Teplotně namáhané maltové vzorky 40×40×160 mm	109
5.2.1 Materiál a metody	111
5.2.2 Výsledky	113
5.2.3 Závěr	113
5.3 Měření teplotně namáhaných betonových vzorků	120
5.3.1 Naměřené vlastnosti vzorků	121
5.3.2 Vypočítané vlastnosti materiálu	125
5.3.3 Nelineární odezva	128
5.3.4 Destruktivní testy	129
6 Závěr	130

Kapitola 1

Úvod

V nedestruktivním testování existuje mnoho metod založených na frekvenční analýze vibrací. Získané spektrum obsahuje informace o periodických dějích, které probíhají ve zkoumaném systému.

Naměřené frekvence souvisejí s materiálovými vlastnostmi a mnohokrát bylo ověřeno, že lze odhalit poškození zkoumaného vzorku na základě změny vibračního spektra. Takové vyhodnocení naměřených dat je však velmi obtížný úkol, a to zejména ve stavebnictví, kde se používá široká škála materiálů s komplikovanou mikrostrukturou, a které mohou být vystaveny mnoha vlivům vedoucím k jejich degradaci.

Proto bývá akustická defektoskopie spíše srovnávací metodou, která dokáže postihnout změny zkoumaného vzorku vůči referenčnímu.

Problematika je v celé šíři velmi složitá a tato práce se zaměřuje jen na nepatrnou oblast. Cílem její první části je popis, výpočet a experimentální ověření vlnových jevů, které souvisejí především s tvarem vzorku. Různými výpočetními modely se podařilo předpovědět frekvence několika druhů vlnění, a to jak u vzorku ve tvaru tenké tyče, tak i tvaru kvádrů. Kvádr měl stejný tvar jako standardní betonové vzorky. Modální analýza se ukázala jako nejpřesnější, ale nejvíce komplikovaná metoda. Výsledky každé z výpočetních metod byly současně ověřeny experimentem, a tak první část nelze pokládat jen za teoretickou. V rámci modelování vznikl též program pro numerickou simulaci šíření vln v nehomogenním materiálu s náhodně rozmístěnými defekty.

Druhá část práce se věnuje měřicím metodám, zejména pak metodě impact-echo. Ta je založena na tom, že se vibrace vybudí úderem kladívka do zkoumaného vzorku.

Předpokládá se, že počáteční impuls má dostatečně široké spektrum, což je podmínka pro následnou frekvenční analýzu. Metoda impact-echo je v nedestruktivním testování hojně využívána, a je zakotvena i ve standardu ASTM.

Každá metoda má svá omezení a přinejmenším dvě nevýhody by bylo vhodné blíže popsat. Impact-echo je metoda nevhodná pro automatizované měření, protože úder kladívkem provádí obvykle člověk. Z toho také vyplývá nutnost větší opatrnosti v posuzování, zda jsou výsledky dostatečně reprodukovatelné. Byly provedeny pokusy s robotizovaným kladívkem, ale ty lze dosud považovat spíše za ojedinělé a obtížně proveditelné. Automatizovaná měření je možné realizovat tak, že se kmity vyvolají piezoelektrickým budičem, který je v kontaktu se zkoumaným vzorkem. Řada ultrazvukových metod je na tomto principu založena a často jeden a tentýž piezoelektrický člen slouží současně jako budič a současně jako detektor. V každém případě platí, že impuls vyvolaný ultrazvukovým budičem zdaleka nedosahuje takových intenzit jako úder kladívkem.

Druhou nevýhodou je samotný fakt, že impuls má velmi krátké trvání. Má-li se systému předat dostatečná energie pro vybuzení měřitelných vibrací, pak musí být impuls velmi intenzivní. Jeho velká počáteční amplituda klade značné nároky na dynamický rozsah měřicí aparatury. Krom toho, řada algoritmů pro následné numerické zpracování naměřených hodnot je založena na předpokladu, že experiment splňoval podmínky pro *lineární, časově invariantní systém* (LTI = Linear, Time Invariant). Podmínka pro linearitu je obvykle zajištěna tím, že v systému jsou pouze malé výchylky, a tak nelineární chování se neuplatní. Jenže právě intenzivní počáteční impuls může tuto podmínku porušit. Výsledkem je spektrum, které je závislé na intenzitě úderu, což velmi znesnadňuje následnou interpretaci výsledků.

Matematický rozbor metody impact-echo vede k závěru, že lze vytvořit metodu novou, která zmiňované nedostatky odstraní. Lze dokázat, že stejnou informaci, kterou získáváme metodou impact-echo, můžeme naměřit i pomocí deterministického generátoru bílého šumu. Byla proto navržena a sestavena funkční měřicí aparatura, jejíž vlastnosti byly ověřeny pomocí teplotně degradovaných cementových vzorků.

Ukázalo se, že popisovaná metoda dává výsledky srovnatelné s metodou impact-echo, ale zároveň umožňuje automatizované kontinuální měření a navíc i zjišťování nelineárních vlastností vzorků, čímž metodu impact-echo překonává.

Závěry vyplývající z modelů popsaných v první části práce se uplatnily při zpracování dat získaných inovovanou metodou. Výsledkem jsou vypočtené materiálové charakteristiky a jejich závislost na vysoké teplotě, jíž byly cementové vzorky vystaveny.

Kapitola 2

Modelování elastických vln

Máme-li v nedestruktivním testování použít akustickou metodu, je potřeba rozumět šíření elastických vln. Vibrace testovaného vzorku závisí nejen na materiálu, z něhož je vyroben, ale také na geometrii vzorku. Ta určuje, jaké druhy vlnění se mohou ve vzorku šířit, a jaké vibrační módy můžeme očekávat.

Data získaná z akustických měření je potřeba zpracovávat právě s ohledem na tvar zkoumaného vzorku a teprve následně lze usuzovat na materiálové vlastnosti. V následujících kapitolách se budeme zabývat teorií elastických vln, různými způsoby výpočtů a modelování. Přesto bude i v teoretické části popsána řada experimentů, jejichž výsledky mají potvrdit či vyvrátit uvedené předpoklady.

Na samém začátku se věnujme tomu nejjednoduššímu – podélným kmitům tenké tyče a souvislosti s Youngovým modulem pružnosti v tahu.

2.1 Podélné kmity

V pružném prostředí se mohou šířit podélné vlny, jejichž rychlost lze určit na základě znalosti hustoty ρ a Youngova modulu pružnosti v tahu E . V případě, že předpokládáme Poissonův poměr ν roven nule, pak pro fázovou rychlost vlnění platí vztah

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Vezmeme-li v úvahu jevy spojené s nenulovým Poissonovým poměrem, pak lze psát přesnější vztah

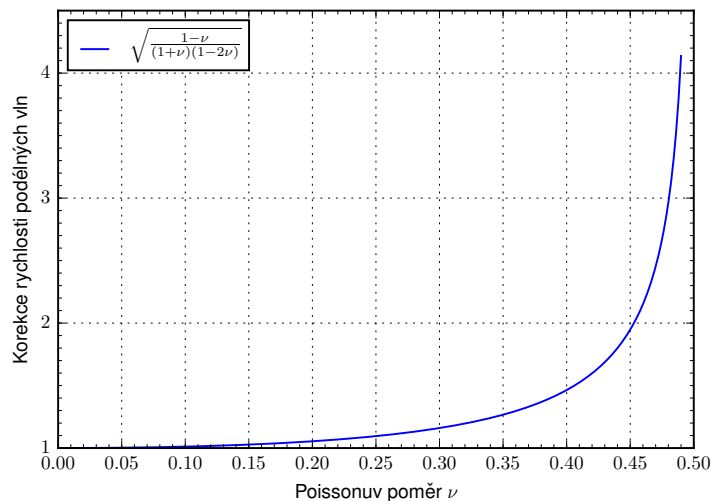
$$c = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}$$

Jak odvodíme později, rychlost šíření podélných vln lze stanovit snadno přímo z měření frekvence podélných kmitů zkoumaného vzorku. Jedná-li se o zcela neznámý materiál, u kterého žádnou další vlastnost (kromě hustoty) neznáme, pak lze jeho Youngův modul pouze odhadovat za předpokladu, že Poissonův poměr je nulový.

Při tomto zjednodušení se dopustíme chyby, která je dána faktorem

$$\sqrt{\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}}$$

a průběh v závislosti na Poissonově poměru ν je vynesena na grafu 2.1.



Obr. 2.1: Korekční faktor pro rychlost šíření podélných vln udává, jaké chyby se dopustíme při neznalosti Poissonova poměru.

Z jednoho měření rychlosti podélných vln nelze současně určit Youngův modul a Poissonův poměr.

Lze dokázat, že u velmi tenké tyče je rychlost šíření podélných vln nezávislá na Poissonově poměru. Pod pojmem *tenká tyč* se myslí taková, jejíž příčné rozměry jsou mnohonásobně menší, než je vlnová délka podélných vln. Rychlost šíření podélných vln lze vypočítat zjednodušeným vztahem $c = \sqrt{E/\rho}$ a právě touto situací se nyní zabýváme.

Pokud je pružné prostředí rozměrově omezené, pak na hranicích dochází k odrazu vlnění a v prostředí pak nalezneme dvě vlny postupující opačnými směry. Jejich součet (superpozice) dává ve výsledku vlnění stojaté, které se vyznačuje tím, že existují místa zcela nekmitající (uzly) a naopak místa s amplitudou maximální (kmitny).

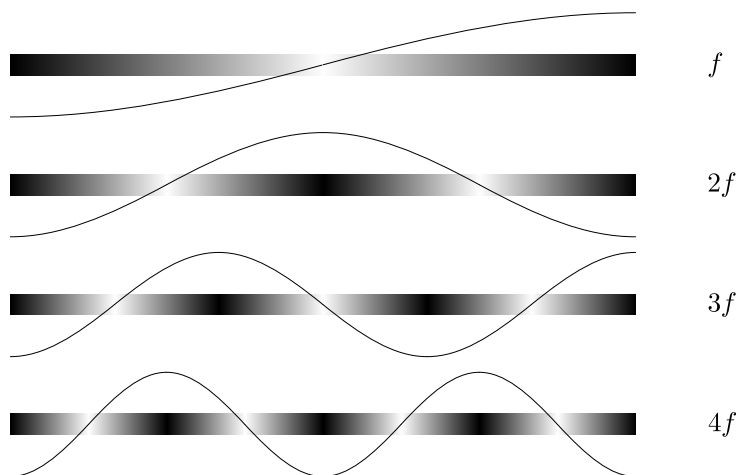
Uvažujeme-li volně uloženou tyč o délce l , pak její podélné kmitání bude mít tu vlastnost, že na koncích tyče bude vždy kmitna. Z toho vyplývá, že vlnová délka λ nemůže být libovolná. Musí platit

$$n \frac{\lambda}{2} = l$$

kde n je přirozené číslo. Obdobné omezení platí též pro frekvenci kmitů. Dosadíme-li do předchozího vzorce vztah pro vlnovou délku $\lambda = c/f$, dostáváme

$$n \frac{c}{2f} = l \quad \Rightarrow \quad f = \frac{nc}{2l}$$

přičemž tyto frekvence nazýváme *vlastní frekvence*. První čtyři módy kmitání jsou znázorněny na následujícím obrázku 2.2.



Obr. 2.2: Podélně kmitající tyč byla zcela volná kromě jediného bodu uprostřed, kde byla podepřena. Z toho důvodu lze očekávat, že ve spektru budou přítomné pouze liché harmonické frekvence, zatímco sudé budou potlačeny.

Pro účely výpočtu modulu pružnosti v tahu můžeme použít libovolný mód kmitání, ale pro dosažení nejvyšší relativní přesnosti je potřeba vzít v úvahu několik vlivů.

Frekvence bude vypočítána pomocí diskrétní Fourierovy transformace ze zaznamenaného zvuku. Amplitudy jsou tudíž vypočítávány jen pro diskrétní frekvence, jejichž

rozestup a tudíž i nejistota je dána dobou τ , po kterou záznam zvuku trval. Platí

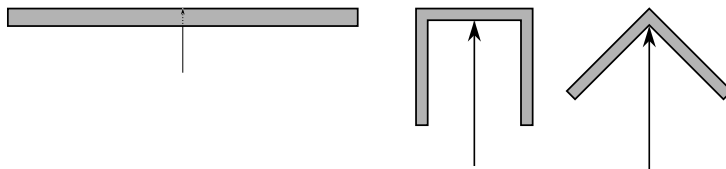
$$\Delta f = \frac{1}{\tau}$$

Absolutní chyba je tedy stejná pro všechny zjišťované frekvence, avšak *relativní* chyba je tím nižší, čím vyšší frekvence měříme. Z toho vyplývá, že pro dosažení vyšší přesnosti bude vhodné se soustředit na nejvyšší změřitelný mód.

Tento efekt se však vykompenzuje tím, že módy s nižší frekvencí znějí podstatně déle. Po nějaké době se základní mód stává dominantním a vyšší harmonické frekvence vymizí. Je to pravděpodobně přirozený důsledek toho, že kvalita oscilátoru je pro všechny módy podobná, a že útlum souvisí s *počtem kmitů*, nikoli s dobou trvání.

Po zvážení těchto skutečností se ukazuje jako vhodné volit pro zpracování nejnižší frekvenci odpovídající základnímu módu. Výhodou je také snadná rozlišitelnost.

Z předešlých úvah o přesnosti měření frekvence vyplývá, že doba záznamu a tedy i doba kmitání má přímý vliv na chybu měření. Je snahou získat co nejvíce period kmitání a tudíž zvolit uchycení tyče tak, aby tlumení bylo co nejmenší. Hlavním zdrojem tlumení je bezpochyby kontakt s podložkou, proto bylo zvoleno takové uchycení, kdy tyč spočívá na hrotu jehly, přičemž ničeho jiného se nedotýká. Jak je vidět na následujícím obrázku 2.3, profil tyče byl takový, aby její těžiště bylo *nad* bodem dotyku. Jedině tím lze zajistit stabilní rovnováhu, kdy při drobném vychýlení dojde k opětovnému návratu.



Obr. 2.3: Podélně kmitající tyč spočívala ve stabilní rovnováze na hrotu jehly, který představoval jediný bod kontaktu tyče s okolím.

Bod dotyku je uprostřed, což nemá žádný vliv na základní frekvenci ani na další sudé harmonické frekvence, protože při těchto módech kmitání se uprostřed nachází uzel. U lichých harmonických je sice uprostřed tyče kmitna a kontakt s jehlou kmity ovlivňuje, ale my se budeme zabývat pouze základním módem.

Vezmeme-li v úvahu pouze základní mód o frekvenci f , pak můžeme pro modul pružnosti v tahu odvodit vztah

$$E = 4\rho l^2 f^2 = 4\frac{m}{V}l^2 f^2 = 4\frac{m}{Sl}l^2 f^2 = 4\frac{m}{S}l f^2$$

ve kterém vystupuje frekvence s druhou mocninou, zatímco ostatní veličiny jen s první. Pro úplnost – relativní chybu měření by bylo možné vypočítat vztahem

$$\varrho(E) = \sqrt{\varrho(m)^2 + \varrho(S)^2 + \varrho(l)^2 + (2\varrho(f))^2}$$

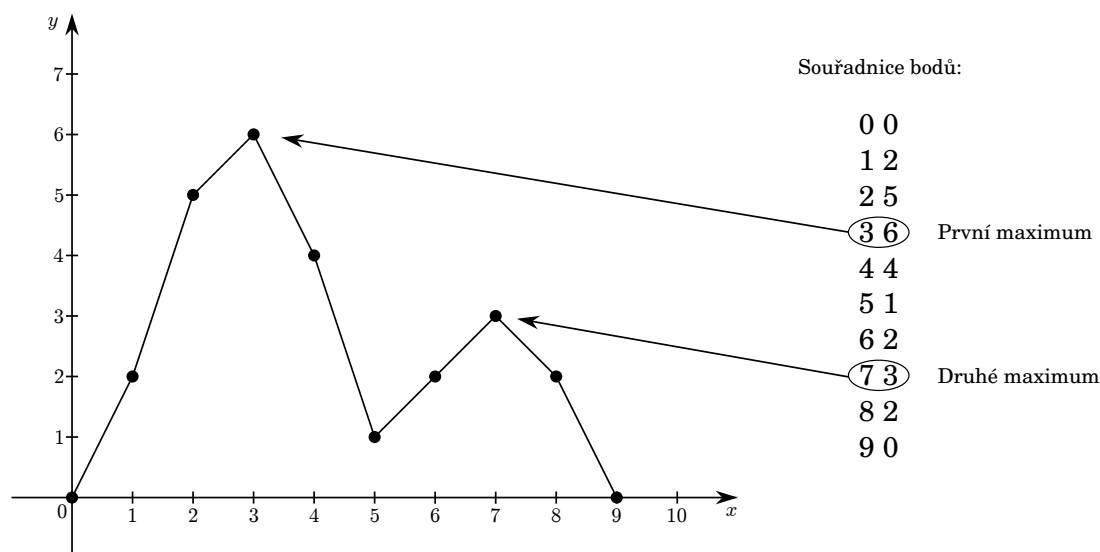
Měření je tedy dvakrát citlivější na relativní chybu při měření frekvence ve srovnání s ostatními veličinami.

Frekvence byla naměřena pomocí mikrofону, který byl umístěn blízko jednoho z konců tyče. Signál z mikrofónu byl přiveden do vstupu zvukové karty a dále zpracován počítačem. Zvuková vlna byla snadno měřitelná, čemuž jistě dopomáhalo to, že právě na koncích tyče je kmitna. Do opačného konce tyče byl kladívkem veden úder tak, aby se tyč podélně rozkmitala.

2.1.1 Vyhledávání maxim

Při analýze akustických signálů je velmi častým požadavkem nalezení několika hlavních frekvenčních maxim, které vypovídají o dominantních jevech v nahraném zvukovém záznamu. Poloha frekvenčních maxim je důležitou informací o kmitajícím systému. Kromě využití v nedestruktivním testování materiálů se tato metoda používá i v mnoha dalších oblastech, například u ladiček hudebních nástrojů. Ty mají za cíl nalézt nejvíce zastoupenou frekvenci a tuto přepočítat na tón v hudební stupnici. Další aplikací je měření Youngova modulu pružnosti v tahu z podélných kmitů tyče. Při podélném úderu do (obvykle kovové) tyče lze na základě analýzy zvuku zjistit frekvenci oscilací. Známe-li délku tyče a hustotu materiálu, pak lze vypočítat modul pružnosti v tahu. Pomocí frekvenční analýzy zvuku lze taktéž měřit rychlost rotace některých strojních součástí.

Obvykle máme k dispozici data představující časovou závislost toho, jak daný systém kmitá. Měřenou veličinou může být přímo výchylka anebo některá její časová derivace – rychlost nebo zrychlení, což záleží na typu použitého snímače. Z takto získaných dat se vypočítá Fourierova transformace a z ní frekvenční spektrum. Výsledkem je závislost ve frekvenční oblasti. Ta popisuje, jak je energie kmitů rozložena v závislosti na frekvenci. Jestliže je energie soustředěna do úzkého frekvenčního intervalu, je na grafu 2.4 zřetelné maximum (pík).



Obr. 2.4: Počítač má k dispozici řadu dat a jeho úkolem je nalézt jednotlivá maxima (píky). Na grafu jsou na první pohled patrná dvě maxima, jejichž polohy jsou 3 a 7. Je zřejmé, že první maximum je velmi snadné nalézt – jde o nejvyšší hodnotu ve všech datech. Jaký postup však použít při hledání druhého maxima? Obrázek má pouze ilustrovat základ problému. Ve skutečnosti se zpracovávají desítky či stovky tisíc hodnot a navíc je přítomen šum.

Popis algoritmu

Hlavní maximum je velmi snadné nalézt, protože se jedná o nejvyšší hodnotu ze všech vypočtených dat. Komplikace nastává při hledání vedlejších maxim. Bylo by nesprávné se domnívat, že druhá nejvyšší hodnota v datech odpovídá druhému nejvyššímu píku. Ve skutečnosti je každý pík tvořen mnoha hodnotami, které vykreslují jeho profil.

Algoritmus musí zjišťovat nejen maximální hodnotu na vrcholu píku, ale taktéž hranice, kde pík začíná a kde končí. Zjištěný interval se již nesmí v dalším hledání vyskytnout. Jestliže se nalezený interval nahradí nulovými hodnotami, pak je jistota, že nové globální maximum odpovídá *dalšímu píku*. Problém se tedy redukuje na nalezení hranic.

Průběh vyhledávání tedy bude ve stručnosti takový, že program nalezne globální maximum, v jeho okolí vyhledá interval píku, tedy začátek a konec. Následně v datech pík vymaže tím, že vynuluje všechny hodnoty v příslušném intervalu. Při dalších opakováních budou nalezeny další píky. Nalezení hranic píku v reálných datech je obtížný krok, protože data bývají silně zašuměná. Velmi se osvědčilo data před zpracováním nejprve vyhladit.

Existuje celá řada vyhlazovacích algoritmů, přičemž pro popisované účely byla použita konvoluce s Gaussovou křivkou. Při aplikaci tohoto filtru je každá hodnota v datech nahrazena váženým aritmetickým průměrem ze všech dat. Váhy pro jednotlivé body odpovídají Gaussově křivce tak, aby právě v nahrazovaném bodu bylo její maximum. Docílí se tak několika vlastností:

- Největší váhu bude mít právě datový bod, který chceme nahradit. Na jeho hodnotu sice mají vliv *všechny* body, ale čím jsou od něj vzdálenější, tím jejich váha klesá.
- Konvoluce s Gaussovou křivkou má tendenci zachovat tvar píků, ale přitom vyhlazuje náhodné výkyvy v datech.

Vážným nedostatkem popisované metody je fakt, že šířku Gaussovy křivky je nutno dopředu zvolit a nastavit. Bude-li příliš úzká, bude vyhlazení málo účinné a nadále budou patrné náhodné výkyvy v datech, což komplikuje další zpracování. Příliš široká Gaussova křivka vede k přílišnému vyhlazení, což se projeví zejména tehdy, jsou-li píky blízko sebe. V takovém případě vyhlazení vede ke spojení více píků do jednoho. Navíc se pak nový pík jeví jako intenzivnější, protože vznikl z většího počtu menších.

Nastavení správné šířky Gaussovy křivky pro konvoluci je nutno provádět citlivě s ohledem na výše uvedené komplikace.

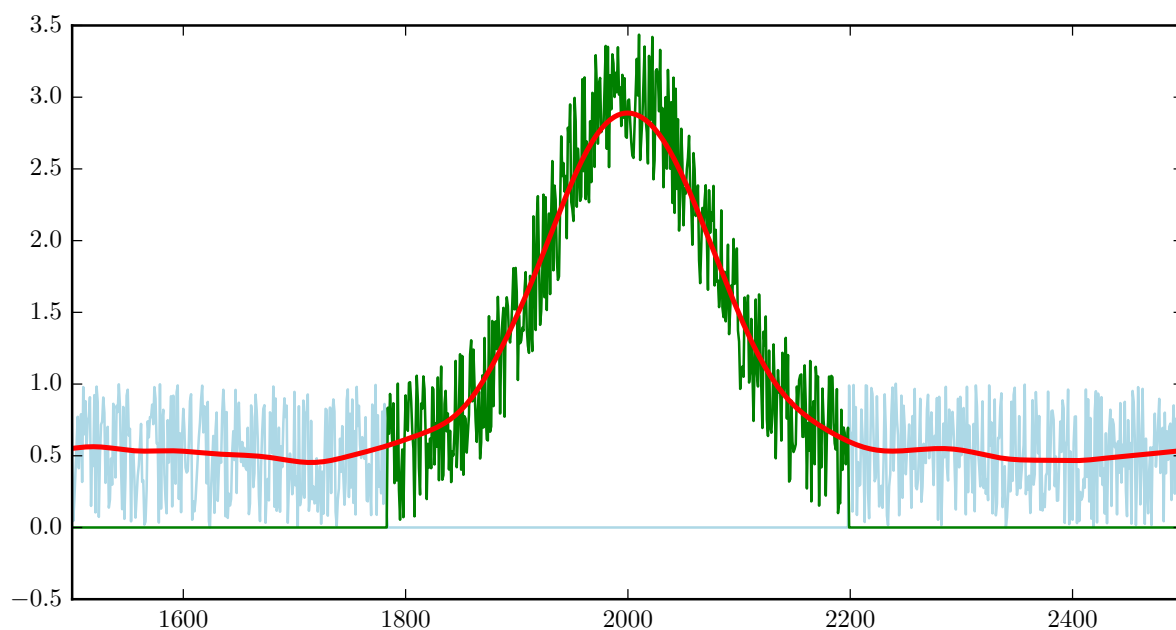
Test algoritmu na generovaných datech

Popsaný algoritmus pro vyhledávání píků byl otestován na uměle vytvořených datech, které představují součet několika Gaussových křivek s náhodným posunem a náhodnou velikostí. Takto vzniklá data svým průběhem mohou připomínat frekvenční spektrum. Pro vyzkoušení algoritmu byl navíc k datovým hodnotám připočten náhodný šum.

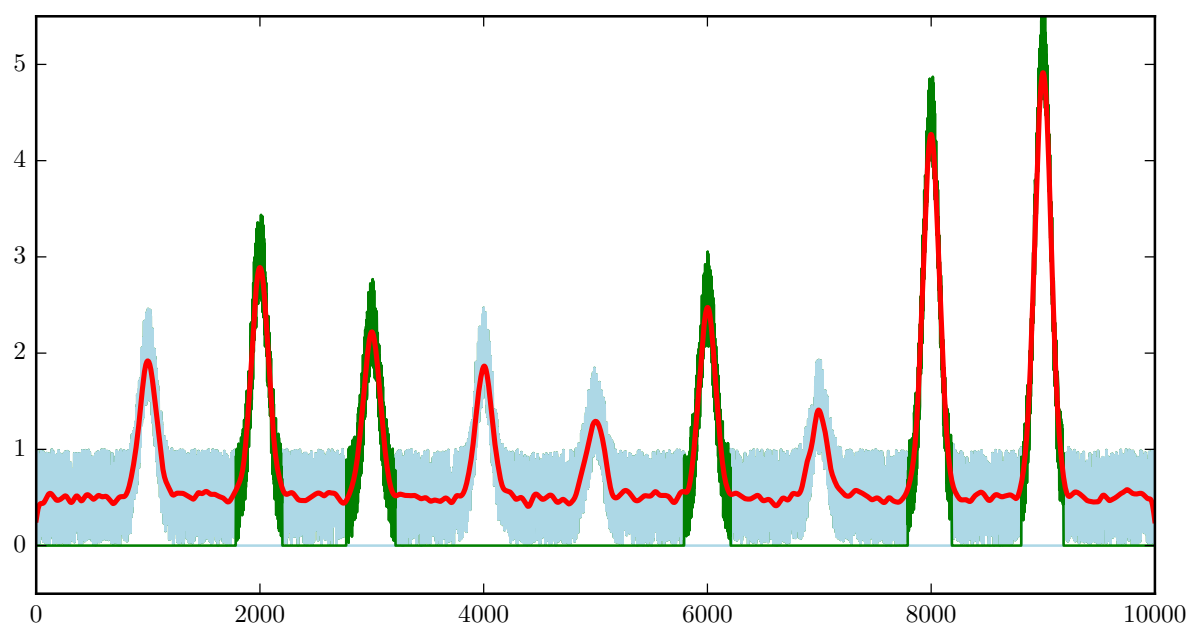
Na grafu 2.5 je vidět detail píku, u kterého byla správně nalezena poloha jeho maxima, a také byly po vyhlazení dat nalezeny jeho hranice.

Jestliže popisovaný postup aplikujeme na data několikrát po sobě, můžeme nalézt celou řadu píků a ukončit jejich vyhledávání například po nalezení předem zvoleného počtu anebo tehdy, je-li nalezený pík výrazně menší než první nalezený.

V tomto testovacím případě byl počet píků omezen na prvních pět, jak dokládá graf 2.6.



Obr. 2.5: Ke globálnímu maximu je nutno nalézt interval, do kterého spadá příslušný pik. Nalezení jeho hranic je výrazně snazší, jsou-li data vyhlazena například konvolucí s Gaussovou křivkou.



Obr. 2.6: Algoritmus našel v těchto zašuměných datech pět hlavních maxim.

Při zpracování celé řady akustických spekter se ukázalo, že je vhodnější pomocí algoritmu nalézt tolik píků, kolik jich je větších než přednastavená hranice. U každého vzorku se tudíž vyhledá různý počet maxim, ale právě jejich počet byl dobrým prvotním vodítkem pro odhadování kvality materiálu.

Nepoškozené vzorky mají obvykle chudší akustické spektrum než poškozené.

2.1.2 Experiment a výsledky

Délka tyče byla naměřena $l = 1,998$ m. Hustotu materiálu je obtížné dohledat s dostatečnou přesností, ale je možné zjistit hmotnost a plochu průřezu.

Při měření se ukázalo, že základní frekvence je ve spektru jasně patrná ještě po deseti sekundách po úderu kladívkem. Na základě této skutečnosti byla nastavena délka záznamu. Při vzorkovací frekvenci zvukové karty 44 100 Hz vychází počet vzorků na 441 000. Pro účely výpočtu rychlé Fourierovy transformace je vhodné zvolit počet vzorků na mocninu dvou. V takovém případě je algoritmus pro výpočet spektra nejrychlejší. Z těchto úvah vychází optimální počet vzorků 524 288, což je 2^{19} . Tomu odpovídá doba záznamu přibližně $\tau = 11,9$ sekund, a tudíž rozlišení ve frekvenční oblasti $\Delta f = 0,084$ Hz. Po nastavení těchto parametrů bylo znovu několikrát ověřeno, že po celou dobu záznamu je hlavní frekvence zřetelně přítomná, což dokládá obrázek 2.7.

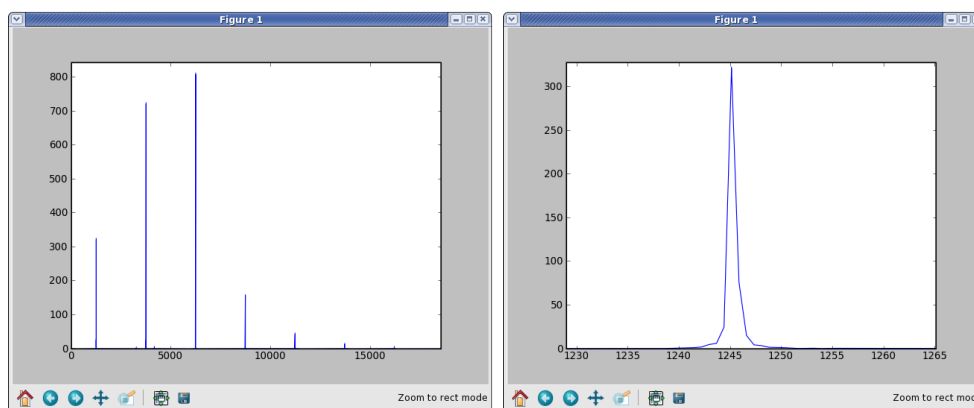
Naměřená frekvence základního módu měla hodnotu $f = 1245,32$ Hz a s přihlédnutím k frekvenčnímu kroku se dostáváme k relativní chybě 0,0068 %, tj. 68 ppm. Je zřejmé, že se jedná o teoretickou limitní hodnotu. Po sérii měření a statistickém zpracování hodnot se ukázalo, že skutečná chyba je přibližně $10\times$ větší.

Pro stručnost vynecháme další podrobnosti, zde je výsledek měření:

$$E = 68,93 \text{ GPa}$$

což odpovídá hodnotám uváděným v tabulkách. Zajímavým údajem může být též rychlost zvuku. Pokud známe frekvenci a současně vlnovou délku (která je dvojnásobkem délky tyče, tj. $\lambda = 2l$), pak platí

$$c = \lambda f = 2lf = 4975 \text{ m s}^{-1}$$



Obr. 2.7: Nalevo je snímek obrazovky frekvenčního analyzátoru představující celé naměřené spektrum kmitající tyče. Sudé harmonické frekvence jsou potlačeny. V pravé části obrázku je zvětšená oblast kolem základní frekvence $f = 1245$ Hz.

2.1.3 Závěr

Z měření frekvence podélných kmitů byl zjištěn modul pružnosti v tahu, přičemž experiment byl uspořádán tak, aby měření frekvence nebylo největším zdrojem chyb.

Z odhadů přesnosti se ukázalo, že dostupná měřidla na měření délky a průřezu tyče mají větší chybu měření než samotné měření frekvence, u kterého lze odhadnout chybu na 680 ppm, přičemž se skutečně jedná o pouhý odhad. Ukázalo se, že dotyk ruky může tyč ohřát natolik, že vlivem délkové roztažnosti můžeme pozorovat změnu v rezonanční frekvenci.

Pravděpodobně největší negativní vliv na měření má zjišťování tloušťky stěny profilu. Pokud bychom chtěli dosáhnout stejného vlivu jako při měření frekvence, je potřeba relativní chybu frekvence vynásobit dvěma kvůli druhé mocnině, s výsledkem 0,00136. Museli bychom tloušťku profilu o síle 2 milimetry měřit s chybou 2,7 mikrometrů.

Závěrem je, že akustické metody mohou být za určitých podmínek velmi přesné, srovnáme-li relativní chybu například s délkovými měřidly používanými v řemeslné praxi.

2.1.4 Teplotní závislost frekvence podélných kmitů hliníkové tyče

Na základě dříve uvedeného popisu byl vytvořen software pro automatizovaný výpočet frekvenčního spektra a následné rozeznávání jednotlivých frekvenčních maxim.

Pro otestování správné funkce programu byl navržen experiment, jehož výsledkem má být závislost frekvence podélných kmitů hliníkové trubky na teplotě. Změna teploty povede ke změně rozměrů vlivem teplotní roztažnosti a současně lze očekávat i změnu modulu pružnosti v tahu. Oba tyto efekty ovlivňují rezonanční frekvenci.

Měření teploty a zahřívání

Během experimentu byla trubka vyhřívána odporovým drátem, který vedl v ose trubky aniž se dotýkal stěn. Drát byl udržován napnutý pomocí pružiny. V opačném případě by se v důsledku teplotní roztažnosti při zahřívání prověsil, dotýkal by se pak trubky a ovlivňoval kmitání.

Topný drát o odporu $3\ \Omega$ byl připojen na regulovatelný zdroj o maximálním napětí 30 V, což umožňuje nastavit maximální topný výkon na

$$P_{\text{MAX}} = \frac{U_{\text{MAX}}^2}{R} = 300\ \text{W}$$

Jak se během měření ukázalo, tento výkon je dostatečný k dosažení teploty 210 °C, což má za následek zřetelnou změnu rezonanční frekvence. Teplota byla zjišťována pomocí bezkontaktního infračerveného teploměru. Princip měření spočívá v detekci emitovaného záření, u kterého lze očekávat maximum vlnové délky v řádu jednotek mikrometrů. Je známo (a snadno lze ověřit), že lesklý hliníkový povrch bude mít pro tuto oblast nízkou emisivitu, a proto by měření teploty bylo značně zkresleno. Z toho důvodu byl na povrch trubky, do místa, kam byl namířen teploměr, nanesen černý matný lak o vysoké emisivitě.

Přesto lze měření teploty vytknout skutečnost, že zjišťujeme teplotu pouze na povrchu trubky, nikoli v celém objemu materiálu. Nepochybně bude naměřená teplota nižší než odpovídá skutečné průměrné teplotě materiálu. Lze však očekávat, že hliník má natolik vysokou tepelnou vodivost, že se teplotní rozdíly do značné míry vyrovnají. Tomu napomáhá i výše zmíněný fakt, že hliník má nízkou emisivitu, což snižuje požadavky na topný výkon a tím se snižuje i případný teplotní gradient.

Vzhledem k tomu, že znalost teploty je klíčová pro vyvození závěrů z měření, raději vypočítáme teplotní rozdíl vnitřní a vnější stěny trubky. Vyjdeme-li z Fourierova zákona pro vedení tepla, pak

$$q = -\lambda \nabla T$$

kde q je tepelný tok, λ je tepelná vodivost a ∇T je gradient teploty. Trubka má válcovou symetrii, takže gradient teploty lze očekávat pouze v radiálním směru. Proto můžeme gradient teploty přepsat jako derivaci teploty podle radiální souřadnice r . Současně tepelný

tok zapíšeme jako poměr tepelného výkonu a plochy pláště válce:

$$\begin{aligned}\frac{P}{S} &= -\lambda \frac{dT}{dr} \\ \frac{P}{2\pi rl} &= -\lambda \frac{dT}{dr}\end{aligned}$$

Na levou stranu rovnice převedeme členy obsahující souřadnici r a následně obě strany rovnice zintegrujeme. Meze integrálu vycházejí z toho, že teploty na vnitřním (T_1) a vnějším (T_2) povrchu trubky odpovídají vzdálenostem od středu R_1 a R_2 .

$$\begin{aligned}\int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} &= \int_{T_1}^{T_2} -\frac{\lambda 2\pi l}{P} dT \\ [\ln r]_{R_1}^{R_2} &= -\frac{\lambda 2\pi l}{P} (T_2 - T_1) \\ \ln \frac{R_2}{R_1} &= \frac{\lambda 2\pi l}{P} (T_1 - T_2)\end{aligned}$$

Výsledný teplotní rozdíl nyní vypočteme pro nejméně příznivou situaci, kdy je naměřená teplota T_2 nejvyšší, a také bude největší teplotní gradient. Tomu odpovídá tepelný výkon $P = 300$ W. Jak již bylo uvedeno, trubka měla délku $l = 1,435$ m, její vnější průměr byl 12 mm a síla stěny 1 mm. Z toho vycházejí hodnoty pro vnitřní a vnější poloměr $R_1 = 5$ mm a $R_2 = 6$ mm.

Dále bude nutné znát tepelnou vodivost hliníku, která však závisí na teplotě, což bychom měli vzít v úvahu. Při pokojové teplotě se udává hodnota $\lambda = 205$ W/m/K, zatímco při teplotě 225 °C již tepelná vodivost vzroste na $\lambda = 250$ W/m/K. Pro výpočet použijme druhou z uvedených hodnot.

$$dT = \frac{P \ln \frac{R_2}{R_1}}{\lambda 2\pi l} \approx 0,024 \text{ °C}$$

Z výpočtu je zřejmé, že teplotní rozdíl mezi vnitřní a vnější stěnou trubky je zcela zanedbatelný a měření teploty pouze na jejím vnějším povrchu je dostatečně reprezentativní.

Průběh měření

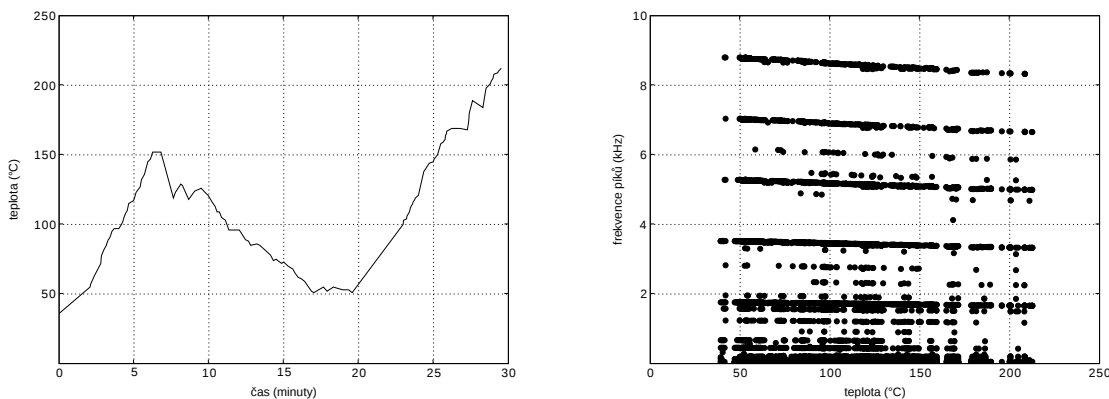
Aby se kmity co nejméně tlumily, byla během měření trubka zavěšena na dvou vláknech. V bezprostřední blízkosti jednoho konce trubky byl umístěn mikrofon.

Do opačného konce trubky byly vedeny úderý kladívkem, čímž se vybudila podélná vlna. Program, který byl vytvořen pro záznam měření, pracoval tak, aby se co nejvíce činností zautomatizovalo. Při každém úderu se zvukový signál zaznamenal, vypočítalo se jeho frekvenční spektrum a v něm bylo nalezeno prvních deset nejvyšších maxim. Postačilo pouze jednou za několik sekund udeřit kladívkem, přičemž software dokázal jednotlivé události sám rozlišit a zpracovat.

Současně bylo nutné vkládat do počítače naměřenou teplotu. Tento krok bylo nutno provádět ručně a odečítat z displeje teplotu. Velkou pomocí však bylo, že okamžik zápisu teploty byl zaznamenán, a tak mohly být jednotlivé akustické události korelovány s teplotou na základě času pořízení.

Časy úderů kladívka a měření teploty si navzájem neodpovídají, jsou nepravidelné a víceméně náhodné. Software byl proto uzpůsoben tak, aby pro daný čas vzniku akustické události našel příslušnou teplotu pomocí interpolace.

Popsaný postup vedl k tomu, že během jednoho měření bylo pohodlně získáno téměř tisíc akustických událostí při různých teplotách a v každém záznamu bylo nalezeno několik rezonančních frekvencí. Takto velký soubor dat nejenže vedl k možnosti statistického zpracování, ale také ověřil správnou funkci všech vyhodnocovacích algoritmů.



Obr. 2.8: Graf nalevo představuje závislost teploty na čase. Pravý graf obsahuje jednotlivá frekvenční maxima vyhodnocená pro danou teplotu.

Výsledky

Hliníková trubka byla nejprve zahřáta z laboratorní teploty na přibližně 150 °C, pak byl zdroj napájení vypnut a po nějakém čase opět zapnut. Tomu odpovídá i křivka záznamu teploty na grafu 2.8.

Dále byly vykresleny grafy pro první čtyři nejvýraznější frekvenční maxima. Zcela v souladu s očekáváním byla nalezena základní frekvence podélných kmitů na hodnotě $f = 1,76$ kHz. Tuto hodnotu můžeme ověřit výpočtem za předpokladu, že použijeme tabulkovou hodnotu pro Youngův modul pružnosti v tahu pro hliník $E = 69$ GPa, dále známe hustotu hliníku $\rho = 2700$ kg m⁻³ a jediný další potřebný parametr je délka tyče $l = 1,435$ m. Frekvence základního módu podélných vln pak vychází

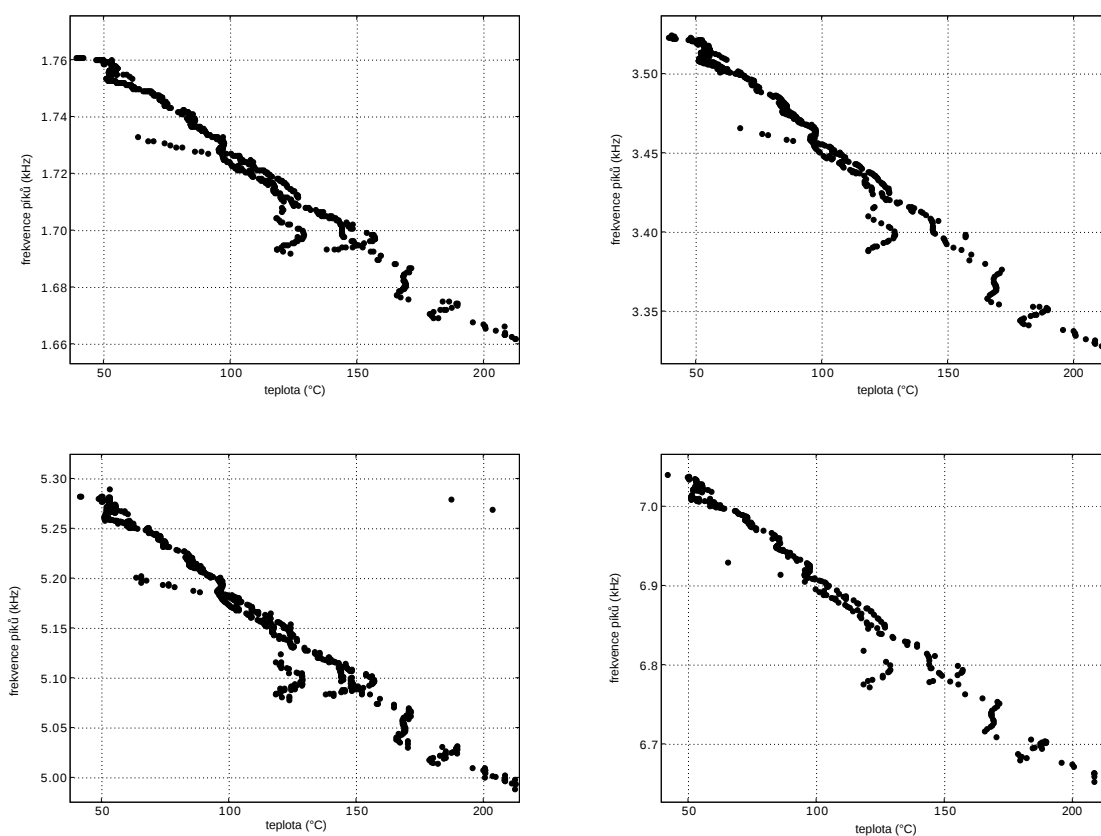
$$f = \sqrt{\frac{E}{4\rho l^2}} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \approx 1761 \text{ Hz}$$

Ve spektru byly nalezeny i vyšší harmonické frekvence, jak dokládají následující grafy 2.9.

Pro laboratorní teplotu nalezneme ve spektrech frekvenční maxima odpovídající základní frekvenci $f_1 = 1,76$ kHz, ale také její dvojnásobek $f_2 = 3,52$ kHz, trojnásobek $f_3 = 5,28$ kHz, čtyřnásobek $f_4 = 7,05$ kHz a řadu dalších.

Závěr

S rostoucí teplotou hliníkové trubky zcela zjevně klesají frekvence i rychlosti podélných vln pro všechny naměřené módy kmitání. Zvýšení teploty z laboratorních podmínek na 210 °C vede ke snížení frekvence přibližně o 5 %. Dále jsou na grafech patrné i další frekvence, které nejsou v souladu s dosavadními úvahami. Jedná se o další vlivy, především příčné kmity, které nebyly předmětem zkoumání, ale naprogramovaný algoritmus je ve spektru našel.



Obr. 2.9: Ve spektru byla nalezena řada vyšších harmonických frekvencí. Pro ilustraci jsou na grafech vykresleny první čtyři nejvýraznější.

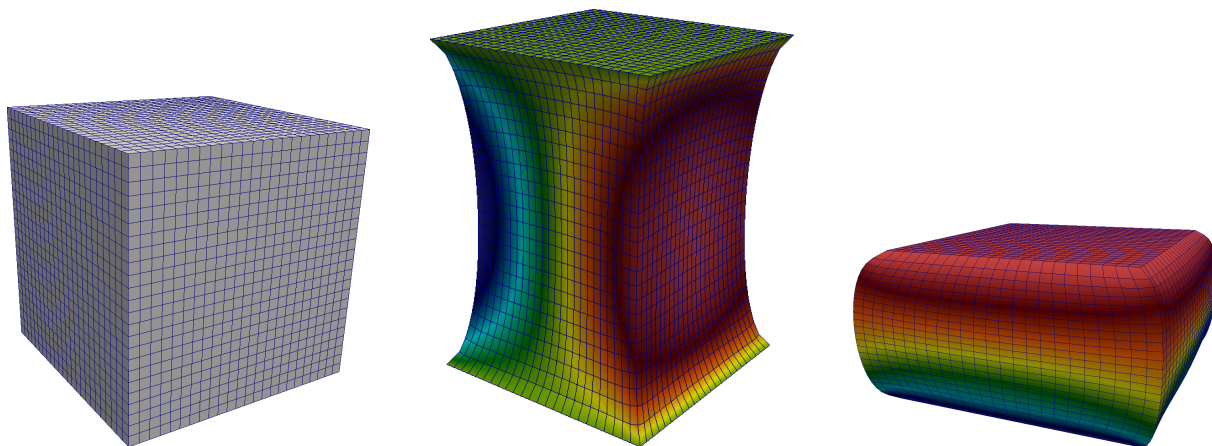
2.2 Poissonův poměr

V minulé kapitole jsou popsány podélné kmity tenké tyče, přičemž jsme zcela ignorovali Poissonův poměr a byl zmíněn pouze okrajově.

Pro další úvahy bude vhodné uvést, že Poissonův poměr¹ ν je materiálová vlastnost, která může ovlivnit frekvenční spektrum vibrujícího předmětu. Je definován jako poměr mezi změnou příčných rozměrů způsobenou podélnou změnou rozměrů. Jinými slovy, pokud vlivem délkové deformace ε_l dojde k deformaci příčné ε_t , pak Poissonův poměr daného materiálu je

$$\nu = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_l}$$

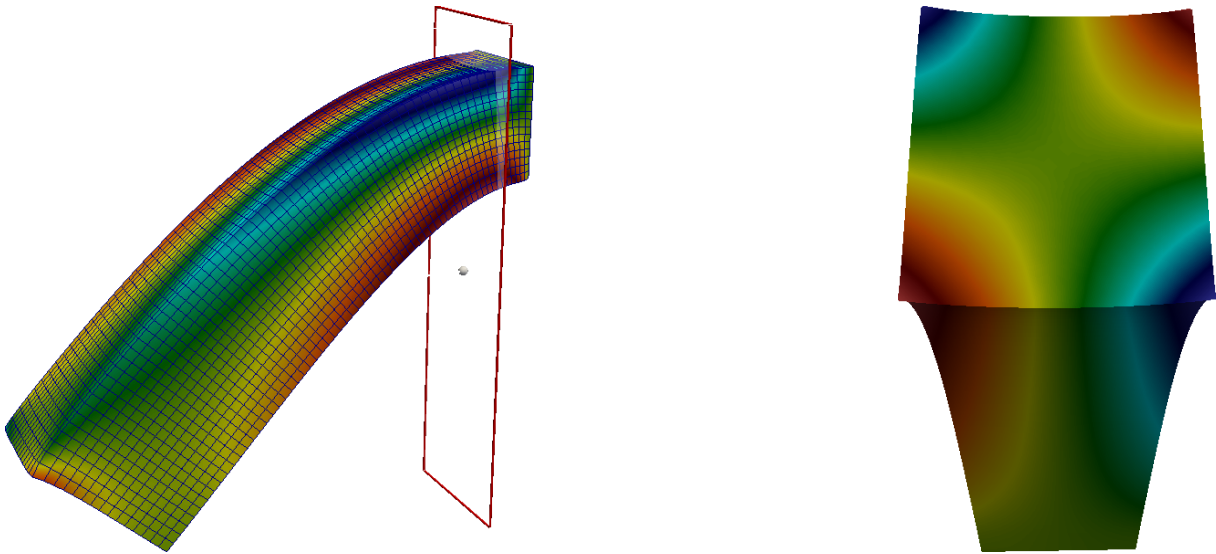
Běžná zkušenost dokazuje, že natažením materiálu, například gumy, dojde současně ke ztenčení. Naopak stlačení způsobí vyboulení do stran. Jak je vidět na obrázku 2.10, deformace mají opačný charakter, tedy zmenšení jednoho rozměru provází zvětšení druhého, takže záporné znaménko u zlomku vede k tomu, že koeficient vychází kladný.



Obr. 2.10: Nenulový Poissonův poměr má za následek změnu příčných rozměrů při změně podélného rozměru. Obrázky demonstrují deformaci vzorku ve tvaru krychle. Jestliže jej namáháme v tahu, dojde k jeho zúžení a naopak namáhání v tlaku způsobuje vyboulení do stran. K tomuto jevu dochází také u podélných kmitů.

Efekt souvisí s mírou zachování celkového objemu při deformaci. Poissonův poměr

¹Nyní se věnujeme teorii elastických prostředí, ale pojem Poissonův poměr anebo Poissonova konstanta se používá též v souvislosti s kinetickou teorií plynů. Má tam zcela jiný význam, značí se γ a představuje poměr tepelných kapacit – izobarické vůči izochorické c_p/c_V . Souvisí s počtem stupňů volnosti f molekul plynů: $\gamma = 2/f + 1$.



Obr. 2.11: Obrázky znázorňují vypočtenou deformaci při namáhání ohybem. V pravé části je zobrazen detail průřezu naznačenou rovinou, kde je patrná změna tvaru původně čtvercového profilu. K tomuto druhu deformace dochází též při příčných kmitech.

může nabývat hodnot od nuly, kdy ke zmiňovanému jevu nedochází vůbec, až po 0,5, kdy je efekt maximální.

Doprovodné ilustrace k této kapitole byly vypočteny metodou konečných prvků a simulovaný materiál měl hodnotu $\nu = 0,5$. Znamená to, že je nestlačitelný, a celkový objem zůstával konstantní.

Mezi často uváděné materiály s opačnými vlastnostmi patří již zmiňovaná guma a kork. Příčné ztenčení či vyboulení gumy při délkové deformaci je v přímém protikladu s korkem. Ten své příčné rozměry nemění téměř vůbec, díky čemuž je například zátkování lahví relativně snadný úkon.

Poissonův poměr ν je obtížné měřit přímo, ale lze jej vypočítat užitím Youngova modulu pružnosti v tahu E a modulu pružnosti ve smyku G . Platí

$$\nu = \frac{E}{2G} - 1$$

U klasických inženýrských úloh se Poissonův poměr často zanedbává, protože jeho vliv není podstatný, máme-li na mysli například napětí a deformaci při ohybu. Přesněji řečeno se předpokládá, že Poissonův poměr je roven nule, což vede k naprosto oprávněné představě, že průřez tyče, trubky, nosníku, traverzy apod. zůstává při namáhání konstantní.

Kdyby délková deformace dosáhla takové míry, že by se i příčný průřez znatelně změnil, viz obrázek 2.11, znamenalo by to naprosto nevhodně navrženou konstrukci na hranici destrukce.

Nicméně, měření rezonanční frekvence může být natolik přesné, že dokáže odhalit vliv Poissonova poměru. Vezmeme-li v úvahu tyto jevy, pak se musíme smířit s tím, že neplatí ani Hookův zákon. Spolu s ním přestávají platit všechny běžně používané vzorce pro výpočet namáhání při ohybu. Nemůžeme se spolehnout ani na dosud snadný výpočet rychlosti podélných vln.

Výsledkem je, že pokud požadujeme postihnout jevy související s nenulovým Poissonovým poměrem, analytická řešení jsou velmi složitá anebo ani neexistují. Jediným východiskem bývá numerická simulace.

2.3 Příčné kmity

Příčné kmity jsou dalším módem kmitání tenké tyče. V této kapitole rozebereme Euler–Bernoulliho teorii výpočtu a také modální analýzu. Obě metody budou ověřeny experimentem. Naznačíme též možnost výpočtu pomocí řady vázaných oscilátorů.

2.3.1 Euler–Bernoulliho teorie

V prvním přiblížení, kdy zanedbáváme Poissonův poměr (tj. $\nu = 0$) je u příčných kmitů tyč namáhána pouze v tahu a v tlaku, přičemž obě napětí jsou způsobena ohybem. Smykové napětí je nulové. Dále předpokládejme, že tyč je velmi tenká a celý problém můžeme považovat za jednorozměrný.

Nejprve rozeberme statický případ. Necht' má tyč délku l a jeden z koncových bodů umístíme do počátku souřadné soustavy, přičemž osa x povede podél tyče. Současně zavedeme *spojité zatížení* $q(x)$, které má jednotku N/m a představuje vnější příčnou sílu působící na délkový element dl .

Síla způsobí deformaci tyče, přičemž výchylka z rovnovážné polohy závisí na poloze x . Tato deformace $u(x)$ představuje spojitou funkci definovanou na intervalu $\langle 0; l \rangle$ a platí

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = q(x) \quad (2.1)$$

což je základní diferenciální rovnice vycházející z Euler–Bernoulliho teorie, a ze které lze dále odvodit mnoho užitečných vztahů pro ohyb nosníků, traverz, tyčí a podobně. Obvykle jsou zadány okrajové podmínky, které představují způsob uchycení tyče. Úkolem je například najít tvar prohnuté tyče a s tím spojený ohybový moment, který následně vede k výpočtu napětí.

Přibližně lze na rovnici pohlížet tak, že na každý délkový element působí síla vzniklá v důsledku deformace a tato síla vyrovnává vnější sílu $q(x)$ a ve výsledku tyč setrvává v klidu.

V našem případě však předpokládáme zcela volně kmitající tyč bez vnějších sil, tudíž $q(x)$ je po celé délce rovno nule, avšak síla působící na délkový element zde způsobí jeho zrychlení v souladu s druhým Newtonovým zákonem.

Hmotnost délkového elementu (tj. lineární hustotu) označme σ , jejíž jednotka je kg/m. Protože zrychlení elementu je jeho druhá časová derivace polohy, pak platí

$$EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} = -\sigma \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

Přičemž záporné znaménko značí fakt, že elastické síly působí proti směru výchylky a mají snahu vracet element zpět do rovnovážné polohy.

Výše uvedenou lineární parciální diferenciální rovnici čtvrtého řádu se pokusme vyřešit pomocí předpokladu, že hledanou funkci $u(x, t)$ je možné vyjádřit jako součin dvou funkcí. První z nich, $\varphi(x)$, nechť závisí pouze na souřadnici x , a druhá funkce $\psi(t)$ bude záviset pouze na čase. Hledanou funkci $u(x, t)$ tudíž můžeme rozepsat na součin

$$u(x, t) = \varphi(x) \psi(t) \quad (2.3)$$

a ten dosadíme do diferenciální rovnice 2.2 a provedeme separaci proměnných:

$$EI \psi(t) \frac{\partial^4 \varphi(x)}{\partial x^4} = -\sigma \varphi(x) \frac{\partial^2 \psi(t)}{\partial t^2} \quad (2.4)$$

$$-\frac{EI}{\sigma} \frac{1}{\varphi(x)} \frac{\partial^4 \varphi(x)}{\partial x^4} = \frac{1}{\psi(t)} \frac{\partial^2 \psi(t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \quad (2.5)$$

kde ω je zatím neznámá kladná konstanta. Tu zavádíme z toho důvodu, aby časová rovnice obsahující $\psi(t)$ měla tvar rovnice pro harmonický oscilátor. Úpravami získáváme dvě nezávislé rovnice pro dvě hledané funkce, přičemž pro stručnost již vynecháme označování nezávislých proměnných x a t .

První rovnice je časová, obsahuje hledanou funkci ψ a má tvar

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \omega^2 \psi \quad (2.6)$$

přičemž druhá rovnice je prostorová a obsahuje funkci φ :

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - \frac{\omega^2 \sigma}{EI} \varphi = 0 \quad (2.7)$$

První rovnice má stejný tvar, ke kterému bychom dospěli při řešení harmonického oscilátoru, který kmitá s úhlovou frekvencí ω . Hledanou funkci ψ můžeme napsat ve tvaru

$$\psi = F \cos \omega t + G \sin \omega t \quad (2.8)$$

Konstanty F a G můžeme zjistit z počátečních podmínek kmitání a lze je přepočítat na amplitudu a fázi. Každý bod tyče tedy koná harmonický pohyb se stejnou fází. Amplituda stejná nebude, protože její prostorové rozložení je dáno funkcí φ . Zavedeme-li substituci

$$\lambda^4 = \frac{\omega^2 \sigma}{EI}$$

pak se rovnice 2.7 zjednoduší na

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - \lambda^4 \varphi = 0 \quad (2.9)$$

což je obyčejná diferenciální rovnice čtvrtého řádu s konstantními koeficienty. Předpokládané řešení ve tvaru

$$\varphi = e^{\alpha x}$$

dosadíme zpětně do rovnice, a pak po úpravě vyjde charakteristická rovnice

$$\alpha^4 + \lambda^4 = 0$$

jejíž čtyři kořeny jsou:

$$\alpha_{1,2} = \pm \lambda \quad \text{a} \quad \alpha_{3,4} = \pm i\lambda$$

a jim odpovídají tato čtyři řešení:

$$e^{\lambda x}, \quad e^{-\lambda x}, \quad e^{i\lambda x}, \quad e^{-i\lambda x}$$

Obecné řešení získáme jako lineární kombinaci těchto partikulárních řešení. Nyní použijeme vztahy pro přechod z exponenciálních tvarů na goniometrický a hyperbolický. Protože platí

$$e^{\pm \lambda x} = \cosh \lambda x \pm \sinh \lambda x \quad \text{a} \quad e^{\pm i\lambda x} = \cos \lambda x \pm i \sin \lambda x$$

můžeme celkové obecné řešení napsat ve tvaru této lineární kombinace:

$$\varphi = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x + C \cosh \lambda x + D \sinh \lambda x$$

Čtyři konstanty A, B, C, D se určí z okrajových podmínek. V dalších úvahách se pokusme najít řešení pro kmitající tyč, která je na jednom konci (např. v $x = 0$) pevně vetknuta a opačný konec ($x = l$) je nechtě je volný. Okrajové podmínky pro první konec jsou zřejmé – poloha je stále nulová a také první derivace je nulová, protože i při deformaci je tečna vodorovná v místě uchycení.

Na opačném konci platí, že druhá i třetí derivace je nulová. Všechny čtyři podmínky lze zapsat matematicky takto:

$$\varphi(0) = 0 \quad \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=0} = 0 \quad \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_{x=l} = 0 \quad \left(\frac{d^3\varphi}{dx^3}\right)_{x=l} = 0$$

Zavedeme-li tyto podmínky do řešení, dostaneme soustavu čtyř lineárních rovnic pro konstanty A, B, C, D .

$$\begin{aligned} 0 &= A + C \\ 0 &= B + D \\ 0 &= -A \cos \lambda l - B \sin \lambda l + C \cosh \lambda l + D \sinh \lambda l \\ 0 &= A \sin \lambda l - B \cos \lambda l + C \sinh \lambda l + D \cosh \lambda l \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic plyne $C = -A$ a $D = -B$, což dosazeno do druhých dvou rovnic vede ke vztahům

$$\begin{aligned} -A(\cos m + \cosh m) - B(\sin m + \sinh m) &= 0 \\ A(\sin m - \sinh m) - B(\cos m + \cosh m) &= 0 \end{aligned}$$

kde jsme zavedli označení

$$m = \lambda l$$

Aby výše uvedená soustava dvou lineárních rovnic měla netriviální řešení, je nutné a stačí, aby její determinant vymizel. To vede na transcendentní rovnici

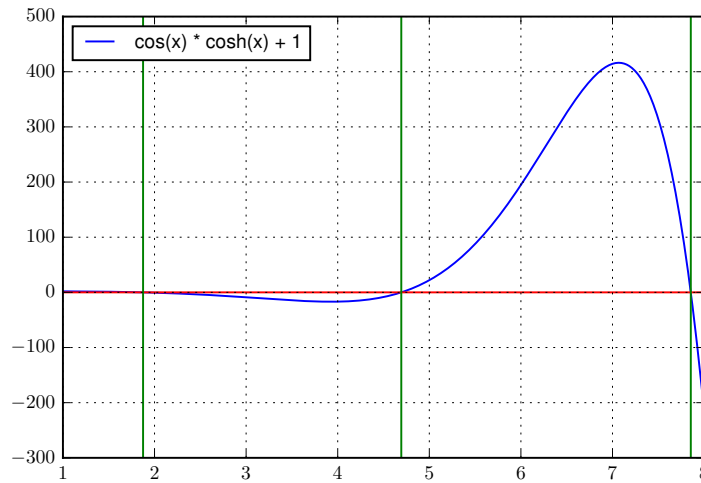
$$(\cos m + \cosh m)^2 + \sin^2 m - \sinh^2 m = 0$$

kterou můžeme upravit na tvar

$$\cos m \cosh m = -1 \tag{2.10}$$

přičemž kořeny této rovnice se přibližně rovnají lichým násobkům $\pi/2$. Přesnější hodnoty pro první tři kořeny jsou

$$m_1 = 1,8751 \quad m_2 = 4,6941 \quad m_3 = 7,8548$$



Obr. 2.12: Funkce $\cos x \cosh x + 1$ začíná na hodnotě 1 a pak následuje klesání. K prvnímu protnutí osy x dojde v bodě $x = 1,8751$. Tento detail není na grafu dobře patrný kvůli velkému rozsahu na ose y , který byl nutný pro zobrazení dalšího průběhu.

a jejich hodnotu, i hodnotu dalších řešení, lze snadno získat numericky. Průběh funkce spolu s prvními třemi kořeny je vykreslen na grafu 2.12.

Označíme-li m_n ($n = 1, 2, 3 \dots$) kořeny rovnice, pak pro charakteristické hodnoty λ platí

$$\lambda_n = \frac{m_n}{l}$$

a jim příslušné charakteristické funkce mají tvar

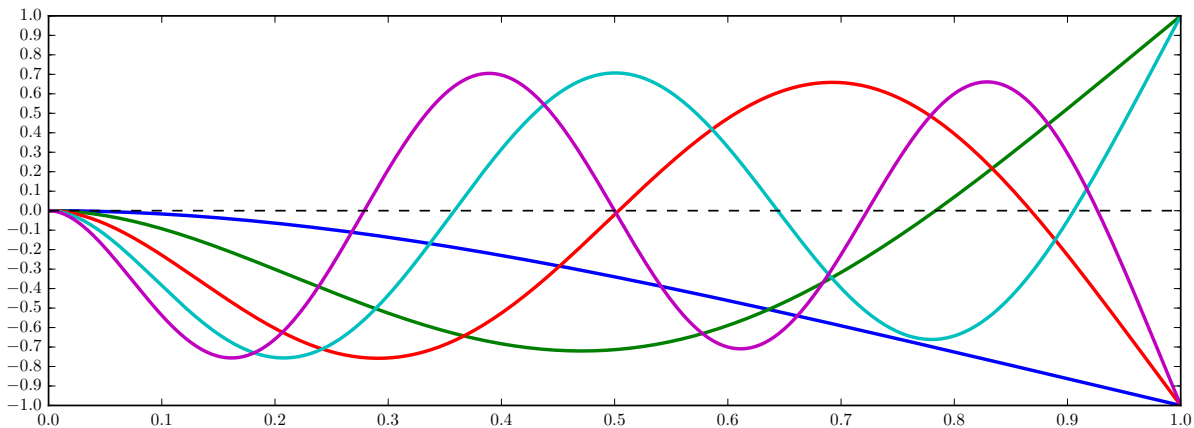
$$\begin{aligned} \varphi_n(x) = A_n \left[(\cos m_n + \cosh m_n) \left(\cos \frac{m_n}{l} x - \cosh \frac{m_n}{l} x \right) \right. \\ \left. + (\sin m_n - \sinh m_n) \left(\sin \frac{m_n}{l} x - \sinh \frac{m_n}{l} x \right) \right] \end{aligned}$$

Konstanty A_n bychom určili z počátečních podmínek. Pro každé n získáme mód kmitání, kterému přísluší vlastní tvar a vlastní frekvence. Vlastní tvar je určen funkcí φ_n . Pro prvních pět módů jsou tyto tvary vykresleny na grafu 2.13.

Vidíme, že poloha kmiten a uzlů zde není tak snadno předpověditelná, jako například u podélných kmitů nebo kmitů struny.

Úplné řešení by pak vzniklo jako superpozice

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n (E_n \cos \omega_n t + G_n \sin \omega_n t) \quad (2.11)$$



Obr. 2.13: Prvních pět vlastních tvarů vypočtených pro příčně kmitající tyč s jedním vetknutým koncem a druhým volným. Multiplikační konstanta pro jednotlivé módy byla zvolena tak, aby amplituda byla rovna jedné.

a opět by zbývalo určit konstanty E_n a G_n . Pro frekvenci kmitů ω_n plyne vztah

$$\omega_n = \frac{m_n^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\sigma}}$$

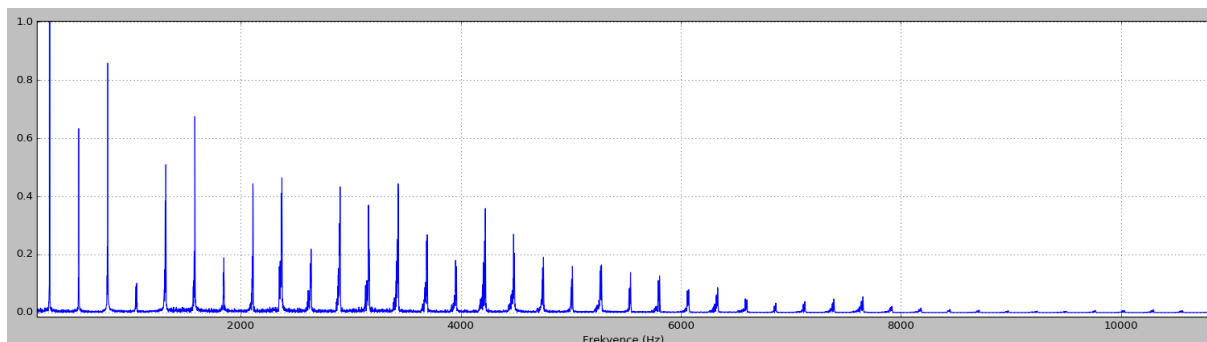
Vidíme, že u příčných kmitů nejsou frekvence vyšších módů pouze násobky základní frekvence. Pokud bychom uvažovali, že příčné kmity by měly být základem pro nějaký hudební nástroj, pak je ladění poněkud problematické. Nabízí se zde srovnání s podélnými kmity či kmity struny, kde je druhá harmonická frekvence dvojnásobkem frekvence základní a tyto módy spolu přirozeně ladí. U příčných kmitů však můžeme správně naladit pouze jeden mód, zatímco ostatní, striktně vzato, vůbec nepatří do hudební stupnice.

Je potřeba zdůraznit, že jsme vypočítali spektrum *volných* příčných kmitů, které nejsou ovlivněny vnějšími silami. Protipříkladem může být kmitající jazýček harmoniky, pro který naše závěry nebudou platit, protože ten je rozehvíván harmonickou silou, a též jeho spektrum je harmonické, což dokládá měření na obr. 2.14.

Tím jsme v úvahách poněkud odbočili, ale přesto je důležitým poznatkem to, že příčné kmity jsou anharmonické, a ve spektru nejsou jejich frekvence ekvidistantní. Současně je třeba být obezřetný v interpretaci výsledků měření v nedestruktivním testování, které vznikly použitím budiče pracujícím s jednou základní rezonanční frekvencí.

Příčně kmitající tyč s oběma konci volnými

Při nedestruktivním testování budeme analyzovat vzorky, které budou nejčastěji uložené



Obr. 2.14: Na obrázku je frekvenční spektrum jednoho tónu foukací harmoniky. Tón je u harmoniky tvořen příčně kmitajícím jazýčkem, jehož jeden konec je upevněn a druhý volně kmitá. Ve spektru lze rozlišit více než 40 módů kmitání.

tak, aby mohly kmitat zcela volně. Hledáme-li řešení pro příčné kmity volně kmitající tyče, můžeme vyjít z velmi podobných úvah jako v předešlém případě, pouze s tím rozdílem, že okrajové podmínky budou na obou koncích stejné, a musí platit, že druhá a třetí derivace bude na obou koncích nulová.

Opět získáme čtyři lineární rovnice o čtyřech neznámých koeficientech:

$$0 = -A + C$$

$$0 = -B + D$$

$$0 = -A \cos \lambda l - B \sin \lambda l + C \cosh \lambda l + D \sinh \lambda l$$

$$0 = A \sin \lambda l - B \cos \lambda l + C \sinh \lambda l + D \cosh \lambda l$$

Jedna okrajová podmínka se změnila, takže první dvě rovnice se od předchozího případu liší. Druhá okrajová podmínka zůstala beze změny, a tak druhé dvě rovnice jsou stejné.

Z rovnic je hned patrné, že $C = A$ a současně $D = B$. Počet rovnic tím snadno zredukujeme na dvě, které budou obsahovat neznámé koeficienty A a B : Zavedeme-li substituci $m = \lambda l$, pak tyto rovnice lze psát ve tvaru

$$A(-\cos m + \cosh m) + B(-\sin m + \sinh m) = 0 \quad (2.12)$$

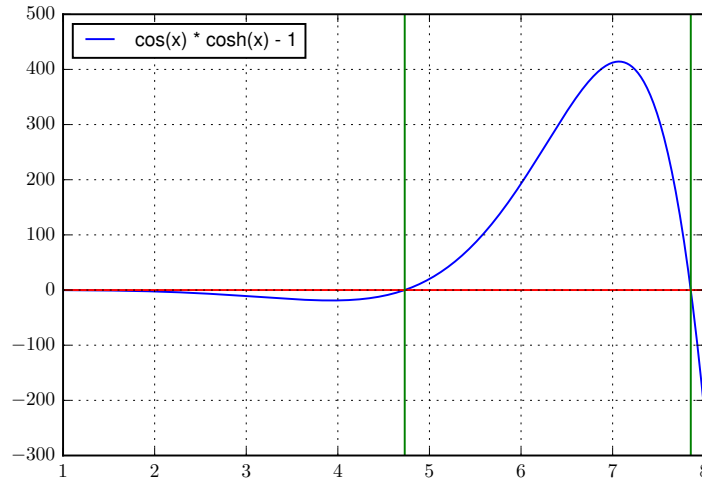
$$A(\sin m + \sinh m) + B(-\cos m + \cosh m) = 0 \quad (2.13)$$

Následné úvahy opět povedou na transcendentní rovnici, jejíž tvar ale bude jiný, než

v předešlém případě 2.10. Vychází

$$\cos m \cosh m = 1 \quad (2.14)$$

hledáme tedy kořeny rovnice $\cos(x) \cosh(x) - 1$, přičemž průběh funkce je znázorněn na grafu 2.15:



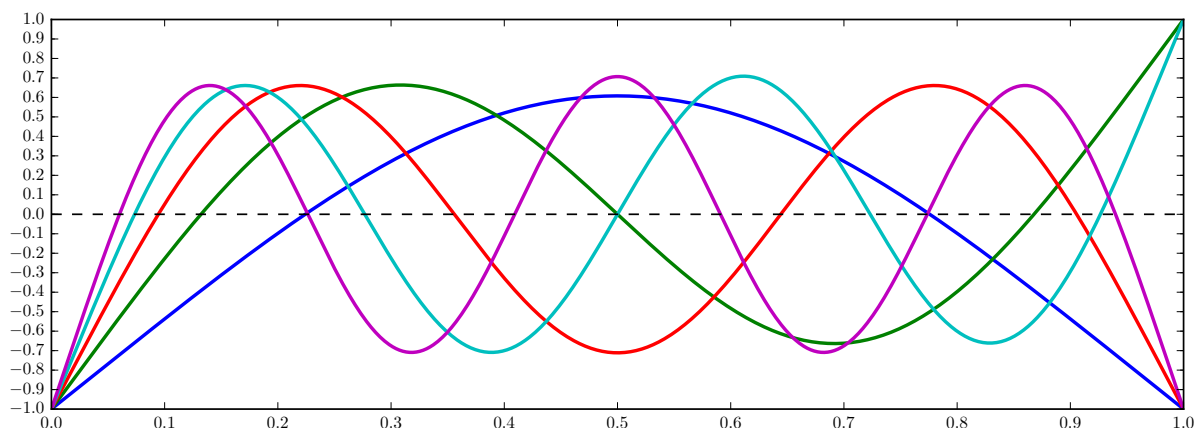
Obr. 2.15: Funkce $\cos(x) \cosh(x) - 1$ má v bodě $x = 0$ hodnotu -1 a její průběh začíná klesáním, takže osu x v první fázi neprotne. Teprve až v následující rostoucí fázi dojde k prvnímu protnutí, a to v bodě $x = 4,73$.

Tato rovnice se liší od rovnice 2.10 změnou znaménka. To má za následek zcela jiné kořeny rovnice, ale přesto je budeme nadále značit m_n . Funkci φ_n , která pro různé pořadové číslo n představuje příslušný vlastní tvar, je možné psát ve tvaru

$$\varphi_n(x) = A_n \left[(\sin m_n x + \sinh m_n x) - \frac{\sin m_n l - \sinh m_n l}{\cos m_n l - \cosh m_n l} (\cos m_n x + \cosh m_n x) \right]$$

a její průběh pro prvních pět módů kmitání je vyneseno na grafu 2.16. Z něj je patrné, že ani pro volně kmitající tyč neexistují místa, ve kterých by byly uzly kmitání pro všechny módy. Tato skutečnost poněkud znesnadňuje uchycení, podepření či zavěšení testovaného předmětu. Obvykle uvažujeme, že uzly mohou být v pevném kontaktu s okolím, aniž by se ovlivnilo kmitání, ale toto nelze splnit pro všechny módy.

Je užitečné mít představu, kde se nacházejí uzly alespoň u základního módu kmitání. Jejich polohu lze určit z grafu 2.16 a hledat místo, kde modrá křivka protíná nulu. Numerickou metodou byl nalezen jeden z kořenů o hodnotě 0,22416 pro tyč o délce $l = 1$. Problém je symetrický, takže druhý z kořenů bude ve stejné vzdálenosti od konce opačného. Pro tyč o jiné délce než $l = 1$ polohu uzlů snadno přepočítáme, protože model lze lineárně škálovat. Pro úplnost uvedme, že rozteč mezi podpěrami bude $0,5517 \cdot l$.



Obr. 2.16: Prvních pět vlastních tvarů vypočtených pro příčně kmitající tyč s oběma volnými konci.

Pro frekvenci volných kmitů platí stejný vztah jako pro frekvenci jednostranně uchytené tyče

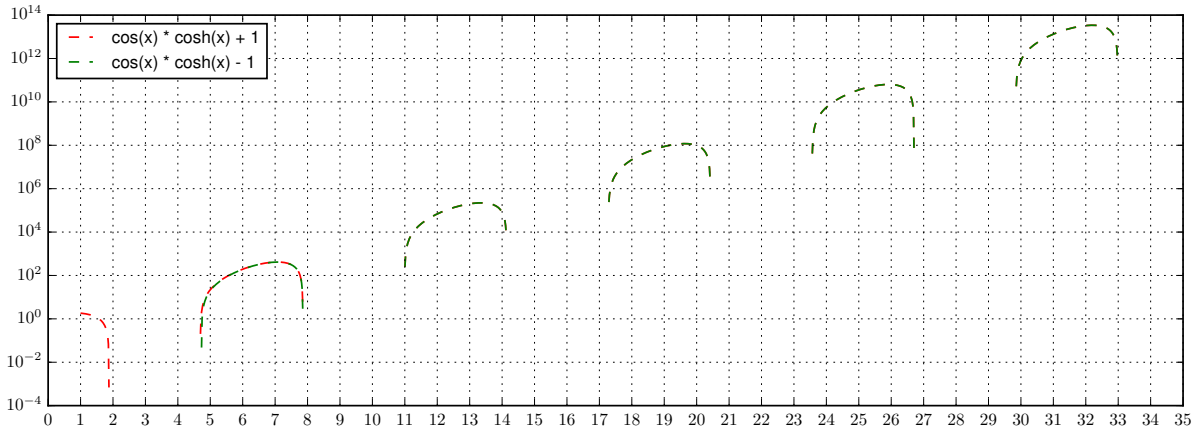
$$\omega_n = \frac{m_n^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\sigma}}$$

ale je třeba mít na paměti, že koeficienty m_n musíme zjistit z rovnice 2.14.

Mezi příčným kmitáním jednostranně vetknuté tyče a volné tyče tedy existuje velmi úzká souvislost. Chceme-li nalézt vlastní frekvence, je v obou případech potřeba najít kořeny transcendentní rovnice. Tyto kořeny mají ve výsledném vztahu pro frekvenci kmitů druhou mocninu. Zároveň platí, jak záhy uvidíme, že s narůstajícím pořadovým číslem kořenů přestávají být mezi řešeními rozdíly a kořeny obou rovnic konvergují k celočíselným násobkům $\pi/2$. Obě funkce jsou vůči sobě vertikálně posunuté o konstantu rovnou dvěma.

Funkce kosinus je oscilující, zatímco hyperbolický kosinus velmi rychle narůstá. Jejich součin je oscilující funkce s rostoucí amplitudou. Rozdílová konstanta o velikosti dva způsobuje to, že funkce $\cos(x) \cosh(x) + 1$ má o jeden kořen více. Kromě této počáteční

fáze se další rozdíly postupně vytrácejí, protože konstanta rovná dvěma je stále více zanedbatelná. Průběh obou funkcí je vyneseno na grafu 2.17.



Obr. 2.17: Obě funkce, $\cos(x) \cosh(x) - 1$ a $\cos(x) \cosh(x) + 1$ se vzájemně liší o konstantu dva, která se stává zanedbatelnou vůči velmi rychle rostoucímu hyperbolickému kosinu. Na grafu je vynesena kladná část obou funkcí v semilogaritmických souřadnicích.

V následující tabulce je uvedeno prvních deset kořenů obou rovnic, jejich druhé mocniny a současně příslušný násobek $\pi/2$ pro srovnání.

i	m_v	m_f	$\pi(i + \frac{1}{2})$	f_v/f_{0v}	f_f/f_{0f}
0	1,875				
1	4,6941	4,7300	4,7124	6,267	1,000
2	7,8548	7,8532	7,8540	17,547	2,757
3	10,9955	10,9956	10,9956	34,386	5,404
4	14,1372	14,1372	14,1372	56,843	8,933
5	17,2788	17,2788	17,2788	84,913	13,344
6	20,4204	20,4204	20,4204	118,598	18,638
7	23,5619	23,5619	23,5619	157,896	24,814
8	26,7035	26,7035	26,7035	202,809	31,872
9	29,8451	29,8451	29,8451	253,336	39,812
10	32,9867	32,9867	32,9867	309,476	48,635

Přestože jsou v tabulce uvedeny koeficienty s přesností na šest platných míst, je přibližně od pátého řádku nerozlišitelné, ke které ze dvou rovnic daný kořen patří. Navíc není

nutno kořeny zjišťovat numerickými metodami, protože jsou velmi blízké hodnotě $\pi(i + \frac{1}{2})$, přičemž pořadové číslo i je posunuté o 1 pro kmity volné tyče vzhledem k vetknuté.

2.3.2 Modální analýza a metoda konečných prvků

Další metodou pro výpočet frekvenčního spektra u vibrujících těles je modální analýza, která patří mezi metody konečných prvků. Uvažuje se, že těleso se skládá z velkého počtu vzájemně propojených vázaných oscilátorů, přičemž každý z nich je hmotný bod s lineární pružnou vazbou, která zprostředkovává sílu úměrnou výchylce a tato síla má snahu vracet hmotný bod do jeho rovnovážné polohy.

Každý z kmitajících bodů mění svou polohu v závislosti na čase, přičemž tato závislost je sice periodická, ale harmonická v obecném případě není. Každou funkci, splníme-li potřebné matematické podmínky, však lze rozepsat jako součet harmonických funkcí.

Modální analýza hledá takové řešení všech pohybových rovnic, které splňuje podmínku, že všechny body kmitají harmonicky se stejnou fází a liší se pouze amplituda. Tu je nutno chápat jako vektor, protože body kmitají obecně v různých směrech.

Uvedenou metodou byl proveden výpočet sloužící jako příklad. Celková trojrozměrná geometrie uvažovaného vzorku byla rozdělena na síť elementů, jejichž tvar byl nastaven na obecný hexahedron. V našem případě však byla síť pravidelná a vzorek měl tvar kvádru, a tak výsledné elementy měly též tvar kvádru, což ale obecně platit nemusí.

Pro modelování byla použita volně šiřitelná knihovna SfePy určená pro výpočty metodou konečných prvků. Toto řešení se ukázalo jako výhodné nejen z hlediska ceny a dostupnosti (je zcela zdarma), ale především pro svou flexibilitu a možnost doprogramování dalších vlastností. Díky tomu bylo možné naprogramovat automatizovaný výpočet, který výsledky modální analýzy přímo porovnával s analytickými metodami a současně testoval různé varianty parametrů vstupujících do modelování.

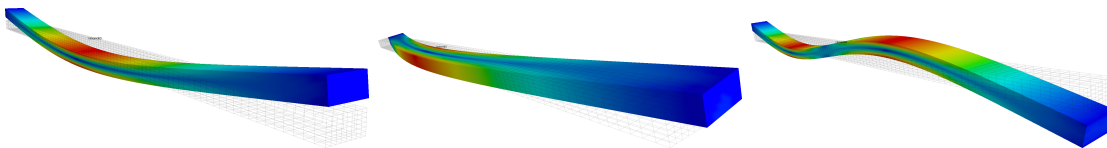
Běžně používané komerční nástroje pro výpočty metodou konečných prvků obvykle obsahují vše potřebné v jednom programovém balíku. V případě SfePy je situace jiná. Předpokládá se, že uživatel či programátor bude knihovnu využívat pod operačním systémem Linux, kde je běžnou součástí řada již hotových matematických nástrojů. Software SfePy tedy neobsahuje žádné grafické uživatelské rozhraní a očekává se, že každý si naprogramuje svůj výpočet dle vlastních potřeb. Neobsahuje ani tesselátor, tj. algoritmus na rozdělení geometrie na jednotlivé elementy. Tento úkol zastane specializovaný program

Tetgen, který je běžnou součástí systému. Také bychom marně hledali rozhraní pro interaktivní kreslení 3D geometrie. Pro tento účel lze využít již hotový program s názvem GMSH. V našem případě ani nebyl potřeba, protože geometrie je natolik jednoduchá, že bylo snazší ji napsat do definičního souboru a ten následně nechat zpracovat programem Tetgen. Z obdobných důvodů není součástí SfePy ani vykreslování výsledků. Bylo by to zbytečné, protože k tomuto účelu slouží program Paraview s bohatými možnostmi zobrazování.

Hlavní součástí SfePy je tedy samotné výpočetní jádro pro metodu konečných prvků. Knihovna dokáže načíst ze souboru souřadnice elementů, zanalyzovat všechny členy v nastavené parciální diferenciální rovnici, dále sestavit příslušnou matici a vyřešit ji pomocí některého z mnoha algoritmů, které jsou dostupné v knihovně SciPy. Výstup se obvykle zapíše do souboru s koncovkou *.vtk zobrazitelném v programu Paraview.

Existuje celá řada řešičů, které jsou schopné si poradit s rozsáhlými maticemi a efektivně s nimi pracovat. Algoritmy se liší rychlostí konvergence, přesností, paměťovou náročností či univerzálností, ale ani ty nejsou součástí SfePy, nýbrž je různí dobrovolní vývojáři implementují do knihoven a SfePy je následně využívá.

Výpočet užitím metody konečných prvků je značně komplikovaný proces, který se skládá z mnoha kroků a běžné komerční programy bývají neobyčejně složité, drahé a jde obvykle o mimořádně velké projekty. Ve světě otevřeného softwaru je však běžné, že jeden program využívá druhý. Tato součinnost vede k tomu, že výpočetní knihovna SfePy je na velmi dobré úrovni a přitom jejím autorem je pouze jediný člověk. Není nutné zdůrazňovat, že je to osobnost² s mimořádnými schopnostmi.

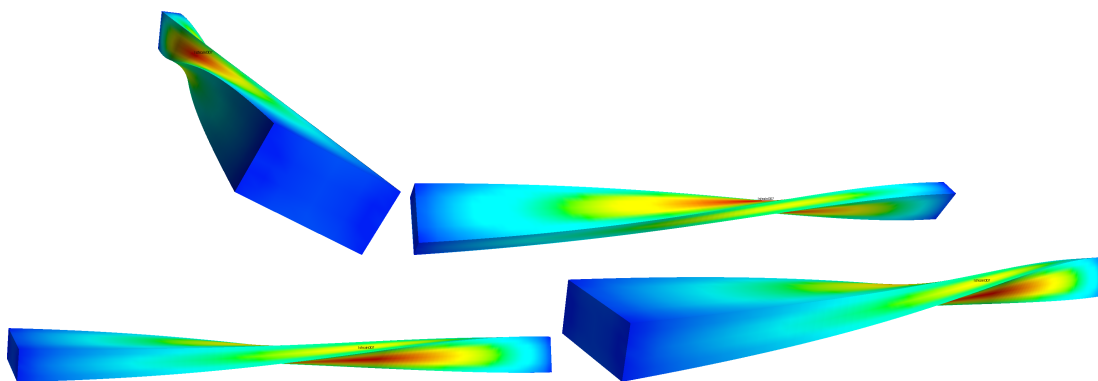


Obr. 2.18: Výpočet základních tvarů pro módy odpovídající příčným kmitům.

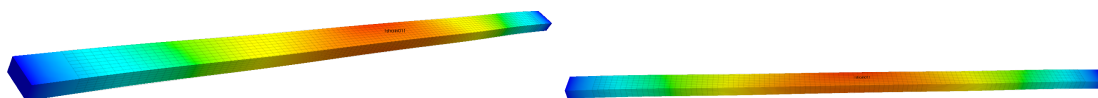
Na obrázcích 2.18, 2.19 a 2.20 je ilustrace několika základních módů kmitání vypočtených pomocí modální analýzy. V tomto případě měl modelovaný vzorek tvar tyče s obdélníkovým průřezem.

Obrázky představují tzv. vlastní tvary testovaného vzorku, což je okamžik, kdy vý-

²Ing. Robert Cimrman, Ph.D., *Centrum nových technologií a materiálů, Západočeská univerzita v Plzni*



Obr. 2.19: Zde je zobrazeno několik různých pohledů na vlastní tvar základního torzního módu.



Obr. 2.20: Ukázka hlavního podélného módu kmitání tyče obdélníkového průřezu

chyłka jednotlivých elementů je maximální. Při kmitání na vlastní frekvenci kmitají všechny body se stejnou fází, čímž je vlastní tvar jednoznačně určen – až na znaménko deformace.

Barva znázorňuje výchylku každého elementu z jeho rovnovážné polohy a na základě toho lze jednotlivé módy rozlišit a pojmenovat – příčné, torzní a podélné. Z principu výpočtu by mělo být zřejmé, že samotná modální analýza nedovede posoudit, o jaký druh kmitání se jedná. Výsledkem výpočtu jsou pouze vlastní frekvence a vlastní tvary.

Ověření experimentem

Příčné kmity tyče byly vypočteny analyticky pomocí Euler–Bernoulliho teorie a současně pomocí metody konečných prvků (FEM) užitím modální analýzy. Výsledky obou výpočetních metod byly porovnány s reálným měřením vibračního spektra. Zkoumaným vzorkem byla hliníková tyč kruhového průřezu. Frekvence příčných kmitů byly zjištěny pomocí spektrálního analyzátoru, což byl nepříliš složitý počítačový program sestavený právě pro tento účel. Jeho základem byl výpočet Fourierovy transformace v reálném čase ze signálu naměřeném zvukovou kartou. K měření byl potřeba běžný počítač vybavený laciným (cca 20 Kč) elektretovým mikrofónem.

Přesná frekvenční charakteristika mikrofону zde nebyla důležitým faktorem, protože hlavní informaci při měření představovala frekvence jednotlivých píků, nikoli jejich intenzita. Lze říci, že i nekvalitní mikrofón se zkreslující charakteristikou naměří polohu jednotlivých maxim zcela správně, protože přesná frekvence je dána vzorkováním zvukové karty, nikoli mikrofónu samotného. Jak se již mnohokrát ukázalo, poměry amplitud nemají valnou vypovídací hodnotu o vlastnostech vzorku, ale spíše závisejí na způsobu vybuzení kmitů, například na konkrétním místě úderu kladívka.

Vstupní parametry pro obě výpočetní metody odpovídaly hliníkové tyči kruhového průřezu, přičemž další podrobnosti jsou uvedeny v následující tabulce:

průměr	$d=12$ mm	změřeno mikrometrem
délka	$l=300$ mm	změřeno ocelovým pravítkem
hmotnost	$m=94,5$ g	zjištěno na vahách
hustota	$\rho = 2785$ kg m ⁻³	vypočteno $\rho = 4m/(\pi d^2 l)$
plošný moment setrvačnosti	$I = 1,02 \cdot 10^{-9}$ m ⁴	vypočteno: $I = \pi r^4/4$
přibližný Youngův modul	$E' = 69$ GPa	tabulková hodnota
vypočítaný Youngův modul	$E = 72,2$ GPa	zjištěno z podélných kmitů
odhad základní frekvence	$f' = 8300$ Hz	vypočteno: $f = \sqrt{E'S/(4ml)}$
skutečná základní frekvence	$f = 8487$ Hz	zjištěno experimentem
Poissonův poměr	$\nu = 0,34$	tabulková hodnota

V tabulce jsou uvedeny vlastnosti změřené, vypočítané či převzaté z tabulek. Youngův modul pružnosti v tahu je uveden dvakrát. Nejprve se jeho tabulková hodnota použila k výpočtu přibližné základní frekvence podélných kmitů. V blízkém okolí této frekvence se očekávalo hlavní maximum ve spektru. Naměřená frekvence opravila původní odhad a tím i reálný modul pružnosti v tahu. Pro další výpočty se už tabulková hodnota nepoužila, protože se předpokládá, že měření je přesnější. Krom toho nebylo zcela zřejmé, z jaké slitiny hliníku byl vzorek vyroben, takže i tabulková hodnota byla poněkud nejistá.

Ze stejného důvodu byla i hustota raději zjištěna pomocí analytických vah a měření rozměrů.

Tento postup vedl ke zjištění, že lze očekávat frekvenční maximum v okolí odhadované frekvence 8300 Hz. To se potvrdilo nalezením zřetelného maxima na frekvenci 8487 Hz, což následně vede na opravenou hodnotu Youngova modulu pružnosti v tahu

$$E = 4\rho l^2 f^2 = 4\frac{m}{V}l^2 f^2 = 4\frac{m}{Sl}l^2 f^2 = 4\frac{4m}{\pi d^2}l f^2 = \frac{16mlf^2}{\pi d^2} = 72,2 \text{ GPa}$$

Tato hodnota byla použita ve všech dalších výpočtech.

Pro výpočet frekvenčního spektra pomocí modální analýzy bylo potřeba znát i Poissonův poměr, jehož hodnota byla převzata z tabulek jako průměr z udávaného rozmezí 0,32 – 0,35. Nebyly již provedeny žádné pokusy o zpřesnění této hodnoty.

Analytické řešení příčných kmitů založené na Euler–Bernoulliho teorii jsme podrobně rozebrali dříve, tak zde uvedme pouze výsledné vztahy, do kterých dosadíme vlastnosti našeho vzorku – kruhové tyče. Rozbor vedl k nekonečnému počtu vlastních módů, jejichž frekvence lze vypočítat ze vzorce

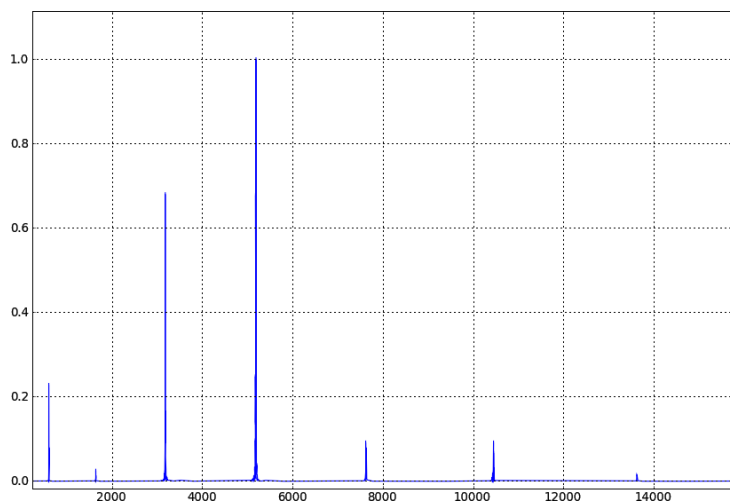
$$\omega_n = \frac{m_n^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\sigma}}$$

kde I představuje plošný moment setrvačnosti, který je pro tyč kruhového průřezu roven $\pi r^4/4$. Youngův modul pružnosti v tahu E byl zjištěn pomocí podélných kmitů. Lineární hustotu σ vyjádříme jako podíl hmotnosti m a délky l .

Pak platí

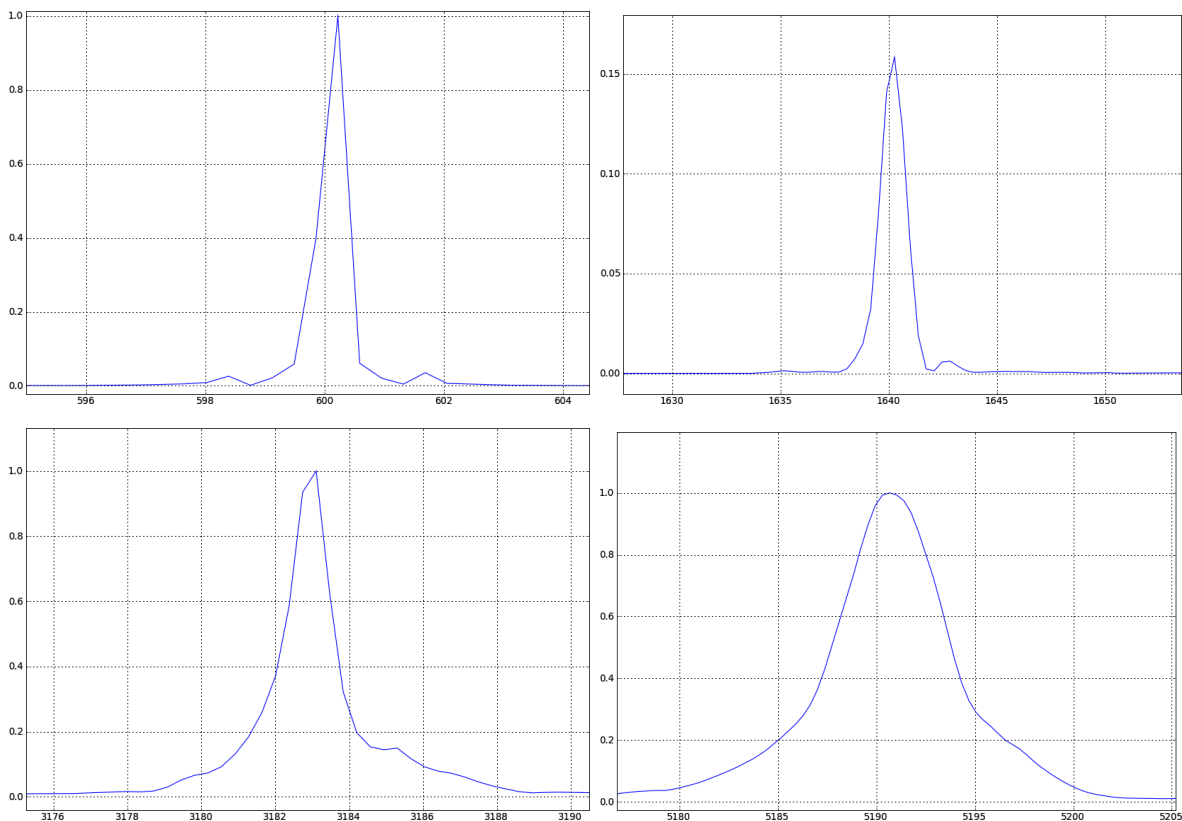
$$\omega_n = m_n^2 \sqrt{\frac{E\pi d^4}{64ml^3}}$$

Koeficienty m_n jsou kořeny transcendentní rovnice $\cos(x) \cosh(x) - 1 = 0$, které jsme již našli numericky, a jsou uvedeny v tabulce.



Obr. 2.21: Celé vibrační spektrum tyče získané pomocí frekvenčního analyzátoru. Tyč měla kruhový průřez.

Na grafu 2.21 je zobrazeno naměřené frekvenční spektrum v široké škále až do cca 16 kHz. Na dalších grafech 2.22 jsou zvětšené detaily prvních čtyř maxim, přičemž jejich



Obr. 2.22: Na těchto grafech jsou záznamy jednotlivých naměřených frekvenčních maxim odpovídajících prvním čtyřem módům. Na ose x je frekvence v hertzech a na ose y relativní jednotky. Bohužel, osy nejsou korektně popsány, protože se jedná o autentické snímky obrazovky při měření pomocí frekvenčního analyzátoru.

frekvenci je možné manuálně odečíst. Při reálném měření jednotlivá maxima vyhledával algoritmus, který je přesnější a měření je možné snadno zopakovat a následně průměrovat či ověřovat. Navíc se zjišťovala poloha osmi maxim, což by už bylo nepohodlné při ručním odečítání.

Mód	Měř.(Hz)	Anal.(Hz)	Rel.ch.(anal.)	FEM (Hz)	Rel.ch.(FEM)
1	600	600	0	601	1,0017
2	1640	1654	1,009	1641	1,0006
3	3183	3242	1,019	3170	0,9959
4	5191	5360	1,033	5144	0,9909
5	7625	8007	1,050	7516	0,9857
6	10532	11183	1,062	10239	0,9722
7	13622	14888	1,093	13266	0,9739
8	17110	19123	1,118	16554	0,9675

Tabulka obsahuje frekvenci prvních osmi módů příčných kmitů. Při zpracování byly záměrně vynechány kmity podélné, protože ty se již použily dříve pro zjišťování Youngova modulu pružnosti v tahu.

Vypočtená relativní chyba u analytické i numerické metody je vztažena k hodnotě experimentální, aby bylo zřejmé, který z výpočtů je blíže realitě. Naměřená hodnota je v tabulce uvedena taktéž. Je zjevné, že metoda konečných prvků je přesnější, než Euler–Bernoulliho přístup, ale dosažení lepších výsledků je vykoupeno vyšší výpočetní složitostí. Analytická metoda podle Euler–Bernoulliho je rychlejší a snadnější na použití a jedinou komplikací může být numerické nalezení kořenů transcendentní rovnice. Tyto kořeny jsou však dostupné v mnoha matematických tabulkách, takže tento problém odpadá. Pro účely porovnání obou metod byl vybrán vzorek s velmi jednoduchou geometrií. U složitějších tvarů totiž analytický přístup nelze použít vůbec.

Závěr

Příčné kmitání tyče bez jakéhokoli ukotvení bylo zjištěno třemi různými metodami. Dvě metody jsou teoretické a jsou založeny na různých principech. První metoda je Euler–Bernoulliho analytický přístup, přičemž druhá metoda je modální analýza za užití metody konečných prvků. Frekvenční spektrum bylo též naměřeno experimentálně. Získané vlastní frekvence kmitání se vzájemně značně podobají, přičemž nejbližší realitě (tj. experimentu) byla metoda konečných prvků. Euler–Bernoulliho metoda je méně přesná v důsledku zjednodušujících předpokladů, mezi které patří představa nekonečně tenké tyče bez smykové deformace se zanedbáním setrvačných sil vzniklých v důsledku rotace. Tato zanedbání vedou k tomu, že analytická metoda předpovídá frekvence systematicky vyšší, než odpovídá experimentu. Navíc, při odvození analytických vztahů vůbec neuvažujeme Poissonův poměr, a při uvažované deformaci předpokládáme, že je roven nule. Z toho lze usuzo-

vat, že zmiňovaná analytická metoda bude dávat lepší výsledky pro materiály s nižším Poissonovým poměrem a naopak bude více selhávat v situaci opačné.

2.4 Příčné kmity, řada vázaných oscilátorů

V předchozí kapitole byly s experimentem srovnány dvě metody pro výpočet příčných kmitů – Euler–Bernoulliho přístup a modální analýza. Jako doplňující metodu popíšeme princip ještě dalšího modelu, který byl pro tento účel naprogramován. Model je založen na představě, že tenkou tyč lze připodobnit k řadě hmotných bodů, které se chovají jako vázané oscilátory.

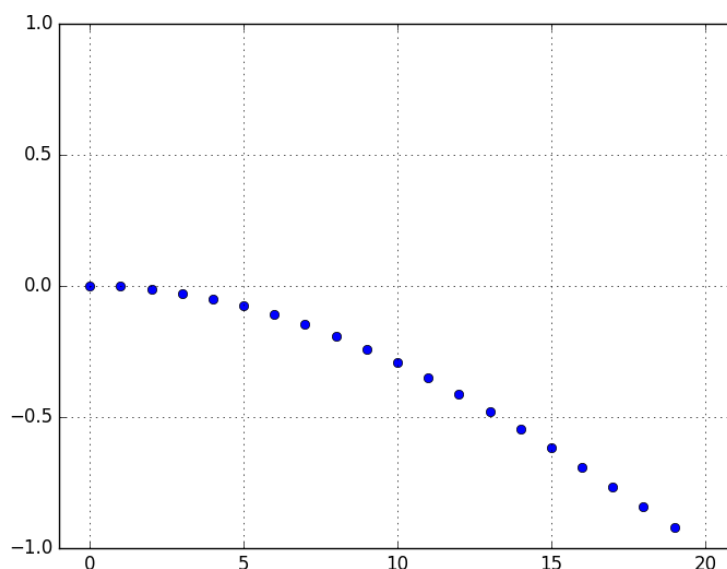
V minulé kapitole měla kmitající tyč oba konce volné, ale zde, pro zajímavost, modelujeme jednostranně vetknutý nosník. Jeho příčné kmity jsme již vyřešili analyticky pomocí Euler–Bernoulliho teorie.

Ke zjištění chování jednostranně vetknutého nosníku byly příčné kmity vypočítány numericky a pohyb byl simulován pomocí řady elementů. Nosník tak byl po své délce rozdělen na jednotlivé prvky. Mezi nimi byly nadefinovány pružné ohybové vazby. Ty měly tu vlastnost, že každé tři sousedící elementy byly v rovnovážné poloze právě tehdy, pokud byly v přímce. Tyč jako celek se tedy chovala tak, že stav s nejnižší (nulovou) energií odpovídal nedeformovanému stavu, jehož všechny elementy byly v přímce. U každého elementu se uchovávala informace o jeho poloze a rychlosti. U příčných kmitů se předpokládaly malé výchylky a v této aproximaci každý element vykonával pohyb pouze v jedné ose. Poloha i rychlost každého elementu byly vyjádřeny jediným číselným údajem a v paměti počítače stačila pro uložení polohy a rychlosti dvě jednorozměrná pole. Jakýkoli netriviální stav systému (tj. jiný než nulová poloha i rychlost) vedl k dynamickému vývoji v čase, kdy lze sledovat příčné postupné vlnění. Model zahrnoval také tlumení, a to takové, že na každý element působila kromě pružných sil ještě odporová síla okolního prostředí, která byla úměrná rychlosti elementu a měla vůči rychlosti opačný smysl. Tím se pohyb brzdil a bez dalších vnějších sil by kmity po čase téměř vymizely. Jeden konec byl pomocí okrajových podmínek zafixován tak, že první dva krajní elementy (nultý a první) byly po celou dobu výpočtu zcela bez pohybu. Tím je nadefinován pevný konec, přičemž opačný konec byl volný.

Takto vytvořený model bylo nutno otestovat a zjistit, zda správně simuluje běžné situace, u kterých již dopředu známe výsledek. První velmi jednoduchý test představoval

běžnou inženýrskou úlohu, při které se zjišťuje tvar při ohýbání jednostranně vetknutého nosníku či traverzy, na jehož koncový bod působí stálá síla. Lze dokázat, že tvar s nejnižší energií takto namáhaného nosníku je možné popsat pomocí kubické křivky, kdy výchylka každého elementu je úměrná třetí mocnině vzdálenosti od pevného konce. Správnost modelu se zjišťovala dvěma způsoby. Všechny elementy byly hned zpočátku uspořádány do tvaru kubické křivky. Výsledkem výpočtu bylo, že rychlost elementů byla v jakémkoli dalším kroku nulová, což se očekávalo.

Druhý test představoval pouze stálou fixaci poloh tří elementů – prvních dvou krajních a zcela posledního tak, aby neležely v přímce. Poloha ostatních elementů byla na počátku výpočtu nastavena na náhodnou hodnotu. Po spuštění výpočtu se vlivem disipace energie systém postupně dostával do stavu s co nejnižší energií a konvergoval k očekávanému tvaru, který je zakreslen na grafu 2.23.



Obr. 2.23: Jednotlivé body v grafu představují polohu uzlů po mnoha krocích simulace, kdy se vlivem tlumení zastavil pohyb elementů. Konečný tvar odpovídá analytickému řešení pro ohyb jednostranně vetknutého nosníku.

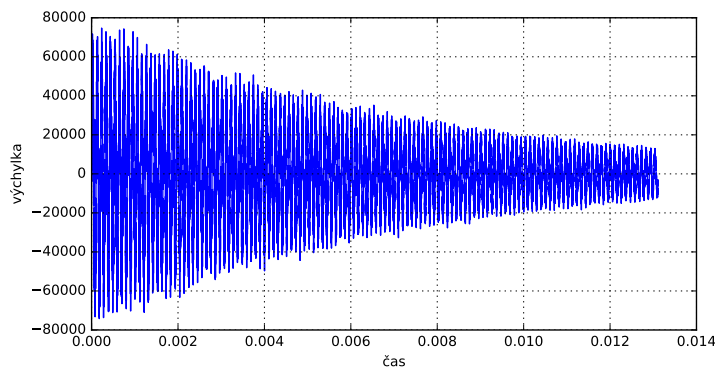
Další testy měly za úkol ověřit frekvenci u různých módů kmitání. Jak již bylo podrobně rozebráno dříve, analyticky lze odvodit, že módy kmitání jednostranně vetknutého nosníku mají frekvenci úměrnou druhé mocnině koeficientu α , který je řešením transcendentní rovnice

$$\cos(x) \cosh(x) - 1 = 0$$

Na základě výpočtu prvního kořenu této rovnice byly nastaveny parametry simulovaného

kmitání tak, aby základní mód měl frekvenci rovnu jedné. Dvě okrajové podmínky, které souvisejí s vetknutím nosníku, byly implementovány tak, že poloha i rychlost prvních dvou okrajových elementů zůstala stále nulová. Polohy ostatních elementů byly na počátku simulace nastaveny na náhodou hodnotu a systém začal kmitat. Poloha posledního elementu, který představoval volný konec tyče, byla při každé iteraci zapsána do souboru, čímž vznikla časová řada určená k dalšímu zpracování. Po předem nastaveném počtu iterací se simulace ukončila. Tlumení bylo nastaveno tak, aby byla energie systému na konci simulace přibližně $30\times$ nižší než na začátku.

Časový průběh simulované polohy posledního elementu je zakreslen na grafu 2.24. Je patrné, že kmity se postupně tlumí a že obsahují kromě hlavní frekvence též záchvěvy odpovídající vyšším módům. Dále bylo vypočteno frekvenční spektrum, které je uvedeno



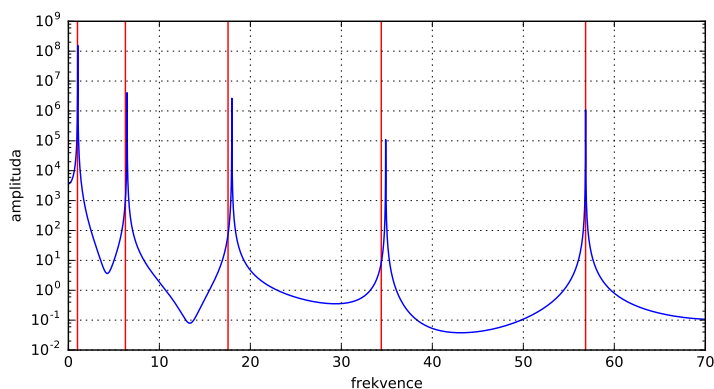
Obr. 2.24: Simulované kmity koncového bodu jednostranně vetknutého nosníku. Obě osy jsou škálovány v relativních jednotkách.

na grafu 2.25. Vzhledem k tomu, že počáteční poloha elementů byla zvolena náhodně, je téměř jisté, že se tím vybudí mnoho módů kmitání. Počáteční tvar je určen superpozicí vlastních tvarů, kterých by bylo zapotřebí mnoho, aby jejich součet byl roven náhodně vygenerovanému tvaru. Tato domněnka se potvrdila a ve frekvenčním spektru je řada maxim, které odpovídají vlastním frekvencím vypočteným analyticky. Tyto frekvence, či spíše jejich vzájemné poměry, byly již vypočteny dříve, ale v následující tabulce jsou pro přehlednost uvedeny ještě jednou pro prvních pět módů kmitání:

mód	α	α^2	f/f_0
1	1,8751	3,5160	1,0000
2	4,6941	22,0345	6,2669
3	7,8548	61,6972	17,5475
4	10,9955	120,9019	34,3861
5	14,1372	199,8595	56,8426

Ve spektru se skutečně objevila maxima odpovídající analytickému výpočtu na základě Euler–Bernoulliho teorie. Drobné odchylky jsou nejspíše způsobeny tím, že model se skládal z pouhých dvaceti elementů. S narůstajícím řádem kmitání se zmenšuje vlnová délka a vzdálenosti mezi elementy jsou příliš velké na to, aby byl vypočtený tvar dostatečně přesný.

Přes zmiňovanou nedokonalost je potěšitelné, že takto jednoduchý model, který byl naprogramován doslova na několik málo řádků kódu, dokáže simulovat nejen statický ohyb nosníku, ale také jeho dynamické chování včetně tlumení. Popsaný algoritmus se stal



Obr. 2.25: Frekvenční spektrum v semilogaritmické škále vypočtené z časové závislosti polohy posledního elementu. Červeně jsou vyznačeny frekvence vypočtené analyticky.

základem pro další, komplikovanější model, který simuluje trojrozměrné pružné prostředí s možností nadefinovat určité typy defektů v materiálu.

2.5 Tlumení kmitů

Řada vázaných oscilátorů popsaná v předchozí kapitole umožňovala modelovat další důležitou vlastnost, a to tlumení.

Tlumení kmitů je jev, který je nevyhnutelný pro každý reálný oscilátor bez vynucujících vnějších podnětů. Vždy platí, že amplituda kmitů postupně klesá, a záznam kmitání lze zpracovávat pouze tehdy, dokud úroveň signálu neklesne pod měřitelnou úroveň. V nedestruktivním testování je častým úkolem nalézt co nejpřesněji rezonanční frekvenci, přičemž k dispozici je digitalizovaný záznam kmitů a pomocí diskretní Fourierovy transformace se zjišťuje frekvenční spektrum. Přesnost měření frekvence velmi úzce souvisí s tlumením kmitů, protože diskretní Fourierova transformace pracuje s krokem, který je roven převrácené hodnotě délky záznamu. Platí tedy, že nejistota určení rezonanční frekvence nemůže být lepší než $1/T$, kde T je doba záznamu. Zároveň platí, že doba záznamu je tím delší, čím méně jsou kmity tlumeny.

Další jev, který provází tlumené kmity, je přítomnost jiných frekvencí, než by odpovídalo kmitům netlumeným. Na obrázku 2.26 jsou zakresleny záznamy kmitů s různou mírou tlumení a jejich odpovídající frekvenční spektrum. Při tvorbě grafů byla použita rovnice pro výchylku tlumeného oscilátoru:

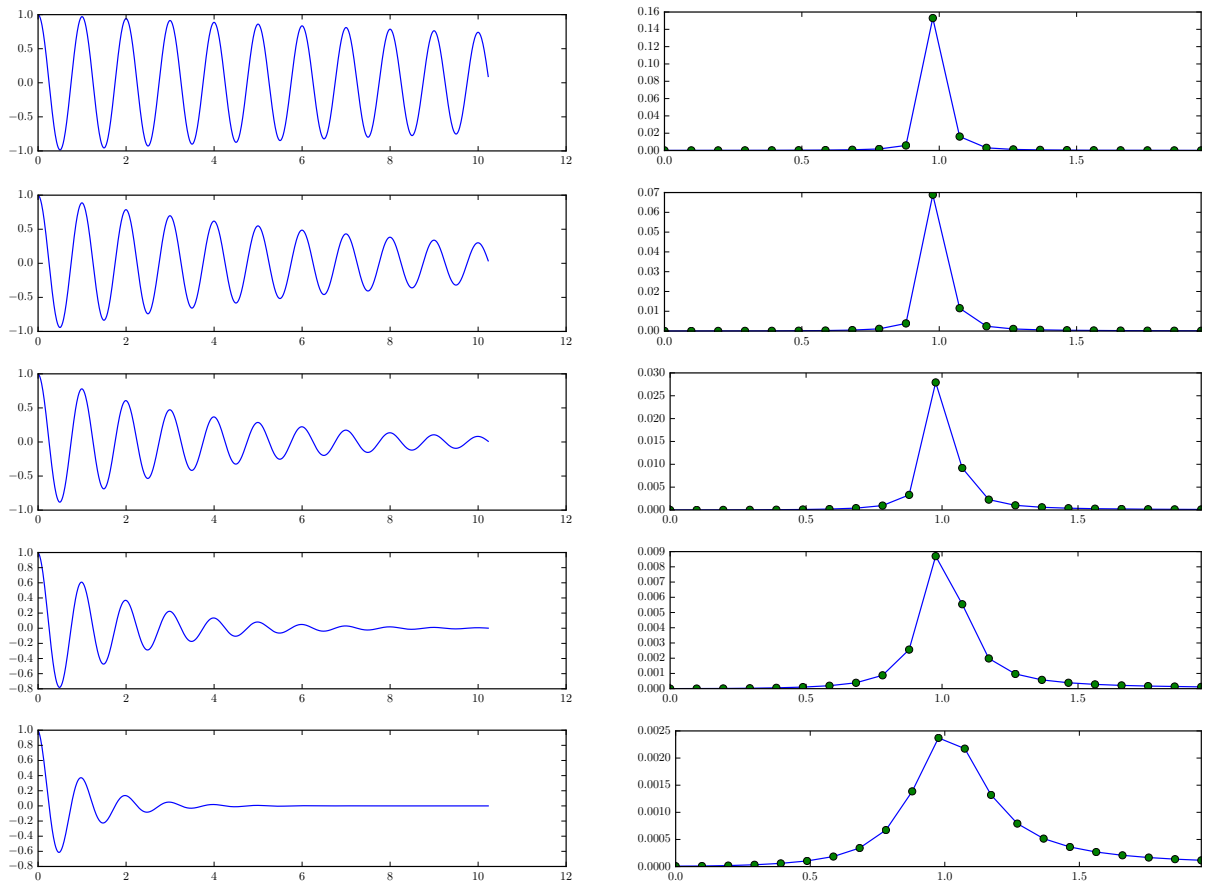
$$y(t) = e^{-\lambda t} \cos(\omega t)$$

Na grafech je patrné, že větší tlumení způsobuje rozšíření píku. Energie kmitů se rozptýlí i do okolních frekvencí, takže hlavní maximum se sníží a ve spektru se obtížně hledá. Současně narůstá i míra nejistoty v určení frekvence. Frekvenční maximum často nelze dostatečně dobře lokalizovat a navíc jsou ovlivněny i okolní frekvence, ve kterých může být případné další maximum zcela skryto.

Na grafech 2.26 je situace zjednodušená, protože při reálném měření je v signálu navíc přítomen šum. Tlumení má za následek to, že jen omezený počet kmitů lze vyhodnotit, protože se zmenšující se amplitudou se kmity postupně ztrácejí v šumu. Jak již bylo vysvětleno výše, zkrácení doby záznamu vede k horšímu rozlišení frekvence. Pokud bychom dodatečně uvažovali přítomnost šumu, pak na grafech 2.26 by se navíc zkracoval záznam signálu a spolu s tím se zvětšovaly rozestupy bodů, ve kterých lze frekvenční složku vyhodnotit.

Je zjevné, že pokud by se podařilo tlumení kmitů snížit, zlepšil se přesnost měření. Pokud uvažujeme, že chování lze demonstrovat na obyčejném tlumeném harmonickém oscilátoru, pak platí, že brzdná síla je úměrná rychlosti pohybu. Koeficient úměrnosti lze však ovlivnit jen obtížně.

Jednou z možností, jak snížit tlumící sílu, je snížit rychlost pohybu přidáním další hmotnosti. Tlumící síla by se nepochybně snížila a také by se zlepšila absolutní chyba



Obr. 2.26: Na grafech jsou vyneseny tlumené kmity a jejich frekvenční spektrum vypočítané pomocí FFT. Je zjevné, že s narůstajícím tlumením se zvětšuje šířka odpovídajícího píku a snižuje se jeho maximum.

měření frekvence. Avšak mějme na paměti, že v nedestruktivním testování je snahou vypočítat materiálové vlastnosti z rezonanční frekvence a rozhodující faktor je zde *relativní chyba*. Vhodnější parametr pro posouzení bude tzv. kvalita oscilátoru (Q), která je definována

$$Q = 2\pi \frac{\text{energie oscilátoru}}{\text{energie ztracená během jedné periody}}$$

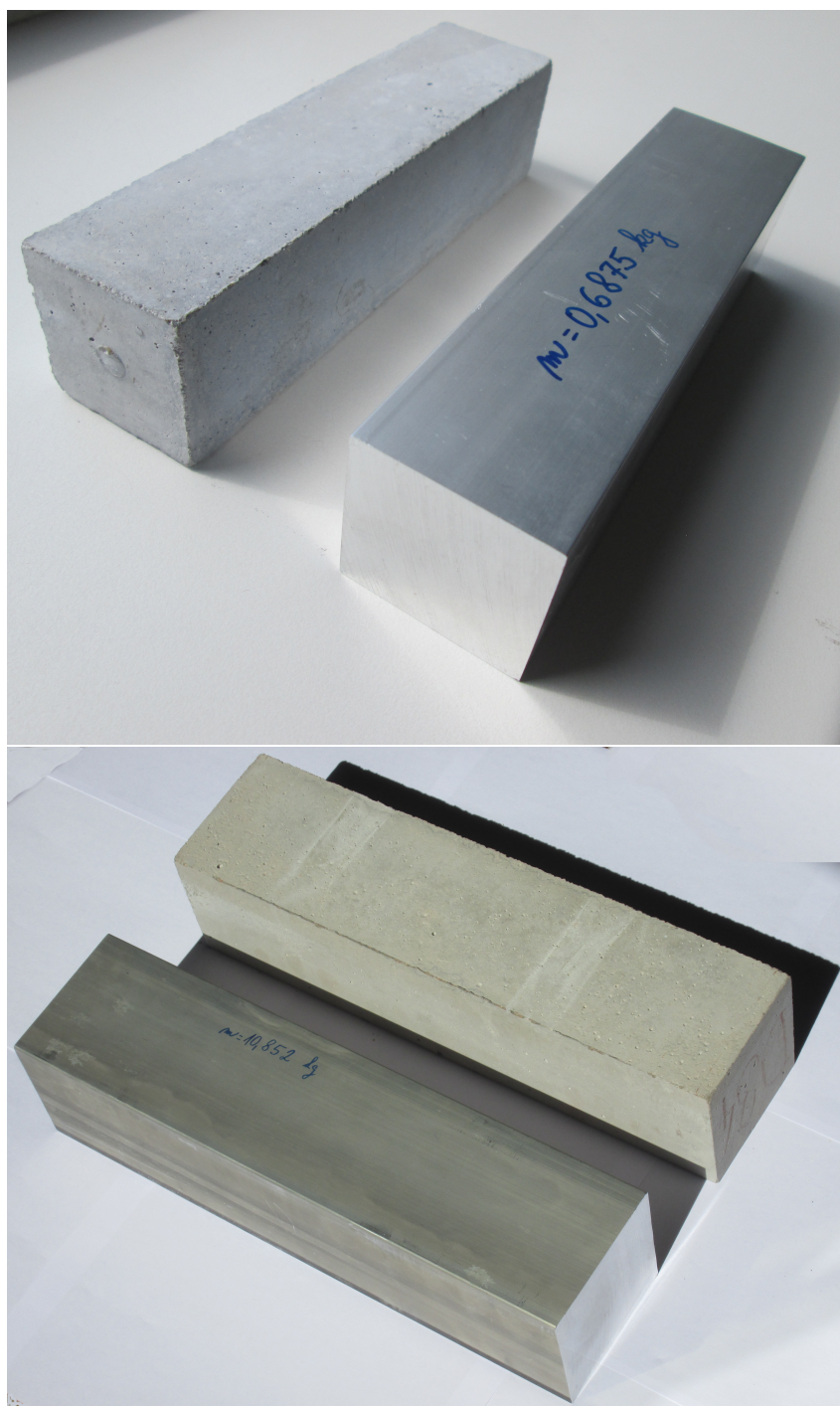
Ztrátou energie máme na mysli nejčastěji její přeměnu na teplo. Kvalita oscilátoru je bezrozměrná veličina a má rozhodující vliv na relativní přesnost určení frekvence. Lze ji vyjádřit též jako počet kmitů, po kterém dojde k poklesu amplitudy na $1/e$ původní úrovně. Přímo z definice tedy plyne, že zvýšení hmotnosti a snížení rezonanční frekvence

povede k lepší přesnosti.

Při nedestruktivním testování betonových vzorků akustickými metodami je tlumení kmitů velká komplikace, která zhoršuje rozlišovací schopnost celé metody. Přesto potřebujeme získaná data zpracovat matematickými metodami, které jsou založené na správném fyzikálním modelu a jejich výsledky jsou ověřené experimentálně. V předcházejících kapitolách jsme se zabývali případem velmi tenké tyče a výsledky souhlasily s experimentem.

S touto představou si však nevystačíme, pokud máme zkoumat betonový vzorek tvaru kvádrů, který rozhodně nepřipomíná tenkou tyč. Pro ověření všech dalších výpočtů proto budeme používat trámce z hliníkové slitiny, které budou mít stejnou geometrii jako betonové vzorky. Bude se tedy jednat o idealizovaný materiál, který je homogenní a má nízký útlum kmitání. Můžeme na něm podrobně studovat vliv rozměrů na rezonanční frekvenci a zároveň testovat správnost výpočetních metod.

Srovnávací fotografie, na kterých jsou betonové i hliníkové vzorky, jsou na obrázku 2.27.



Obr. 2.27: Spolu s betonovými zkušebními vzorky byly používány též jejich rozměrové kopie vyrobené z hliníkové slitiny, která vykazuje výrazně menší útlum kmitání, měření je přesnější a lze lépe ověřit správnost teoretických výpočtů. Na fotografiích jsou dvě velikosti trámů: $40 \times 40 \times 160$ mm a jejich větší varianta $100 \times 100 \times 400$ mm.

2.6 Torzní kmity

Za torzní kmitání považujeme stav, kdy se všechny body tělesa periodicky pohybují se stejnou fází po části kružnice, jejímž středem obvykle prochází podélná osa tělesa. V aproximaci malých kmitů můžeme část kružnice považovat za úsečku tím, že zanedbáme zakřivení. Pohyb bodů bude v takovém případě pouze lineární a takový případ spadá mezi běžné úlohy řešené pomocí modální analýzy.

Materiál je při torzních kmitech namáhán výhradně ve smyku. Pro rychlost šíření torzních vln platí vztah

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

přičemž jej lze přepsat tak, aby obsahoval Youngův modul E a Poissonův poměr ν :

$$v = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1-\nu)}}$$

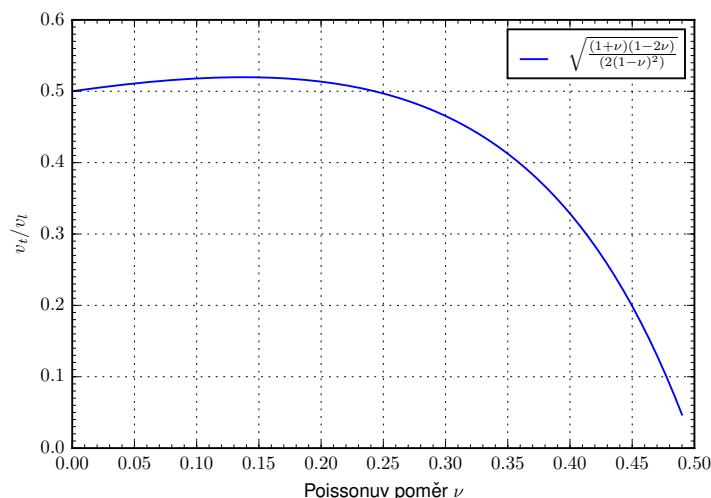
Pro torzně kmitající tyč platí stejná úvaha jako v předešlém případě podélných kmitů. Délka tyče l musí být násobkem poloviny vlnové délky, tj. $l = n\lambda/2$. Frekvence kmitání je úměrná rychlosti šíření, a tak je zřejmé, že poměr frekvence torzních kmitů vůči frekvenci podélných kmitů je konstantní, srovnáváme-li módy téhož řádu. Platí

$$\frac{f_t}{f_p} = \frac{v_t}{v_p} = \frac{\sqrt{\frac{E}{2\rho(1-\nu)}}}{\sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}} = \sqrt{\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2(1-\nu)^2}}$$

Znamená to, že naměříme-li frekvenci torzních kmitů i podélných kmitů u téže tyče, pak lze z jejich poměru f_t/f_l vypočítat obě hlavní materiálové konstanty, ať už je vyjádříme libovolnou kombinací E, G nebo E, ν , případně G, ν . Zpočátku může být obtížné rozlišit ve spektru správné módy.

Bohužel, tento způsob zjišťování Poissonovy konstanty je prakticky obtížně proveditelný. Jak vidíme na grafu 2.6, poměr frekvencí torzních kmitů vůči podélným se takřka nemění v oblasti kolem nulové derivace, která odpovídá hodnotě $\nu = 0,137$. Tato hodnota spadá například do rozmezí pro Poissonovu konstantu betonu 0,1 až 0,2. Platí tedy, že frekvenční analýzou lze Poissonovu konstantu zjistit, ale jen velmi nepřesně.

Krom toho, poměr frekvencí f_t/f_l je v závislosti na Poissonově poměru nejprve rostoucí a pak klesající. Neexistuje tedy jednoznačná inverzní funkce na intervalu $\nu \in \langle 0; 0,243 \rangle$, což dále komplikuje stanovení Poissonovy konstanty.



Obr. 2.28: Na grafu je vykreslen poměr rychlostí šíření torzních vln vůči rychlosti podélných vln. Stejný poměr platí i pro příslušné frekvence. Je zjevné, že výpočet Poissonova poměru ze znalosti poměru frekvencí může být zatížen velkou chybou měření.

2.6.1 Torzní kmitý tyče čtyřhranného průřezu

Veškeré výše zmíněné úvahy týkající se torzních kmitů platí pouze pro tyč kruhového průřezu, což je speciální případ, při kterém lze uplatnit mnohé podobnosti s kmitý podélnými. Pokud však tyč nemá kruhový průřez[29], je potřeba vzít v úvahu plošný moment setrvačnosti³ I_p a torzní tuhost J' . Obě veličiny se objeví v diferenciální rovnici pro torzní vlnu:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{G} \frac{I_p}{J'} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

ve které vystupuje úhel otočení φ daného elementu tyče, dále její (objemová) hustota ρ a již zmiňovaný plošný moment setrvačnosti I_p definovaný jako

$$I_p = \int_S r^2 dS$$

kde r je vzdálenost plošky dS od osy otáčení. Jeho jednotka je m^4 a po vynásobení hustotou ρ představuje moment setrvačnosti délkového elementu tyče. Dále je v rovnici

³Existuje několik veličin, které se ve stručnosti pojmenovávají *moment setrvačnosti*. Jeden z významů je míra setrvačnosti při rotaci tělesa. Tu lze vypočítat z *polárního* momentu setrvačnosti vynásobením hustotou a délkou. Dále existuje *plošný* moment setrvačnosti, který vystihuje odolnost profilu/tyče proti ohybu. Zde nyní zavádíme další veličinu J' představující torzní tuhost. Je třeba být opatrný v chápání významů.

veličina J' , která má opět jednotku m^4 a představuje torzní tuhost definovanou tak, že tyč o délce l a modulu pružnosti ve smyku G se při působení kroutícího momentu M stočí o úhel φ , přičemž platí

$$\varphi = \frac{Ml}{J'G}$$

Lze dokázat, že pro tyč kruhového průřezu platí

$$\frac{I_p}{J'} = \frac{\pi R^2/2}{\pi R^2/2} = 1$$

a oba členy I_p i J' vymizí z vlnové rovnice a pro rychlost šíření torzních kmitů získáme klasický vztah

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

který ovšem selhává pro profily nekruhových průřezů. Zde se pro stručnost budeme zabývat pouze čtvercovým či obecně obdélníkovým průřezem, protože takový tvar odpovídá nejčastěji používaným betonovým vzorkům. Polární moment setrvačnosti I_p můžeme získat přímou integrací. Pro obdélníkový profil a čtvercový profil rotující kolem středové osy dostaneme výsledek

$$I_p = \frac{a^4 + b^4}{12} \quad I_p = \frac{a^4}{6}$$

kde a a b jsou strany obdélníka, případně a představuje stranu čtverce.

Výrazně složitější je vztah pro torzní tuhost J' , který lze pro obdélníkový průřez zapsat pouze pomocí nekonečně řady. Platí

$$J' = 2^8 \frac{a^3 b^3}{\pi^6} \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{l \in \mathbb{N}} \frac{1}{k^2 l^2 (k^2 b^2 + l^2 a^2)}$$

Tato řada obsahuje dvojí vnořenou sumu přes všechna lichá přirozená čísla. Snadno lze naprogramovat skript, který numericky najde její výsledek. Při výpočtu byly strany a a b rovny jedné, abychom získali přímo násobící faktor pro čtverec. Řada rychle konverguje, takže přibližně za sekundu, po řádově několika miliónech iterací, získáme výsledek

$$J' = 0,14057701485 a^4$$

s přesností na 11 platných míst, což je mnohem více, než kdy můžeme potřebovat.

Jestliže tato zjištění dosadíme do vlnové rovnice pro torzní kmity, pak pro čtvercový profil vychází

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{G} \frac{a^4}{0,141 a^4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

U všech vlnových rovnic tohoto tvaru můžeme vyjádřit i rychlost šíření vlny

$$c = \sqrt{\frac{0,141 a^4 G}{\frac{a^4}{6} \varrho}} = \sqrt{\frac{0,843462 G}{\varrho}} = 0,918402 \sqrt{\frac{G}{\varrho}}$$

V úpravě byly úmyslně uvedeny numerické faktory, ze kterých vyplývá:

- Rychlost šíření torzní vlny u tyče čtvercového průřezu dosahuje asi 92% rychlosti torzních vln u kruhového průřezu. V tomto poměru lze očekávat i rezonanční frekvence.
- Pokud vypočítáme modul pružnosti ve smyku z frekvence torzních kmitů, můžeme použít všechny vztahy pro kruhový profil, ale výsledek vyjde asi o 84% nižší a je potřeba jej opravit.

2.6.2 Experimentální ověření

Výše uvedenou teorii můžeme ověřit i experimentálně, ale soustředíme se pouze na čtvercový profil. U kruhového profilu by bylo velmi obtížné vybudit torzní kmity a i kdyby vznikly, byl by problém je zachytit mikrofonem.

Testy byly provedeny použitím kvádrového bloku o rozměrech 100×100×400 mm z hliníkové slitiny. Její přesné označení je 6082 a detailní popis mechanických vlastností lze nalézt v tabulkách.

Rozměry byly zvoleny tak, aby odpovídaly rozměrům betonových vzorků. Hliníková slitina však má výrazně nižší tlumení kmitů, a proto bude měření frekvence přesnější a lépe tak ověříme správnost předpokladů.

Hmotnost bloku byla zjištěná pomocí vah a činí $m=10,852$ kg. Z rozměrů a hmotnosti lze vyjádřit hustotu slitiny:

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{m}{la^2} = 2713 \text{ kg m}^{-3}$$

což odpovídá tabulkové hodnotě 2700 kg m⁻³.

Pomocí programu napsaného s cílem vyhledávat nejvýraznější frekvenční maxima, a jehož princip byl popsán v předcházejících kapitolách, byly naměřeny tyto frekvence torzních kmitů:

n	f_n (Hz)	c_t (m s ⁻¹)
1	3548,9	2839,1
2	7096,5	2838,6
3	10638,4	2836,9
4	14169,5	2833,9

Při měření bylo možno nalézt základní frekvenci a další tři vyšší harmonické. V tabulce jsou uvedeny jejich frekvence a také přepočet na rychlost šíření na základě znalosti délky vzorku $l = 0,4$ m. Je vidět, že torzní kmity nevykazují téměř žádnou disperzi a všechny módy mají téměř stejnou rychlost šíření. Přesto lze vypočítat mírně klesající tendenci, a tak pro výpočet použijeme frekvenci základního módu a v takovém případě získáme tento výsledek pro modul pružnosti ve smyku:

$$G = \frac{4f^2ml}{0.843462a^2} = 25,93 \text{ GPa}$$

Při výpočtu jsme použili faktor pro čtvercový profil. Vypočtená hodnota velmi dobře souhlasí s tabulkami, které pro použitou slitinu hliníku uvádějí hodnotu 26 GPa.

2.7 Podélné kmity tyče čtvercového průřezu

Pokusme se nyní u téhož hliníkového vzorku vypočítat modul pružnosti v tahu z frekvence jeho podélných kmitů. Připomeňme, že v jedné z prvních kapitol jsme použili tenkou tyč a pro rychlost podélných vln platilo

$$c_t = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

přičemž tyč považujeme za velmi tenkou tehdy, jsou-li její příčné rozměry výrazně menší než je vlnová délka podélných vln. Tento předpoklad však není splněn u našeho vzorku o rozměrech $100 \times 100 \times 400$ mm ani pro základní mód, jehož délka vlny by činila dvojnásobek délky vzorku. V takovém případě by poměr příčného rozměru vůči vlnové délce byl $0,1 : 0,8 = 0,125$, což není zanedbatelné. Proto výše uvedený vztah selhává a je nutné vzít v úvahu i tvar průřezu.

Analytický výpočet podélných kmitů obdélníkového průřezu je podrobně rozebrán v článku [7], který vyšel v roce 1950 a obsahuje kromě odvození základních rovnic též

matematická vodítka pro jejich řešení, která měla velkou důležitost v době bez možnosti použití výpočetní techniky.

Je nutno konstatovat, že analytické řešení pro rychlost podélných kmitů existuje pouze pro nekonečně dlouhou tyč. Při podélném kmitání reálného vzorku se na jeho okrajích střídá vyboulení a proláklina, což později dokážeme pomocí modální analýzy. Pro tento jev analytické řešení neexistuje, takže byl zanedbán.

Pro stručnost uvedeme jen výslednou rovnici, která platí pro nekonečně dlouhou čtyřhrannou tyč. Po řadě substitucí lze ukázat, že je nutné vyřešit následující transcendentní rovnici:

$$\frac{\operatorname{tg} \pi \sqrt{\chi^2 - \psi^2}}{\operatorname{tg} \pi \sqrt{\epsilon \chi^2 - \psi^2}} = - \frac{4\psi^2 \sqrt{\chi^2 - \psi^2} \sqrt{\epsilon \chi^2 - \psi^2}}{(2\psi^2 - \chi^2)^2} \quad (2.15)$$

Ve které proměnná ϵ závisí pouze na Poissonově poměru a lze ji vyjádřit pomocí vztahu

$$\epsilon = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \quad (2.16)$$

Úkolem následného výpočtu bude najít právě tuto proměnnou ϵ a z ní vypočítat Poissonův poměr ν . Vzhledem k tomu, že modul pružnosti G již známe užitím torzních kmitů, bude úloha kompletně vyřešena a bude možné zjistit libovolnou dvojici hlavních materiálových konstant.

Dále je nutné popsat proměnné χ a ψ . Platí

$$\frac{c}{c_s} = \frac{\chi}{s}$$

přičemž c_s je definována jako

$$c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

Jedná se o fiktivní rychlost šíření smykových vln v daném materiálu. Tuto rychlost a její odpovídající frekvenci ve spektru našeho vzorku nenajdeme, protože by musel být nekonečný anebo mít kruhový průřez. Ve vzorku čtvercového průřezu se namísto toho šíří torzní vlna rychlostí, která je asi o 92% nižší než c_s . Rychlost c najdeme pomocí měření a jedná se o skutečnou rychlost podélných vln. Rychlost šíření je úměrná rezonanční frekvenci, a tak poměr $\frac{c}{c_s}$ vypočteme takto:

$$\frac{c}{c_s} = \frac{f_l}{f_t} 0,918402$$

Proměnná s se vypočítá ze vztahu⁴

$$s = \frac{2a}{\lambda} = \psi$$

Postup výpočtu bude takový, že nejprve u vzorku změříme poměr rychlostí $\frac{c}{c_s}$. Dále stanovíme proměnnou s , která je současně rovna proměnné ψ . V našem případě platí

$$s = \psi = 0,125$$

Následně je potřeba k proměnné ψ najít odpovídající χ , což znamená vyřešit transcendentní rovnici 2.15. Do rovnice vstupuje Poissonova konstanta ν prostřednictvím proměnné ϵ . Numerickými metodami je nutno se dopracovat k takové Poissonově konstantě, aby platilo

$$\frac{c}{c_s} = \frac{\chi}{\psi}$$

Na vzorku ze slitiny hliníku byly naměřeny tyto frekvence podélných kmitů:

n	f_n (Hz)	c_l (m s ⁻¹)
1	6514,5	5131,6
2	12770,5	5108,2
3	18348,3	4892,9

V tabulce jsou uvedeny tři módy kmitání, které bylo možné u vzorku naměřit a z frekvence každého z nich byla též vypočtena rychlost šíření. Je zjevné, že podélné kmity vykazují značnou disperzi a rychlost šíření závisí na vlnové délce. Jednotlivé módy nemají celočíselný poměr frekvencí.

Soustředíme-li se na základní mód kmitání, pak poměr rychlostí $\frac{c}{c_s}$ je roven

$$\frac{c}{c_s} = \frac{f_l}{f_t} 0,918402 = \frac{6514,5}{3548,9} 0,918402 = 1,68585$$

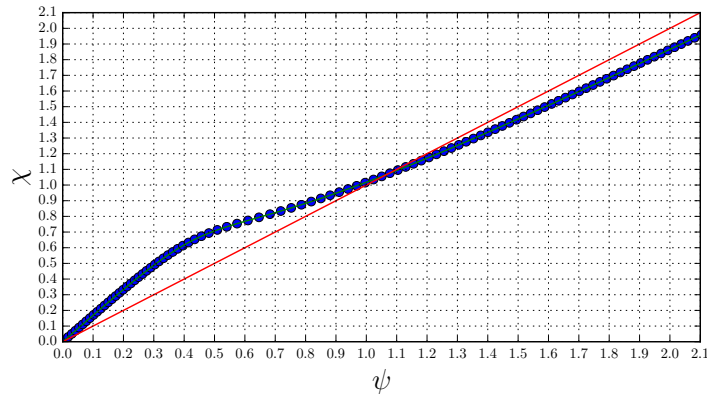
Po několika iteracích, při kterých byla opakovaně vyřešena rovnice 2.15, byla nalezena tato kombinace ψ a χ :

$$\chi = 0,2107$$

$$\psi = 0,1250$$

⁴V popsáném postupu se jeví jako zbytečné zavádět novou proměnnou s , když je stejná jako proměnná ψ . Obecně se však rovnat nemusejí a jejich rozlišování může mít význam pro jiné průřezy profilů. Podrobnosti jsou popsány v [7].

jejichž poměr χ/ψ je roven poměru rychlostí c/c_s . K tomuto výsledku vedlo nastavení Poissonova poměru na hodnotu $\nu = 0,3034$. Následující graf 2.29 představuje pro ilustraci odpovídající závislost χ na ψ :



Obr. 2.29: Na grafu jsou vyneseny takové kombinace proměnných χ a ψ , které vyhovují transcendentní rovnici 2.15. Každý z vynesených bodů byl získán numerickou metodou. Graf platí pro Poissonův poměr $\nu=0,303$, což je hodnota nalezená pro hliníkovou slitinu.

Nyní lze snadno dopočítat, že Youngův modul pružnosti v tahu u testované hliníkové slitiny je

$$E = 2G(\nu + 1) = 67,63 \text{ GPa}$$

Vypočtená hodnota je o téměř o 5% nižší, než v tabulkách udávaný údaj 71 GPa, což je dáno tím, že Poissonův poměr byl nalezen nižší, než odpovídá tabulkové hodnotě $\nu = 0,33$. Tento nesoulad souvisí s tím, že teorie platí jen pro nekonečně dlouhou čtyřhrannou tyč.

Vypočtené hodnoty nelze považovat za úspěch zejména v porovnání s chybou, které bychom se dopustili při použití výrazně jednoduššího vztahu $c^2 = E/\rho$, který vede k

$$E = \frac{4f_l^2 ml}{a^2} = 73,69 \text{ GPa}$$

což je o necelá 4% více, než udávají tabulky.

2.8 Modální analýza kvádrového vzorku

Všechny předchozí výpočty a modely byly odvozeny na základě různých aproximací, které vedly ke zjednodušení modelu na úkor šíře jeho použitelnosti. Jednalo se například o před-

stavu velmi tenké tyče, kdy její šířka je zanedbatelná vzhledem k vlnové délce. V jiném případě jsme uvažovali, že Poissonův poměr je nulový, což vede na velmi jednoduchý vztah pro rychlost podélných vln. V dalším modelu byla kmitající tyč připodobněna ke dvaceti spřaženým hmotným bodům. U příčných kmitů jsme často zanedbávali rotační pohyb elementů, u podélných kmitů zase změnu tloušťky tyče.

Tato a mnohá další zanedbání mají za následek, že žádný z modelů není použitelný pro předpověď kmitání kvádrového vzorku. Uspokojivou přesnost výpočtu prozatím nemáme ani tehdy, bude-li vzorek homogenní a jeho chování v souladu se základními rovnicemi lineární elasticity. O to horší budou výsledky pro případné modelování nehomogenit a vad uvnitř materiálu.

Pro získání představ o tom, co lze očekávat od výpočtů a měření, pokusme se nyní nalézt co nejlepší shodu s experimentem za ideálních podmínek. Použijeme kvádr z hliníkové slitiny, o kterém byla zmínka již dříve. Jeho rozměry jsou $100 \times 100 \times 400$ mm, což je stejné jako velikost betonových vzorků. Menší variantu, $40 \times 40 \times 160$ mm protentokrát vynechme, protože všechna měření budou na velkém vzorku přesnější.

Pomocí frekvenčního analyzátoru bylo naměřeno několik rezonančních frekvencí, u kterých se postupně podařilo identifikovat, o jaký mód kmitání se jedná. V následující tabulce jsou uvedeny naměřené frekvence v Hertzích:

	1	2	3	4
příčné	2818,2	6215	9931,5	13312,6
torzní	3548,9	7096,5	10638,4	14169,5
podélné	6514,5	12770,5		

S některými z těchto hodnot jsme se setkali již dříve, kdy jsme se zabývali torzními a podélnými kmity. Pro přehlednost jsou zde uvedeny znovu, tentokrát i s příčnými kmity. Pokusme se zpracovat všechna data současně.

Pomocí modální analýzy budeme hledat takovou dvojici materiálových konstant, u kterých bude shoda nejlepší u všech naměřených frekvencí. Modální analýza zahrnuje všechny jevy týkající se lineární elasticity a setrvačnosti hmoty. Zdrojem nepřesností u tohoto modelu bude především diskretizace a numerické chyby.

Vzorek ve tvaru kvádrů byl rozdělen na elementy, dále byla sestavena matice tuhosti a pomocí řešiče LOBPCG, viz [11], bylo nalezeno prvních dvacet vlastních tvarů a vlastních hodnot. Z nich byly následně vypočteny vlastní frekvence. Počet elementů byl na-

staven tak, aby další zjemňování sítě nemělo na výsledky vliv. Ukázalo se, že vhodná velikost je $120 \times 16 \times 16$ elementů, což vede na matici s téměř sedmi miliony nenulovými prvky. Všechny tyto úkoly byly řešeny pomocí programu SfePy.

Po několika iteracích bylo zjištěno, že nejlepší shody výpočtu a experimentu se dosáhne u materiálových konstant nastavených následovně:

$$E = 75 \text{ GPa} \quad \nu = 0,452 \quad \Rightarrow \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = 25,8 \text{ GPa}$$

Jak je z těchto hodnot zjevné, modul pružnosti ve smyku je ve velmi dobré shodě s tabulkovou hodnotou 26 GPa. Podobné shody se podařilo dosáhnout i v předcházejícím rozboru torzních kmitů.

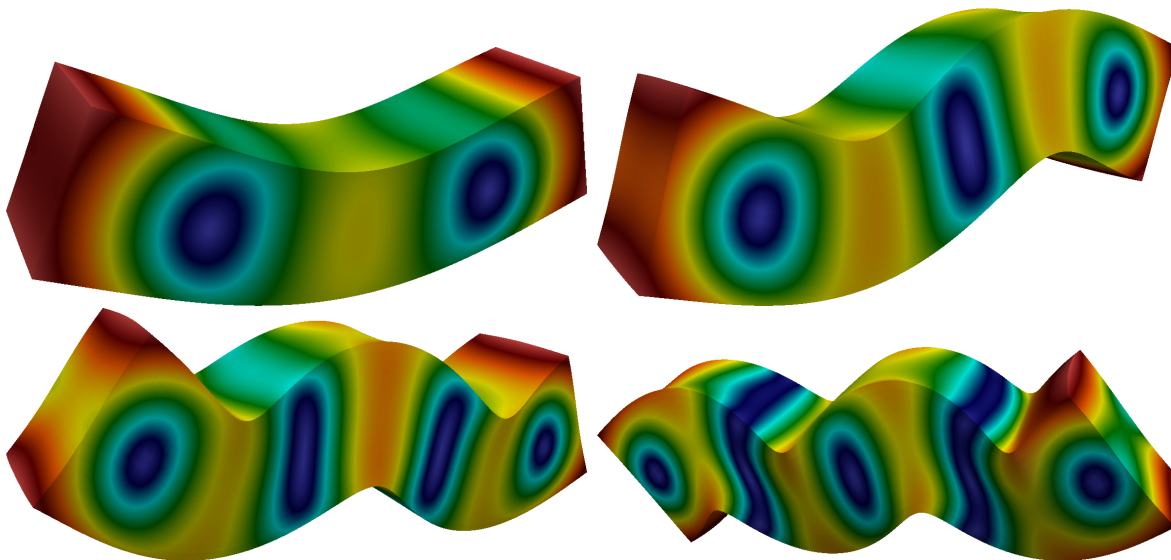
Bohužel, nelze říci totéž o modulu pružnosti v tahu, který, spolu s Poissonovým poměrem, vychází příliš velký. Hodnoty neodpovídají tabulkovým hodnotám $E=71$ GPa a $\nu=0,33$.

Těžko hledat vysvětlení pro tuto neshodu, protože vypočtené frekvence velmi dobře souhlasí s realitou. Následující tabulka obsahuje naměřené frekvence a jejich odchylku od vypočítaných. Frekvence jsou v hertzech a jsou seřazené podle velikosti, tj. podle pořadí vlastních hodnot:

mód	modální analýza	měření	odchylka (%)
1. příčný	2829,6	2818,2	0,41
1. torzní	3548,7	3548,9	-0,0044
2. příčný	6244,9	6215	0,48
1. podélný	6503,6	6514,5	-0,17
2. torzní	7096,6	7096,5	0,00073
3. příčný	9975,5	9931,5	0,44
3. torzní	10642,5	10638,4	0,038
2. podélný	12585,4	12770,5	-1,4
4. příčný	13349,3	13312,6	0,28
4. torzní	14185,4	14169,5	0,11

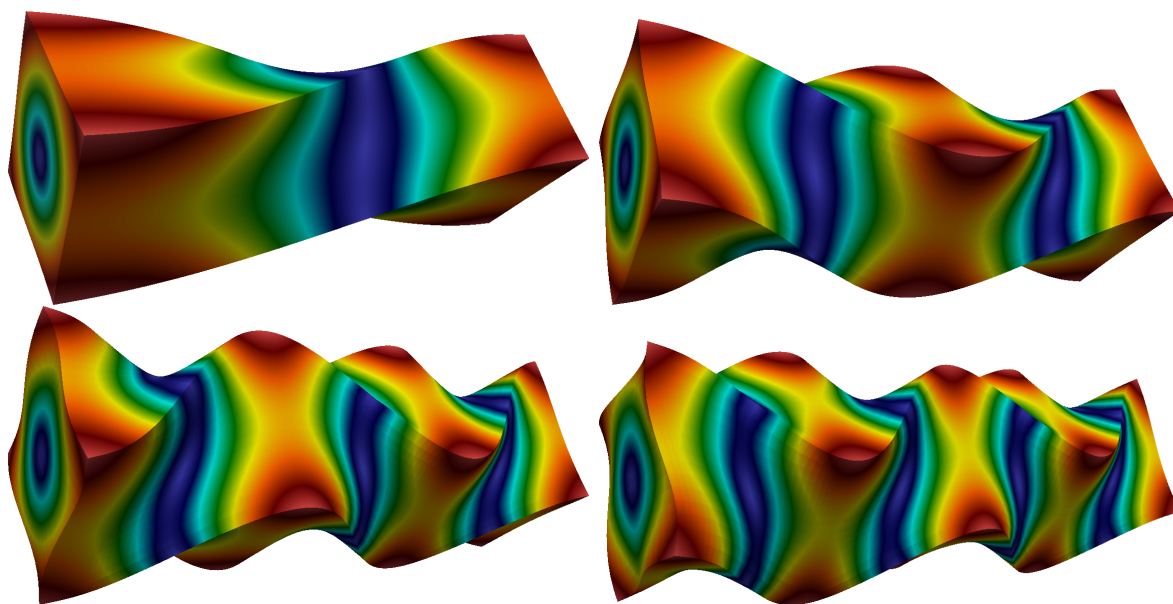
Největší odchylku najdeme u druhého podélného módu, a ta činí 1,4%. Kromě této největší anomálie souhlasí zbývajících devět hodnot s přesností lepší než pět promile. Jednoznačně nejlépe vycházejí torzní kmitů.

Na ilustracích 2.30 až 2.32 jsou zobrazeny vypočtené vlastní tvary pro všechny zkoumané módy. Barevná škála vypovídá o výchylce daného elementu z rovnovážné polohy. Výchylka byla mnohonásobně zvýrazněna pro lepší představu o tvaru zdeformovaného tělesa.

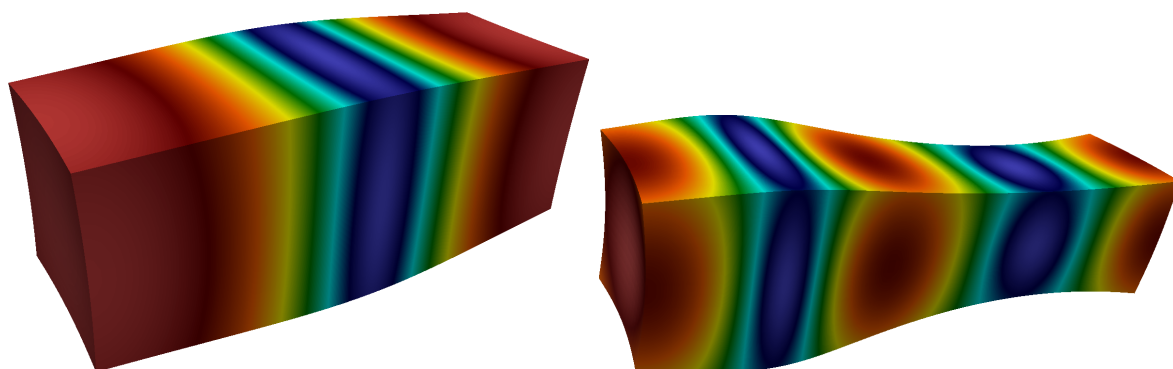


Obr. 2.30: Na obrázku jsou vlastní tvary prvních čtyř příčných kmitů. Jejich frekvence není možné uspokojivě vypočítat pomocí Euler-Bernoulliho teorie, protože ta platí jen pro tenkou tyč. Modální analýza zde dosáhla pro všechny módy přesnosti lepší než pět promile.

Závěrem lze říci, že výpočet byl ve většině případů velmi přesný a nevyjasněné odchylky prozatím ponechme stranou. Lze totiž očekávat, že u betonových vzorků vznikne řada potíží, které povedou k výrazně větším chybám.



Obr. 2.31: Na tomto obrázku jsou první čtyři vlastní tvary torzních kmitů. Frekvence torzních kmitů vycházejí velmi přesně v poměru 1:2:3:4 a téměř nezávisí na Poissonově poměru. Proto jsou torzní kmitů vhodnou metodou pro měření modulu pružnosti ve smyku.



Obr. 2.32: Vlastní tvar prvního a druhého podélného módu vypovídá o tom, že kromě délkových změn dochází ještě k příčnému ztenčení či rozšíření. V důsledku těchto jevů přestává platit, že poměr frekvencí je jedna ku dvěma. U druhého podélného módu byl výpočet pomocí modální analýzy nejméně přesný ze všech módů. Chyba činila 1,4%.

Kapitola 3

Dynamika soustavy vázaných oscilátorů

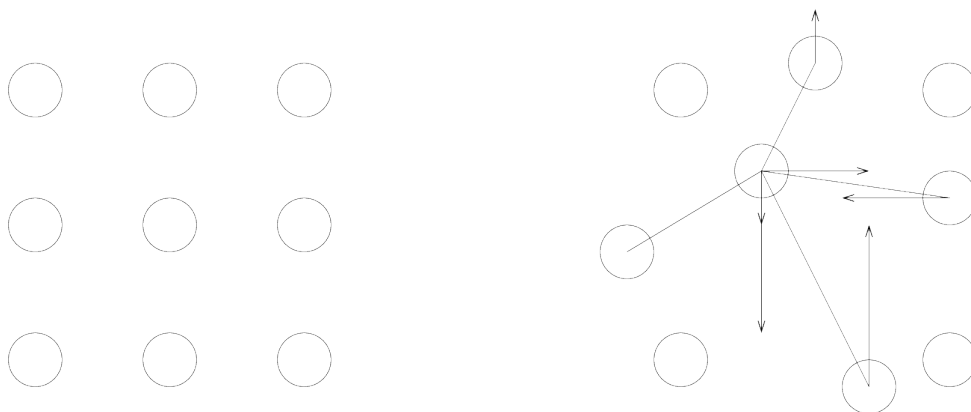
Jeden z popsaných modelů pro simulaci příčných vln byl založen na řadě vázaných oscilátorů. Jednalo se o jednorozměrnou testovací verzi s pouhými dvaceti elementy. Přesto byly některé výsledky povzbudivé. Proto byl na tomto základě vytvořen model trojrozměrný, který navíc může obsahovat komplikované vazby mezi elementy. Zkoumaný objekt tedy rozdělíme na konečné množství elementů, stanovíme mezi nimi vzájemné fyzikální interakce a budeme sledovat časový vývoj.

Lze očekávat, že takový výpočet bude náročný, takže zatímco jednoduchá testovací verze byla napsána v jazyce Python, další modely jsou již napsány v jazyce C, který produkuje rychlejší kód a je v něm lepší kontrola využití paměti.

Pro studium vlastností je možné zpočátku předpokládat materiál složený z elementů o hmotnosti dm , které na sebe navzájem působí silou \mathbf{F} . Tato síla nechtě je úměrná výchylce z rovnovážné polohy vzhledem k okolním bodům. U každého elementu (hmotného bodu) bude známa jeho poloha a rychlost. Z polohy elementu (a polohy okolních elementů) tedy vyplývá síla a ze síly a hmotnosti elementu lze z druhého Newtonova zákona určit zrychlení ($\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$). Známe-li zrychlení, pak za čas dt bude rychlost rovna $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a} dt$. Poloha \mathbf{r} se za čas dt změní na $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v} dt$. Celý cyklus se opakuje a každý krok představuje posunutí času o dt .

3.1 Rozbor sil, podélná a příčná vlna

Obr. 3.1 znázorňuje síly a jejich reakce působící na element při vychýlení z rovnovážných poloh. Rovnovážnou vzdálenost mezi elementy označme l_0 . Předpokládejme souřadný sys-



Obr. 3.1: Vzájemné působení elementů při vychýlení z rovnovážných poloh. V levé části jsou elementy uspořádané v rovnovážných polohách, v pravé části jsou elementy vychýleny a působí na sebe silami.

tém uspořádaný tak, že osa x směřuje doprava a osa y nahoru. Vyšetřeme nyní působení na element umístěný v bodě $[0, 0]$ od elementu nalevo od něj ve vzdálenosti l_0 . Vzdálenost l mezi elementy závisí na x a y podle vztahu

$$l(x, y) = \sqrt{(l_0 + x)^2 + y^2} \quad (3.1)$$

Předpokládejme, že výchylky jsou natolik malé, že lze použít lineární přiblížení a stanovit vzdálenost l pomocí prvních parciálních derivací funkce $l(x, y)$.

$$l \approx l(0, 0) + \frac{\partial l(x, y)}{\partial x}(0, 0)dx + \frac{\partial l(x, y)}{\partial y}(0, 0)dy \quad (3.2)$$

Rozepíšeme parciální derivaci $l(x, y)$ podle x .

$$\frac{\partial l(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{2} ((l_0 + x)^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} 2(l_0 + x) = \frac{l_0 + x}{\sqrt{(l_0 + x)^2 + y^2}} \quad (3.3)$$

Parciální derivace $l(x, y)$ podle y je rovna

$$\frac{\partial l(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{2} ((l_0 + x)^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} 2y = \frac{y}{\sqrt{(l_0 + x)^2 + y^2}} \quad (3.4)$$

Stanovíme-li první derivaci pro $x = 0$ a $y = 0$, dostáváme

$$\frac{\partial l(x, y)}{\partial x}(0, 0) = \frac{l_0}{\sqrt{l_0^2 + 0^2}} = 1 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial l(x, y)}{\partial y}(0, 0) = \frac{0}{\sqrt{l_0^2 + 0^2}} = 0 \quad (3.6)$$

Přibližný vztah pro vzdálenost mezi elementy je tedy

$$l \approx l_0 + 1dx + 0dy = l_0 + dx \quad (3.7)$$

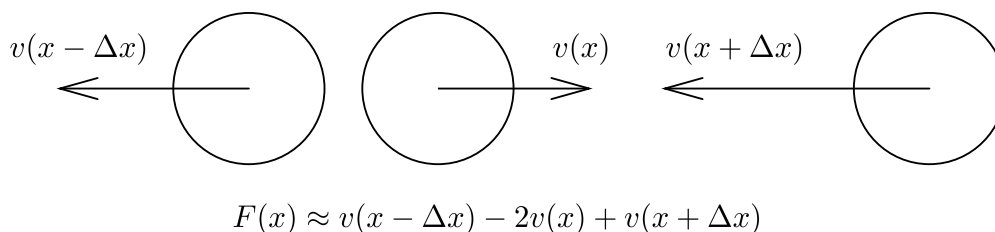
Při lineárním přiblížení tedy nemá vychýlení ve směru osy y vliv na celkovou vzdálenost mezi elementy.

Modul pružnosti ve smyku lze přiblížit tím, že síla působící na zmíněný element působí proti směru výchylky a je přímo úměrná rozdílu y -ových souřadnic.

Byl napsán program využívající zmíněné principy aplikované na trojrozměrný případ. Pomocí něj je možné sledovat známé vlnové jevy jako příčné vlnění, podélné vlnění, interference, odraz vlnění aj. Program byl napsán v jazyce C a běžel na počítači s procesorem Intel Core i7 o frekvenci 3,2 GHz pod operačním systémem LINUX. Jedna iterace při jednom milionu prvků trvala cca 200 milisekund. Lze tedy očekávat, že rychlost výpočtu bude únosná i pro výrazně složitější případy.

3.2 Tlumení podélných vln

Jednoduchý model, který popisuje tlumení podélných vln je založen na předpokladu, že odporová síla působící na daný element je úměrná vzájemné rychlosti mezi myšleným elementem a okolními elementy v podélném směru.



Obr. 3.2: Tlumení podélné vlny – situace v jednorozměrném případě

Vycházejme z obrázku 3.2. Sílu, kterou na element o souřadnici x působí sousední element nalevo, označme F_1 , sílu od elementu napravo označme F_2 . Celková síla je tedy součtem obou sil.

$$F = F_1 + F_2 \approx (v(x - \Delta x) - v(x)) + (v(x + \Delta x) - v(x)) = \quad (3.8)$$

$$= v(x - \Delta x) - 2v(x) + v(x + \Delta x) \quad (3.9)$$

Odporová síla je tedy úměrná druhé parciální derivaci rychlosti podle souřadnice. Konstantu úměrnosti označme γ . Pak platí

$$F_i = \gamma \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2}$$

Druhou derivaci funkce $f(x)$ můžeme psát

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x - \Delta x) - 2f(x) + f(x + \Delta x)}{\Delta x^2}$$

Přičemž Δx v tomto případě představuje vzdálenost mezi elementy. Při numerickém výpočtu lze konstantu

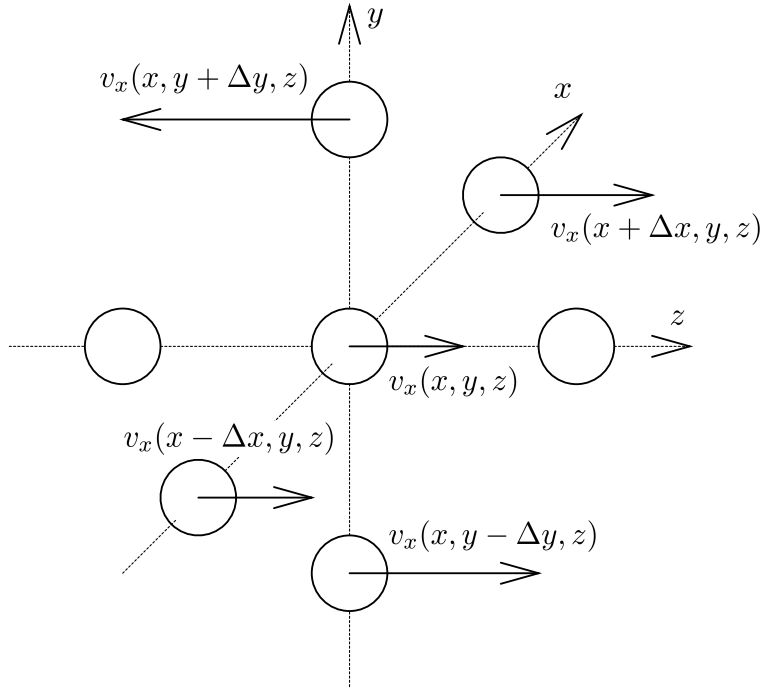
$$\frac{\gamma}{\Delta x^2}$$

spočítat pouze jednou, čímž se ušetří strojový čas.

3.3 Tlumení příčných vln

Předpokládá se, že k disipaci energie v systému dochází na základě rozdílných rychlostí jednotlivých elementů, a síla způsobující tlumení je úměrná rozdílu rychlosti. U trojrozměrného případu působí na každý prvek šest jeho nejbližších sousedů, přičemž dva způsobují šíření a tlumení podélné vlny, zbývající čtyři ovlivňují vlnění příčné. Situace je naznačena na obr. 3.3. Pro sílu působící ve směru osy z na element o souřadnicích (x, y, z) bude platit

$$\begin{aligned} F_z(x, y, z) \approx & [v_z(x - \Delta x, y, z) - v_z(x, y, z)] + \\ & [v_z(x + \Delta x, y, z) - v_z(x, y, z)] + \\ & [v_z(x, y - \Delta y, z) - v_z(x, y, z)] + \\ & [v_z(x, y + \Delta y, z) - v_z(x, y, z)] = \end{aligned}$$



Obr. 3.3: Tlumení příčné vlny – předpokládá se, že se vlna šíří ve směru osy x nebo y (situace jsou zde rovnocenné)

$$= v_z(x - \Delta x, y, z) + v_z(x + \Delta x, y, z) + v_z(x, y - \Delta y, z) + v_z(x, y + \Delta y, z) - 4v_z(x, y, z) \quad (3.10)$$

Výše uvedený vztah (3.10) lze přímo použít v simulačním výpočtu. V analytickém zápisu je však vhodnější využít diferenciálních operátorů. Vztah (3.10) lze přepsat na tvar

$$F_z(x, y, z) \approx \frac{v_z(x - \Delta x, y, z) - 2v_z(x, y, z) + v_z(x + \Delta x, y, z)}{\Delta x^2} + \frac{v_z(x, y - \Delta y, z) - 2v_z(x, y, z) + v_z(x, y + \Delta y, z)}{\Delta y^2} \quad (3.11)$$

přičemž se pouze změní konstanta úměrnosti. Vztah (3.11) lze zjednodušit za předpokladu, že $\Delta x = \Delta y$, obecně vzato $\Delta x_i = \Delta x_j$ pro každé $i \neq j$. Znamená to tedy, že soustava elementů musí představovat ekvidistantní kartézskou síť. Tento požadavek je při simulaci snadné splnit, vzdálenosti mezi elementy budou stejné pro všechny souřadné osy. Tuto vzdálenost označme h . Dále zavedme konstantu úměrnosti δ tak, aby platilo

$$F_z(x, y, z) = \frac{\delta}{h^2} [v_z(x - h, y, z) + v_z(x + h, y, z) + v_z(x, y - h, z) + v_z(x, y + h, z) - 4v_z(x, y, z)] \quad (3.12)$$

Podobně jako u tlumení podélných vln je i zde pro urychlení výpočtu výhodné dopředu spočítat konstantu

$$\frac{\delta}{h^2}$$

Provedeme-li limitní přechod $h \rightarrow 0$, lze sílu tlumící příčné vlnění psát ve tvaru

$$\begin{aligned} F_z(x, y, z) &= \delta \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right) = \\ &= \delta \left[\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] = \delta \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 v_z}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Předpokládáme-li (pro jednoduchost) homogenní izotropní prostředí, kde konstanta úměrnosti δ je ve všech místech stejná a nezávisí ani na směru šíření příčné vlny, lze předchozí vztah zobecnit na soustavu N rovnic pro N dimenzí daného systému.

$$F_i = \delta \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} \right) = \delta \left(\nabla^2 \mathbf{v} - \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} \right) \quad (3.14)$$

3.4 Podélná a příčná vlna včetně tlumení

Z předchozích úvah vyplynulo, že na každý element budou působit obecně čtyři síly. Označme je F_1 až F_4 :

1. F_1 : Příčinou vzniku této síly je existence modulu pružnosti v tahu. Tato síla způsobuje šíření podélné vlny.
2. F_2 : Tato síla má původ v modulu pružnosti ve smyku. Díky ní se v materiálu šíří příčná vlna.
3. F_3 : Tato síla způsobuje tlumení podélné vlny.
4. F_4 : Spolu se silou F_3 se tato síla podílí na disipaci energie ze systému. Síla F_4 má za následek tlumení příčné vlny.

Pro element o hmotnosti m vyplývá z druhého Newtonova zákona

$$m \frac{\partial v_i}{\partial t} = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

tedy

$$m \frac{\partial v_i}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 r_i}{\partial r_i^2} + \beta \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 r_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2 r_i}{\partial x_i^2} \right) + \gamma \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} + \delta \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} \right) \quad (3.15)$$

Což lze přepsat na tvar

$$m \frac{\partial v_i}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 r_i}{\partial r_i^2} + \beta \left(\nabla^2 \mathbf{r} - \frac{\partial^2 r_i}{\partial x_i^2} \right) + \gamma \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} + \delta \left(\nabla^2 \mathbf{v} - \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} \right) \quad (3.16)$$

Numerické řešení této soustavy parciálních diferenciálních rovnic je hlavním úkolem simulačního programu.

3.5 Odhad paměťových nároků

Při simulaci šíření akustických vln pomocí výše popsané metody je potřeba, aby výpočetní program znal všechny parametry u všech elementů. Počet elementů by měl být co největší k dosažení co nejlepší přesnosti a rozlišení. Celkový počet elementů je však limitován množstvím fyzické paměti počítače. Paměťové nároky je potřeba odhadnout před výpočtem.

Předpokládejme, že je k dispozici počítač se 3 GB (volné) paměti. Do této paměti je nutno uložit polohu a rychlost všech elementů. Tyto dva parametry (poloha a rychlost) jsou nutné pro provedení jednoduché simulace popsané výše. Komplikovanější výpočty (zahrnující nelineární jevy, nehomogenity, tlumení apod.) budou samozřejmě náročnější. Poloha a rychlost jsou vektorové veličiny, takže u trojrozměrného problému bude třeba uložit šest hodnot pro každý element.

Tyto složky jsou hodnoty s plovoucí desetinnou čárkou, což je 64-bitový datový typ, tudíž pro uložení celé šestice je potřeba 48 bytů. Tento údaj závisí na architektuře a implementaci, ale pro předběžné odhady z něj lze vycházet. Lze tedy očekávat, že celkový počet elementů v paměti může být 62,5 miliónu. To přibližně odpovídá krychli o straně 400 elementů (zaokrouhleně). U akustických ultrazvukových kmitů je nutno očekávat frekvence dosahující úrovní až 500 kHz. Postupnou rychlost vlnění můžeme u pevných látek odhadnout na 4000 m s^{-1} . Vlnová délka je v tomto případě rovna 8 mm. Tvar vlny lze považovat za dobře popsaný v případě, že vzdálenost mezi elementy odpovídá jedné desetinně vlnové délky, což v našem případě představuje 0,8 mm. Čtyři sta elementů odpovídá lineární vzdálenosti 320 mm. Zkoumaný vzorek samozřejmě nemusí být krychle, ale z odhadů vyplývá, že celkový objem je přibližně nejvýše 32 litrů při dostupné paměti 3 GB.

Situace je však ještě zkomplikována tím, že nelze postupně vypočítávat změny rychlosti a polohy cyklicky pro každý element zvlášť, protože simulovaný čas musí být stejný pro všechny elementy. Simulaci je nutno provést tak, že z jednoho stavu soustavy vyplyne stav nový a v průběhu výpočtu se nesmí původní stav změnit. Současně je potřeba nový stav ukládat do paměti, takže nezbývá, než mít v paměti uloženy stavy dva. Paměťové nároky tímto faktem dvojnásobně vzrůstají, a tak při 3 GB volné paměti lze zpracovávat data odpovídající reálnému vzorku o objemu cca 16 litrů.

3.6 Vizualizace výsledků

V souvislosti s numerickou simulací je nutné vzít v úvahu i vizualizaci výsledků. Zkoumaný objekt může být popsán až jedním milionem elementů a obvykle se provádějí řádově tisíce iterací. Jelikož se množství vygenerovaných dat vymyká lidské představivosti, je i zobrazení výsledků velmi komplikované.

Jedním ze způsobů, pomocí kterého lze převést vypočítaná data do názorné podoby, je zobrazení trojrozměrné scenerie tak, aby byla zřetelná poloha jednotlivých elementů. V tomto směru se velmi dobře osvědčil program POVRAY, který je určen k vyrenderování scény pomocí sledování světelného paprsku. Tato metoda se označuje též jako *raytracing* a umožňuje vykreslit situaci, která je nadefinována pomocí světelných zdrojů, pozice pozorovatele a rozmístěním a optickými vlastnostmi objektů. Existuje mnoho programů, které tuto technologii obsahují, ale vyjimečnost programu POVRAY spočívá v tom, že se nejedná o klasický kreslicí software. Scenérii zde uživatel nevytváří interaktivně pomocí myši. Místo toho se informace zpracovávají ze *zdrojového kódu*, který je psán specializovaným popisným jazykem pro definici scény.

Tato filozofie je velmi výhodná pro automatizované zpracování výsledků, protože výpočetní program může přímo generovat zdrojový kód, ve kterém jsou popsány souřadnice elementů a program POVRAY z něj vytvoří trojrozměrný pohled.

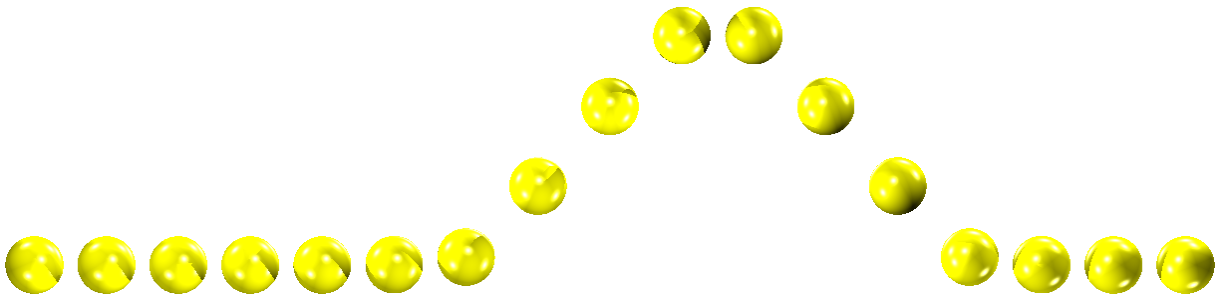
Uvedeným postupem byla vytvořena vizualizace postupu podélné vlny. Jeden ze snímků je na obrázku 3.5. Vlnění bylo způsobeno vychýlením krajního elementu z rovnovážné polohy v podélném směru. V materiálu se tento typ vlnění šíří díky existenci modulu pružnosti v tahu. Na obrázku je patrné, že vzájemné vzdálenosti mezi elementy nejsou stejné.

Obrázek 3.4 představuje jeden z okamžiků během šíření příčné vlny. V čase $t = 0$ byl

jeden z krajních elementů vychýlen z rovnovážné polohy v příčném směru, což vyvolalo příčné vlnění. Rovina kmitání je v tomto případě pro názornost kolmá na směr pohledu pozorovatele. Vhodnou počáteční podmínkou by bylo možné vyvolat vlnu i v jiné rovině. Kdybychom vyvolali více současných vlnění v různých rovinách, což z principu superpozice je proveditelné, získáme elipticky polarizovanou vlnu nebo její speciální případ – kruhově polarizovanou vlnu. Tyto vlny by však z bočního pohledu vypadaly zcela stejně, jako právě na obrázku 3.4. Pouhým pohledem na obrázek 3.4, ba dokonce ani na celou animaci, nelze rozhodnout, zda se jedná o příčné vlnění nebo kruhově či elipticky polarizovanou vlnu. Vždy vidíme pouze průmět do pozorovací roviny. Zobrazení z různých úhlů pohledu má proto důležitý význam.

Na obrázku 3.6 je zachycen dvojrozměrný případ, ve kterém byl jeden z elementů na počátku vychýlen ve zcela obecném směru, a tak se na modelu projevuje šíření jak příčné, tak podélné vlny. Rozmístění elementů je stejné jako v případě kmitání membrány, ale silové interakce jsou odlišné. U membrány jsme uvažovali pouze příčné kmity.

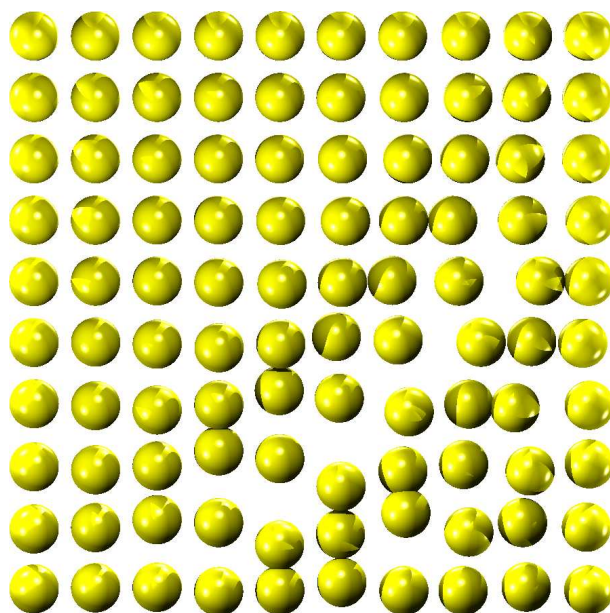
Obrázek 3.7 představuje trojrozměrný model, na kterém lze vhodnými počátečními podmínkami demonstrovat řadu typických vlnových jevů, tedy podélnou vlnu, příčnou vlnu, odraz vlnění, povrchovou vlnu a jiné. Tento model se stal základem pro výpočet chování poškozeného vzorku, kdy prasklina v materiálu byla nasimulována pomocí zeslabené vazby mezi elementy či zcela chybějícími elementy.



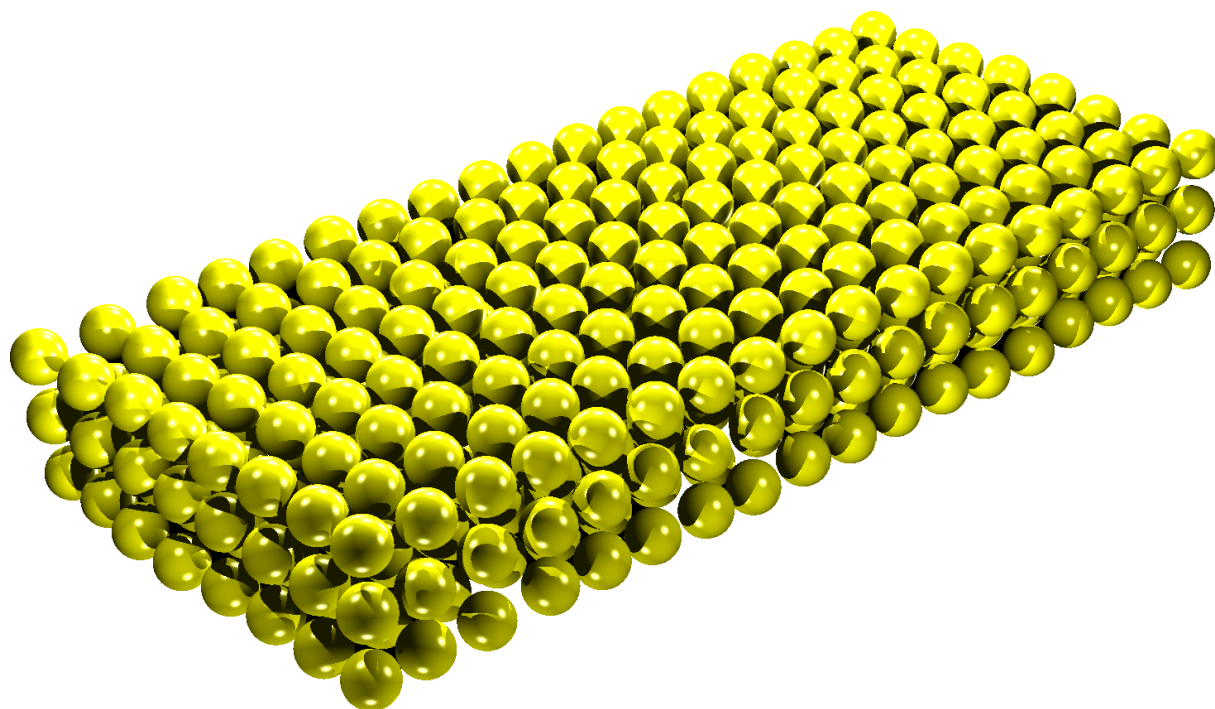
Obr. 3.4: Příčná vlna



Obr. 3.5: Podélná vlna



Obr. 3.6: Dvojměrný případ



Obr. 3.7: Trojměrný případ

3.7 Simulace poškození materiálu

Poškozením materiálu se myslí změna ve struktuře materiálu, která má za následek zhoršení vlastností. Ve stavebnictví se mezi sledované vlastnosti většinou řadí meze pevností, modul pružnosti v tahu a modul pružnosti ve smyku. Přítomnost trhlin snižuje všechny zmíněné parametry a dá se očekávat, že bude mít vliv i na šíření mechanického vlnění.

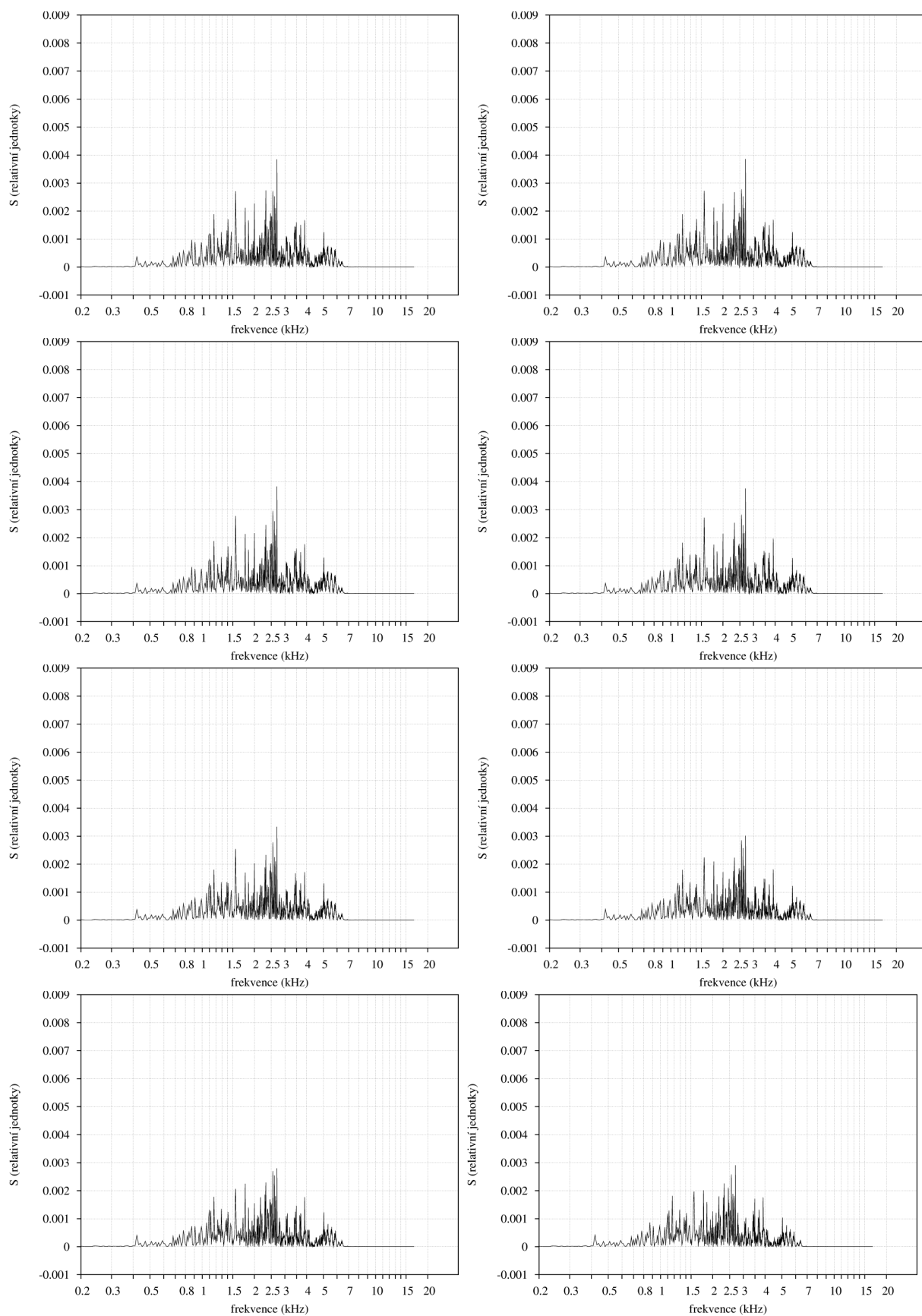
3.7.1 Poškození materiálu vznikem krychlové dutiny

Poškození vzorku může v praxi nastat z různých příčin. Jedním z projevů je vznik trhlin či dutin, které představují lokální vadu. Pomocí simulace se pokusme zjistit chování vzorku, který je poškozen dutinou krychlového tvaru. Postup při modelování nechtě je takový, že materiálu ponechme v celém jeho objemu původní parametry a postupně odstraňujeme elementy zevnitř zkoumaného objektu. Vzniklý model tedy nadále představuje homogenní strukturu, protože všechny elementy mají stejné vlastnosti, ale mění se pouze *tvar* objektu, tedy okrajové podmínky pro řešení rovnice.

Byl sestaven program, který provede simulaci pro nulovou velikost krychlové dutiny, tedy pro původní (nepoškozený) vzorek. Poté zvětší dutinu a opět provede výpočet. Vznikne tak série simulací, jejíž výsledky jsou uvedeny na obrázcích 3.8.

Na frekvenčním spektru vidíme, že hlavní maximum se rozpadlo na několik vedlejších. Z vyčíslených hodnot bylo také zjištěno, že dojde k mírnému snížení frekvence hlavních píků.

Je vhodné podotknout, že pro zvolenou velikost dutiny nejsou rozdíly na grafech příliš patrné.



Obr. 3.8: Frekvenční spektra materiálu, u kterého bylo simulováno poškození vznikem dutiny krychlového tvaru. Grafy odpovídají postupně narůstající velikosti dutiny.

3.7.2 Poškození materiálu zeslabením vazby mezi elementy

Další způsob, kterým bylo simulováno poškození vzorku, je nahodilé zeslabení vazeb mezi elementy. Koeficient každé vazby mezi elementy byl v celé struktuře vynásoben náhodným číslem z intervalu $\langle a; 1 \rangle$, kde a představuje maximální míru zeslabení.

Vzorek byl ve výsledku složen ze stejného počtu elementů, ale lze si představovat, že jeho mikrostruktura byla narušena a makroskopicky se jevil téměř jako homogenní.

Byl naprogramován skript, který postupně snižoval koeficient a a v každém kroku spustil celou hlavní simulaci.

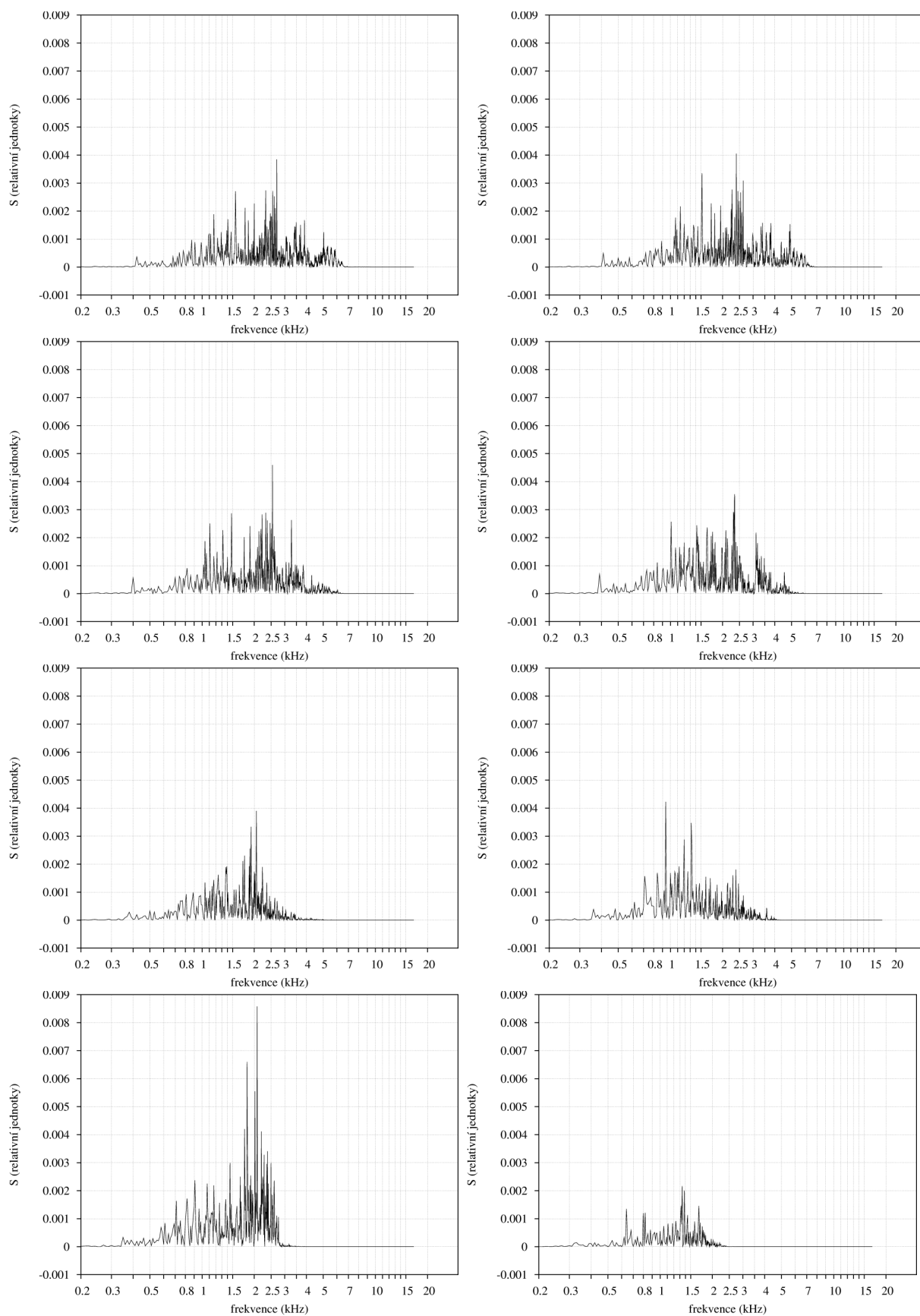
Výsledek simulace je patrný na obrázcích 3.9. Z grafů je patrné, že narůstající poškození vede ke snížení frekvence oscilací.

3.8 Závěr

Byl naprogramován simulační software, který vypočítává časový vývoj trojrozměrné soustavy tlumených vázaných oscilátorů. Výsledky naznačují, že tento model je schopen simulovat základní jevy spojené s nedestruktivním testováním pomocí metody impact-echo.

Detailní rozbor chování modelu, jeho další možnosti konfigurace a porovnání s experimentem je popsán v disertační práci¹ [15].

¹J. Martinek, Numerická simulace akustických kmitů v materiálu, disertační práce 2006



Obr. 3.9: Frekvenční spektra materiálu, u kterého bylo simulováno poškození náhodným zeslabením vazeb mezi elementy. Grafy odpovídají postupně narůstající míře poškození.

Kapitola 4

Vývoj měřicí metody

Hlavním zaměřením minulých kapitol byla snaha porozumět elastickému kmitání a vlnění ve zkoumaném vzorku a vypočítat vibrace pomocí několika modelů. Výsledkem byla numerická předpověď rezonančních frekvencí i mnoha jiných jevů.

Nyní se soustředíme na další část, která souvisí s nedestruktivním testováním, a tím je vývoj měřicích metod. Přestože i v předchozí části přišla ke slovu řada experimentů, jejich provedení ponejvíce připomínalo metodu impact-echo.

Pokusme se problematiku měření rozebrat obecněji ve snaze nalézt i jiné metody než impact-echo a případně zhodnotit výhody i nevýhody nového přístupu.

4.1 LTI – Linear Time Invariant systém

Při matematickém popisu chování mnoha systémů lze předpokládat, že se jedná o systém lineární, časově neproměnný. Jedná se o abstraktní pojem, který se objevuje v mnoha vědních oborech, avšak v užším slova smyslu budeme mít na mysli vzorek zkoumaný pomocí akustických metod. Obecně vzato LTI zahrnuje jakoukoli situaci, kdy jsou splněny následující podmínky.

Předpokládejme, že stav systému ovlivňujeme vstupní veličinou či proměnnou a reakci systému zjišťujeme pomocí jiné, výstupní veličiny. Máme tedy myšlenou černou skříňku (black box), vstupní signál $x(t)$ a výstupní signál $y(t)$. Vstupní a výstupní signál závisí na čase, stejně tak stav systému závisí na čase. Nicméně dále předpokládejme, že systém

má nějaký *klidový* stav, který nastane, je-li vstupní signál dostatečně dlouhou dobu nulový. Tento předpoklad není zcela nutný pro samotnou definici lineárního, časově neproměnného systému, ale usnadní mnoho dalších úvah. V souvislosti s akustikou budeme za klidový stav považovat situaci, kdy veškeré vibrace ustanou, zvuk utichne, rozložení akustického tlaku se vyrovná a výstupní signál bude nulový.

Důležitou vlastností systému je jeho časová neproměnnost. Máme-li systém, který na vstupní signál $x(t)$ reaguje výstupním signálem $y(t)$, pak časově neproměnným jej nazveme tehdy, bude-li jeho odezva na signál $x(t - T)$ rovna $y(t - T)$. Z toho vyplývá, že kdybychom vstupní signál opoždili o T sekund, bude odezva opožděná taktéž o T sekund, ale jinak bude mít stejný tvar. Tvar odezvy tedy nezávisí na konkrétním časovém okamžiku, ve kterém přijde vstupní signál.

Důsledek časové neproměnnosti je mimo jiné to, že máme-li daný vstupní signál $x(t)$, pak odezva $y(t)$ bude stále stejná. Předpokládáme, že počáteční stav systému byl klidový. Touto podmínkou je zajištěna opakovatelnost. Je možné několikrát po sobě nechat systém ustálit a zjišťovat jeho odezvu na vstupní signál. Odezva $y(t)$ u časově neproměnného systému bude stále stejná.

Další vlastností systému je jeho linearita. Tou se myslí skutečnost, že jestliže vstupní signál $x_1(t)$ způsobí odezvu $y_1(t)$ a vstupní signál $x_2(t)$ způsobí odezvu $y_2(t)$, pak lineární kombinace vstupů $a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$ způsobí lineární kombinaci odezvy $a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$. Koeficienty a_1 a a_2 jsou v tomto případě ryze reálné.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) x(\tau) dt$$

4.2 Odezva na impuls

Základní představa chování výše popsaného systému či zkoumaného vzorku je ta, že signál, například akustický, se po průchodu vzorkem změní. Změna však není libovolná, protože jsme své uvažování omezili na lineární, časově neproměnný vzorek. Na děj, který probíhá při průchodu signálu vzorkem, můžeme pohlížet dvěma způsoby, přičemž oba jsou matematicky ekvivalentní. Je možné sledovat průběh signálu v časové oblasti a v takovém případě bychom došli k závěru, že výstupní signál je *konvolucí* vstupního signálu a jisté vlastnosti vzorku, kterou nazýváme *odezva na impuls*. Druhý způsob uvažování se věnuje frekvenční oblasti, čemuž dáme pro tentokrát přednost. Znovu je vhodné uvést, že oba

pohledy na problematiku jsou rovnocenné a platí, že konvoluce v časové oblasti je totéž, co násobení ve frekvenční oblasti.

Uvažujme, že vstupní signál je periodický. Pak můžeme, na základě Fourierovy teorie, provést jeho rozklad na harmonické funkce a nalézt tak jeho frekvenční spektrum. Další úvahy se tím zjednodušují, protože co dokážeme pro jedinou harmonickou funkci s danou frekvencí, to bude platit i pro součet libovolných harmonických signálů.

Současně je vhodné dodat další omezující podmínku vycházející z technického provedení experimentu. Vše je totiž diskrétní, a to jak časová oblast, tak i frekvenční oblast. Nemáme k dispozici hodnotu signálu pro libovolný časový okamžik, ale pouze řadu diskrétních hodnot pro časové okamžiky, ve kterých A/D převodník provedl měření. Byť se jedná o kroky s časovou prodlevou řádu mikrosekund, je nutné na toto omezení pamatovat. Diskretizace se týká také frekvenční oblasti a ani zde nepracujeme s libovolnou frekvencí, nýbrž pouze s konkrétními hodnotami, jejichž rozestup je $1/\tau$, kde τ je perioda signálu (doba záznamu). Frekvenční spektrum obvykle zjišťujeme z časového záznamu pomocí algoritmu zvaného *diskrétní Fourierova transformace (DFT)*, přičemž i jeho název potvrzuje, že výsledné spektrum nebude spojitě.

Uvažujme tedy o jediné frekvenci, harmonickém signálu, který vstupuje do zkoumaného vzorku. Po výstupu ze vzorku bude mít pouze změněnou amplitudu a fázi, ale bude to opět harmonický signál o nezměněné frekvenci. Vstupující signál $x(t)$ můžeme napsat ve tvaru

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

což je asi nejsnáze pochopitelná forma zahrnující amplitudu a fázi. Mnohem lépe se však matematicky pracuje s formou obsahující komplexní čísla, která vychází z Eulerovy identity

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$$

V takovém případě můžeme vstupující harmonickou funkci $x(t)$ zapsat jako

$$x(t) = a \cos(\omega t) + b i \sin(\omega t)$$

přičemž komplexní číslo $a + bi$ lze přepočítat na amplitudu i fázi. Protože nyní již uvažujeme o frekvenční oblasti, budeme komplexní číslo vztahující se k vstupujícímu signálu označovat X . Po průchodu vzorkem naměříme výstupní harmonický signál, ke kterému můžeme analogicky přisoudit jiné komplexní číslo Y . Platí, že při průchodu vzorkem došlo k tomu, že se X vynásobilo konstantou H , čímž vznikl výstupní signál:

$$X \cdot H = Y$$

Zásadní předpoklad je, že konstanta H je *vlastnost vzorku*, která jednoznačně určuje jeho chování pro jakýkoli vstupní signál. Současně platí, že tento parametr H můžeme získat tím pouhým podělením

$$H = \frac{Y}{X}$$

přičemž tento postup bude platit pro jakýkoli vstupní signál. V principu tedy můžeme hledanou vlastnost vzorku H zjistit libovolným vstupním signálem.

Dosud jsme uvažovali pouze o třech komplexních číslech X , H a Y , což vyplývalo z předpokladu, že vstupní signál je harmonický a spolu s ním i výstupní. Víme ovšem, že součet harmonických signálů dá ve výsledku signál libovolného průběhu. Naše předchozí úvahy tedy platí i pro libovolný signál, ale již musíme uvažovat, že koeficienty X , H a Y jsou různé pro každou frekvenci ω , která je přítomna. Nyní se již jedná o *řady komplexních čísel* a raději upřesněme předchozí vztah na

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

Mělo by být zřejmé, že ke zjištění hledané funkce $H(\omega)$ postačí vypočítat diskrétní Fourierovu transformaci výstupu a vstupu a podělit je.

Nalezená funkce $H(\omega)$ je zásadním výsledkem našeho snažení, protože právě ta by měla vypovídat o vlastnostech zkoumaného vzorku.

4.2.1 Výpočet odezvy na impuls $H(t)$

Mnoho vlastností, které můžeme o vzorku zjistit na základě jeho odezvy na impuls, se vypočítává z frekvenčního spektra $H(\omega)$, kdy studujeme především polohu jednotlivých frekvenčních maxim.

Z časové závislosti odezvy na impuls však můžeme vyhodnotit další parametry, například celkový útlum vibrační energie a řadu dalších.

Použijeme-li jako budící signál krátký impuls, pak výstupní signál $Y(t)$ přímo představuje $H(t)$, ze které Fourierovou transformací vypočítáme $H(\omega)$.

Máme-li však obecný signál na vstupu a odezvu na impuls zjišťujeme jako podíl Fourierových transformací výstupu a vstupu, pak získáme přímo funkci $H(\omega)$. Požadujeme-li navíc i výpočet časové odezvy $H(t)$, pak máme úlohu obrácenou a musíme použít tzv. *inverzní Fourierovu transformaci*. Tato funkce je implementována v knihovně SciPy a její použití je snadné.

4.2.2 Vstupní signál ve tvaru δ funkce

Víme již, že hledanou funkci $H(\omega)$ lze zjistit jako podíl výstupu a vstupu ve frekvenční oblasti. Na základě této myšlenky se pokusme vytvořit situaci, kdy výstup je přímo roven funkci $H(\omega)$, aniž bychom museli data jakkoli dodatečně zpracovávat.

Požadujeme-li $H(\omega) = Y(\omega)$, pak musí platit, že $X(\omega)$ je řada jedniček, protože podělení jedničkou dá totéž číslo. Tvar vstupního signálu tedy musí být takový, aby každá jeho frekvenční složka měla stejný koeficient, a to jednotkový. Každou frekvenční složku je tedy možno zapsat velmi jednoduše:

$$\cos(\omega_n t)$$

funkce sinus již nebude přítomna, protože imaginární část bude nulová. Funkce, která vznikne složením kosinů je Diracova δ -funkce, přesněji řečeno tzv. Diracův hřeben, protože musíme stále uvažovat, že jde o periodické funkce. Výsledkem sumy je

$$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n \frac{t}{T}}$$

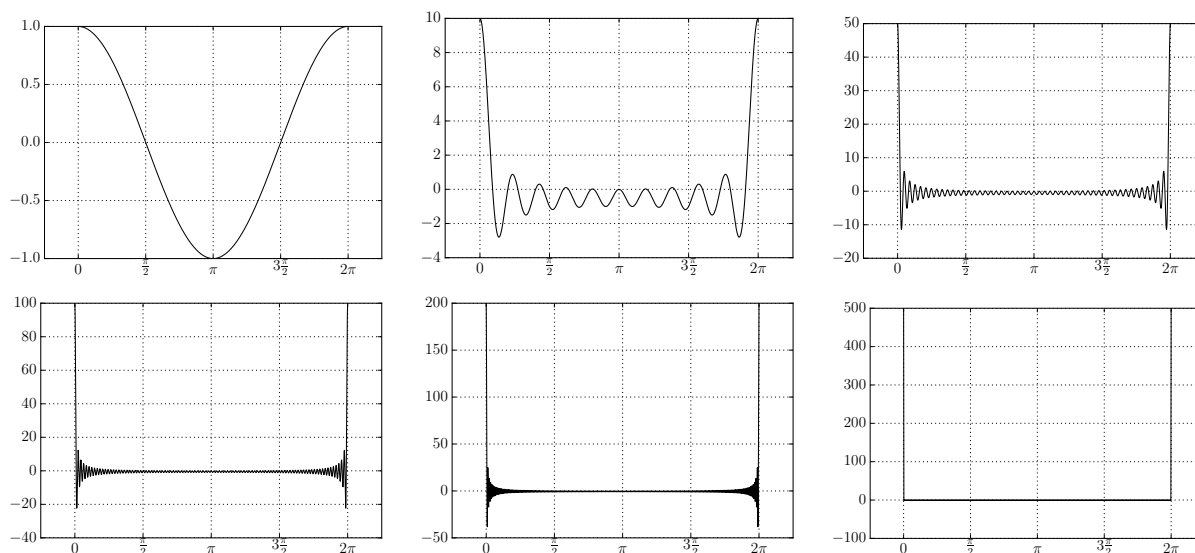
Na grafech na obrázku 4.1 vidíme, jak postupným přidáváním vyšších frekvencí vzniká součet stále více připomínající řadu δ -funkcí, tj. hřeben. Při tvorbě grafů byla úmyslně vynechána normalizační konstanta, takže na rozsahu y -ových os je ihned vidět počet funkcí kosinus, který byl použit při sumaci.

Soustředíme-li se na jednu periodu ve výsledné funkci, jedná se o δ -funkci, kterou bychom v technické praxi nejspíše vytvořili jako velmi intenzivní a velmi krátký impuls. Z tohoto důvodu označujeme funkci $H(\omega)$ pojmem *odezva na impuls*. Pod stejným pojmem můžeme současně označovat její časový průběh $H(t)$, přičemž obvykle k nedorozuměním nedochází. Je zřejmé, že impuls má výsadní postavení mezi všemi ostatními druhy vstupních signálů. Právě při použití impulsu dostáváme ihned jako výsledek hledanou funkci $H(t)$, přičemž z ní již snadno vypočteme funkci $H(\omega)$ pomocí Fourierovy transformace.

Současně se potvrzuje i fakt, že výstupní funkce $Y(t)$ je konvolucí vstupního signálu $X(t)$ a odezvou na impuls $H(t)$. Pokud je vstupní signál δ -funkce, pak její konvoluce s $H(t)$ musí dát opět funkci $H(t)$. Tudíž je zcela oprávněné, že se funkce $H(t)$ nazývá odezvou na impuls.

V nedestruktivním testování má výše popsaná zákonitost přímou aplikaci v metodě impact-echo, kdy krátkým intenzivním úderem vybudíme ve vzorku mechanické kmity,

kteřé měříme. Z frekvenčního spektra získané odezvy se pak zjišťují vlastnosti vzorku. Něco podobného bylo jistě využíváno od pradávna, například potukáním na naprasklý hrnec. Je zajímavé, že tato zdánlivě primitivní metoda má tak hluboké matematické pozadí, ze kterého lze dále vycházet a měření zdokonalit.



Obr. 4.1: Delta-funkce je speciálním případem bílého šumu. Rozklad na jednotlivé frekvenční složky ukáže, že všechny frekvence jsou zastoupeny se stejnou amplitudou i počáteční fází. Fáze odpovídá funkci kosinus. Na sérii grafů je ukázka, že postupným přidáváním vyšších frekvencí se výsledek stále více blíží delta-funkci.

4.2.3 Vstupní signál ve tvaru bílého šumu

Vstupní signál ve tvaru impulsu či δ -funkce, má zvláštní vlastnost mimo jiné v tom, že všechny jeho frekvenční složky mají stejnou amplitudu. Jedná se tudíž o speciální případ bílého šumu. Takových signálů je možné vytvořit více, a tak rozeberme situaci, kdy vstupní signál $X(\omega)$ má absolutní hodnotu všech komplexních koeficientů rovnu jedné. Mějme tedy na mysli

$$A_X^2 + B_X^2 = 1$$

Fáze jednotlivých složek může být libovolná a na další úvahy to nemá vliv. V takovém případě opět rozeberme výpočet odezvy na impuls H jako podíl dvou komplexních čí-

sel Y/X .

$$H = \frac{Y}{X} = \frac{A_y + B_y i}{A_x + B_x i} = \frac{A_y + B_y i}{A_x + B_x i} \cdot \frac{A_x - B_x i}{A_x - B_x i} = \frac{YX^*}{A_x^2 + B_x^2} = \frac{YX^*}{1} = YX^*$$

Vidíme, že namísto podílu komplexních čísel můžeme počítat jejich součin, což je výpočetně jednodušší operace. Je vhodné si dopředu jednorázově předvypočítat komplexně sdruženou Fourierovu transformaci vstupního signálu a pak pouze násobit.

Ukázalo se, že rozdíl ve výpočetní náročnosti je skutečně znatelný, přibližně 50%. Nicméně *celková* časová úspora při tomto řešení je zcela zanedbatelná, protože ostatní výpočetní operace jsou řádově složitější.

Výše popsany speciální případ byl rozebrán pouze proto, že je často uváděný v literatuře. Nicméně $H = YX^*$ platí pouze tehdy, je-li vstupní signál bílý šum. Naproti tomu $H = Y/X$ platí vždy, a to za cenu nepatrného zhoršení celkového výpočetního času.

Hlavní význam použití bílého šumu však spočívá v tom, že žádná frekvenční složka není na vstupu upřednostněna ani potlačena. U všech se očekává stejný odstup signálu od šumu a stejná přesnost následného vyhodnocení.

4.3 Způsoby generování bílého šumu

Bílý šum lze využít při nedestruktivním testování jako zdroj akustického signálu, který se po průchodu vzorkem změní a při následném zpracování dat lze usuzovat na materiálové vlastnosti vzorku.

Veškeré úvahy budou platit pro diskrétní elektrické či mechanické signály, které jsou vygenerované jako posloupnost hodnot a naměřené pomocí A/D převodníku taktéž jako posloupnost hodnot. Funkce algoritmu, jeho výsledky, ověření funkčnosti i některé matematické předpoklady jsou demonstrovány pomocí jazyka Python, ve kterém je využita knihovna SciPy, určená pro vědecké výpočty.

Pod pojmem bílý šum se rozumí takový signál či funkce, který obsahuje všechny frekvence ve stejné míře, tj. má ploché frekvenční spektrum. Kdybychom takový signál rozložili na jednotlivé harmonické složky (což je přesně to, co provádí Fourierova transformace), budou mít všechny stejnou amplitudu. Tato úvaha ale nikterak nevyovídá o fázi jednotlivých složek. Fáze mohou být libovolné, a přesto se bude stále jednat o bílý šum. Kdybychom chtěli vytvořit bílý šum, bylo by možné posečítat harmonické funkce se stej-

nými amplitudami, libovolnými fázemi a všemi frekvencemi. Takový postup je v principu možný, ale poněkud zdlouhavý, ve srovnání s inverzní Fourierovou transformací, která provádí přesně totéž. Je vhodné připomenout, že se nebude jednat o všechny existující frekvence, ale pouze o diskrétní řadu frekvencí odstupňovaných podle určitého frekvenčního kroku. Je ale zřejmé, že máme určitou libovůli, jak mohou být vůči sobě jednotlivé harmonické složky fázově posunuty. Bílých šumů proto existuje nekonečně mnoho.

4.3.1 Bílý šum vytvořený pomocí inverzní Fourierovy transformace

Vytvořit příklad bílého šumu lze snadno pomocí inverzní Fourierovy transformace. Víme totiž, že frekvenční spektrum musí být ploché (konstanta). I zde máme libovůli, která odpovídá vzájemnému fázovému posunu jednotlivých složek. Frekvenční spektrum je vypočteno jako absolutní hodnoty z komplexních čísel. Jestliže chceme naopak vytvořit komplexní číslo s danou absolutní hodnotou, máme nekonečně mnoho variant, jaká může být reálná a imaginární část. Na základě této myšlenky lze vytvořit program, který vygeneruje bílý šum, jehož všechny frekvenční složky budou rovny jedné. Stačí zvolit komplexní čísla, která mají absolutní hodnotu rovnu jedné, například tato tři:

$$\begin{aligned} &0,8 + 0,6i \\ &0,936 - 0,352i \\ &0,96 + 0,28i \end{aligned}$$

Tuto sekvenci uložíme do pole a následně ji zopakujeme ještě jednou, ale v opačném pořadí a komplexně sdružené. Tento krok zajistí, že po provedení inverzní Fourierovy transformace bude výsledný signál ryze reálný. A ještě na úplný začátek pole vložíme nulu, která má význam nulové frekvence, tj. střední hodnoty signálu. Takto vytvořenou sekvenci vidíme v následujícím programu na třetím řádku.

```

1  #!/usr/bin/python
2  from scipy import *
3
4  flat = [0, 0.8 + 0.6J, 0.936 - 0.352J, 0.96 + 0.28J, 0.96 - 0.28J, 0.936 +
0.352J, 0.8 - 0.6J]
5  signal = ifft(flat)
```

```

6  print signal
7  N = len(signal)
8  spectrum = abs(fft(signal)[: (N//2 + 1)])
9  print spectrum

```

Program vypočte inverzní Fourierovu transformaci, a tím vznikne signál, který představuje bílý šum. Pro kontrolu se na předposledním řádku zpětně vypočte spektrum takového signálu. Výsledkem je:

```
[8.88178420e-16 1.00000000e+00 1.00000000e+00 1.00000000e+00]
```

Tyto hodnoty přesně splňují naše požadavky. První položka je (téměř) nula, což je v pořádku, protože jsme chtěli, aby střední hodnota signálu byla nulová. Další tři čísla jsou jedničky, to znamená, že frekvenční spektrum je ploché. Tím jsme ověřili, že se skutečně jedná o bílý šum. Současně jsme ukázali, jakým způsobem lze v programovacím jazyce Python vypočítat frekvenční spektrum daného signálu a tento postup se využít i v dalších úvahách.

4.3.2 Speciální případ bílého šumu, delta funkce

Znovu využijme fakt, že δ -funkce patří mezi bílé šумы a pokusme se ji vytvořit pomocí inverzní Fourierovy transformace ze sekvence obsahující samá stejná ryze reálná čísla, například jedničky. Ryze reálné číslo je samo k sobě komplexně sdružené, takže máme jistotu, že výsledek bude též reálný. První (přesněji řečeno nultá) hodnota v sekvenci není nulová, takže vzniklý signál nebude mít střední hodnotu nulovou, ale to obvykle příliš nevadí. V Pythonu můžeme vyzkoušet, že například:

```
>>> print ifft([1,1,1,1,1,1,1,1])
```

dává výsledek

```
[ 1.+0.j  0.+0.j  0.+0.j  0.+0.j  0.+0.j  0.+0.j  0.+0.j  0.+0.j]
```

což je signál, který jsme vytvořili tak, aby měl ploché frekvenční spektrum, a jedná se tak o bílý šum. Na první pohled je vidět, že jde o speciální případ. Pouze první hodnota

v sekvenci je nenulová, všechny další jsou nulové. Jedná se o impuls, který připomíná delta funkci. Platí totiž identita, že Fourierova transformace delta funkce je konstanta. Delta funkce (impuls) je speciální případ bílého šumu a v praxi se skutečně využívá, jestliže není k dispozici jiný generátor bílého šumu. Při zjišťování akustiky místností se jako počáteční vybudení používá tlesknutí, výstřel z pistole, prasknutí balónku a podobně. Krátký intenzivní puls je také základem pro metodu impact-echo, při které se úderem na zkoumaný předmět vybudí kmity a zkoumá se frekvenční odezva. Nevýhodou je, že veškerá energie dodaná do systému je soustředěna do jediného impulsu, který musí být velmi krátký. Jeho amplituda je proto velká - často tak, že značně komplikuje měření. Není snadné pořídit dobrou nahrávku výstřelu z pistole v uzavřené místnosti s velkou ozvěnou. Tato technika klade velké nároky na dynamický rozsah měřící sestavy.

4.3.3 Binární generátor bílého šumu

Existuje zajímavý případ bílého šumu, kdy sekvence vstupních hodnot obsahuje pouze dvě diskrétní hodnoty, například nula a jedna. Takový binární bílý šum má velkou výhodu v tom, že elektronika generátoru může pracovat pouze se dvěma stavy, zcela odpadají analogové obvody a konstrukce se tím zjednodušuje. Binární sekvence, která má vlastnosti bílého šumu se obvykle nazývá MLS (Maximum Length Sequence). V literatuře jsou popsány návody, jak vytvořit generátor této sekvence pomocí oscilátoru, posuvných registrů a XOR hradel, přičemž princip činnosti by zde bylo vhodné vysvětlit podrobněji.

4.4 Generátor na bázi posuvných registrů

Jednou z možností, jak generovat binární bílý šum je využití posuvných registrů a XOR hradla. Touto tematikou se velmi podrobně zabýval Solomon W. Golomb (1932-2016), který vytvořil rozsáhlou teorii týkající se zajímavých matematických vlastností takto vzniklých binárních řad. Jeho dílo se v současné době využívá v mnoha technologiích při zpracování signálu či digitálních dat (např. kontrolní CRC součty, 3G sítě, LTE, Wi-Fi, Bluetooth, GPS a další).

Základní představa generátoru je řada n binárních registrů. Označme je $a_{n-1} \dots a_0$. Kromě posledního registru a_0 jsou zapojeny tak, že výstup každého z nich je připojen na vstup registru následujícího. Některé vybrané registry jsou navíc přivedeny do více-vstupového XOR hradla, jehož výstup tvoří zpětnou vazbu a je připojen na vstup prvního

registru a_{n-1} .

Celý logický obvod pracuje v několika krocích:

1. Přečte se obsah registru a_0 , čímž získáme další bit patřící do sekvence.
2. Obsah všech registrů se posune o jedno doprava. Původní hodnota a_0 se přemaže.
3. Obsah registru a_{n-1} se naplní podle výsledku XOR operace z několika vybraných registrů.

Celý děj se opakuje, přičemž z posledního registru a_0 postupně čteme celou sekvenci bitů.

Je zjevné, že sekvence bitů je *deterministická*, tj. z každého stavu jednoznačně plynou další stavy. Po určitém počtu kroků se tedy každý stav musí nutně zopakovat, protože celkový počet všech stavů je omezen hodnotou 2^n . Ihned můžeme vyřadit možnost, že by všechny registry byly nulové. Z takového stavu by žádný další nebylo možno vytvořit, protože nulové vstupy XOR hradla by dávaly nulu i na jeho výstupu. Celkový počet variant je tedy o jedničku menší, tj. $2^n - 1$.

Solomon W. Golomb se zabýval zákonitostmi, které platí pro celkovou periodu takového generátoru. Ta závisí na počtu registrů n a také na tom, které registry jsou připojeny na vstup XOR hradla. Dokázal, že maximální délka sekvence $2^n - 1$ skutečně může nastat. Podmínkou je však to, že na vstupy XOR hradla musí být připojeny právě takové registry, které odpovídají členu v příslušném *primitivním polynomu* n -tého řádu.

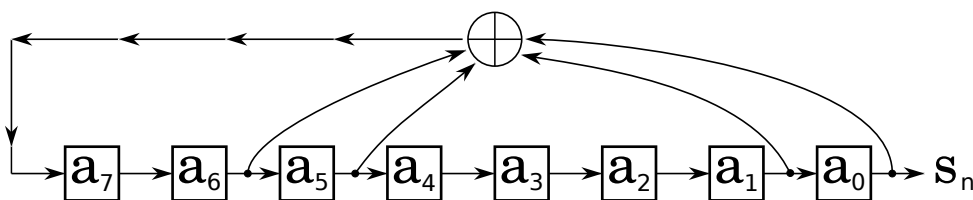
Vynecháme komplikované matematické pozadí týkající se primitivních polynomů a spokojme se s tím, že primitivní polynomy lze nalézt v literatuře. Příkladem primitivního polynomu osmého řádu je

$$x^8 + x^6 + x^5 + x + 1$$

a právě tento polynom je základem generátoru uvedeném na schématu 4.2. Zde je vhodné podotknout, že počet členů v polynomu n -tého stupně je nejvýše $n + 1$, zatímco počet odpovídajících registrů je o jeden méně. Platí, že člen s nejvyšší mocninou ignorujeme.

V našem případě tedy platí, že do XOR hradla budou připojeny registry 6,5,1,0 – viz obrázek 4.2.

Popsaný generátor vytvoří sekvenci maximální délky (Maximum Length Sequence, MLS), přičemž tato sekvence bude mít mnoho zajímavých matematických vlastností,

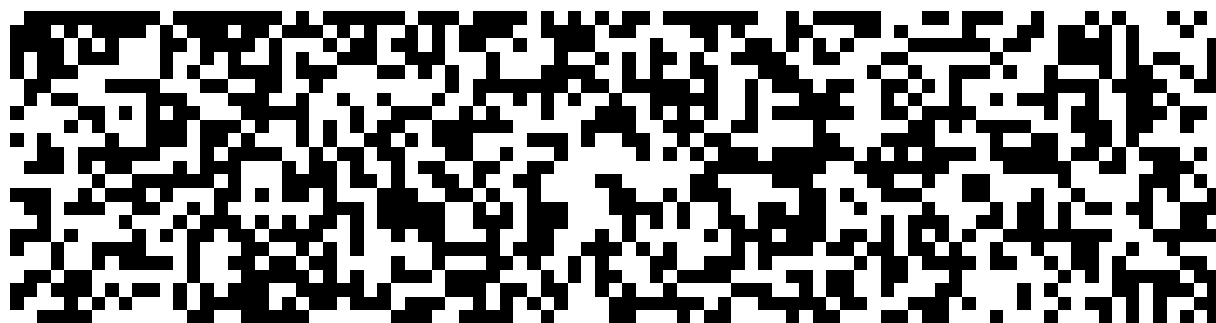


Obr. 4.2: Blokové schéma generátoru, který pomocí osmi posuvných registrů vytváří binární sekvenci. Protože čísla registrů připojených na vstup XOR hradla odpovídají primitivnímu polynomu, bude se výsledná sekvence bitů opakovat po maximální možné délce $2^8 - 1 = 255$ bitů.

z nich nejdůležitější je pro nás to, že její frekvenční spektrum bude ploché a bude se tedy jednat o generátor bílého šumu.

Pokud bychom nedodrželi podmínku pro zapojení správných registrů do XOR hradla, pak sice získáme generátor bitové sekvence, ale jeho perioda bude kratší než $2^n - 1$ a především nevznikne bílý šum, protože spektrum nebude ploché.

Pro každý počet bitů a tím i řád polynomu existuje jeden nebo více primitivních polynomů. Pokud si můžeme vybrat, pak pro praktické účely je vhodné volit ty, které obsahují málo členů a generátor tak bude konstrukčně jednodušší. Počáteční obsah registrů může být libovolný kromě samých nul. Stav generátoru se musí zopakovat až za $2^n - 1$ kroků, přičemž tato vlastnost se osvědčila jako rychlý test, zda generátor pracuje správně.



Obr. 4.3: Ukázka pseudonáhodného vzoru, který vznikne z jedenácti-bitového MLS generátoru. Jednička odpovídá bílé barvě, nula černé. Sekvence je zobrazena v rastru 89×23 a je zcela úplná, protože $89 \cdot 23 = 2^{11} - 1 = 2047$.

4.4.1 XOR operátor

Binární XOR operátor, který je součástí generátoru sekvence s posuvným registrem, má několik vlastností, které stojí za podrobnější popis. Je možné jej chápat různými způsoby a z toho důvodu si vysloužil několik označení. Následující pravdivostní tabulka obsahuje XOR výstup ze všech kombinací dvou vstupních parametrů.

vstup A	vstup B	výstup A XOR B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

non-ekvivalence Jak je zřejmé z pravdivostní tabulky, výsledkem operátoru je jednička právě tehdy, jsou-li oba vstupující bity *nestejně* – proto *non-ekvivalence*.

Exclusive OR Toto označení vychází z angličtiny a z něj byla vyvozena běžně používaná zkratka XOR. Významově se jedná o připodobnění k logické operaci NEBO. Je zde však rozdíl, který můžeme slovně popsat jako „jeden (bit) ANEBO druhý, nikoli však oba současně“.

Změna bitu V programátorské praxi bývá potřeba operovat s jednotlivými bity. Operátor XOR se používá v situaci, kdy chceme hodnotu některých bitů negovat (změnit). Pro úplnost – operátor OR bychom použili, kdybychom chtěli některé bity nastavit a operátor AND tehdy, chceme-li některé vynulovat.

Součet modulo dva Modulo dva (tj. zbytek po dělení dvěma) má dvě možné hodnoty, nulu a jedničku, přičemž záleží na tom, zda je číslo sudé nebo liché. Sečteme-li všechny bity a aplikujeme modulo dva, pak zjistíme, zda byl počet jedničkových bitů lichý nebo sudý. Velkou výhodou této představy je, že pracuje s libovolným počtem bitů, nikoli pouze se dvěma parametry. Tento způsob chápání je nejvhodnější, chceme-li správně popsat funkci MLS generátoru.

Parita Pro výpočet paritního bitu bychom použili výše uvedené pravidlo.

4.5 Softwarová implementace

Na základě popisu je poměrně jednoduché vyrobit generátor na bázi posuvných registrů, ale po hardwarové stránce je ještě snazší celý proces naprogramovat do jednočipového mikropočítače a svěřit mu výpočetní algoritmus. Jednočipový mikropočítač lze zakoupit za několik desítek Kč a mnoho dalších součástí není potřeba – nepočítáme-li výkonovou část. Konkrétní popis algoritmu zde pro stručnost vynecháme a pouze ověříme, zda výsledná sekvence je skutečně bílým šumem. Následující program v jazyce Python vytvoří MLS sekvenci a vypočte z ní frekvenční spektrum.

```
1  #!/usr/bin/python
2  from scipy import *
3  bits = 4
4  N = 2**bits - 1
5  a = 1
6  coefs_all = ((0,), (0,1), (0,1), (0,1),
7              (0,2), (0,1), (0,1), (0,1,5,6),
8              (0,4), (0,3), (0,2), (0,3,4,7),
9              (0,1,3,4), (0,1,11,12), (0,1), (0,2,3,5),
10             (0,3), (0,7), (0,1,5,6), (0,3))
11
12  mask_shifts = [(1 << x, bits-x) for x in coefs_all[bits-1]]
13  signal = zeros(N, int16)
14  for i in range(N):
15      signal[i] = (a & 1)
16      for m, s in mask_shifts:
17          a ^= (a & m) << s
18      a = a >> 1
19
20  print signal
21  print abs(fft(signal)[: (N//2 + 1)])
```

Po spuštění dostaneme výsledek:

```
[1 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 1]
[ 8.  2.  2.  2.  2.  2.  2.  2.]
```

Přičemž první řádek je MLS sekvence a druhý je příslušné frekvenční spektrum. Je zřejmé, že až na nultou hodnotu, která má význam stejnosměrné složky, jsou všechny ostatní hodnoty konstantní. V tomto případě má sekvence pouze 15 bitů, což je dáno třetím řádkem v programu, kde se počet bitů v posuvném registru nastavuje na $b = 4$. Platí, že celková délka sekvence je $N = 2b - 1$. V principu je algoritmus schopen generovat sekvence až do $b = 20$, tj. celkové délky $N = 1048575$.

Po ověření funkčnosti pomocí jazyka Python byl algoritmus přepsán do jazyka Assembler, aby mohl být spuštěn na jednočipovém mikropočítači. Zde je ukázka implementace pro procesory řady Atmel AVR:

```
loop:
    mov r17, r23
    andi r17, 1
    out _SFR_IO_ADDR(PORTB), r17
    lsl r17
    lsl r17
    lsl r17
    lsl r17
    eor r21, r17
    mov r17, r23
    andi r17, 8
    lsl r17
    eor r21, r17
    lsr r20
    ror r21
    ror r22
    ror r23
    nop
    nop
    rjmp loop    ; 20 cycles - 1 MHz
```

Uvedený algoritmus generuje MLS sekvence o délce $N=1048575$. Celý výpočetní proces se podařilo zestručnit na pouhých 20 strojových cyklů. Ve skutečnosti je jich potřeba pouze 18, ale dvě instrukce NOP byly přidány, aby vycházelo zaokrouhlené číslo maximální frekvence. Jestliže bude taktovací frekvence jednočipového mikropočítače 20 MHz, což je běžné, bude generátor bílého šumu vytvářet binární sekvenci rychlostí 1 Mbit/s. Maximální frekvence přítomna v bílém šumu bude poloviční, tj. 500 kHz. Celá sekvence se bude opakovat každých 1,048575 sekund. Při realizaci obvodu bylo nutno vyřešit ještě buzení MOSFET tranzistorů výkonového stupně, a také byl celý generátor zpomalen pro snazší vyhodnocování jeho funkce. Tyto dodatečné vlastnosti nejsou ve výše uvedeném algoritmu zahrnuty. Pro stručnost je uvedena pouze verze se základní funkčností.

Předpokládá se, že by jednočipový mikropočítač generoval binární šum, ten by se zesílil a sloužil jako vstupní signál $X(t)$ k vybuzení vibrací testovaného vzorku. Kmity vzorku by se měřily snímačem a získaný signál by představoval odezvu $Y(t)$. Na základě dříve popsané teorie by se ve frekvenční oblasti vypočítal podíl výstupního signálu vůči vstupnímu. Prvním krokem bude vypočítat Fourierovu transformaci výstupního signálu a získat tak $Y(\omega)$.

Na tomto místě bude vhodné se zmínit o použitém algoritmu pro výpočet diskrétní Fourierovy transformace, která se v této práci vyskytuje mnohokrát. Existuje mnoho implementací tohoto algoritmu, přičemž zde jsou použity dvě z nich:

FFTW

Knihovna FFTW je pojmenována z počátečních písmen *Fastest Fourier Transform in the West*, tedy údajně nejrychlejší Fourierova transformace na „západě“. Autoři projektu se velmi snaží využívat nejmodernější poznatky o optimalizaci algoritmu a doslova soutěží o každé procento, kterým mohou porazit konkurenční implementace. Využívají například pečlivě napsaný kód v Assembleru pro řadu soudobých procesorů a využívají rozšířenou sadu strojových instrukcí. Také zde existuje možnost výpočtu ještě více zrychlit v případě, že transformaci potřebujeme provádět opakovaně. Je možné pro daný počet dat jednorázově předvypočítat optimální plán výpočtu, a pak jej aplikovat na různá data.

Jedna z funkcí knihovny je specializovaná pro případ, že vstupní data jsou ryze reálná a je v takové situaci ještě rychlejší než algoritmus pro komplexní data. Reálná data na vstupu jsou v našem případě zcela obvyklá, takže tohoto zrychlení lze s úspěchem využít.

FFTW je implementována pro jazyk C, který byl při tvorbě této práce použit jen tehdy,

pokud byla prioritou rychlost výpočtu. V ostatních případech byl používán především programovací jazyk Python, který se ukázal jako pohodlnější.

fft ve SciPy

Další možností je použít funkci `fft` ve vědecké knihovně SciPy určené pro programovací jazyk Python. Autoři knihovny SciPy postupně přidávají do celého balíku funkcí další a další implementace různých matematických algoritmů, které jsou obvykle napsané v jazyce C a v některých starších případech v jazyce Fortran. Existuje způsob, jak tyto algoritmy zpřístupnit pro jazyk Python, přestože jsou původně napsány pro jazyk jiný. Nejspíše tímto způsobem se do knihovny SciPy dostala i možnost využít funkce z projektu FFTW. Někdy se však, z rozhodnutí autorů SciPy, použije implementace jiná.

Běžný uživatel/programátor zavolá funkci `fft()` a získá výsledek. Konkrétní algoritmus v takovém případě není rozhodující. Výsledek je vždy řada komplexních čísel. Pohodlí je vykoupeno rychlostí, která je vždy horší, než FFTW zavolaná z jazyka C.

S rozvojem výpočetní techniky není honba za rychlostí tak klíčová jako dříve, tedy alespoň pro naše účely. Data ze zvukové karty přicházejí relativně pomalu, takže lze stihnout je zpracovávat v reálném čase a výsledek průměrovat a vykreslovat. Naproti tomu data z měřicí karty měla vzorkovací frekvenci až 1 MHz a zpracovávala se až dodatečně po měření.

Rychlost fft v závislosti na počtu dat

V souvislosti s rychlostí výpočtu diskrétní Fourierovy transformace stojí za zmínku několik výjimečných případů, které vycházejí z počtu vstupních dat. Jedna z nejznámějších a nejstarších implementací rychlé diskrétní Fourierovy transformace vyžaduje na vstupu 2^n dat, tedy počet dat musí být celočíselná mocnina dvou. Algoritmus je velmi efektivní, protože využívá mnoho symetrií ve výpočtech, které jsou dány tím, že počet dat má mnoho dělitelů. Mnohé další vzniklé algoritmy již umí spočítat transformaci pro libovolný počet dat, ale stále přibližně platí, že čím více dělitelů má počet dat, tím lépe.

Z výše uvedeného popisu plyne, že nejméně příznivá situace nastane, je-li počet vstupních dat prvočíslo. Právě toto může nastat tehdy, použijeme-li generátor bílého šumu na bázi MLS s periodou $2^n - 1$. Číslo $2^n - 1$ spadá do kategorie tzv. Mersennových čísel a jedním z matematických problémů je vyhledávání Mersennových *prvočísel*. Shodou okolností jsou právě Mersennova prvočísla velmi nevýhodná pro naše účely.

Pro představu – dosud bylo nalezeno 49 Mersennových prvočísel, přičemž poslední z roku 2016 má hodnotu $2^{74207281} - 1$. Přestože se jedná do značné míry o matematickou hříčku, vypíšme exponent n , pro prvních několik Mersennových prvočísel, které mohou mít vliv na naše výpočty: (2,3,5,7,13,17,19, ...).

Pro ověření rychlosti výpočtu rychlé Fourierovy transformace byl napsán následující program:

```

1  #!/usr/bin/python
2  #coding: utf8
3
4  from scipy import *
5  import time
6
7
8  def meas_speed_fft(N):
9      a = arange(N)
10     start = time.time()
11     fft(a)
12     dt = time.time() - start
13     print 'počet dat: ', N, 'čas: ', dt, 'počet dat za sekundu', N//dt
14
15     for i in range(1, 21):
16         meas_speed_fft(2**i)
17         meas_speed_fft(2**i-1)

```

Program měří rychlost výpočtu fft pro n jdoucí až do hodnoty 20, přičemž otestuje řadu dat s délkou 2^n a následně $2^n - 1$. Pro stručnost byl program ponechán ve značně surové podobě, a tak i jeho výstup je poněkud hůře přehledný a většina výpisu zde není uvedena, nicméně informace z něj je zřejmá:

```

počet dat: 1024 čas: 0.000556945800781 počet dat za sekundu 1838599.0
počet dat: 1023 čas: 0.000638008117676 počet dat za sekundu 1603427.0
počet dat: 2048 čas: 0.00101613998413 počet dat za sekundu 2015470.0
počet dat: 2047 čas: 0.00171995162964 počet dat za sekundu 1190149.0
počet dat: 4096 čas: 0.000625133514404 počet dat za sekundu 6552200.0
počet dat: 4095 čas: 0.000633955001831 počet dat za sekundu 6459448.0
počet dat: 8192 čas: 0.00170588493347 počet dat za sekundu 4802199.0
počet dat: 8191 čas: 0.181261062622 počet dat za sekundu 45188.0
počet dat: 16384 čas: 0.00335597991943 počet dat za sekundu 4882031.0
počet dat: 16383 čas: 0.0050790309906 počet dat za sekundu 3225615.0
počet dat: 32768 čas: 0.00672316551208 počet dat za sekundu 4873894.0
počet dat: 32767 čas: 0.0116589069366 počet dat za sekundu 2810469.0
počet dat: 65536 čas: 0.0141870975494 počet dat za sekundu 4619408.0
počet dat: 65535 čas: 0.0318441390991 počet dat za sekundu 2057992.0
počet dat: 131072 čas: 0.0306060314178 počet dat za sekundu 4282554.0
počet dat: 131071 čas: 85.5856809616 počet dat za sekundu 1531.0

```

```

počet dat: 262144 čas: 0.0726630687714 počet dat za sekundu 3607664.0
počet dat: 262143 čas: 0.0997841358185 počet dat za sekundu 2627100.0
počet dat: 524288 čas: 0.16436290741 počet dat za sekundu 3189819.0
počet dat: 524287 čas: 2965.48577905 počet dat za sekundu 176.0
počet dat: 1048576 čas: 0.319963216782 počet dat za sekundu 3277176.0
počet dat: 1048575 čas: 0.493661880493 počet dat za sekundu 2124075.0

```

Skutečně se potvrdilo, že čísla 8191, 131071 a 524287 jsou mimořádně nevýhodná pro výpočet fft. Jedná se o Mersennova prvočísla pro n rovno 13, 17 a 19. Propad v rychlosti výpočtu je velmi dramatický, například řada dat o délce 524287 se zpracuje téměř za hodinu, ale přitom stačí jednu hodnotu přidat a doba výpočtu se zkrátí na zlomek sekundy.

Při reálném měření pomocí šumového generátoru na bázi MLS je tedy nejvhodnější se těmito kritickým délkám zcela vyhnout. Tak výrazné zpomalení výpočtu by vedlo k tomu, že metoda by byla naprosto nepoužitelná. Závěr je velmi důležitý:

Pozor – nepoužívat fft pro délku dat 8191, 131071 a 524287.

Nepoužívat MLS generátor s počtem bitů 13, 17 a 19.

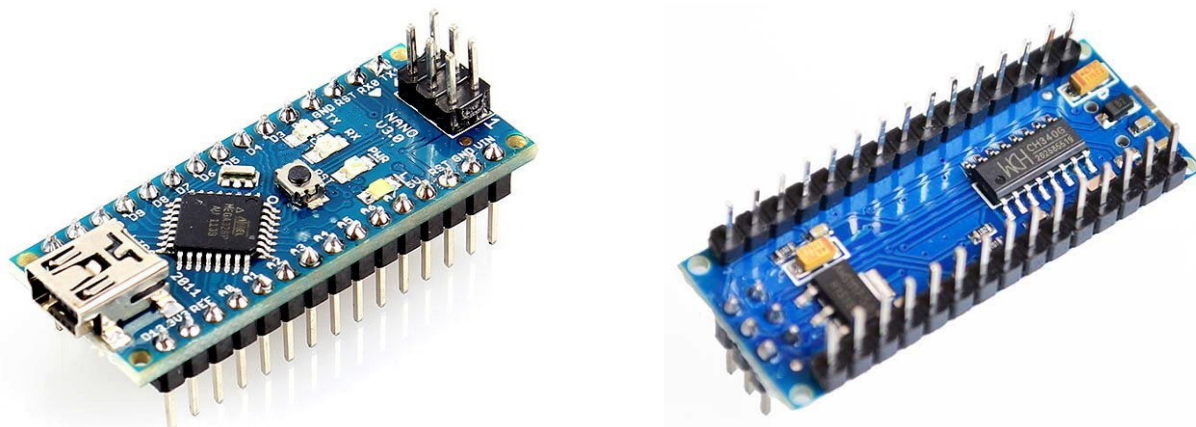
4.5.1 Arduino generátor MLS s H-mostem

Jednoduchost generování sekvence MLS pomocí mikrokontroleru a následného zesílení signálu vedla k záměru vytvořit nízkonákladové, přenosné testovací zařízení. V předchozích kapitolách byly popsány charakteristické vlastnosti MLS, její výhody a způsob, jakým je možné sekvenci maximální délky generovat. Pro připomenutí, binární signál nabývá pouze dvou napěťových úrovní, což umožňuje sestavit zesilovač s minimálním zkreslením jen pomocí dvou aktivních členů. Naproti tomu zesilovače obecného signálu jsou mnohem komplikovanější. Rozdíly ve složitosti obou zesilovačů se ještě více zvýrazní s rostoucími požadavky na výstupní napětí či výkon. Dále je nutné uvažovat s nelineárním průběhem voltampérové charakteristiky, šířkou přenášeného pásma a účinností. Kvalitní zesilovače obecného signálu stojí stovky tisíc korun, zatímco cena komponentu níže navrženého zesilovače je o dva řády nižší.

Jednočipový mikropočítač

Dříve popsaný kód binárního generátoru je nahrán do komerčně vyráběného modulu Arduino Nano s mikrokontrolerem ATmega328P. Frekvence čipu je oscilátorem nastavena

na 16 MHz. Modul obsahuje stabilizátor napětí, 14 digitálních vstupně-výstupních pinů a 8 analogových vstupů. Komunikace mezi mikrokontrolerem a stolním počítačem je realizována USB převodníkem CH340, který je přímo součástí modulu Arduino nano.

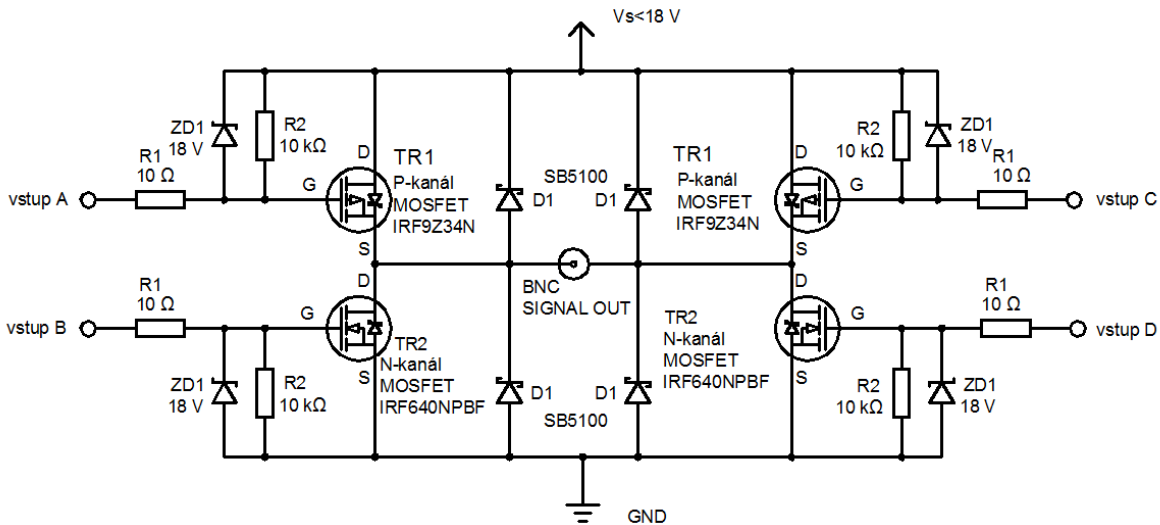


Obr. 4.4: Obě strany obvodu Arduino nano v.3 na bázi jednočipového mikropočítače Atmel ATmega328P pracujícím s frekvencí 16 MHz.

Strojový kód byl upraven tak, aby se výstupní hodnota objevovala na pinech 10 a 11 a jejich inverze na pinech 8 a 9. Signály jsou zpracovány řídicími obvody pro MOSFET tranzistory, které budí plný H-most. Protože jsou všechny čtyři piny součástí stejného portu, mikrokontroler odesílá jejich hodnotu simultánně, a tak zkrátí čas, kdy jsou tranzistory H-mostu ve zkratu. Délka cyklu se přidanými instrukcemi prodloužila na $3\ \mu\text{s}$, z toho plyne frekvence generování přibližně 333 kHz.

H-most

Silová část navrženého generátoru využívá tzv. plného H-mostu. Tento systém nalezl uplatnění v průmyslu pro řízení směru otáček DC motoru. Hlavní výhodou plného H-mostu je schopnost otočit polaritu na výstupu. Amplituda vzniklých oscilací odpovídá dvojnásobku napájecího napětí po odečtení ztrát. Horní strana H-mostu se skládá ze dvou P-kanálových tranzistorů a spodní ze dvou N-kanálových tranzistorů. Použité tranzistory mají především nízkou vstupní kapacitanci do 1100 pF a rychlé spínací časy – v součtu do 100 ns.



Obr. 4.5: Jak je patrné ze schématu, hlavními komponentami H-mostu jsou dvojice mosfet tranzistorů typu P a typu N. Jejich součinností je možné měnit polaritu výstupu (komutovat). Všechny vstupy tranzistorů jsou řízeny pomocí obvodů TC4427, což je zobrazeno na schématu 4.6.

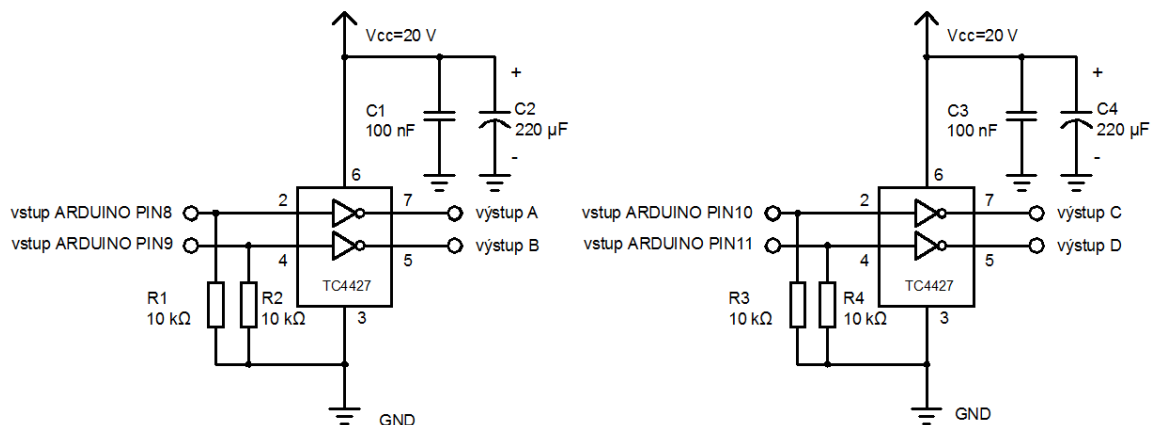
Řídící obvody pro MOSFET tranzistory

Silová část H-mostu se skládá z tranzistorů typu MOSFET, které musí být vhodně řízeny, aby dosáhly deklarovaných hodnot. Proto byl při výběru budičů kladen důraz na nízké zpoždění a schopnost dodat krátkodobě vysoké proudy, jejichž nutnost vyplývá z kapacity tranzistoru. Podle údajů dokáží použité integrované obvody TC4427 sepnout tranzistory o kapacitě 1000 pF za méně než 30 nanosekund.

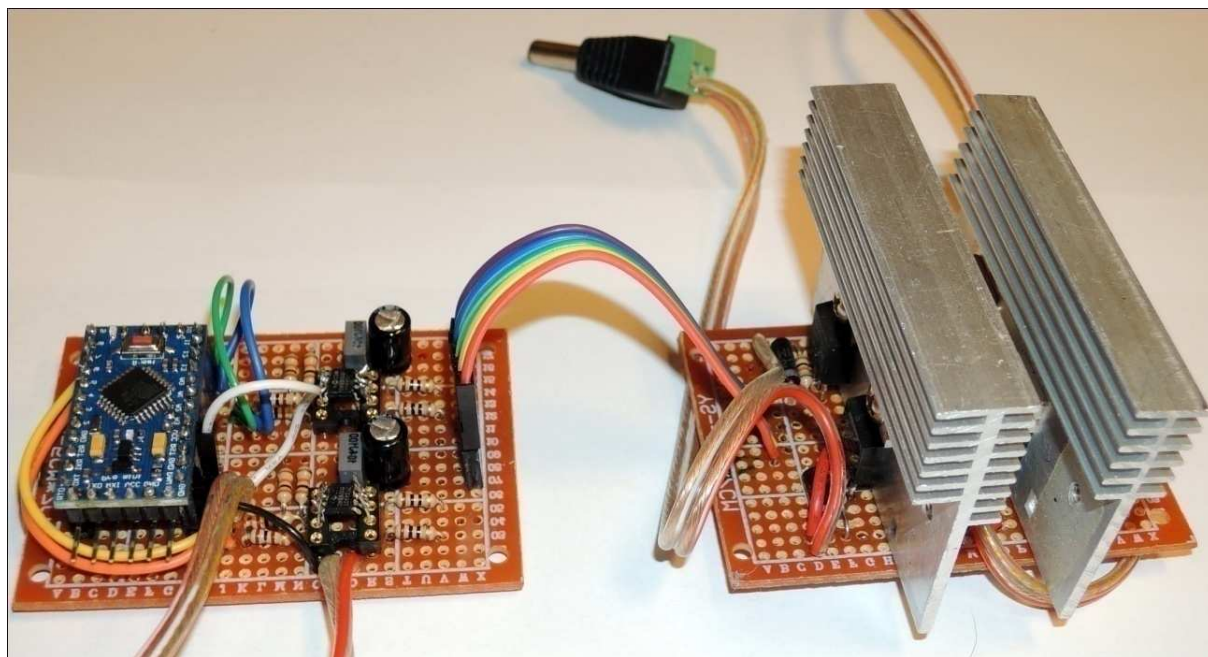
Vlastnosti generátoru MLS s H-mostem

Generátor MLS signálu složený z mikrokontroleru, MOSFET řídicích obvodů a plného H-mostu, jehož schéma je naznačeno na obrázku 4.5, byl otestován na odporové zátěži, pomocí osciloskopu Agilent 54622D se vzorkovací frekvencí 100 MHz.

Zjištěné časy přechodových stavů (cca 180 ns) potvrdily schopnost zařízení pracovat s frekvencemi do 1 MHz. Záchvěvy signálu u přechodových jevů jsou velkou měrou způsobeny parazitními kapacitami a indukčnostmi kabelového vedení. Vhodným umístěním stabilizačních kondenzátorů, by bylo možné část kmitů eliminovat. V případě zájmu vyrobit

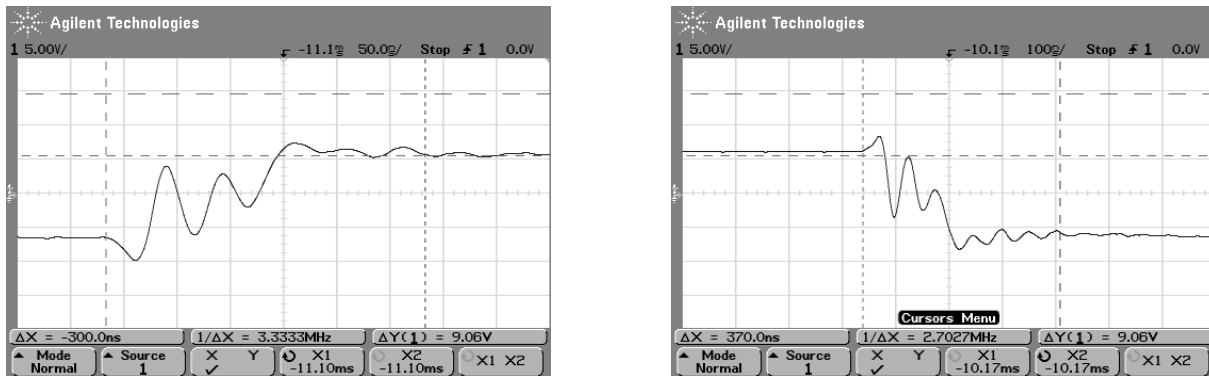


Obr. 4.6: Řídící elektrodu (Gate) mosfet tranzistorů není vhodné zapojovat přímo k výstupům jednočipového mikropočítače, protože jejich omezený výstupní proud by limitoval rychlost přechodu. Proto se využívají budiče TC4427, které proudově zesilují řídicí signál.



Obr. 4.7: Fotografie kompletního MLS generátoru s výkonovým zesilovačem. Na levé části obrázku je patrný jednočipový mikropočítač a částečně jsou patrné i budiče mosfet tranzistorů. Signál z nich pak řídí H-most (na pravé části obrázku) tvořený čtyřmi tranzistory.

přenosné kompaktní testovací zařízení MLS je navržený generátor nejpravděpodobnější cestou.



Obr. 4.8: Snímek obrazovky osciloskopu při měření vzestupné a sestupné hrany na výstupu zesilovače dokládá, že ustalovací časy všech komponent jsou dostatečně krátké pro předpokládanou frekvenci 1 MHz.

Zesílený signál byl přiveden do ultrazvukového budiče, který rozkmitával testovaný vzorek. Vibrace snímal piezoelektrický senzor a jeho signál byl přiveden do analogového vstupu měřicí karty NI PCI 6251. Po několika zkušebních měřeních se ukázal vážný problém v synchronizaci generovaných a měřených dat.

Mikrokontroler i záznamová karta byly řízeny vlastními oscilátory. Navíc z teorie MLS musí být vzorkovací frekvence celočíselným násobkem frekvence generování. Frekvence křemenných krystalů na mikropočítači a měřicí kartě není dostatečně přesná. I když jsou uvedené nedostatky řešitelné, bylo rozhodnuto pokračovat směrem softwarového generátoru signálu.

4.6 Generátor MLS na bázi měřicí karty

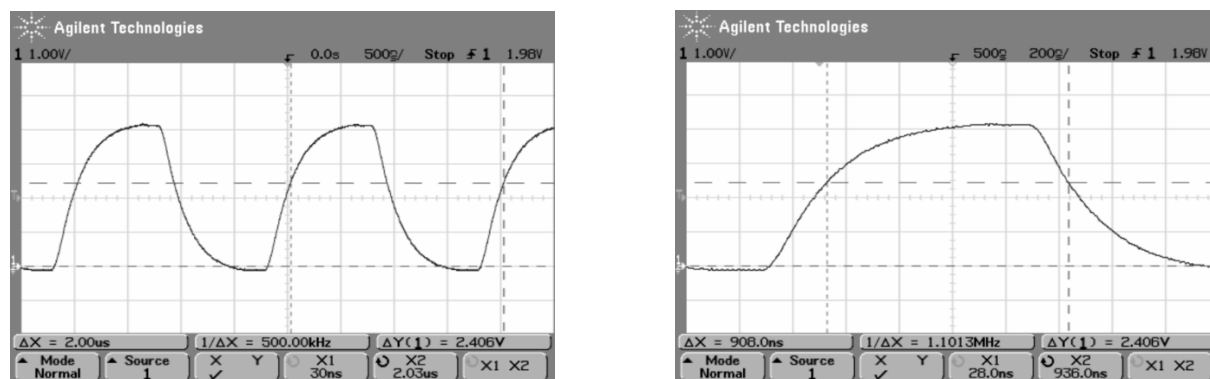
Záznamovou kartu NI PCI 6251 je možné použít nejen pouze pro záznam, ale též pro generování signálu. Karta disponuje několika analogovými vstupy (AI) s nastavitelným rozsahem do $\pm 10\text{V}$ a vzorkovací frekvencí do 1,25 MHz a kromě toho jsou k dispozici i analogové výstupy (AO) a digitálně vstupně-výstupní porty (DIO). Navíc hodinový cyklus všech uvedených prvku může být sdílen, a tak umožnit kompletní synchronizaci generování a záznamu signálu. Synchronizace signálu spolu s dokonalou opakovatelností měření umožňuje provést průměrování několika po sobě jdoucích měření. Výsledkem je redukce

šumu, především kvantizačního šumu A/D převodníku. Výhodou je i možnost měnit frekvenci generování signálu, což nebylo možné automatizovat v případě Arduino generátoru.

Data, která odpovídají MLS sekvenci, je potřeba připravit dopředu. Skript na generování MLS sekvence jsme již použili dříve, při ověřování matematických vlastností. Vygenerovaná data se nyní nakopírují do vyrovnávací paměti měřicí karty a na základě těchto dat bude karta generovat výstup.

Zbývá rozhodnout, který ze dvou výstupů karty bude vhodnější – zda analogový nebo digitální.

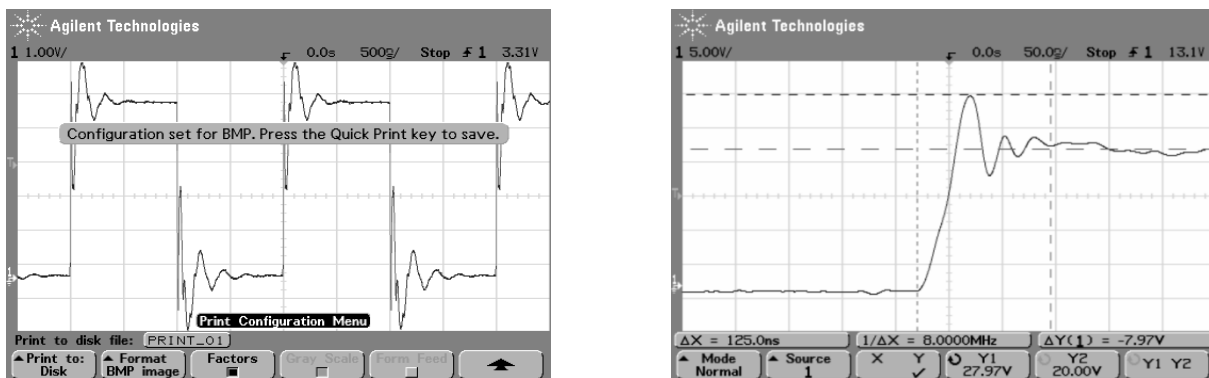
Analogový výstup karty umožňuje generovat libovolný signál o rychlosti 2,86 MS/s, což je zcela dostatečné pro MLS signál s frekvencí generování 1 MHz. Naneštěstí, obdélníkový signál je náchylný především na ustalovací čas AO ($2\ \mu\text{s}$). Hrany generovaného signálu z analogového výstupu jsou tímto extrémně zkresleny. Z pohledu TTL digitální logiky to není problém, pokud je čas vzestupu a sestupu mezi logickými hodnotami stejný. Pro úplnost, napěťová úroveň logické změny je závislá na napájecím napětí a teplotě. Při $25\ ^\circ\text{C}$ a napájecím napětí $V_{CC} = 5\ \text{V}$ se přechod mezi logickými úrovněmi U_L a U_H pohybuje v rozmezí 2,2 – 2,6 V. Střed tohoto rozmezí je vyznačen kurzory na následujících snímcích z osciloskopu. Ze snímků vyplývá, že obdélníkový signál o frekvenci 500 kHz generovaný pomocí analogového výstupu, má nesymetrickou střidu v poměru 908:1092 nanosekund.



Obr. 4.9: Analogový výstup z karty National Instruments 6251 není vhodný pro buzení H-mostu, protože vzestupná a sestupná hrana vytváří logické úrovně s asymetrickou střidou a při frekvenci 1 MHz by již vznikl zřetelně deformovaný MLS signál.

Port digitálních výstupů záznamové karty je osmibitový, to znamená, že je schopna

simultánně generovat až 8 signálů s logickou napětovou úrovní. Maximální frekvence časovače 10 MHz naznačuje lepší ustalovací časy a tudíž větší vhodnost pro účely generování binárního signálu. Na následujících snímcích z osciloskopu je zaznamenán stejný signál jako v případě analogového výstupu. Digitální výstup je zcela vhodný, protože vzestupná i sestupná hrana trvá do 50 ns a ani počáteční zákmit nepřekračuje hodnotu přechodu mezi logickými úrovněmi.



Obr. 4.10: Digitální výstup z karty National Instruments 6251 má výrazně kratší ustalovací dobu pro vzestupnou i sestupnou hrana ve srovnání s jejím analogovým výstupem.

4.7 Asymetrický binární zesilovač

Další verze binárního zesilovače byla navržena a sestavena tak, aby pracoval s vyšším napětím a dosáhlo se tak vyššího výkonu. Zároveň se předpokládalo jeho užití k buzení piezokeramických měničů.

Piezokeramické měniče se mohou zničit při namáhání v tahu. Z toho důvodu jsou například výkonové měniče typu Langevin trvale stlačeny šroubem.

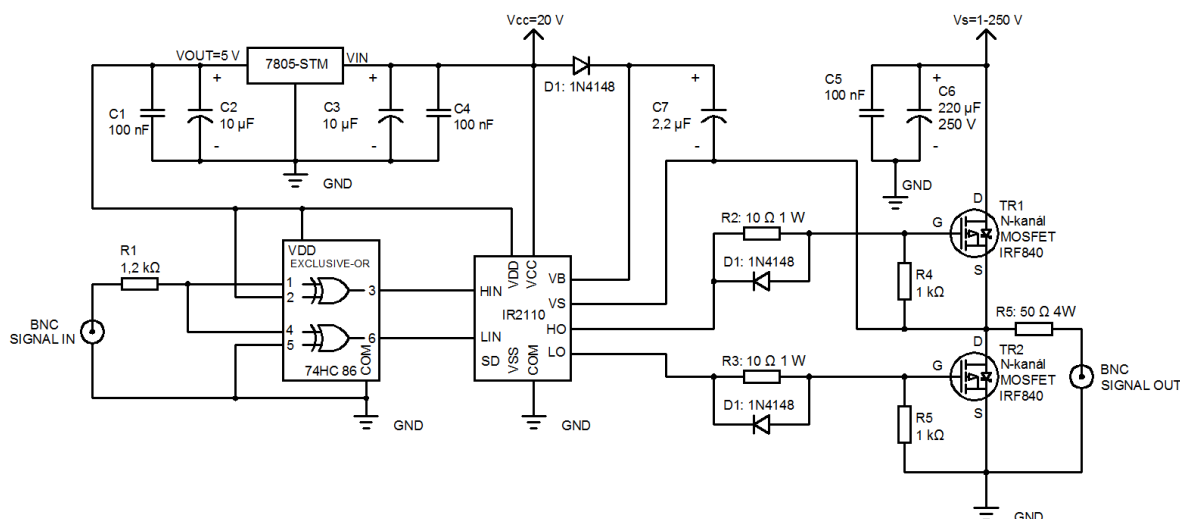
Asymetrický binární zesilovač dává na výstupu napětí kladné nebo nulové, čemuž bude odpovídat namáhání měniče buď v tlaku anebo žádné. Zesilovač byl sestaven podle schématu vyznačeném na obr. 4.11. Byl koncipován jako polomost a obsahuje již pouze jeden pár mosfet tranzistorů, přičemž oba jsou typu N.

Na rozdíl od předchozí verze zesilovače na bázi plného H-mostu tento již není schopen výstupní signál symetricky komutovat. V každém okamžiku má být otevřený právě jeden

z tranzistorů. V přechodových fázích se jeden tranzistor uzavírá a druhý otevírá. Vstupní signál se rozděluje a vede do dvou XOR hradel. Jedno z nich ponechává logickou úroveň beze změny, druhé invertuje. Tím se získávají řídicí signály pro oba tranzistory, aby byly vždy v navzájem opačném stavu.

Výhodou zapojení je mimo jiné to, že velká kapacita budiče se vybije pokaždé, kdy je na výstupu zesilovače nula. Otevřený tranzistor způsobí, že výstup zesilovače je připojen na GND a oba výstupy jsou ve zkratu.

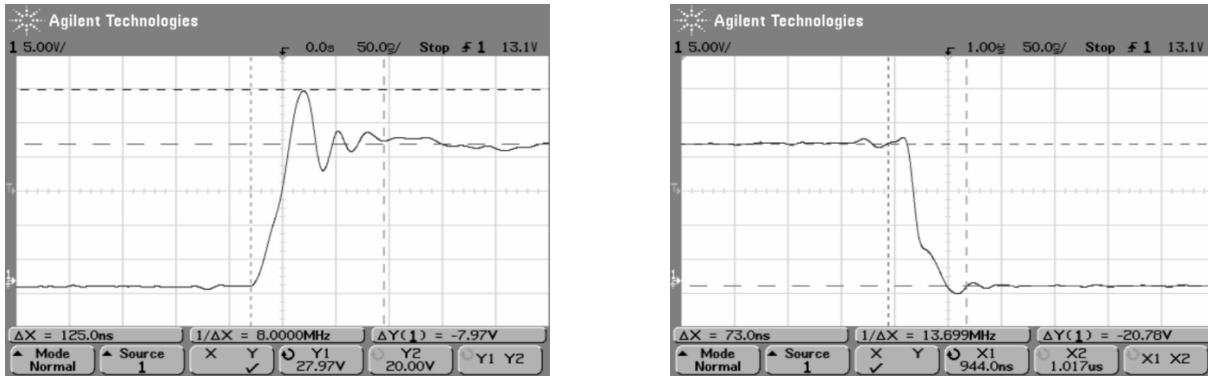
Polomostový zesilovač oproti svému předchůdci dokáže zesilovat signál až na 250 V, především díky výměně tranzistorů a také jejich řídicího obvodu, kterým je nyní IR2110. Výměnou pouhých čtyř komponent je možné omezení dále zvýšit až na 1,2 kV, ale to je pro účely této testovací stanice zbytečné, protože laboratorní zdroj je schopen dodat napětí pouze do 120 V.



Obr. 4.11: Schéma binárního zesilovače na základě polomostu. Zapojení obsahuje dva stejné tranzistory IRF840, přičemž otevřený je vždy právě jeden z nich. Výstup zesilovače je asymetrický – buď kladný nebo nula.

Zesilovač byl otestován osciloskopem za identických podmínek na odpovídající odporové zátěži a výsledky měření jsou na obrázku 4.12. Vzestupná hrana obsahuje neideální 29% překmit, ten by mohl způsobovat problémy při testování elektronických komponent náchylných na napěťové špičky, ale v případě piezoměničů se nejedná o závažný problém.

Navíc je možné, že při vyšším zatížení zesilovače se tento překmit ztratí úplně. Sestupná hrana má téměř ideální průběh. Přechodové časy kolem 100 ns potvrzují vhodnost použití pro zvolený frekvenční rozsah. Na fotografii 4.13 je vidět sestavený zesilovač.



Obr. 4.12: Vzestupná a sestupná hrana po zesílení asymetrickým binárním zesilovačem



Obr. 4.13: Na fotografii asymetrického zesilovače je patrná jeho jednodušší konstrukce ve srovnání s H-mostem.

4.8 Budiče, detektory a vazební prvky

Po vyřešení technických problémů se podařilo realizovat generování budícího signálu, jeho zesílení a následné měření po průchodu vzorkem. Měřicí řetězec však obsahuje řadu dalších částí a bylo nutné otestovat mnoho variant budičů, detektorů a také materiálů pro zprostředkování vazby pro přenos vibrací.

Tyto úkoly a mnohé další úspěšně vyřešil doktorand Ladislav Carbol, z jehož disertační práce[20]¹ lze čerpat důležité poznatky, metody měření a závěry.

4.8.1 Kontaktní reproduktor

Sekvence maximální délky s použitou aparaturou nabízí možnost inspekce chování vzorku až do frekvence 0,5 MHz. Ovšem informace interpretovatelné z hlediska fyzikálně materiálových vlastností jsou obsaženy v základní frekvenci vzorku a nejvýše třech následujících harmonických frekvencích. Popsaná oblast frekvencí záleží především na rychlosti šíření ultrazvukových vln a rozměrech vzorku. Inspekční oblast pro cementový vzorek o rozměrech 400×100×100 mm začíná na 800 Hz a končí na 25 kHz. Z toho vyplývá, že se pohybujeme především ve slyšitelném pásmu zvuku, pro nějž vlastnosti elektrodynamických reproduktorů předčí piezobudiče. Klasický membránový reproduktor kvůli vysokému útlumu vazbou přes vzduch, nepřípadá v úvahu pro testování stavebních materiálů, ale existuje i varianta kontaktního reproduktoru (Tactile transducer). Tento typ reproduktoru neobsahuje membránu, ale je určen k montáži na desku, kterou rozkmitává a tím se vytváří zvuk.

Frekvenční charakteristika reproduktoru je úzce spjatá s hustotou a tloušťkou oscilovaného materiálu. Kontaktní reproduktory se používají v místech ohrožených vandalizmem, např. semaforey a reklamní vitríny. Pro účely nedestruktivního testování byl speciálně upraven reproduktor EX60S výrobce VISATON. Při zohlednění ztrát měřicí sestavy je při napětí 31 V schopen dosáhnout maximálního příkonu 25 W. Amplituda oscilací, které je reproduktor schopen generovat, jsou dostatečné pro pozorování nelineárního chování materiálu i při použití vazby přes gel, což značně urychlí přípravnou fázi testování.

Při měření na frekvencích, které jsou již příliš vysoké pro zmiňovaný kontaktní repro-

¹Carbol L., *Měření akustických vlastností stavebních materiálů pomocí pseudonáhodné sekvence*, 2016, disertační práce

duktor, byl použit ultrazvukový budič s označením CONE. Ten byl vyroben na zakázku pro měření metodou nelineární akustické spektroskopie.

4.8.2 Vazební prostředky

Ultrazvukové vlny se ve vzorku mění, odráží a interagují s nehomogenitami. Zachycený signál obsahuje informace, které mohou být interpretovány materiálové jako vady, vlastnosti. Podstatou klasického defektoskopického přístupu je pozorovat odrazy vln a měření času průchodu. Nicméně, sofistikovanější metody se zaměřují na informace obsažené ve frekvenčním spektru, takže je možné odhadnutí dynamického modulu pružnosti, nebo posouzení závažnosti mikroprasklin. Rozdíl v útlumu ultrazvukových vln mezi bezkontaktní a imerzní vazbou jsou metody nelineární spektroskopie nebo impact-echo. Bez ohledu na ultrazvukovou metodu, vlastnosti vazebního prostředku jsou vždy závažnou problematikou. Vzhledem k vysokému akustickému nepřizpůsobení mezi vzduchem a pevnými látkami, nejvhodnější vazební prostředek vzduch často nepřichází v úvahu. Ponorné testování je na druhé straně mnohem praktičtější, ale ne pro stavební materiály. Cementové nebo hliněné výrobky mají totiž výrazně jiné materiálové vlastnosti v mokřém stavu. Většina defektoskopických metod určených pro stavebnictví využívá gelového vazebního prostředku. Porozita stavebních materiálů bohužel způsobuje postupné vstřebávání gelu do vzorku až do stavu úplného vymizení gelové vrstvy, která se proto složitě udržuje v ideální tloušťce. V případě velké vrstvy se gel chová jako samostatný materiál a dochází k odrazu signálu na hranicích. Při malé tloušťce způsobí nedokonalý kontakt delší čas průchodu ultrazvukových vln. Neméně podstatné je i aplikovat konstantní tlak na měniče během měření.

Odpovědi na tyto problémy skýtá pevná vazba, například včelím voskem. Do vzorku a ze vzorku jsou přenášeny výrazně vyšší energetické hladiny, proto je lepší SNR, a navíc je to způsob vhodný pro dlouhodobé kontinuální měření. Zmíněné uspořádání však má i negativa. Vazba je natolik pevná, že se z budiče, senzoru a vzorku se stane jediné těleso vibrující na nových vlastních frekvencích. Přidaná hmotnost a zvětšená délka povede ke snížení vlastní frekvence vzorku. Také je třeba poznamenat, že pevná vazba umožňuje šíření smykových vln, které jsou nežádoucí ve většině aplikací.

4.8.3 Snímače

V kombinaci s kontaktním reproduktorem, jehož použitelné frekvenční pásmo spadá především do slyšitelné oblasti, je vhodné použít jako detektor MEMS mikrofon. Mikroelektro-mechanické systémy (MEMS) nacházejí uplatnění v běžné spotřební elektronice. Velmi rozšířené jsou především právě MEMS mikrofony, které jsou součástí téměř všech mobilních telefonů. Jejich výhodou jsou miniaturní rozměry, dobrá citlivost a lepší odstup signálu od šumu ve srovnání s elektretovými mikrofony.

Pro měření byl použit MEMS mikrofon ADMP401, který je dle dokumentace výrobce vhodný pro použití jak v blízkém, tak vzdáleném pásmu, má ideálně plochou frekvenční odezvu od 100 Hz do 15 kHz, citlivost -42 dBV a SNR 62 dBA.

Pro měření při vyšších frekvencích se ukázal jako vhodnější piezoelektrický ultrazvukový senzor MIDI.

Kapitola 5

Měření cementových vzorků

Na základě popsaných principů byla sestavena měřící aparatura, která umožňuje zjišťovat frekvenční odezvu zkoumaných vzorků a využívá při tom deterministický generátor binárního bílého šumu.

Je potřeba ověřit, zda tato nevyzkoušená metoda vede ke srovnatelným výsledkům s jinými akustickými metodami používanými v nedestruktivním testování. Především je důležité porovnání s metodou impact-echo, protože právě s touto metodou existuje značná podobnost.

Impact-echo využívá úder k vybuzení kmitů, přičemž úder připomíná δ -funkci čili impuls a měřenou odezvou je tudíž zcela zjevně *odezva na impuls*. Vzhledem k tomu, že impuls je současně zvláštní případ bílého šumu, vedly úvahy k použití i jiného bílého šumu k získání stejné informace. Ze všech bílých šumů byl vybrán binární bílý šum, který lze nejsnáze generovat.

Namísto úderu kladívka máme šumový generátor, který je výrazně pohodlnější, máme-li sestavit automatizované dlouhotrvající měření. Tato výhoda je zcela zjevná, ale ostatní vlastnosti, především rozlišovací schopnost, bude teprve potřeba ověřit.

5.1 Kontinuální měření frekvence kmitů schnoucího maltového vzorku

Jedním z prvních experimentů po sestavení aparatury bylo automatizované měření podélných kmitů, které bylo naprogramováno tak, aby v pravidelných intervalech spustilo generátor bílého šumu a zjišťovalo frekvenci podélných kmitů.

Testovaný maltový vzorek měl na počátku měření vysoký obsah vody a postupně vysychal v průběhu několika dní. Frekvence kmitů závisí především na hustotě a modulu pružnosti v tahu.

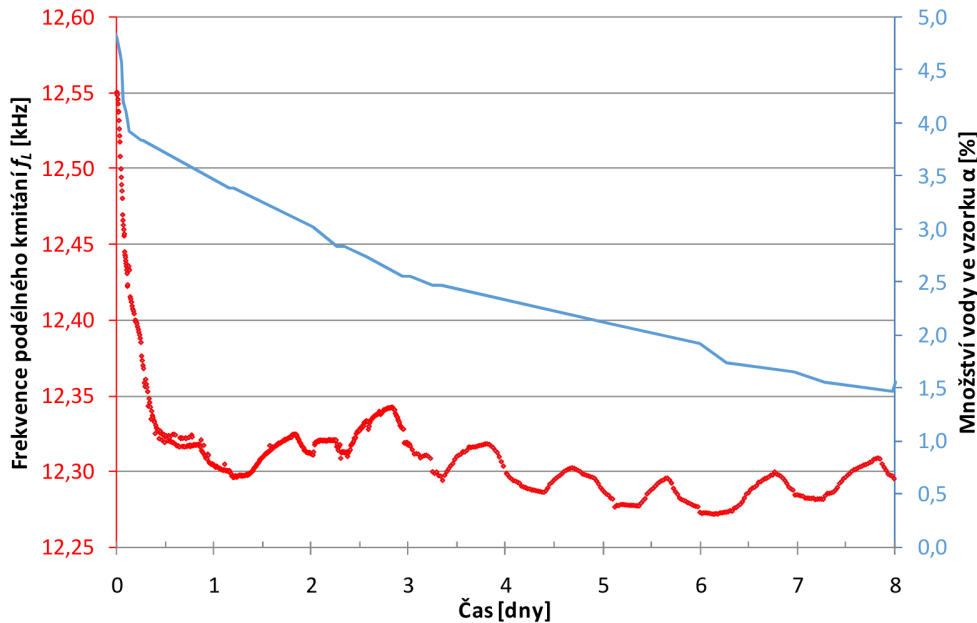
Zásadní význam při měření modulu pružnosti má vodní obsah ve vzorku. Důvodem, proč vlhký beton vykazuje vyšší modul pružnosti (cca 10% [43]), může být přetvoření vlhké matrice, jejíž póry obsahují nestlačitelnou vodu [44]. Při měření dynamického modulu pružnosti se přítomnost vody v kapilárách projeví vyšší rychlostí šíření ultrazvukových vln. To je pochopitelné, protože ve vodě se zvuk šíří přibližně čtyřikrát rychleji než ve vzduchu.

5.1.1 Experiment a výsledky

Testován byl jeden maltový vzorek o rozměrech $40 \times 40 \times 160$ mm, připravený z cementové malty s vodním součinitelem $w/c=0,46$. Směs pro výrobu malty obsahovala cement CEM I 42,5R z Českomoravského cementu, a.s. v Mokrém a zkušební křemenný písek pro přípravu malt ze společnosti Filtrační písky, s.r.o. v poměru 1:3 a v souladu s normou ČSN 72 1200, byly použity tři frakce písku o velikosti zrn 0–1, 1–3, a 3–4 mm, které byly míchány v hmotnostním poměru 1:1:1. Vyrobené těleso bylo odformováno po 24 hodinách a zrálo při teplotě 22°C a 55% relativní vlhkosti. Následně bylo těleso uloženo na 27 dní do vody a pak bylo sušeno po 2 dny při teplotě 60°C . Po vytažení ze sušičky byla změřena hmotnost suchého vzorku W_h a následně byl vzorek uložen do destilované vody po dobu 20 dnů.

Vzorek plně nasycený vodou byl umístěn na digitální váhu a na spodní stranu byl vcelím voskem připevněn snímač MIDI. Horní strana vzorku byla vyhlazena a budič CONE zde byl volně položen, bez vazebního prostředku. Zatímco vzorek samovolně vysychal, jeho hmotnost W_m byla pravidelně zapisována a frekvenční spektrum bylo automaticky měřeno aparaturou s MLS signálem. Během osmidenního měření bylo zaznamenáno celkem 672

hodnot základní frekvence vzorku, viz graf 5.1.



Obr. 5.1: Na grafu vidíme závislost frekvence podélných kmitů na čase spolu s naměřeným množstvím vody ve vzorku v průběhu samovolného vysychání.

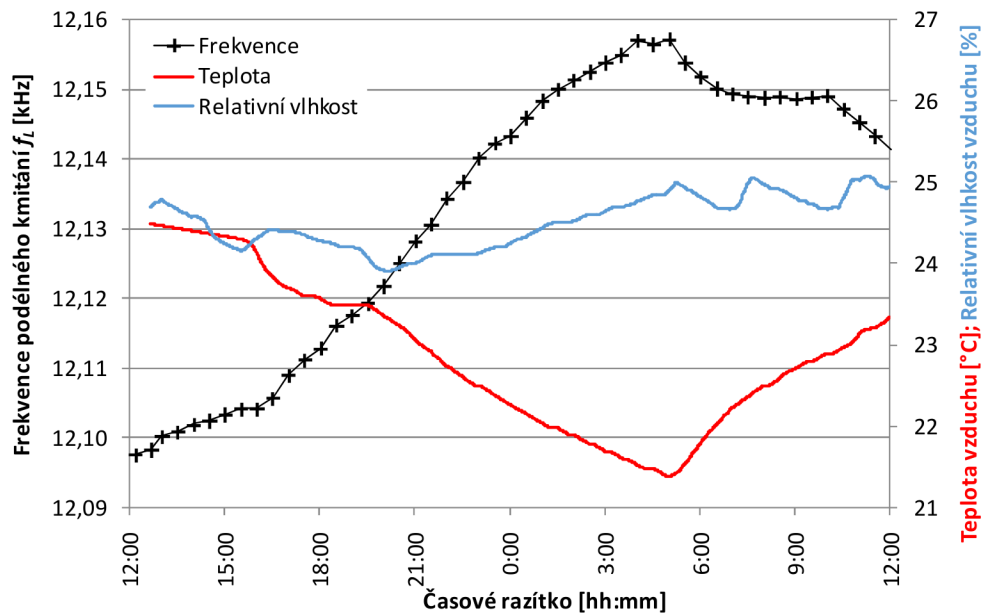
V prvním dnu probíhalo měření s 10 minutovým intervalem – viz graf 5.2, které se následně prodloužilo na půl hodiny. Pro ověření hodnot naměřených MLS signálem bylo několikrát provedeno manuální měření metodou impact-echo. Poměr vody ve vzorku byl spočítán podle vztahu:

$$\alpha = \frac{W_m - W_h}{W_h} = \frac{W_m}{W_h} - 1$$

Z uvedeného grafu vyplývá, že k největšímu poklesu frekvence došlo v prvních 12 hodinách. Periodické oscilace, které následovaly, byly způsobeny poklesem teploty v nočních hodinách (teplota: 19,3–26,3 °C, RH: 19,3–31,8%). Vliv teploty na vlastní frekvenci vzorku byl následně sledován na již suchém a stabilizovaném vzorku.

Měřicí aparatura s MLS signálem umožnila kontinuální sledování frekvence podélných kmitů vzorku, která se změnila z 12551,1 Hz (mokrý vzorek) na 12097,7 Hz (suchý vzorek).

Výsledky experimentu poukazují na to, že je třeba během měření dbát na dodržení laboratorních podmínek. Metoda využívající MLS signál je natolik citlivá, že spolehlivě zaznamenala změnu teploty vzduchu o 2,5 °C, což vedlo na změnu frekvence podélného kmitání o 0,5%.



Obr. 5.2: Na tomto grafu je vynesena základní frekvence podélného kmitání spolu s teplotou a relativní vlhkostí v závislosti na čase.

5.2 Teplotně namáhané maltové vzorky 40×40×160 mm

Předchozí experiment se schnoucím maltovým vzorkem potvrdil možnost automatizovaného měření pomocí MLS aparatury.

Další měření mělo několik cílů:

otestovat použitelnost metody na malých trámčích 40×40×160 mm

Jak jsme již ukázali při rozboru tlumení kmitů, malé standardní vzorky jsou obtížněji měřitelné než velké. Nižší hmotnost má za následek vyšší frekvenci kmitání, z ní vyplývá i vyšší rychlost pohybu a tím i silnější útlum. Vyšší tlumení vede na nižší rozlišovací schopnost frekvence.

Přestože menší varianta zkušebního trámčičku již byla úspěšně naměřena při vysychání, je vhodné experiment zopakovat opět s menšími trámčičky. Podmínky měření tak budou méně příznivé a snáze odhalíme nedostatky metody.

porovnat výsledky měření s jinými ultrazvukovými metodami

Výsledky získané pomocí generátoru bílého šumu byly porovnány s metodou impact-

echo. Piezoelektrický snímač MIDI byl u obou metod stejný, a byl připevněn pomocí včelího vosku. Vybuzení kmitů však bylo provedeno dvěma způsoby – šumových generátorem i úderem kladívka.

Současně byl použit i komerčně vyráběný ultrazvukový přístroj PUNDIT plus, který slouží ke zjištění doby průchodu akustického signálu. Tento údaj lze přepočítat na rychlost šíření podélné vlny a porovnat s ostatními metodami.

zjistit, zda dominantní frekvence závisí na intenzitě budícího signálu

Zajímavou vlastností, kterou můžeme automatizovaně zjišťovat, je nelineární chování vzorku. U ideálního lineárního vzorku očekáváme, že napětí je za všech okolností úměrné pouze deformaci. Reálný materiál však může vykazovat změny v tomto chování a s narůstající deformací může být vazba měkknoucí anebo tuhnoucí. Zvýšíme-li amplitudu kmitů, dojde k posunu frekvenčního maxima.

Zavedme parametr α , který bude vypovídat o nelineárních vlastnostech. Vypočteme jej jako relativní změnu frekvence vůči relativní změně amplitudy:

$$\alpha = \frac{\frac{df}{f_0}}{\frac{dA}{A_0}} = \frac{df \, dA}{f_0 A_0}$$

přičemž změnu frekvence df zjistíme z posunu frekvence hlavního maxima a změnu amplitudy dA můžeme nalézt jako hodnotu v amplitudovém spektru pro danou frekvenci.

Dopředu nelze posoudit, zda vzorek bude vykazovat nelineární vlastnosti a pokud ano, zda citlivost aparatury a intenzita signálu bude dostatečná k jejich měření.

V teoretickém úvodu jsme pohlíželi na zkoumané vzorky jako na LTI systém, tj. *lineární, časově neproměnný*. Nyní hledáme nelineární vlastnosti, což se může jevit jako protichůdné. Přesto lze očekávat, že nelineární vlastnosti lze měřit i popsanou aparaturou.

ověřit, zda lze odhalit poškození vzorků namáhaných vysokou teplotou

Při zahřívání betonových vzorků dochází k řadě změn, které jsou shrnuty v následující tabulce:

Teplota (°C)	Změny v mikrostruktuře betonu
20 – 200	Pomalá ztráta kapilární vody a snížení soudržných sil v důsledku expanze vlhkosti 80 °C – 150 °C dehydratace ettringitu 150 °C – 170 °C rozklad sádrovce $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ Počátek dehydratace CSH gelu Ztráta fyzikálně vázané vody
300 – 400	Praskání křemičitého kameniva (350 °C) Kritická teplota pro vodu (374 °C) — poté už není možná přítomnost volné vody
400 – 500	Rozklad portlanditu — $\text{Ca}(\text{OH})_2 \rightarrow \text{CaO} + \text{H}_2\text{O}$
500 – 600	573 °C – přeměna křemene z fáze β na α
600 – 800	Druhá fáze rozkladu CSH gelů, tvorba $\beta - \text{C}_2\text{S}$
800 – 1000	840 °C – rozklad dolomitického vápence 870 °C – přeměna křemene z fáze α na β -trydimit 930 °C – 960 °C – rozklad kalcitu: $\text{CaCO}_3 \rightarrow \text{CaO} + \text{CO}_2$ Začátek vzniku keramické vazby, která nahrazuje hydraulické vazby uvolňováním oxidu uhličitého
1000 – 1200	Tvorba Wollastonitu $\beta(\text{CaO} \cdot \text{SiO}_2)$ 1050 °C – tavení čediče
1300	Celkový rozklad betonu, tavení některých složek

Očekává se, že tyto změny budou mít za následek změnu dynamického modulu pružnosti v tahu a změnu hustoty, což se projeví na frekvenci základního podélného módu, kterou budeme měřit.

Není vyloučeno, že i parametr α bude záviset na míře poškození vysokou teplotou.

5.2.1 Materiál a metody

Měření bylo provedeno na několika vzorcích ze stejného materiálu, z nichž každý byl namáhán jinou teplotou. Vzorky o rozměrech (40×40×160 mm) byly připravené z cementové malty s vodním součinitelem $w/c=0,46$. Směs pro výrobu malty obsahovala cement CEM I 42,5R z Českomoravského cementu, a.s. v Mokré a zkušební křemenný písek pro přípravu malt z Filtračních písků, s.r.o. v poměru 1:3 a v souladu s normou ČSN 72 1200 byly použity tři frakce písku o velikosti zrn 0–1, 1–3, a 3–4 mm, které byly míchány

v hmotnostním poměru 1:1:1. Vyrobené těleso bylo odformováno po 24 hodinách a zrálo při teplotě 22 °C a 55% relativní vlhkosti. Následně byla tělesa uložena na 27 dní do vody a pak byla sušena po 2 dny při teplotě 60 °C. Vzorky byly individuálně zahřívány v peci na teploty 200 °C, 400 °C, 600 °C, 800 °C, 1000 °C a 1200 °C rychlostí 5 °C/min, až do dosažení maximální teploty, na které se vzorek udržoval 60 minut. Po výpalu byly vzorky ponechány samovolně vychladnout. Vzorky byly zapůjčeny panem doc. Rovnaníkem.



Obr. 5.3: Teplotně namáhané vzorky vyrobené z cementové malty.

Frekvenční oblast, ve které se provádí analýza pro vzorky o délce měřicí základny 160 mm, se pohybuje na horní hranici slyšitelného pásma a pokračuje do cca 30 kHz. Pro tento rozsah byl použit budič CONE a snímač MIDI. Vazebním prostředkem obou piezoměničů byl včelí vosk. Testovacím signálem byla sekvence maximální délky, 17 bitů, s frekvencí generování 100 kHz. Měření na každém vzorku bylo provedeno signálem o amplitudě 10 až 90 V, 25krát opakováno a zprůměrováno. Signál byl digitalizován s frekvencí vzorkování 1 MHz. Výsledky naměřené navrženou aparaturou byly srovnány s metodou impact-echo (použitý snímač MIDI) a s ultrazvukovou impulzní metodou (54 kHz nosný signál).

5.2.2 Výsledky

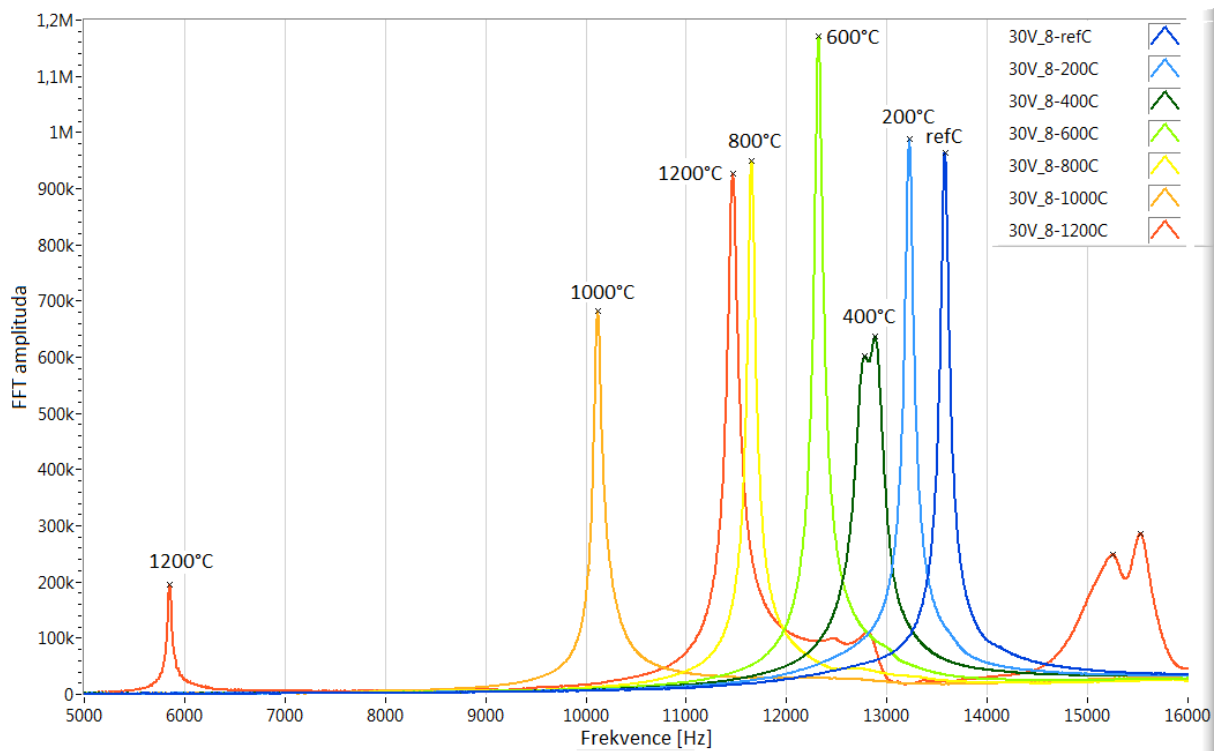
Interpretace výsledků frekvenční analýzy získané budičem CONE může být problematická. Jak vyplývá z přenosové charakteristiky, intenzita generovaného signálu narůstá s frekvencí, proto se pík s vyšší frekvencí může jevit jako základní frekvence vzorku, zatímco se jedná pouze o vyšší harmonickou frekvenci budiče. S největší pravděpodobností (potvrzeno měřením Impact-echo) je to případ vzorku namáhaného 1200 °C. Určení správné frekvence je v tomto případě obzvláště náročné, protože vzorky se závažným vnitřním poškozením mohou mít nedominantní frekvenci snadno zaměnitelnou s frekvencí podélného kmitání. Z průběhu změny rychlosti šíření v závislosti na teplotě namáhání vyplývá, že správnou dominantní frekvencí pro 1200 °C je 5,94 kHz.

Vzorek namáhaný teplotou 400 °C má dvojitý frekvenční pík, který je následkem pevné vazby budiče a snímače, protože kontrolním měřením metodou impact-echo se v této oblasti vyskytovalo pouze jedno frekvenční maximum. Dále je zde vidět téměř identický průběh srovnávacího měření ultrazvukovou pulzní metodou a rychlostmi získanými navrženou měřicí aparaturou. Pro ujasnění křivka nazvaná pulz (modrá), není výsledkem korelace MLS signálu, jedná se o doplňující měření jediným neopakovaným pulzem. Frekvence podélného kmitání získaná měřicí aparaturou s MLS signálem byla potvrzena metodou impact-echo. Pro teploty 400 °C a 1200 °C jsou vyznačeny i alternativní hodnoty frekvenčních píků.

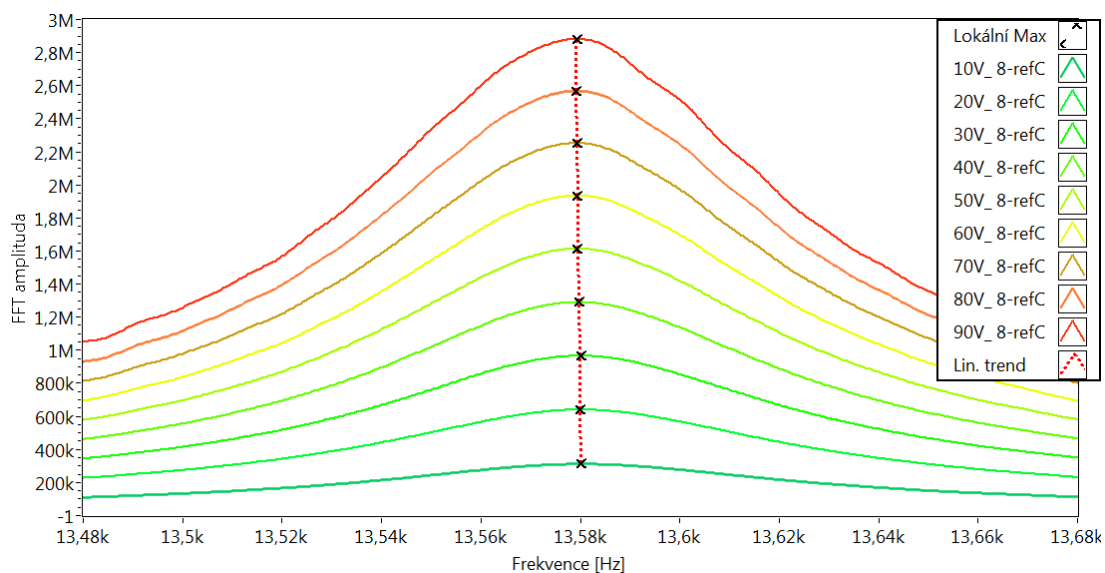
Dalším parametrem, který je možno měřicí sestavou zjistit, je parametr α , který slouží pro klasifikaci nelinearity vzorku. K tomuto experimentu je nutné měření opakovat s narůstající intenzitou signálu, přičemž výsledkem je lineární závislost frekvence na amplitudě FFT. Příмка proložená všemi maximy ve spektru slouží k přesnému určení nelineárního koeficientu α . Tvar lokálních, frekvenčních maxim a posun frekvencí je vidět na grafech 5.5 až 5.11. Rozsah vynesných frekvencí u těchto grafů je pro lepší srovnání stejný (200 Hz), vyjma vzorku 400 °C.

5.2.3 Závěr

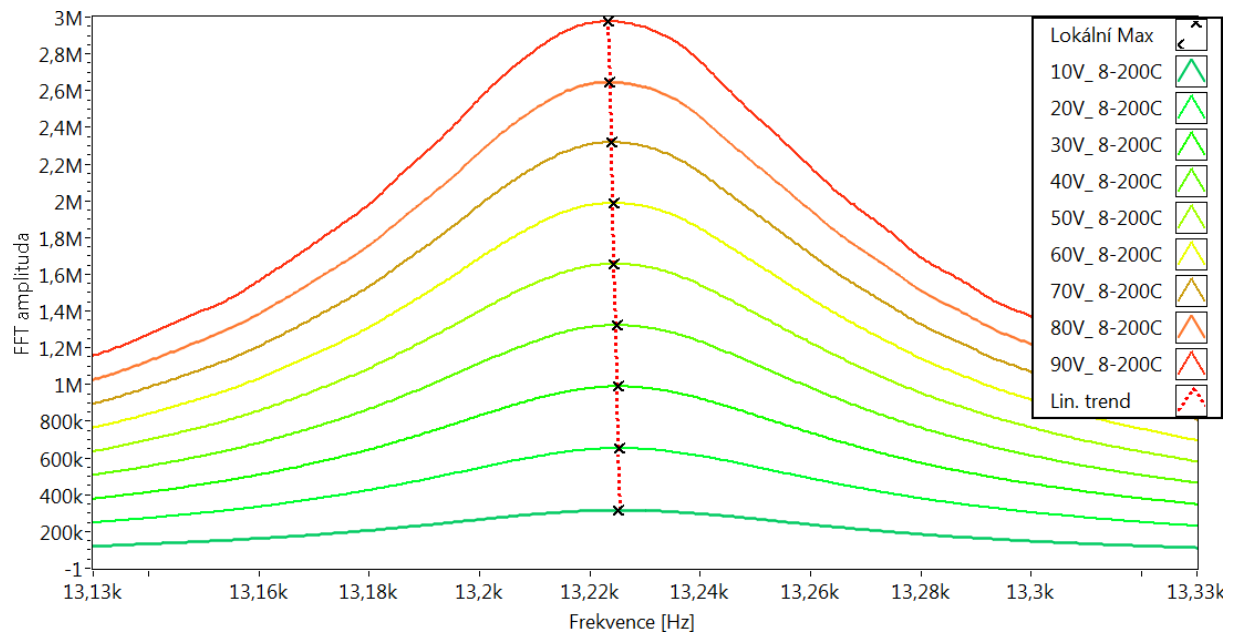
Navrženou testovací aparaturou s budícím MLS signálem byly charakterizovány vzorky namáhané různě vysokou teplotou. Z grafu rychlosti šíření ultrazvukových vln získaných navrženou aparaturou impulzním přístrojem PUNDIT můžeme vidět klesající tendence s rostoucí teplotou namáhání vzorku. Zcela identický trend je pozorovatelný i v případě poklesu frekvence podélného kmitání, což je očekávatelné, protože oba parametry je možné



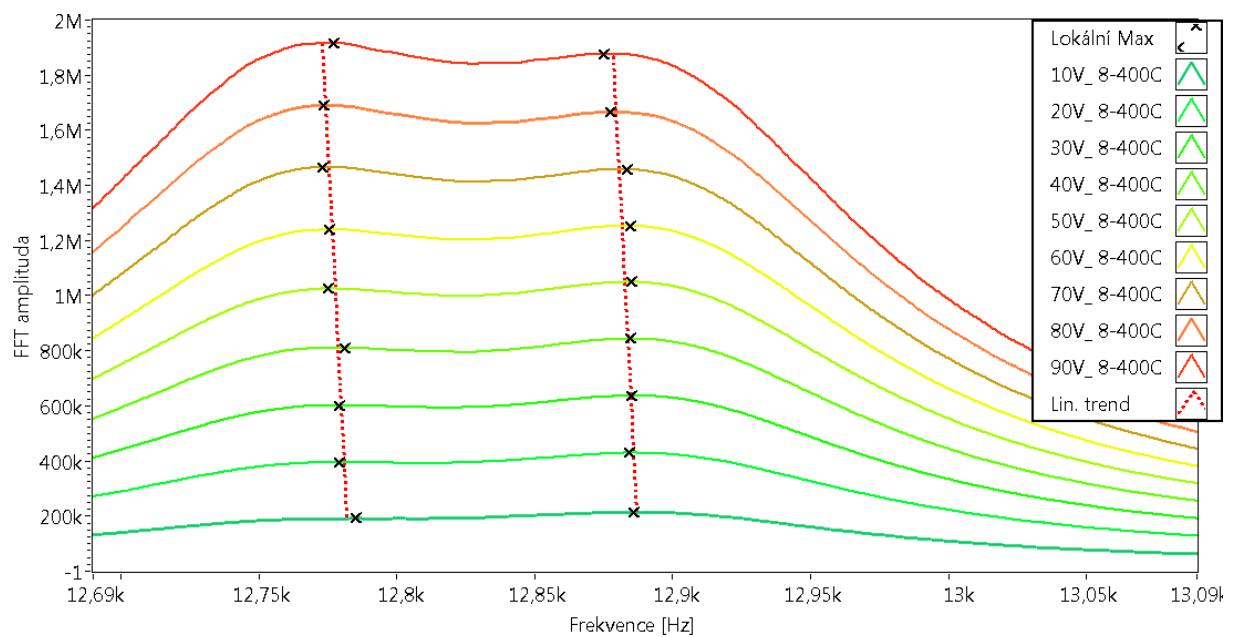
Obr. 5.4: Frekvenční analýza vzorků namáhaných různou teplotou.



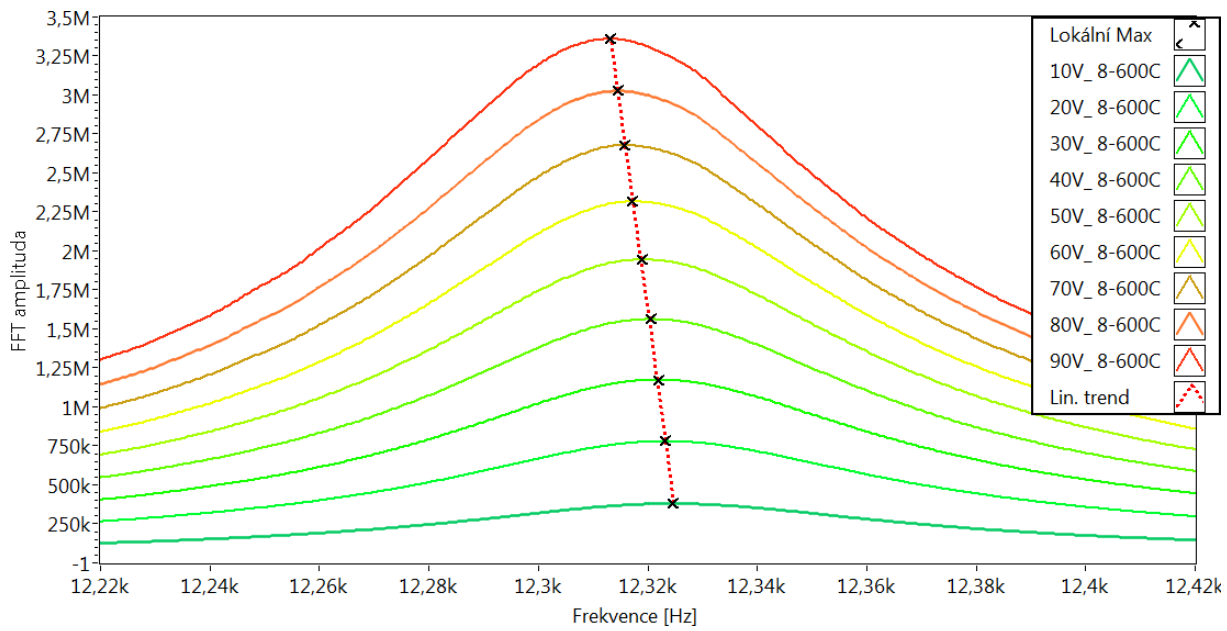
Obr. 5.5: Referenční vzorek – posun f_l se zvyšující se amplitudou budícího signálu



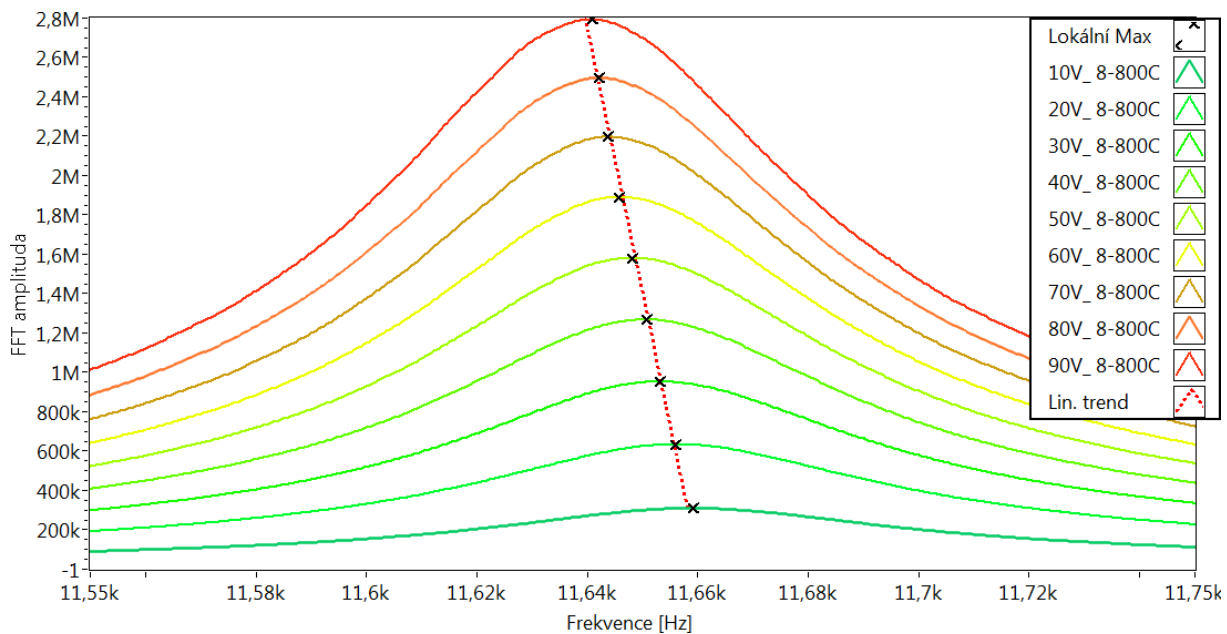
Obr. 5.6: Vzorek namáhaný teplotou 200°C a posun jeho rezonanční frekvence v závislosti na amplitudě budícího signálu.



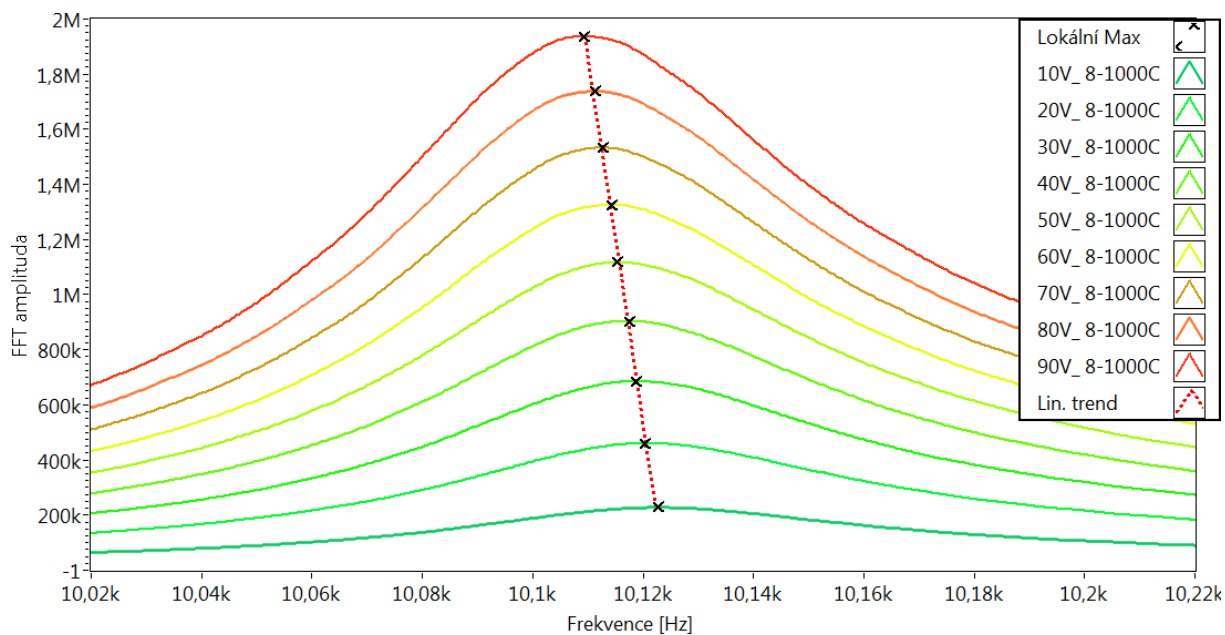
Obr. 5.7: Vzorek namáhaný teplotou 400°C a posun rezonanční frekvence dvou hlavních maxim v závislosti na amplitudě budícího signálu.



Obr. 5.8: Vzorek namáhaný teplotou 600°C a posun jeho rezonanční frekvence v závislosti na amplitudě budícího signálu.



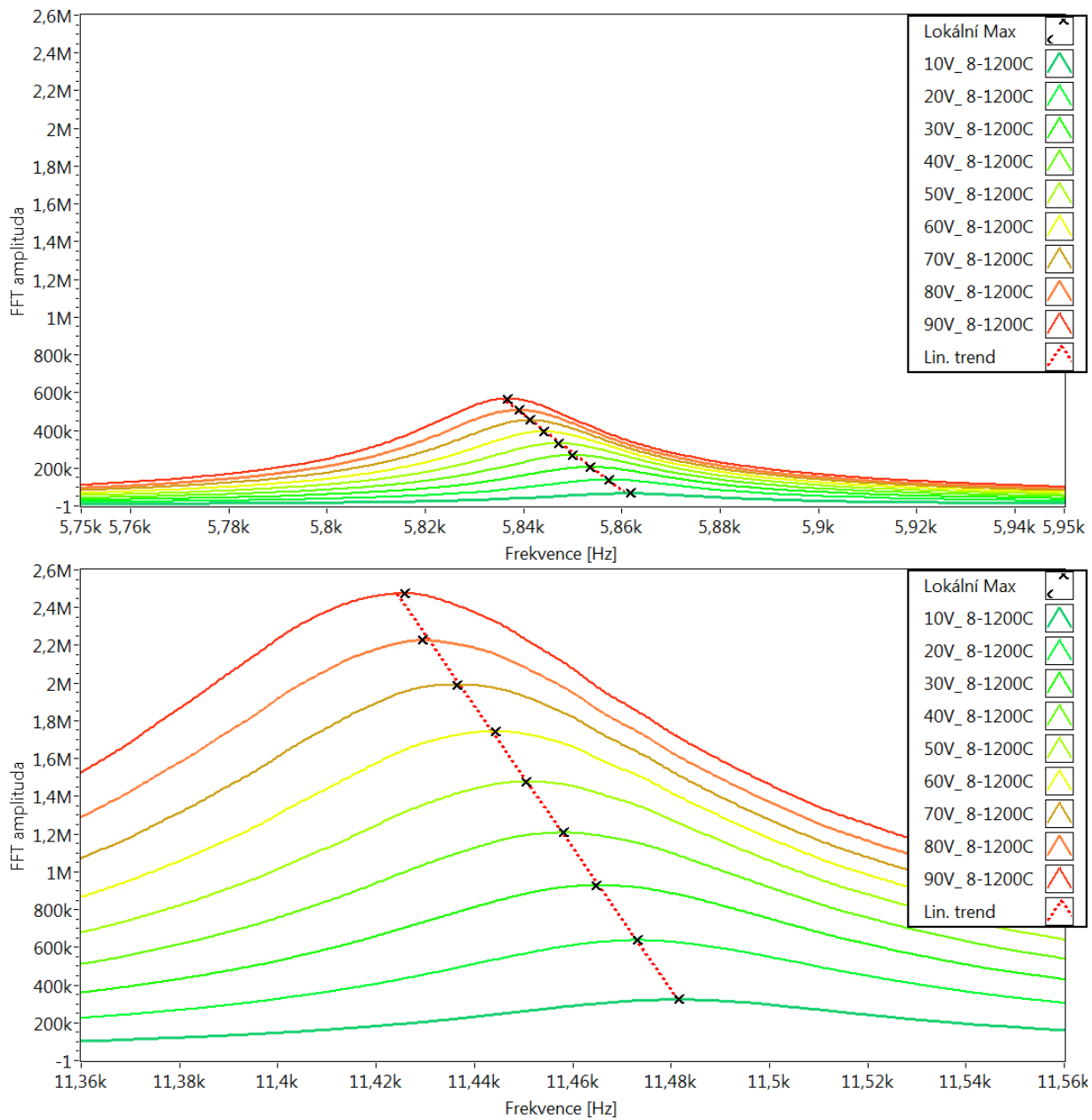
Obr. 5.9: Vzorek namáhaný teplotou 800°C a posun jeho rezonanční frekvence v závislosti na amplitudě budícího signálu.



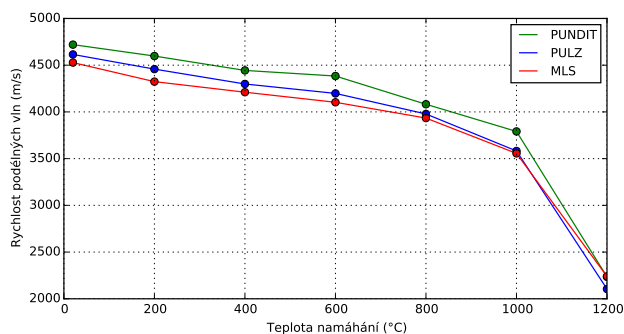
Obr. 5.10: Vzorek namáhaný teplotou 1000°C a posun jeho rezonanční frekvence v závislosti na amplitudě budícího signálu.

přepočítat na dynamický modul pružnosti v tahu/tlaku. Z výsledků je zřejmé, že s narůstající teplotou se zhoršují akustické a potažmo i mechanické vlastnosti maltových vzorků. K významnému propadu dochází při teplotě 1000°C a především 1200°C. I z průběhu parametru charakterizujícího nelinearity vzorku α je patrná podobná tendence s výjimkou teploty 1000°C. Pro tuto teplotu se nabízejí dvě vysvětlení. Může se jednat o statistickou anomálii, byl testován pouze jeden vzorek s teplotním namáháním 1000°C, nebo došlo ke změně struktury, která vedla ke snížení množství mikrotrhlin.

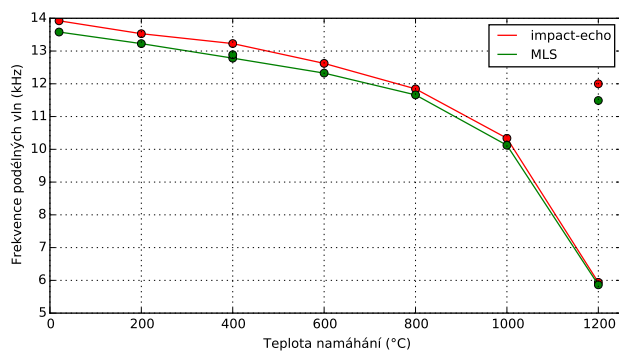
Výrazný pokles všech měřených ukazatelů pro vzorek namáhaný 1200°C je zcela neočekávaným jevem. Zde poněkud předbíháme, ale vzorky s recepturou A a B popsané v následující kapitole, se od těchto maltových lišily pouze v kamenivu a vykazovaly naopak zlepšení vlastností. Alternativní píky frekvence podélného kmitání obou metod umožňují i takovou interpretaci, ale to bylo vyvráceno měřením rychlosti ultrazvukových vln.



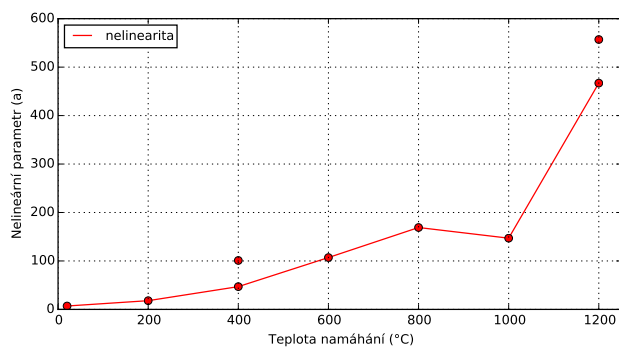
Obr. 5.11: Vzorek namáhaný teplotou 1200°C a posun rezonanční frekvence prvních dvou dominantních maxim v závislosti na amplitudě budícího signálu.



Obr. 5.12: Rychlost šíření podélných vln naměřená třemi různými metodami u vzorku, který byl namáhaný postupně se zvyšující teplotou. Křivka označená PULZ odpovídá měření, kdy se namísto MLS sekvence vyslal pouze jediný pulz.



Obr. 5.13: Frekvence podélných kmitů naměřená metodou impact-echo a pomocí MLS aparatury u teplotně namáhaného vzorku.



Obr. 5.14: Na grafu je vynesena parametr α , který vystihuje nelineární odezvu vzorku a ze závislosti na teplotě namáhání je patrná jeho narůstající tendence.

5.3 Měření teplotně namáhaných betonových vzorků

Za účelem srovnání výsledků měřicí aparatury s klasickými metodami a pro ověření použitelnosti na velkých standardních trámčích (100×100×400 mm) bylo provedeno měření na identických vzorcích namáhaných různou teplotou. Oproti předešlému experimentu byl použitý kontaktní reproduktor jako budič a MEMS mikrofon, protože tato kombinace je vhodnější pro nižší frekvence, které se u větších vzorků očekávají. Mikrofon nebyl upevňován ke vzorku, takže příprava měření trvala jen zlomek času.

Pro srovnání byly použity dvě receptury pro výrobu betonu, které budeme označovat *A* a *B*, a které byly navrženy a vyrobeny panem prof. Helou. V přepočtu na 1 m³ byly vzorky připraveny v následujících poměrech jednotlivých složek:

receptura A

345 kg Portlandského cementu CEM I 42,5 R – Mokrá
848 kg křemenného písku s frakcí 0/4 mm – Žabčice
980 kg kameniva 8/16 – Olbramovice
2,8 kg superplastifikátoru Sika ViscoCrete 2030
160 kg vody ($w = 0,46$)

výsledná konzistence: 550 mm sednutí kužele.

receptura B

345 kg Portlandského cementu CEM I 42,5 R – Mokrá
896 kg křemenného písku s frakcí 0/4 mm – Žabčice
521 kg kameniva 8/16 – Olbramovice
391 kg kameniva 11/22 – Olbramovice
2,5 kg superplastifikátoru Sika ViscoCrete 2030
153 kg vody ($w = 0,44$)

výsledná konzistence: 150 mm sednutí kužele.

Obě směsi byly vloženy do forem o rozměrech $100 \times 100 \times 400$ mm a zavibrovány. Následně byly betonové vzorky uloženy na 28 dní do vody. Po vytažení byly vysušeny v horkém vzduchu v sušičce při teplotě 110°C po dobu dvou dnů. Poté se vzorky individuálně zahřívaly v peci Rhode KE 130B na teploty 200°C , 400°C , 600°C , 800°C , 1000°C a 1200°C rychlostí $5^\circ\text{C}/\text{min}$, až do dosažení maximální teploty, na které se vzorek udržoval 60 minut. Po výpalu jsme vzorky nechali samovolně vychladnout.

Frekvenční oblast, ve které se provádí analýza pro vzorky o délce měřící základny 400 mm, se pohybuje do cca 15 kHz. Pro tento rozsah byl použit kontaktní reproduktor jako budič EX60S a bezkontaktní mikrofonní snímač MEMS. Vazebním prostředkem reproduktoru byl Sono gel. Testovacím signálem byla sekvence maximální délky 17 bitů a každá sekvence se proto opakovala každých $2^{17} - 1 = 131071$ bitů. Jak již bylo uvedeno dříve, tato délka signálu představuje Mersennovo prvočíslo a je tudíž poněkud nevhodná, protože výpočet diskrétní Fourierovy transformace trvá výrazně déle, než pro jiné délky. V našem případě to však nepředstavovalo velký problém, protože výpočet neprobíhal v reálném čase.

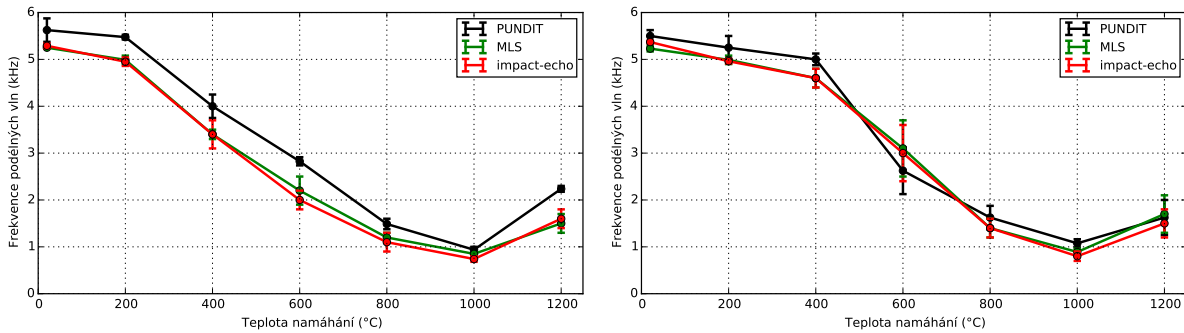
Frekvence generování byla nastavena na 100 kHz, a tak se signál opakoval přibližně každých 1,3 sekund. Měření na každém vzorku bylo provedeno signálem o amplitudě 1 až 31 V. Signál byl digitalizován s frekvencí vzorkování 1 MHz. Výsledky naměřené navrženou aparaturou byly srovnány s metodou impact-echo (použitý snímač MIDI) a ultrazvukovou impulzní metodou (54 kHz nosný signál).

5.3.1 Naměřené vlastnosti vzorků

Vyhodnocení nalezených parametrů rozdělme do dvou skupin, z nichž první bude souviset nejen se zkoumaným materiálem, ale také s tvarem vzorku. Patří mezi ně hmotnost, rezonanční frekvence a čas průchodu ultrazvukového signálu. Z těchto parametrů nelze pro testovaný materiál nic vyvozovat, ale přesto mohou posloužit pro vzájemné porovnání použitých metod. Metoda impact-echo a metoda na bázi MLS signálu umožňují nalézt rezonanční frekvenci, zatímco ultrazvukový přístroj PUNDIT měří dobu průchodu signálu mezi budičem a senzorem. Čas průchodu τ byl přepočten na frekvenci vztahem $f = 1/(2\tau)$.

Závislost všech tří frekvencí na teplotě, jíž byl vystaven testovací vzorek, vidíme na grafech 5.15.

Závislosti získané metodou impact-echo a měřením pomocí bílého šumu si velmi dobře



Obr. 5.15: Frekvence podélných kmitů měřená metodou impact-echo, pomocí MLS a přístrojem PUNDIT na vzorcích receptury A (vlevo) a B (vpravo) namáhaných narůstající teplotou.

odpovídají, zatímco údaje z přístroje PUNDIT se poněkud odchyľují od obou zbývajících metod. Především u vzorku s recepturou A vychází frekvence přístrojem PUNDIT systematicky vyšší, ale přitom budič i senzor tvořily větší přidanou hmotnost, která by měla frekvenci snižovat. Přístroj možná provádí korekce, které nejsou na první pohled zcela zřejmé. Mimo to používá ultrazvukový signál o frekvenci 54 kHz, což je o řád vyšší, než obě zbývajících metody.

Tyto nesrovnalosti vedly k tomu, že pro další výpočty již nebudeme údaj z přístroje PUNDIT využívat a v následujících dvou tabulkách jsou uvedeny frekvence z obou zbývajících metod.

Tabulky odpovídají vzorkům receptury A a receptury B a kromě hmotnosti a frekvencí obsahují též parametr α , kterému se budeme věnovat později.

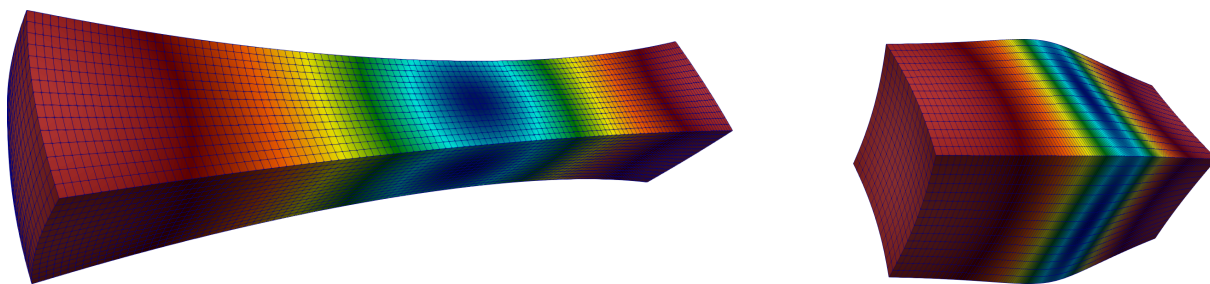
vzorek	m (kg)	f_{IE} (Hz)	f_{IE} (Hz)	f_{MLS} (Hz)	f_{MLS} (Hz)	$\alpha \cdot 10^5$	err.
A02-20	9,414	5316		5230		-3	
A03-20	9,37	5328	5324 ± 3	5252	5247 ± 6	8	5 ± 3
A04-20	9,43	5328		5258		9	
A08-200	9,206	4959		4982		27	
A09-200	9,393	5042	4960 ± 30	5082	4990 ± 30	5	29 ± 9
A10-200	9,296	4869		4908		54	
A14-400	9,302	3260		3349		91	
A15-400	9,2095	3111	3270 ± 60	3241	3380 ± 60	57	73 ± 7
A17-400	9,124	3433		3536		72	
A20-600	9,139	1645		1932		473	
A21-600	9,209	2253	2000 ± 100	2447	2200 ± 100	336	400 ± 30
A22-600	8,742	2217		2321		383	
A27-800	8,838	912		1035		2120	
A28-800	8,9795	1072	1000 ± 30	1285	1180 ± 50	1086	1400 ± 200
A30-800	8,7585	1025		1228		1102	
A34-1000	9,3065	750		860		845	
A46-1000	8,775	778	760 ± 6	852	846 ± 7	852	870 ± 10
A47-1000	8,9716	752		826		910	
A38-1200	8,798	1561		1608		255	
A39-1200	8,894	1222	1470 ± 80	1280	1530 ± 80	478	330 ± 50
A40-1200	8,6195	1622		1689		243	

vzorek	m (kg)	f_{IE} (Hz)	f_{IE} (Hz)	f_{MLS} (Hz)	f_{MLS} (Hz)	$\alpha \cdot 10^5$	err.
B01-20	9,542	5382		5257		8	
B02-20	9,628	5406		5305		2	
B04-20	9,491	5388		5272		7	
B05-20	9,415	5334	5364 ± 9	5173	5230 ± 20	49	10 ± 5
B06-20	9,523	5340		5184		0	
B07-20	9,444	5334		5188		-5	
B10-200	9,166	4977		5039		-17	
B11-200	9,245	5018		5091		25	
B12-200	9,127	5006		5059		13	
B13-200	9,036	4911	4950 ± 20	4935	4990 ± 20	8	7 ± 4
B14-200	9,163	4917		4946		7	
B15-200	8,971	4875		4870		4	
B19-400	9,073	4726		4739		4	
B20-400	9,082	4923		4926		16	
B21-400	9,153	4673		4672		4	
B22-400	8,997	4458	4580 ± 70	4485	4610 ± 70	7	8 ± 1
B23-400	9,056	4577		4634		5	
B26-400	8,858	4130		4209		9	
B28-600	8,908	2038		2209		342	
B29-600	8,866	2360		2464		307	
B33-600	8,914	2968		3087		157	
B34-600	8,784	3445	3000 ± 200	3512	3100 ± 200	62	160 ± 40
B35-600	8,868	3415		3486		48	
B36-600	8,925	3773		3830		18	
B40-800	8,917	1508		1662		719	
B41-800	8,84	1406		1469		846	
B42-800	8,737	1329		1335		528	
B43-800	8,87	1198	1300 ± 40	1270	1360 ± 50	1241	1000 ± 100
B44-800	8,783	1217		1199		1067	
B45-800	8,76	1162		1251		1619	
B46-1000	8,676	703		829		987	
B47-1000	8,936	804		982		1031	
B48-1000	8,933	810		835		824	
B49-1000	8,731	816	790 ± 20	968	890 ± 20	522	960 ± 80
B50-1000	8,616	865		878		1003	
B53-1000	8,859	745		820		1365	
B55-1200	8,614	1371		1540		435	
B56-1200	8,599	906		1021		1149	
B57-1200	8,56	1353		1484		660	
B58-1200	8,705	1573	1490 ± 100	1822	1700 ± 100	317	510 ± 90
B61-1200	8,748	1853		2012		290	
B63-1200	8,687	1865		2053		225	

5.3.2 Vypočítané vlastnosti materiálu

Nyní se budeme věnovat vlastnostem, které souvisejí se zkoumaným materiálem, přičemž na tvaru vzorku nezávisí. Provedeme tedy přepočítání z hmotnosti a frekvence na hustotu, rychlost šíření podélných vln a Youngův modul pružnosti v tahu. Hustotu zjistíme snadno jako podíl hmotnosti a objemu. Rychlost vlnění vypočítáme za předpokladu, že v základním módu je délka vzorku rovna polovině vlnové délky a tudíž platí jednoduchý vztah $v = 2lf$.

Youngův modul pružnosti v tahu byl vypočten pomocí modální analýzy. Do modelu, jehož rozměry odpovídaly skutečným vzorkům, bylo nutno dodat hustotu materiálu, modul pružnosti v tahu a Poissonův poměr. Sledovaným výsledkem modelování byla frekvence základního podélného módu kmitání, přičemž vlastní tvar při tomto módu vidíme na obrázku 5.16.



Obr. 5.16: Na této ilustraci je vypočtený vlastní tvar vzorku kmitajícího v základním podélném módu. Obrázky odpovídají dvěma mezním tvarům při natažení a smrštění. Výchylna elementů je záměrně zvýrazněna, aby byly efekty při deformacích lépe patrné.

Vzhledem k tomu, že Poissonův poměr neznáme, byl výpočet proveden pro jeho mezní hodnoty, které můžeme odhadnout. Ukázalo se, že v intervalu $\nu = 0,15$ až $\nu = 0,25$ má Poissonův poměr jen malý vliv na výsledek a v nejhorším případě se dopustíme chyby asi osm promile. Při modelování byla použita hodnota $\nu = 0,2$.

Ve zcela obecném případě by bylo nutno pro každou naměřenou hustotu zkoušet různé hodnoty modulu pružnosti, dokud vypočtená frekvence nebude odpovídat naměřené. Vzorků je několik desítek a frekvence jsou naměřeny dvěma metodami. Každé modelování by si vyžádalo několik iterací, což by ve výsledku vedlo na velmi zdlouhavý proces.

Pomocí několika modelů byl prokázán zjevný předpoklad, že frekvence je úměrná $\sqrt{E/\rho}$ a postačí pouze nalézt konstantu úměrnosti a model bude přenositelný na všechny

vzorky.

V následujících dvou tabulkách najdeme kromě hustoty též rychlosti podélných vln zjištěné dvěma metodami – pomocí impact-echo a využitím MLS signálu. Údaje z obou metod jsou též přepočteny na Youngův modul pružnosti v tahu.

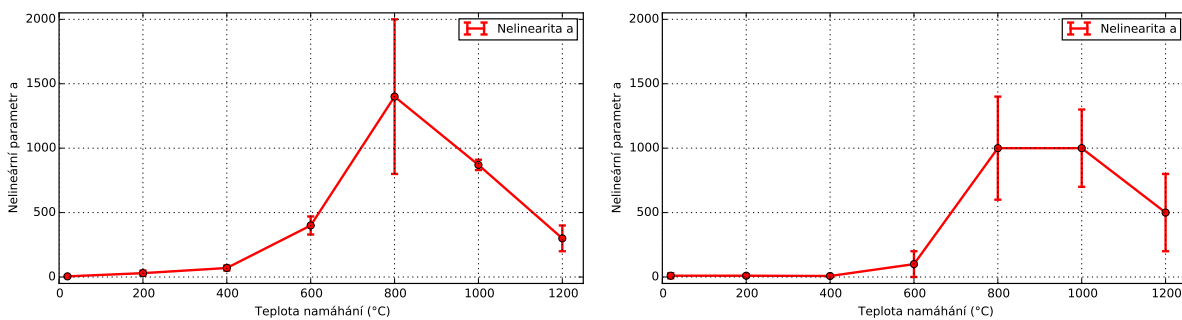
vzorek	ρ kg m ⁻³	v_{IE} (m/s)	v_{MLS} (m/s)	E_{IE} (GPa)	E_{IE} (GPa)	E_{MLS} (GPa)	E_{MLS} (GPa)
A02-20	2353	4252	4184	42,57		41,20	
A03-20	2342	4262	4201	42,56	42,65 ± 0,06	41,35	41,4 ± 0,1
A04-20	2357	4262	4206	42,83		41,71	
A08-200	2301	3967	3985	36,22		36,56	
A09-200	2348	4033	4065	38,21	36,6 ± 0,6	38,81	37,1 ± 0,6
A10-200	2323	3895	3926	35,26		35,83	
A14-400	2325	2608	2679	15,82	15,8 ± 0,6	16,69	16,8 ± 0,5
A15-400	2302	2488	2592	14,26		15,48	
A17-400	2280	2746	2828	17,20		18,25	
A20-600	2284	1316	1545	3,96	6,1 ± 0,7	5,46	7,3 ± 0,7
A21-600	2302	1802	1957	7,48		8,82	
A22-600	2185	1773	1856	6,87		7,53	
A27-800	2209	729	828	1,18	1,43 ± 0,09	1,51	2,0 ± 0,2
A28-800	2244	857	1028	1,65		2,37	
A30-800	2189	820	982	1,47		2,11	
A34-1000	2326	600	688	0,84	0,833 ± 0,007	1,10	1,03 ± 0,02
A46-1000	2193	622	681	0,85		1,02	
A47-1000	2242	601	660	0,81		0,98	
A38-1200	2199	1248	1286	3,43	3,1 ± 0,3	3,64	3,3 ± 0,3
A39-1200	2223	977	1024	2,13		2,33	
A40-1200	2154	1297	1351	3,63		3,93	

vzorek	ρ kg m^{-3}	v_{IE} (m/s)	v_{MLS} (m/s)	E_{IE} (GPa)	E_{IE} (GPa)	E_{MLS} (GPa)	E_{MLS} (GPa)
B01-20	2385	4305	4205	44,22	$43,8 \pm 0,2$	42,19	$41,6 \pm 0,3$
B02-20	2406	4324	4244	45,02		43,35	
B04-20	2372	4310	4217	44,08		42,21	
B05-20	2353	4267	4138	42,86		40,31	
B06-20	2380	4272	4147	43,45		40,95	
B07-20	2360	4267	4150	42,99		40,67	
B10-200	2291	3981	4031	36,33	$35,8 \pm 0,3$	37,24	$36,3 \pm 0,4$
B11-200	2311	4014	4072	37,25		38,34	
B12-200	2281	4004	4047	36,60		37,37	
B13-200	2258	3928	3948	34,87		35,21	
B14-200	2290	3933	3956	35,45		35,86	
B15-200	2242	3900	3896	34,11		34,04	
B19-400	2268	3780	3791	32,42	30 ± 1	32,60	$30,8 \pm 0,9$
B20-400	2270	3938	3940	35,22		35,26	
B21-400	2288	3738	3737	31,98		31,97	
B22-400	2249	3566	3588	28,61		28,96	
B23-400	2263	3661	3707	30,35		31,11	
B26-400	2214	3304	3367	24,17		25,11	
B28-600	2226	1630	1767	5,92	13 ± 2	6,95	14 ± 1
B29-600	2216	1888	1971	7,90		8,61	
B33-600	2228	2374	2469	12,56		13,59	
B34-600	2195	2756	2809	16,68		17,33	
B35-600	2216	2732	2788	16,55		17,24	
B36-600	2231	3018	3064	20,33		20,95	
B40-800	2229	1206	1329	3,24	$2,4 \pm 0,1$	3,94	$2,7 \pm 0,2$
B41-800	2209	1124	1175	2,80		3,05	
B42-800	2184	1063	1068	2,47		2,49	
B43-800	2217	958	1016	2,04		2,29	
B44-800	2195	973	959	2,08		2,02	
B45-800	2189	929	1000	1,89		2,19	
B46-1000	2168	562	663	0,69	$0,88 \pm 0,03$	0,95	$1,11 \pm 0,05$
B47-1000	2233	643	785	0,92		1,38	
B48-1000	2233	648	668	0,94		1,00	
B49-1000	2182	652	774	0,93		1,31	
B50-1000	2153	692	702	1,03		1,06	
B53-1000	2214	596	656	0,79		0,95	
B55-1200	2153	1096	1232	2,59	$3,2 \pm 0,4$	3,27	$4,0 \pm 0,5$
B56-1200	2149	724	816	1,13		1,43	
B57-1200	2139	1082	1187	2,51		3,02	
B58-1200	2176	1258	1457	3,45		4,62	
B61-1200	2186	1482	1609	4,81		5,67	
B63-1200	2171	1492	1642	4,83		5,86	

5.3.3 Nelineární odezva

Nelineární chování vzorků bylo zjišťováno na základě vyhodnocení parametru α , který je podílem relativní změny frekvence základního módu vůči relativní změně jeho amplitudy. Po drobných úpravách této definice bychom mohli nalézt parametr α tak, aby byl materiálovou vlastností, ale bylo by nutné další ověření. Proto raději považujeme naše výsledky za nepřenositelné.

Měření bylo provedeno tak, že postupně narůstala úroveň budícího signálu v rozsahu 1 až 31 V a při každém zvýšení se vypočítala základní frekvence a současně se zaznamenala úroveň amplitudy. Z těchto údajů se vypočítal parametr α , jehož závislost na tepelném poškození vzorků je vynesena na grafech 5.17 a číselné hodnoty jsou uvedeny v předešlých tabulkách.



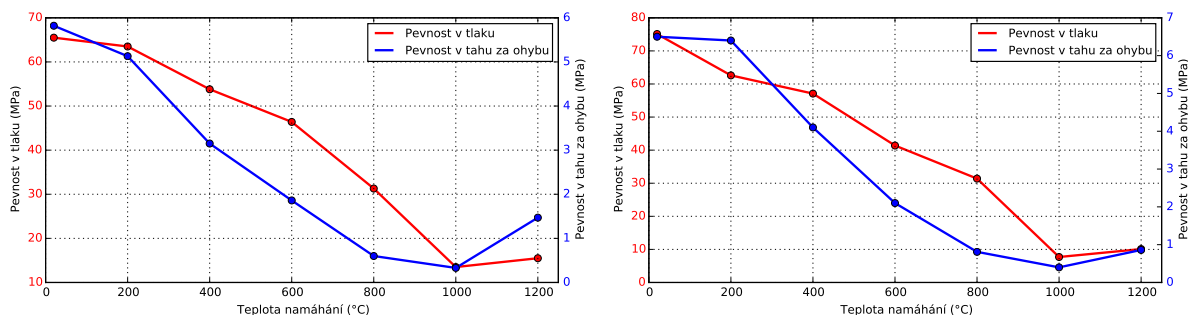
Obr. 5.17: Pomocí MLS byla zjišťována nelineární odezva na narůstající intenzitu budícího signálu. Na grafu je vynesena parametr α pro teplotně namáhané vzorky receptury A (vlevo) a receptury B (vpravo).

Parametr α by byl nulový pro takový materiál, který vykazuje zcela lineární odezvu a frekvence jeho vibrací nezávisejí na amplitudě.

To se však nestalo a výsledky uvedené na grafech poukazují na to, že nelineární odezva nejenže je aparaturou velmi dobře měřitelná, ale také dobře vystihuje míru poškození vzorků. Porovnání s metodou impact-echo zde nepřipadá v úvahu, protože ta neumožňuje nelineární odezvu zjistit. Využití bílého šumu pro budící signál zde představuje velkou výhodu.

5.3.4 Destruktivní testy

U některých vzorků byly provedeny též destruktivní testy, jejichž cílem bylo naměřit skutečnou hodnotu pevnosti betonu tlaku a pevnosti v tahu za ohybu v závislosti na teplotě, které byl daný vzorek vystaven. Výsledky měření jsou uvedeny na grafech 5.18.



Obr. 5.18: Výsledky destruktivního zkoušení různých vzorků vyrobených recepturou A (vlevo) a recepturou B (vpravo), přičemž každý z nich byl namáhán různou teplotou.

Hlavní smysl nedestruktivního testování je předpovědět výsledek testů destruktivních, které by pak nebylo nutno provádět. Pro stanovení kvantitativní korelace mezi pevností betonu a naměřenými akustickými vlastnostmi nemáme dostatek dat. Avšak zřejmý pohled na grafy 5.18 a předešlé výpočty vede k přesvědčení, že souvislost zde existuje.

Především bylo cílem ukázat, že nová metoda založená na využití deterministického bílého šumu si zaslouhuje další pozornost.

Kapitola 6

Závěr

V této habilitační práci s názvem *Využití modelování a bílého šumu ve stavební akustické defektoskopii* byly rozebrány různé přístupy k porozumění jevů spojených s akustickými nedestruktivními metodami, a také byla popsána měřicí metoda, která v některých aspektech překonává tradiční metodu impact-echo.

Přibližně polovina práce se věnuje teorii a modelování elastických vln v materiálu, a to především s ohledem na standardní betonové vzorky. Ukazuje se, že přestože je tvar vzorků na první pohled obyčejný kvádr, z hlediska kmitání a vlnění lze vypočítat a vypořozovat řadu komplikovaných jevů. Tuto první část práce nelze považovat za ryze teoretickou, protože mnohé odvozené závěry byly zároveň ověřeny experimentem, byť jednoduchým. Výpočetní postupy a modely tak nezůstávaly pouhým matematickým odvozením, ale vedly například k měření podélných kmitů, příčných kmitů, torzních kmitů, ale také ke zjišťování teplotní závislosti frekvence při zahřívání.

Ukázalo se, že u tenké kmitající tyče lze frekvenci všech druhů kmitů úspěšně matematicky předpovědět, byť za cenu vyřešení netriviálních diferenciálních rovnic. Nebylo však jisté, do jaké míry lze poznatky aplikovat na standardní betonové trámce. Velkým mezníkem bylo pořízení hliníkových bloků o stejných rozměrech, jaké tyto trámce mají. Při stejné geometrii, ale výrazně nižším útlumu kmitů se experimentálně ověřilo, že pouze torzní kmity lze vyjádřit analyticky, přičemž řešení vede na nekonečnou řadu. Výpočetní postupy pro podélné a příčné kmity nedávaly uspokojivé výsledky, až teprve použitím numericky nejnáročnější metody, modální analýzy, se podařilo s velmi dobrou přesností předpovědět správné frekvence současně pro všechny módy.

Tvorba modelů pokračovala dále s cílem vytvořit časovou simulaci vlnění v různě poš-

kozeném nehomogenním vzorku. Vznikl tak simulační software, jehož princip byl založen na trojrozměrné soustavě vázaných tlumených oscilátorů, a který dával výsledky alespoň v prvním přiblížení kvalitativně srovnatelné s očekáváním.

Další zaměření práce směřovalo k nahrazení tradiční a odzkoušené metody impact-echo novým přístupem, který byl odvozen z matematického rozboru metody impact-echo. Myšlenka vedla k návrhu a výrobě generátoru deterministického bílého šumu, který byl sice již popsán v šedesátých letech minulého století, ale jehož využití ve stavebnictví bývá spíše ojedinělé. Vývoj celé nové měřicí aparatury probíhal v úzké spolupráci s doktorandem Ladislavem Carbolem, v jehož závěrečné práci jsou mnohé detaily popsány.

Vlastnosti zmiňované metody byly ověřeny na cementových vzorcích a hlavním závěrem mělo být, zda obstojí při srovnání jinými akustickými metodami. Hned první experiment s kontinuálním měřením rezonanční frekvence schnoucích maltových vzorků ukázal velkou citlivost nové aparatury a současně možnost automatizace, čímž například metodu impact-echo překonává.

Následně byla zkoumána série maltových zkušebních trámečků $160 \times 40 \times 40$ mm, přičemž každý z nich byl před měřením vystaven různě vysoké teplotě až do 1200°C . Výsledky měření souhlasily s metodou impact-echo i s ultrazvukovým přístrojem PUNDIT. Současně se však pomocí nové aparatury podařilo naměřit i nelineární odezvu vzorků, která velmi dobře korespondovala s jejich poškozením. Metoda impact-echo toto měření ani neumožňuje.

Další měření opět využívalo teplotní namáhání. Několik desítek betonových vzorků dvou výrobních receptur a různou mírou poškození bylo zkoumáno metodou impact-echo, ultrazvukovým přístrojem PUNDIT a také pomocí nové aparatury. Na závěr byla u některých vzorků destruktivně zjištěna pevnost v tlaku a pevnost v tahu za ohybu. Opět se ukázalo, že metoda na bázi deterministického bílého šumu dává srovnatelné výsledky s metodou impact-echo, ale především ji překonává ve své reprodukovatelnosti, možnosti automatizace, zjištění nelineární odezvy a mnoha dalších vlastnostech.

V rámci této habilitační práce vznikly desítky počítačových programů pro nejrůznější účely a jejichž popisu se zde ani nelze věnovat. Drobné skripty usnadňovaly zpracování dat či řešení transcendentních rovnic, měřicí software v reálném čase nahrával zvuk, zobrazoval jeho spektrum a vyhledával maxima, jiný zase generoval bílý šum a zpracovával jeho akustickou odezvu a další prováděl modální analýzu metodou konečných prvků. Několik programů bylo napsáno pro účely modelování, například řešení soustavy spřažených oscilátorů. Samostatnou kapitolou by bylo i programování jednočipových mikropočítačů

ve strojovém kódu, což vedlo na prototyp generátoru deterministického šumu.

Současně vznikla i řada elektronických řešení a často je s podivem, jak nízkou cenu mohou mít značně pokročilé elektronické technologie. Zcela nulové náklady na software spolu se snadnou dostupností elektroniky vedou k myšlence, že řada postupů se může uplatnit i při výuce studentů na Stavební fakultě.

Lze jen doufat, že tato práce i její vedlejší výsledky budou užitečné pro další rozvoj v oblasti akustické defektoskopie.

Literatura

- [1] Wätzig H.: Peak recognition technique by a computer program copying the human judgment, *Chromatographia*, Vol. 33, 1992
- [2] Sansalone, M., Lin, Y., Pratt, D., and Cheng, C., 1991, “Advancements and New Applications in Impact-Echo Testing,” Proceedings, ACI International Conference on Evaluation and Rehabilitation of Concrete Structures and Innovations in Design, Hong Kong, Ed. V.M. Malhotra, ACI SP-128, American Concrete Institute, pp. 135-150.
- [3] Steinbach, J. and Vey, E., 1975, “Caisson Evaluation by Stress Wave Propagation Method,” Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol. 101, GT4, April, pp. 361-378.
- [4] Sansalone, M., Lin, J. M., and Streett, W. B., 1997b, “A Procedure for Determining Concrete Pavement Thickness Using P-Wave Speed Measurements and the Impact-Echo Method” Innovations in Nondestructive Testing, SP-168, S. Pessiki and L. Olson, Eds., American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, 1997, pp.167-184.
- [5] Brdička M., Samek L., Sopko B., *Mechanika kontinua*, Academia Praha 2000, druhé vydání, ISBN 80-200-07772-5
- [6] Abraham, O., Léonard, C., Côte, P, and Piwakowski, B, 2000, “Time Frequency Analysis of Impact-Echo Signals: Numerical Modeling and Experimental Validation,” ACI Materials Journal, Vol. 97, No. 6, November-December, 2000, pp. 645-657.
- [7] Morse, The Velocity of Compressional Waves in Rods of Rectangular Cross Section, The journal of the acoustical society of America, Vol. 22, March 1950
- [8] ACI 228.1R, “In-Place Methods to Estimate Concrete Strength,” American Concrete Institute, Farmington Hills, MI.

- [9] Brepta, R., *Modifikace metody konečných prvků pro nestacionární problémy dynamiky*, Praha, 1982
- [10] ACI 228.2R, "Nondestructive Test Methods for Evaluation of Concrete in Structures," American Concrete Institute, Farmington Hills, MI.
- [11] A. V. Knyazev (2001), Toward the Optimal Preconditioned Eigensolver: Locally Optimal Block Preconditioned Conjugate Gradient Method. *SIAM Journal on Scientific Computing* 23, no. 2, pp. 517-541. <http://dx.doi.org/10.1137/S1064827500366124>
- [12] ASTM C 1074, 1998, "Practice for Estimating Concrete Strength by the Maturity Method," 2000 Annual Book of ASTM Standards Vol. 04.02, ASTM, West Conshohocken, PA.
- [13] ASTM C 1383, "Test Method for Measuring the P-Wave Speed and the Thickness of Concrete Plates using the Impact-Echo Method," 2000 Annual Book of ASTM Standards Vol. 04.02, ASTM, West Conshohocken, PA.
- [14] ASTM D 4580, "Practice for Measuring Delaminations in Concrete Bridge Decks by Sounding," 2000 Annual Book of ASTM Standards Vol. 04.03, ASTM, West Conshohocken, PA.
- [15] Martinek J., 2006, *Numerická simulace akustických kmitů v materiálu*, Disertační práce.
- [16] Bracewell, R., 1978, *The Fourier Transform and its Applications*, 2nd Ed., McGraw-Hill Book Co., 444 p.
- [17] Carino, N.J., Sansalone, M., and Hsu, N.N., 1986a, "A Point Source - Point Receiver Technique for Flaw Detection in Concrete," *Journal of the American Concrete Institute*, Vol. 83, No. 2, April, pp. 199-208.
- [18] Carino, N.J., Woodward, K.A., Leyendecker, E.V., and Fattal, S.G., 1983, "A Review of the Skyline Plaza Collapse," *Concrete International*, Vol. 5, No. 7, July, pp 35-42.
- [19] Cheng, C. and Sansalone, M., 1995a, "Determining the Minimum Crack Width that can be Detected Using the Impact-Echo Method, Part 1: Experimental Study," *Materials and Structures*, Vol. 28, No. 176, March 1995, pp. 74-82.
- [20] Carbol L., *Měření akustických vlastností stavebních materiálů pomocí pseudonáhodné sekvence*, 2016, disertační práce

- [21] Cheng, C. and Sansalone, M., 1995b, "Determining the Minimum Crack Width that can be Detected Using the Impact-Echo Method, Part 2: Numerical Fracture Analyses," *Materials and Structures*, Vol. 28, No. 177, April, pp. 125-132.
- [22] Cheng, C. and Sansalone, M., 1993a, "The Impact-Echo Response of Concrete Plates Containing Delaminations: Numerical, Experimental, and Field Studies," *Materials and Structures*, Vol. 26, No. 159, June, pp. 274-285.
- [23] Cheng, C., and Sansalone, M., 1993b, "Effects on Impact-Echo Signals Caused by Steel Reinforcing Bars and Voids Around Bars," *ACI Materials Journal*, Vol. 90, No. 5, Sept-Oct., pp. 421-434.
- [24] Goldsmith, W., 1965, *Impact: The Theory and Physical Behavior of Colliding Solids*, Edward Arnold Press, Ltd., pp. 24-50.
- [25] Jaeger, B.J., Sansalone, M.J., and Poston, R.W., 1997, "Using Impact-Echo to Assess Tendon Ducts," *Concrete International*, Vol. 19, No.2, February, pp. 42-46.
- [26] Jaeger, B.J., Sansalone, M.J., and Poston, R.W., 1996, "Detecting Voids in Grouted Tendon Ducts of Post-Tensioned Concrete Structures Using the Impact-Echo Method," *ACI Structural Journal*, Vol. 93, No. 4, July-August, pp. 462-472.
- [27] Krautkrämer, J. and Krautkrämer, H., 1990, *Ultrasonic Testing of Materials*, 4th Ed., Springer-Verlag, New York.
- [28] Lew, H.S., 1980, "West Virginia Cooling Tower Collapse Caused by Inadequate Concrete Strength," *Civil Engineering-ASCE*, V. 50, No. 2, February, pp. 62-67.
- [29] FRANCŮ, J.; NOVÁČKOVÁ, P.; JANÍČEK, P.: Torsion of a Non-circular Bar, *Engineering Mechanics*, Vol.19, (2012), No.1, pp.45-60, ISSN 1802-1484
- [30] Lin, J. M., and Sansalone, M., 1997, "A Procedure for Determining P-wave Speed in Concrete for Use in Impact-Echo Testing Using a Rayleigh Wave Speed Measurement Technique," *Innovations in Nondestructive Testing*, SP-168, S. Pessiki and L. Olson, Eds., American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, pp.137-165
- [31] Lin, J.M. and Sansalone, M.J., 1996, "Impact-Echo Studies of Interfacial Bond Quality in Concrete: Part I—Effects of Unbonded Fraction of Area," *ACI Materials Journal*, Vol. 93, No. 3, May-June, pp. 223- 232.

- [32] Lin, J.M. and Sansalone, M.J., and Poston, R., 1996, "Impact-Echo Studies of Interfacial Bond Quality in Concrete: Part II—Effects of Bond Tensile Strength," *ACI Materials Journal*, Vol. 93, No. 4, July-August, pp.318- 326.
- [33] Lin, Y. and Sansalone, M., 1992a, "Detecting Flaws in Concrete Beams and Columns Using the Impact-Echo Method," *ACI Materials Journal*, Vol. 89, No. 4, July-August 1992, pp. 394-405.
- [34] Lin, Y., and Sansalone, M., 1992b, "Transient Response of Thick Circular and Square Bars Subjected to Transverse Elastic Impact," *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 91. No.2, February 1992, pp. 885-893.
- [35] Lin, Y., and Sansalone, M., 1992c, "Transient Response of Thick Rectangular Bars Subjected to Transverse Elastic Impact," *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 91, No. 5, May 1992, pp. 2674-2685.
- [36] Lin, Y., Sansalone, M., and Carino, N.J., 1991a, "Finite Element Studies of the Impact-Echo Response of Plates Containing Thin Layers and Voids," *Journal of Non-destructive Evaluation*, Vol. 9, No. 1, pp. 27-47.
- [37] Lin, Y., Sansalone, M. and Carino, N.J., 1991b, "Impact-Echo Response of Concrete Shafts," *ASTM Geotechnical Testing Journal*, Vol. 14, No. 2, June, pp. 121-137.
- [38] Olson, L.D., 1992, "Nondestructive Evaluation (NDE) of Structural Concrete with Stress Waves," *Proceedings, ACI International Conference on Evaluation and Rehabilitation of Concrete Structures and Innovations in Design*, Hong Kong, Ed. V.M. Malhotra, ACI SP- 128, American Concrete Institute, pp. 805-817.
- [39] Olson, L., and Church, E., 1986, "Survey of Nondestructive Wave Propagation Testing Methods for the Construction Industry," *Proceedings of the 37th Annual Highway Geology Symposium*, Helena, Montana, August.
- [40] Pessiki, S.P. and Carino, N.J., 1998, "Setting Time and Strength of Concrete Using the Impact-echo Method," *ACI Materials Journal*, Vol. 85, No.5, Sept.-Oct., pp. 389-399.
- [41] Poston, R. and Sansalone, M., 1997, "Detecting Cracks in Beams and Columns of a Post-Tensioned Parking Garage Using the Impact-Echo Method," *Innovations in Non-destructive Testing*, SP-168, S. Pessiki and L. Olson, Eds., American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, pp.199-219.

- [42] Pratt, D. and Sansalone, M., 1992, "Impact-Echo Signal Interpretation Using Artificial Intelligence," *ACI Materials Journal*, Vol. 89, No. 2, March-April, pp. 178-187.
- [43] Proctor, T.M., Jr., 1982, "Some Details on the NBS Conical Transducer," *Journal of Acoustic Emission*, Vol. 1, No. 3, pp. 173-178.
- [44] Sansalone, M, 1997, "Impact-Echo: The Complete Story," *ACI Structural Journal*, Vo. 94, No. 6, November-December, pp. 777-786.
- [45] Sansalone, M. and Carino, N.J., 1991, "Stress Wave Propagation Methods," in *Handbook on Nondestructive Testing of Concrete*, Ed. V.M. Malhotra and N.J. Carino, CRC Press, Boca Raton, FL, pp. 275-304.
- [46] Sansalone, M. and Carino, N.J., 1989, "Detecting Delaminations in Concrete Slabs with and without Overlays Using the Impact-Echo Method," *Journal of the American Concrete Institute*, Vol. 86, No. 2, March, pp. 175-184.
- [47] Sansalone, M., and Carino, N. J., 1988a, "Impact-Echo Method: Detecting Honeycombing, the Depth of Surface-Opening Cracks, and UngROUTED Ducts," *Concrete International*, Vol. 10, No. 4, April, pp. 38-46.
- [48] Sansalone, M., and Carino, N.J., 1988b, "Laboratory and Field Study of the Impact-Echo Method for Flaw Detection in Concrete," in *Nondestructive Testing of Concrete*, Ed. H.S.
- [49] Lew, ACI SP-112, American Concrete Institute, pp. 1-20.
- [50] Sansalone, M., and Carino, N.J., 1987, "Transient Impact Response of Plates Containing Flaws," *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, Vol. 92, No. 6, Nov.-Dec., pp. 369-381.
- [51] Sansalone, M.; Carino, N. J.; and Hsu, N. N., 1987b "A Finite Element Study of the Interaction of Transient Stress Waves with Planar Flaws," *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, July-Aug., 1987, pp. 279-290.
- [52] Sansalone, M., Lin, J.M., and Streett, W.B., 1997a, "A Procedure for Determining P-Wave Speed in Concrete for Use in Impact-Echo Testing Using a P-Wave Speed Measurement Technique," *ACI Materials Journal*, Vol. 94, No. 6, November-December 1997, pp. 531-539.