



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STAVEBNÍ

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY A DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

INSTITUTE OF MATHEMATICS AND DESCRIPTIVE GEOMETRY

MATERIÁLOVÉ MODELY PRO KVAZISTATICKOU  
A DYNAMICKOU ANALÝZU BETONOVÝCH A DŘEVĚNÝCH  
KONSTRUKCÍ

MATERIAL MODELS FOR QUASISTATIC AND DYNAMIC ANALYSIS OF CONCRETE  
AND WOODEN STRUCTURES

HABILITAČNÍ PRÁCE

HABILITATION THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Mgr. Ing. Miroslav Trcala, Ph.D

BRNO 2023



## Abstrakt a klíčová slova

---

### Abstrakt

Některé materiály, jako například beton, dřevo, plasty, kovy, různé kompozity atd., vykazují nejen okamžitou odezvu (elastickou s případnou plasticitou a poškozením), ale také viskózní odezvu (paměťovou, zpožděnou) na vnější zatížení. Tato práce se zabývá algoritmizací, programováním (implementací do řešiče založeném na metodě konečných prvků) a numerickou analýzou materiálových modelů vhodných pro makroskopický (fenomenologický) popis viskózního chování betonu (jako zástupce izotropních materiálů) a dřeva (jako zástupce anizotropních materiálů). Viskózní chování se projevuje u pomalých (kvazistatických) dějů, kde nehrají roli setrvačné síly, a také u rychlých (dynamických) dějů.

Cílem této práce je seznámit čtenáře se stavebnicovým algoritmem, kterým autor sestavuje materiálový model betonu nebo dřeva, jež lze pak použít pro výpočet nelineární a časově závislé (viskózní) odezvy betonových a dřevěných konstrukcí na kvazistatické i dynamické zatížení. Tento modulární algoritmus autor naprogramoval a implementoval do výpočetního jádra založeného na metodě konečných prvků takovým způsobem, aby vyžadoval co nejméně vstupních parametrů, které jinak často musí být fitovány na data z experimentu. Cílem je ukázat, jak tento přístup k sestavení materiálového modelu z jednotlivých submodelů funguje na vybraných úlohách při kvazistatickém i dynamickém zatížení. Tyto časově závislé materiálové modely jsou založené na kombinaci viskozity s elasticitou, plasticitou a poškozením. Všechny modely v této práci předpokládají kontinuum (spojité prostředí). Pro numerickou analýzu je použita klasická deterministická metoda konečných prvků bez rozšíření prostoru řešení o nespojitě funkce. Práce je tedy zaměřena čistě jen na konstitutivních vztazích mechaniky kontinua se spojitými modely poškození.

### Klíčová slova

viskoelasticita, viskoplasticita, poškození, beton, dřevo, materiálové modely, metoda konečných prvků, časově závislá analýza, dynamika

### Abstract

Some materials, such as concrete, wood, plastics, metals, various composites, etc., show not only an immediate response (elastic with possible plasticity and damage), but also a viscous response (memory, delayed) to external loading. This work deals with algorithmization, programming (implementation into a solver based on the finite element method) and numerical analysis of material models suitable for macroscopic (phenomenological) description of the viscous behavior of concrete (as a representative of isotropic materials) and wood (as a representative of anisotropic materials). Viscous behavior is manifested in slow (quasi-static) events, where inertial forces do not play a role, and also in fast (dynamic) events.

The aim of this work is to familiarize the reader with a modular algorithm, with which the author builds a material model of concrete or wood, which can then be used to calculate the non-linear and time-dependent (viscous) response of concrete and wooden structures to quasi-static and dynamic loading. The author programmed and implemented this modular algorithm into a computational core based on the finite element method in such a way as to require as few input parameters as possible, which otherwise often have to be fitted to experimental data. The goal is to show how this approach to building a material model from individual submodels works on selected tasks under quasi-static and dynamic loading. These time-dependent

material models are based on a combination of viscosity with elasticity, plasticity and damage. All models in this work assume a continuum (materials modeled as a continuous medium). For the numerical analysis, the classic deterministic finite element method is used without extension the solution space by discontinuous functions. The work is therefore purely focused on the constitutive relations of continuum mechanics with continuous plasticity and damage models.

## **Key words**

viscoelasticity, viscoplasticity, damage, concrete, wood, material models, finite element method, time dependent analysis, dynamics



## Poděkování

---

Jako autor této habilitační práce chci poděkovat rodině, kolegům z univerzit (VUT, MENDELU v Brně), firmám FEM consulting, Dlubal Software a jmenovitě doc. Ivanu Němcovi z firmy FEM consulting a prof. Jiřímu Valovi z Ústavu matematiky a deskriptivní geometrie FAST VUT, kteří mě při tvorbě habilitační práce hodně podpořili.



# Obsah

---

<b>Abstrakt a klíčová slova</b>	<b>iii</b>
<b>Poděkování</b>	<b>v</b>
<b>1 Úvod</b>	<b>1</b>
1.1 Motivace . . . . .	1
1.2 Cíl práce . . . . .	2
1.3 Struktura práce . . . . .	3
1.4 Základní numerické metody . . . . .	4
<b>2 Kvazistatická analýza viskoelastického modelu</b>	<b>14</b>
2.1 Přehled problematiky . . . . .	14
2.2 Viskoelastické modely . . . . .	15
2.2.1 Kelvinův-Voigtův model . . . . .	17
2.2.2 Maxwellův model . . . . .	17
2.2.3 Zenerův model pevné látky . . . . .	18
2.2.4 Ostatní viskoelastické modely . . . . .	19
2.3 Zobecněný Kelvinův řetězec . . . . .	21
2.3.1 Identifikace parametrů Kelvinova řetězce . . . . .	24
2.3.2 Kelvinův řetězec při víceosé napjatosti . . . . .	25
2.4 Analýza viskoelastického modelu ortotropního materiálu dřeva na testovacích úlohách . . . . .	27
2.4.1 Numerická analýza testovacích úloh . . . . .	28
2.4.2 Výsledky a diskuze . . . . .	29
2.5 Analýza viskoelastického modelu izotropního materiálu betonu na experimentální úloze . . . . .	35
2.5.1 Numerická analýza experimentální úlohy . . . . .	36
2.5.2 Výsledky a diskuze . . . . .	38
<b>3 Kvazistatická analýza viskoelastického modelu s poškozením</b>	<b>41</b>
3.1 Přehled problematiky . . . . .	41
3.2 Dílčí modely poškození a viskoelastivity . . . . .	42
3.2.1 Modely poškození . . . . .	42
3.2.1.1 Model poškození pro beton . . . . .	44
3.2.1.2 Model poškození pro dřevo . . . . .	46
3.2.2 Elastoplastické modely s poškozením . . . . .	47
3.2.3 Viskoelastické modely . . . . .	48
3.3 Kombinace modelu viskoelastivity s modelem poškození . . . . .	50
3.4 Analýza viskoelastického modelu s modelem poškození ortotropního materiálu dřeva na testovacích úlohách . . . . .	53
3.4.1 Numerická analýza testovacích úloh . . . . .	53
3.4.2 Výsledky a diskuze . . . . .	55
3.5 Analýza viskoelastického modelu s modelem poškození izotropního materiálu betonu na experimentální úloze . . . . .	61
3.5.1 Numerická analýza experimentální úlohy . . . . .	62

---

3.5.2	Výsledky a diskuze . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Dynamická analýza modulárně koncipovaného materiálového modelu</b>	<b>67</b>
4.1	Přehled problematiky . . . . .	67
4.2	Pohybová rovnice v metodě konečných prvků . . . . .	67
4.2.1	Časová numerická integrace pohybové rovnice . . . . .	69
4.3	Tlumení viskoelastickými materiálovými modely v dynamice . . . . .	70
4.3.1	Rayleighovo tlumení . . . . .	71
4.3.2	Tlumení materiálovou viskozitou . . . . .	71
4.3.2.1	Tlumení Kelvinovým-Voigtovým modelem . . . . .	73
4.3.2.2	Srovnání Rayleighova tlumení s tlumením viskoelastickým Kelvinovým-Voigtovým modelem . . . . .	75
4.3.2.3	Tlumení Zenerovým modelem SLS . . . . .	75
4.4	Kombinace plasticity s poškozením . . . . .	78
4.4.1	Rozdíl mezi plasticitou a poškozením . . . . .	80
4.4.2	Rozdíl mezi materiálovými modely s plasticitou a poškozením v dynamice . . . . .	80
4.4.3	Plasticita s poškozením při cyklickém zatížení a odtížení . . . . .	83
4.4.3.1	Plasticita při cyklickém zatížení a odtížení . . . . .	85
4.4.3.2	Poškození při cyklickém zatížení a odtížení . . . . .	87
4.4.3.3	První kombinace plasticity s poškozením při cyklickém zatížení a odtížení . . . . .	89
4.4.3.4	Druhá kombinace plasticity s poškozením při cyklickém zatížení a odtížení . . . . .	91
4.5	Viskoplastické modely včetně poškození . . . . .	93
4.5.1	Viskoplastické materiálové modely v dynamice . . . . .	93
4.5.2	Viskoplastické modely s poškozením . . . . .	96
4.6	Nelineární a časově závislá odezva železobetonového nosníku na dopad ocelového razníku . . . . .	100
4.6.1	Experiment a MKP model . . . . .	100
4.6.2	Výsledky a diskuze . . . . .	104
<b>5</b>	<b>Závěr</b>	<b>112</b>
	<b>Seznam obrázků</b>	<b>117</b>
	<b>Seznam tabulek</b>	<b>118</b>
	<b>Literatura</b>	<b>123</b>

## 1.1 Motivace

Některé materiály, jako například beton, dřevo, plasty, kovy, kompozity, vykazují nejen okamžitou (elastickou odezvu s případnou plasticitou a poškozením), ale také viskózní (časovou, paměťovou, zpožděnou) odezvu na vnější zatížení. Tato práce se zabývá algoritmizací, programováním (implementací do MKP řešiče) a numerickou analýzou materiálových modelů vhodných pro makroskopický (fenomenologický) popis viskózního chování betonu (jako zástupce izotropních materiálů) a dřeva (jako zástupce anizotropních materiálů) v programových systémech vyvíjených pro analýzu stavebních konstrukcí. Viskózní chování se projevuje u pomalých (statických či spíše kvazistatických) dějů, kde nehrají roli setrvačné síly, a také u rychlých (dynamických) dějů, kde setrvačné síly hrají roli.

Tato viskozita se projevuje při statickém zatížení např. dotvarováním (creep) nebo relaxací napětí nebo kombinací obou těchto jevů u více-osé napjatosti v úlohách se specificky zvolenými okrajovými podmínkami, kde v jednom směru materiál dotvarovává a ve druhém směru relaxuje. U časově závislých úloh se viskozita projevuje např. disipací energie při cyklickém zatěžování a odtěžování a v dynamice se projevuje tlumením kmitání v důsledku zmíněné disipace energie nebo zvýšením tuhosti a pevnosti materiálu při vysokých rychlostech přetvoření (strain rate effect).

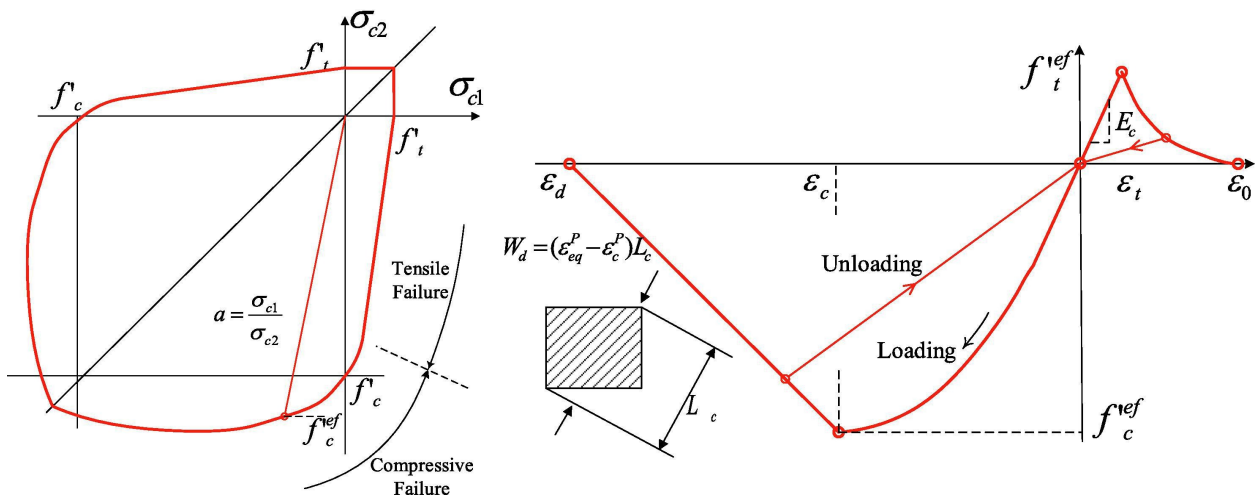
V této práci jsou popsány materiálové modely umožňující popis tohoto viskózního chování u pomalých (kvazistatických) a u rychlých (dynamických) dějů pomocí jednoho "stavebnicového" algoritmu. Tyto časově závislé materiálové modely jsou založené na kombinaci viskozity s elasticitou a případně i plasticitou a poškozením. Všechny modely v této práci předpokládají kontinuum (spojité prostředí). Pro numerickou analýzu je použita klasická metoda konečných prvků bez rozšíření prostoru řešení o nespojitě funkce (tedy metody jako XFEM, GFEM, PUM atd. nejsou probírány). Kohezní modely (pomocí speciálních elementů, například v metodě konečných prvků na rozhraní mezi klasickými elementy mechaniky kontinua) také nejsou probírány, stejně tak diskrétní modely nejsou záměrně probírány, protože nebyly cílem této práce. Práce je tedy zaměřena čistě jen na konstitutivních vztazích mechaniky kontinua se spojitými modely poškození (damage mechanics, smeared crack theory).

Problematika vlhkostních a teplotních změn materiálu (smršťování, bobtnání) jako tzv. počáteční přetvoření (initial strain) závisející jen na čase a ne na napětovém stavu materiálu není v této práci řešena. Vliv cyklických změn (např. vlhkosti) na dotvarování (mechanosorpční efekt - dotvarování je výrazně umocněno tím, že v průběhu zatížení dojde k cyklickému vysoušení a vlhčení materiálu) také není brán v úvahu. Únava materiálu také není v této práci analyzována, protože nevyšetřujeme úlohy s vysokým počtem zatěžovacích cyklů, takže kumulaci poškození materiálu, které vzniká opakovaným zatěžováním a z toho plynoucími plastickými deformacemi v místech koncentrace napětí, můžeme zanedbat. Kdyby byl počet zatěžovacích cyklů velký, tak by nemohla být únava materiálu zanedbána, protože může vést až k únavovému lomu, což závažně ovlivňuje životnost konstrukcí.

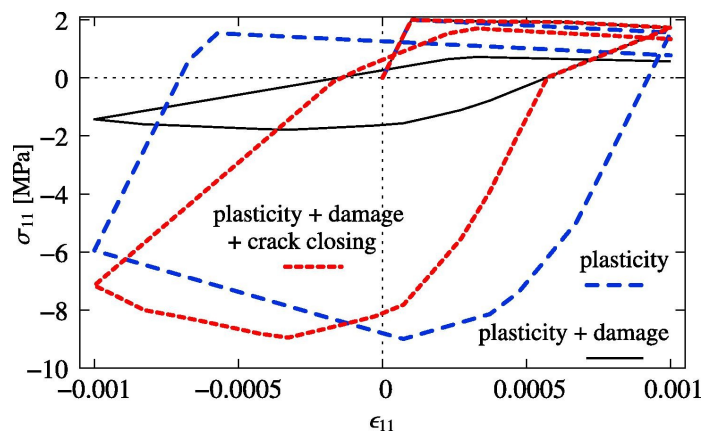
Náplní této práce je algoritmizace časově závislých materiálových modelů založených na viskoelasticitě s případnou kombinací s viskoplasticitou nebo poškozením, jejich implementace do programového balíku založeném na metodě konečných prvků a numerická analýza těchto modelů na vybraných úlohách. Viskoelastická oblast je v této práci modelována pro statiku nejčastěji pomocí Kelvinova řetězce (sady pružinek a tlumičů, kde je sériově propojený určitý počet Kelvinových článků) nebo pro dynamiku nejčastěji pomocí zkráceného Maxwellova řetězce (sady pružinek a tlumičů, kde je paralelně propojený určitý počet Ma-

xwellových článků - v dynamice je zvolen jen jeden článek paralelně zapojený s pružinou - zvaný Standard Linear Solid model). Plasticita a poškození jsou v této práci modelovány pomocí standardních spojitých konstitutivních vztahů mechaniky kontinua.

Ve staticce hraje roli hlavně materiálová křivka při zatížení, protože stav odtížení nebo opětovného přitížení nás ve staticce zajímá zřídka - spíše k němu dochází jen lokálně a v menší míře v místech, kde se uvolnilo napětí v důsledku vzniku poškození (trhlinek). Výrazný vliv má odtěžovací křivka hlavně v dynamice, kde v daném materiálovém bodě často dochází k opakovanému střídání stavu zatížení a odtížení, také přechod z tahu do tlaku apod. V tomto případě cyklického namáhání už není možné použít samostatný model plasticity nebo samostatný model poškození, ale musí být tyto dva modely řádně kombinovány - rozdíl v jednotlivých modelech ilustrují následující obrázky 1.1, 1.2.



Obrázek 1.1: Křivky zatížení a odtížení podle samostatného modelu poškození u jednoosé napjatosti dle literatury [2]



Obrázek 1.2: Cyklické zatěžování a odtěžování s různým nastavením materiálového modelu dle literatury [95]

## 1.2 Cíl práce

Cílem této práce je seznámit čtenáře s modulárním (stavebnicovým) algoritmem, kterým autor sestavuje materiálový model betonu nebo dřeva, který lze pak použít pro výpočet nelineární a časově závislé (viskózní) odezvy betonových a dřevěných konstrukcí na kvazistatické i dynamické zatížení. Tento modulárně koncipovaný materiálový model autor naprogramoval a implementoval do výpočetního jádra založeného na metodě konečných prvků takovým způsobem, aby vyžadoval co nejméně vstupních parametrů, které jinak často musí být stanoveny z dat experimentu. Cílem je ukázat, jak tento přístup k sestavení materiálového modelu z jednotlivých dílčích modelů funguje na vybraných úlohách při kvazistatickém i dynamickém zatížení. Cílem této práce není detailní analýza a validace jednotlivých dílčích materiálových modelů (submodelů), jako je

např. model viskoelastivity, model plasticity, model poškození, ale cílem je algoritmizace, implementace a numerická analýza kombinace těchto submodelů do jednoho modelu použitelného na úrovni materiálového (integračního) bodu prvku konstrukce. Novost je tedy v unikátním sériovém propojení těchto dílčích materiálových modelů do jednoho funkčního materiálového modelu, který zahrnuje viskoelasticitu, plasticitu, poškození, v dynamice samozřejmě také viskoplasticitu včetně poškození. Tímto postupem je možné použít libovolný model viskoelastivity, libovolný model plasticity, libovolný model poškození a dokonce lze i libovolně kombinovat plasticitu s poškozením s různými poměry plasticity a poškození a to jinak v tahu a jinak v tlaku, což se uplatní hlavně v dynamice kvůli různým odtěžovacím křivkám, jak je podrobněji popsáno v kapitole 4.4.3. V dynamice lze ještě libovolně přidat viskoplasticitu včetně poškození prostřednictvím a) Duvautovy-Lionsovy formulace nebo b) přímé modifikace pracovního diagramu materiálu součinitelem DIF (zkratka z anglického "Dynamic Increase Factor") závislým na rychlosti přetvoření.

Ze všech výpočtů a analýz jsou nejdůležitější tyto dvě numerické studie.

- 1) Studie, ve které staticky působící zatížení vyvolá okamžitou deformačně-napět'ovou odezvu (elastickou nebo plastickou včetně poškození), ale pak se tato odezva v čase mění v důsledku viskózního charakteru materiálu (např. v důsledku dotvarování). Toto dotvarování (creep) může způsobit vznik poškození až po uplynutí určité doby, pokud nevzniklo hned po zatížení, nebo může toto poškození dále zvýšit a způsobit dokonce i selhání (ztrátu stability) stavební konstrukce po uplynutí určité doby (okamžitě hned po aplikaci zatížení daná konstrukce neselže, ale k významnému poškození a následně i selhání může dojít až po určitém čase v důsledku viskózního chování materiálu - např. v důsledku dotvarování).
- 2) Studie, ve které se sleduje závislost reálné dynamické odezvy železobetonové konstrukce na různých (modulárním - stavebnicovým způsobem) sestavených materiálových modelech s různým nastavením jejich vstupních parametrů. Před touto studií jsou pro účely výpočtů v dynamice provedeny další důležité studie, jako je tlumení kmitání konstrukce viskoelastickými materiálovými modely nebo kombinace plasticity s poškozením, která je velmi důležitá při cyklickém zatěžování, kdy jsou důležité odtěžovací křivky v pracovním diagramu materiálu (rozhodují o množství disipované energie a mají velký vliv na výsledné časové průběhy deformací a napětí).

### 1.3 Struktura práce

Práce bude věcně obsahovat následující kapitoly.

- 1) Analýza modulárního modelu ve statice (kvazistatice)
  - 1a) Viskoelastické modely
  - 1b) Viskoelastické modely s poškozením
- 2) Analýza modulárního modelu v dynamice
  - 2a) Pohybová rovnice v MKP a metody časové integrace
  - 2b) Tlumení kmitání konstrukce viskoelasticitou
  - 2c) Kombinace plasticity s poškozením
  - 2d) Viskoplasticita včetně poškození
  - 2e) Numerická analýza a experimentální validace materiálového modelu na dynamické úloze pádu razníku na železobetonový nosník

## 1.4 Základní numerické metody

### Newtonova-Raphsonova metoda v mechanice

Tato metoda se používá na globální úrovni celé konstrukce, pokud hledáme řešení, při kterém jsou nevyvážené síly blízké nule (nevyvážené síly jsou rozdílem mezi vektorem vnitřních a vnějších uzlových sil), ale také na úrovni jednoho materiálového (integračního) bodu konstrukce, kdy se dělá návrat na plochu plasticity (plastická korekce). Princip je ukázán na skalární veličině  $r(d)$  udávající rozdíl mezi jednou vnitřní a jednou vnější silou. Proved' me rozvoj  $r(d)$  kolem známého řešení  $d^{(i-1)}$  z předchozí  $(i-1)$ -té iterace do Taylorovy řady.

$$r(d) = r(d^{(i-1)}) + \left. \left( \frac{\partial r}{\partial d} \right) \right|_{d^{(i-1)}} \delta d^{(i)} + \frac{1}{2} \left. \left( \frac{\partial^2 r}{\partial d^2} \right) \right|_{d^{(i-1)}} (\delta d^{(i)})^2 + \dots = 0 \quad (1.1)$$

kde  $\delta d^{(i)}$  je přírůstek

$$\delta d^{(i)} = d^{(i)} - d^{(i-1)} \quad (1.2)$$

Zanedbáme-li členy druhého a vyšších řádů, můžeme rovnici (5.2.1) přepsat následovně:

$$r(d^{(i-1)}) + \left. \left( \frac{\partial r}{\partial d} \right) \right|_{d^{(i-1)}} \delta d^{(i)} = 0 \quad (1.3)$$

Pro přírůstek parametru deformace můžeme potom zapsat následující vztah

$$\delta d^{(i)} = - \left( K_T(d^{(i-1)}) \right)^{-1} r(d^{(i-1)}) = \left( K_T(d^{(i-1)}) \right)^{-1} \left( f - K(d^{(i-1)}) d^{(i-1)} \right) \quad (1.4)$$

kde

$$K_T = \left. \left( \frac{\partial r}{\partial d} \right) \right|_{d^{(i-1)}} \quad (1.5)$$

je sklon (tangent) čáry  $r(d)$  v  $d^{(i-1)}$ . V mechanice při řešení úloh deformační variantou metody konečných prvků (MKP) nazýváme  $K_T$  tečnou tuhostí. Reziduum neboli nevyvážená síla  $r(d)$  postupně klesá k nule, pokud procedura konverguje. V každé iteraci je vypočítán přírůstek neznámé veličiny  $d$ . Dosažené řešení v  $i$ -té iteraci je získáno postupnou sumací přírůstku  $\delta d^{(i)}$

$$d^{(i)} = d^{(i-1)} + \delta d^{(i)} \quad (1.6)$$

Pro soustavu nelineárních rovnic můžeme zapsat Newtonovu-Raphsonovu metodu takto:

$$\delta \mathbf{d} = -\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{r} \quad (1.7)$$

kde  $K_T$  je tečná matice

$$\mathbf{K}_T^{(i)} = \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{d}} \right|_{\mathbf{d}^{(i-1)}} \quad (1.8)$$

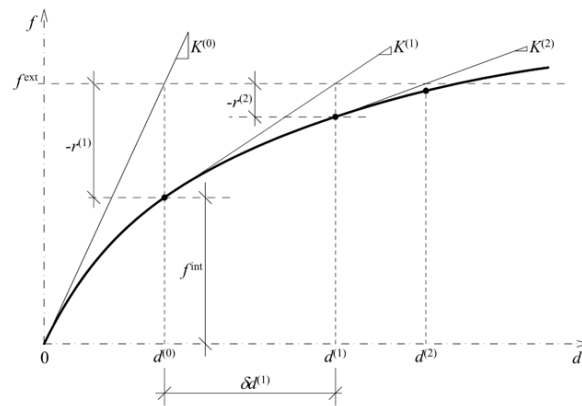
je vektor nevyvážených sil

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}^{\text{int}} - \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (1.9)$$

$\mathbf{f}^{\text{ext}}$  je zatěžovací vektor a  $\mathbf{f}^{\text{int}}$  je vektor uzlových vnitřních sil (vypočítaný jako energetický ekvivalent vnitřních sil).

Princip Newtonovy-Raphsonovy metody je graficky znázorněn na obrázku 1.3. Newtonova-Raphsonova metoda vyžaduje sestavení matice levých stran soustavy rovnic v každém iteračním kroku. Takže v každém iteračním kroku se musí znovu provést dekompozice (faktorizace) matic. Někdy je výhodnější ponechat levé strany soustavy rovnic beze změny a měnit pouze pravou stranu. Této metodě říkáme modifikovaná Newtonova-Raphsonova metoda. Obecně vyžaduje podstatně více iterací, než normální Newto-

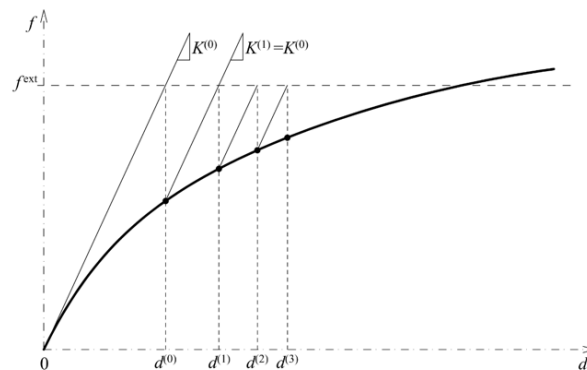




Obrázek 1.3: Princip Newtonovy–Raphsonovy metody [63]

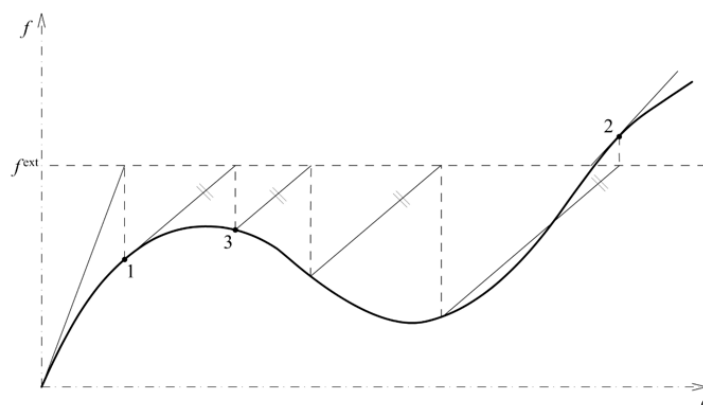
nova–Raphsonova metoda, ale vzhledem k tomu, že dekompozice matice soustavy rovnic je provedena pouze jednou, jsou iterace mnohem rychlejší.

Princip modifikované Newtonovy–Raphsonovy metody je graficky znázorněn na obrázku 1.4. Někdy je



Obrázek 1.4: Princip modifikované Newtonovy–Raphsonovy metody [63]

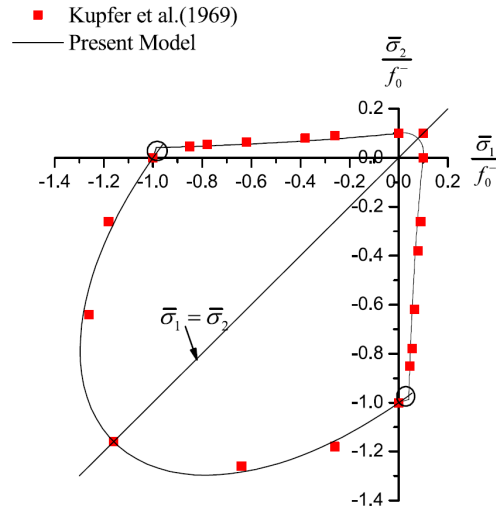
výhodné obě metody kombinovat. Cílem je jednak úspora času potřebného pro řešení úlohy, ale kombinace metod může také umožnit řešení i takových úloh, pro které by řešení nemodifikovanou metodou selhalo. Na obr. 1.5 je znázorněn takový případ. V bodě 1 je řešení přepnuto na modifikovanou metodu, v bodě 2 je řešení přepnuto zpět na nemodifikovanou metodu.



Obrázek 1.5: Kombinace Newtonovy–Raphsonovy metody a její modifikované varianty [63]

## Algoritmus plastické korekce

Pro stručnost a jednoduchost je uveden pouze obecný postup pro jednu plochu plasticity a potom jako názorný příklad je vybrán elastoplastický materiálový model podle kritéria Drucker-Prager. V této práci se také hodně používá elastoplastický model podle kritéria Rankine-Hill, ale ten obsahuje dvě podmínky (plochy) plasticity a algoritmus jeho implementace je složitější, a proto je vhodné zájemce odkázat na literaturu [52, 53], podle které autor této práce daný "multisurface" model implementoval. Kritérium s vyhlazeným (zaobleným) vrcholem v Rankinově kritériu (pomocí hyperbolické funkce) [85] vypadá pro izotropní materiál betonu, jak je ilustrováno na obrázku .



**Obrázek 1.6:** Ilustrace Rankinova-Hillova kritéria ve 2D prostoru hlavních napětí (rovinná napjatost) pro izotropní materiál betonu [63]

## Obecný postup pro víceosou napjatost

1. Předpokládá se aditivní rozložení celkového vektoru přetvoření na elastickou a plastickou část:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p, \quad (1.10)$$

nebo v diferenciální (rychlostní, přírůstkové) formě:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p. \quad (1.11)$$

2. Mezi elastickým přetvořením a napětím platí Hookův zákon

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p), \quad (1.12)$$

nebo v diferenciální (přírůstkové) formě:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \mathbf{C} : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p). \quad (1.13)$$

3. Kontrola podmínky plasticity

$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) \leq 0$ , kde  $\boldsymbol{\alpha}$  je vektor vnitřních stavových proměnných spojených se zpevněním, často jen  $\boldsymbol{\alpha} \equiv (\boldsymbol{\varepsilon}^p)$ .

4. Výpočet plastického toku

Mějme funkci zvanou plastický potenciál:  $\psi = \psi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})$ , kde  $\mathbf{A}$  je vektor termodynamických sil spojených se zpevněním

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \mathbf{N}, \quad (1.14)$$

kde  $\mathbf{N} \equiv \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$  je tenzor udávající směr plastického toku.

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\gamma} \mathbf{H}, \quad (1.15)$$

kde  $\mathbf{H} \equiv -\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{A}}$  je derivace plastického potenciálu podle vektoru termodynamických sil.

Asociativní zákon plastického toku:  $\psi = \Phi$ . Tedy pokud za plastický potenciál zvolíme podmínku plasticity.

5. Využití podmínky konzistence pro výpočet plastického multiplikátoru  $\dot{\gamma}$

$$\dot{\Phi} = 0. \quad (1.16)$$

Slouží k výpočtu takové hodnoty plastického multiplikátoru, aby byla splněna podmínka plasticity i po výpočtu nového plastického přetvoření, tenzoru napětí a zpevnění.

Těchto 5 bodů slouží k výpočtu plastického přetvoření, a hlavně správného tenzoru napětí, který je nezbytný pro výpočet vektoru vnitřních sil u metody konečných prvků (MKP, anglicky FEM) při analýze celé stavební (strojní) konstrukce.

Pro analýzu metodou konečných prvků je také důležité znát tečný konstitutivní tenzor mezi přírůstkem přetvoření a napětí:  $\mathbf{C}^{ep} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ .

**Poznámka:** Podmínka plasticity a plastický potenciál mohou být složeny z více různých ploch popsaných různými matematickými rovnicemi (tzv. multisurface plasticity)

$$\Phi_i(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) = 0, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_i \mathbf{N}_i, \mathbf{N}_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \text{ atd.}$$

Nejčastější definice akumulovaného plastického přetvoření je

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \equiv \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} dt, \quad (1.17)$$

tedy pro jeho derivaci platí

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}. \quad (1.18)$$

### Implicitní algoritmus elastoplastického výpočtu

Jsou známy hodnoty veličin z konce předchozího kroku  $n$  a cílem je vypočítat tyto hodnoty v následujícím kroku  $n+1$ . Na vstupu je tedy:  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_n^e$  a  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p$ .

$$\begin{aligned} \Phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p) &= 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \gamma \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p) \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta \gamma \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Toto je soustava tří rovnic o třech neznámých - jednoho tenzoru (vektoru)  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$  a dvou skalárech  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$  a  $\Delta \gamma$ . Pro 3D napjatost jde o soustavu  $6+1+1=8$  rovnic o 6-ti neznámých složkách elastického přetvoření  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$  a dvou neznámých skalárních hodnotách  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$  a  $\Delta \gamma$ .

**Poznámka:**  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$

Protože platí  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e,trial} \equiv \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p$ , tak lze na vstupu místo  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  a  $\boldsymbol{\varepsilon}_n^e$  použít celkové přetvoření  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$  a plastické přetvoření z předchozího kroku  $\boldsymbol{\varepsilon}_n^p$ .

$$\begin{aligned} \Phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p) &= 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e - \Delta \gamma \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p) &= 0 \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta \gamma \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p) &= 0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

Implicitní algoritmus je často rozdělován do třech základních kroků:

1. elastická predikce:  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e,trial} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p)$ ,
2. kontrola podmínky plasticity:  $\Phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p) \leq 0$ ,
3. plastická korekce:  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - \Delta \gamma \mathbf{C} : \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p)$ , pokud  $\Phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p) > 0$ ,

zde je třeba pomocí podmínky konzistence vypočítat plastický multiplikátor, případně současně i napětí pomocí výše uvedené soustavy rovnic, pokud by nešla vytvořit jen jedna rovnice o jedné neznámé (plastický multiplikátor), jak bude vysvětleno v dalším textu.

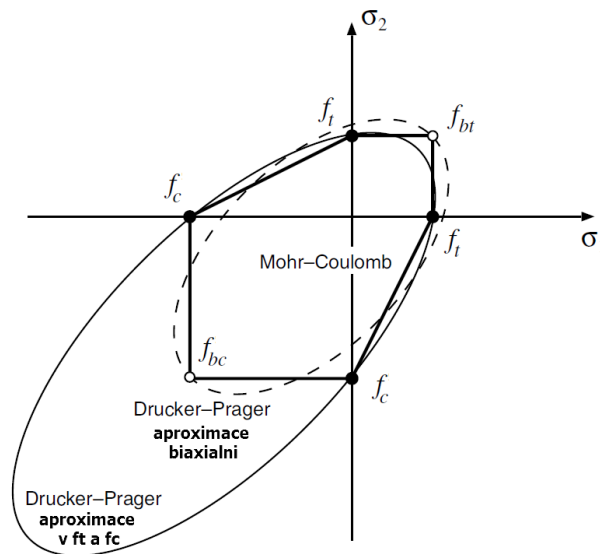
Dále jsou pro ilustraci uvedeny některé základní podmínky plasticity a u některých kritérií je uveden i podrobnější postup výpočtu. První jsou popsány elastoplastické modely pro izotropní materiály a pak jsou popsány elastoplastické modely pro anizotropní materiály.

## Plasticita podle kritéria Drucker-Prager

Toto kritérium bylo navrženo Druckerem a Pragerem kvůli aproximaci Mohrova-Coulombova kritéria hladkou funkcí. Tato aproximace byla udělána rozšířením von Misesova kritéria o výraz, který zohledňuje rozdílné chování materiálu v tahu a tlaku. Má následující tvar

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p) = \sqrt{J_2(\mathbf{s})} + c_1 \frac{1}{3} I_1(\boldsymbol{\sigma}) - c_2 \text{coh}(\bar{\varepsilon}^p), \quad (1.21)$$

kde  $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} I_1(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}$  je deviátorová část tenzoru napětí,  $J_2(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}$  je druhý invariant deviátoru napětí,  $I_1(\boldsymbol{\sigma})$  je první invariant tenzoru napětí a  $\bar{\varepsilon}^p$  je skalární veličina udávající kumulovanou hodnotu přírůstků normy tenzoru plastického přetvoření. Příslušné konstanty vyskytující se v kritériu lze dopočítat z úhlu vnitřního tření a z koheze materiálu, což je často využíváno při modelování různých zemin, hornin apod. Při modelování betonu nebo jiných materiálů, kde není často zjišťován úhel vnitřního tření a koheze, se vychází spíše z pracovních diagramů a naměřených mezí kluzu, pevnosti atd. Neznámé konstanty včetně koheze lze pak vypočítat z pracovního diagramu daného materiálu zapsáním kritéria pro jednoosou napjatost a stanovením dvou podmínek pro příslušné meze kluzu v tahu a tlaku.



**Obrázek 1.7:** Srovnání dvou aproximací Mohrova-Coulombova kritéria pomocí kritéria Drucker-Prager v 2D prostoru hlavních napětí (rovinná napjatost) [28]

Konstanta  $c_2$  je někdy definována  $c_2 = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{9} c_{1,flow}^2}$  a pak ze známých mezí kluzu zbývá dopočítat konstantu  $c_1$  a kohezi  $\text{coh}$  jako parametr zpevnění. Druckerovo-Pragerovo kritérium pro 1D napjatost má následující tvar pro tahovou a tlakovou část pracovního diagramu

$$\begin{aligned} f_t \left( \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{c_1}{3} \right) &= c_2 \text{coh} \\ f_c \left( \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{c_1}{3} \right) &= c_2 \text{coh} \end{aligned} \quad (1.22)$$

kde  $f_t$  a  $f_c$  jsou meze kluzu materiálu v tahu a tlaku (obojí zapsány jako kladné hodnoty).

Z těchto dvou podmínek lze vypočítat příslušné koeficienty Druckerova-Pragerova kritéria  $c_1 = \frac{3}{\sqrt{3}} \frac{f_c - f_t}{f_c + f_t}$  a  $c_2 \text{coh} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{f_c f_t}{f_c + f_t}$ , kde  $c_2 = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{9} c_{1,flow}^2}$ , a proto  $\text{coh} = \frac{1}{c_2} \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{f_c f_t}{f_c + f_t}$ . Za předpokladu  $m = \frac{f_c(\bar{\varepsilon}^p)}{f_t(\bar{\varepsilon}^p)} = \text{konst.}$  během zpevnění lze zapsat výraz pro zpevnění koheze pomocí zpevnění materiálu v tahu následovně

$$\text{coh}(\bar{\varepsilon}^p) = \frac{1}{c_2} \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{f_c(\bar{\varepsilon}^p) f_t(\bar{\varepsilon}^p)}{f_c(\bar{\varepsilon}^p) + f_t(\bar{\varepsilon}^p)} = \frac{1}{c_2} \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{m f_t^2(\bar{\varepsilon}^p)}{f_t(\bar{\varepsilon}^p) (m + 1)} = \frac{1}{c_2} \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{m}{(m + 1)} f_t(\bar{\varepsilon}^p) \quad (1.23)$$

Plastický potenciál nutný pro výpočet plastického toku má následující tvar

$$\psi = \sqrt{J_2(\mathbf{s})} + c_{1,flow} \frac{1}{3} I_1(\boldsymbol{\sigma}), \quad (1.24)$$

kde se často předpokládá asociativní zákon plastického toku ( $c_{1,flow} = c_1$ ).

Derivací plastického potenciálu podle tenzoru napětí získáme tenzor, který udává směr plastického toku

$$\mathbf{N} \equiv \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{1}{\|\mathbf{s}\|} \mathbf{s} + \frac{1}{3} c_{1,flow} \mathbf{I}. \quad (1.25)$$

Přírůstek tenzoru plastického přetvoření je dán nejen směrem plastického toku  $\mathbf{N}$ , ale i hodnotou přírůstku skalární veličiny  $\gamma$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \mathbf{N} = \dot{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma} \left( \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{1}{\|\mathbf{s}\|} \mathbf{s} + \frac{1}{3} c_{1,flow} \mathbf{I} \right). \quad (1.26)$$

Norma přírůstku tenzoru plastického přetvoření je definována následovně

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p. \quad (1.27)$$

Dosazením za  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  a provedením příslušného součinu (zúžení) dostaneme

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{9} c_{1,flow}^2}, \quad (1.28)$$

a to za předpokladu  $\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p = \dot{\gamma} c_2$  dává výraz pro výpočet konstanty  $c_2$

$$c_2 = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{9} c_{1,flow}^2}. \quad (1.29)$$

### Implicitní metoda řešení plasticity podle kritéria Drucker-Prager

U implicitního výpočtu jsou všechny veličiny počítané vzhledem k výslednému stavu (např. derivace plastického potenciálu podle tenzoru napětí se vyčíslí pro výsledné napětí apod.). Musí se pak řešit systém rovnic s neznámými veličinami, které není možné vyjádřit explicitně. Plasticita se řeší pomocí přírůstků, kterými se přibližně počítá plastické přetvoření, jehož přesné řešení je dáno integrálem

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \int_0^{t_{end}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt. \quad (1.30)$$

Čas  $t$  může být reálný (u dynamických úloh nebo obecně jakýchkoliv úloh závislých na reálném čase) nebo může jít jen o tzv. pseudočas u statických úloh.

Přesnost výpočtu u nelineárních úloh tedy obecně závisí na počtu přírůstků resp. na velikosti přírůstku zatížení nebo přetvoření.

V následujícím textu se předpokládá, že je známo řešení na konci  $n$ -tého přírůstku a cílem je vypočítat řešení na konci  $(n+1)$ -tého přírůstku. Jsou tedy známy hodnoty veličin z konce předchozího kroku  $n$  a cílem je vypočítat tyto hodnoty v následujícím kroku  $n+1$ . Na vstupu je  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_n^e$  a  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p$ .

Lze odvodit soustavu tří rovnic o třech neznámých - jednoho symetrického tenzoru  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$  a dvou skalárech  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$  a  $\Delta \gamma$ . Pro 3D napjatost jde o soustavu  $6 + 1 + 1 = 8$  rovnic o 6-ti neznámých složkách elastického přetvoření  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$  a dvou neznámých skalárních hodnotách  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$  a  $\Delta \gamma$ :

$$\begin{aligned} \Phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p) &= 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \gamma \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p) \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta \gamma \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p) \end{aligned} \quad (1.31)$$

*Poznámka:*  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$ , takže je jedno, jestli za neznámou považujeme elastické přetvoření nebo napětí.

Protože platí  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e,trial} \equiv \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p$ , tak lze na vstupu místo  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  a  $\boldsymbol{\varepsilon}_n^e$  použít celkové přetvoření  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$  a plastické přetvoření z předchozího kroku  $\boldsymbol{\varepsilon}_n^p$

$$\begin{aligned} \Phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p) &= 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e - \Delta \gamma \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p) &= 0 \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta \gamma \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p) &= 0 \end{aligned} \quad (1.32)$$

Výsledná soustava pro řešení plasticity podle kritéria Drucker-Prager je následující

$$\begin{aligned} \sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1})} + c_1 \frac{1}{3} I_1(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) - c_2 \text{coh}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p) &= 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta \gamma \left( \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{1}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|} \mathbf{s}_{n+1} + \frac{1}{3} c_{1,flow} \mathbf{I} \right) \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta \gamma \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{9} c_{1,flow}^2} \end{aligned} \quad (1.33)$$

kde jsou tři neznámé veličiny  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ ,  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$  a  $\Delta\gamma$ . Místo  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  lze považovat za neznámou  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$ , protože jednu na druhou lze dopočítat jednoduše pomocí Hookova zákona.

Okamžitě jde vidět, že výše uvedená soustava tří rovnic o třech neznámých veličinách jde redukovat na dvě rovnice o dvou neznámých veličinách  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  a  $\Delta\gamma$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1})} + c_1 \frac{1}{3} I_1(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) - c_2 \text{coh}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p) &= 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \left( \sqrt{\frac{1}{2} \frac{1}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|}} \mathbf{s}_{n+1} + \frac{1}{3} c_{1,flow} \mathbf{I} \right) \end{aligned} \quad (1.34)$$

Je to z toho důvodu, že neznámá veličina  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$  explicitně závisí na  $\Delta\gamma$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{9} c_{1,flow}^2} \quad (1.35)$$

Implicitní integrační algoritmus elastoplastického výpočtu podle kritéria Drucker-Prager

1. elastická predikce:  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e,trial} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p)$
2. kontrola podmínky plasticity:  $\Phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p) = \sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1}^{trial})} + c_1 p_{n+1}^{trial} - c_2 \text{coh}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p) \leq 0$
3. plastická korekce:  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - \Delta\gamma \mathbf{C} : \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p)$ , pokud  $\Phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p) > 0$

Počáteční (zkušební, testovací, trial) volba neznámých pro řešení soustavy je tedy následující:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e,trial} &\equiv \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{p,trial} &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p \\ \Delta\gamma^{trial} &= 0 \end{aligned} \quad (1.36)$$

A podobně jako u von Misesova kritéria lze tuto soustavu zredukovat pouze na jednu rovnici o jedné neznámé  $\Delta\gamma$ . Při redukci na jednu rovnici o jedné neznámé se postupuje následovně:

Výsledné napětí  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) - \mathbf{C} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$  se pomocí elastického (trial) odhadu napětí  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e,trial} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p)$  vyjádří následovně

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - \mathbf{C} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - \Delta\gamma \mathbf{C} : \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p) \quad (1.37)$$

Potom se vyjádří výraz  $\mathbf{C} : \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p)$  pomocí elastických odhadů a příslušných korekcí pomocí jediné neznámé  $\Delta\gamma$

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p) \equiv \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{1}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|}} \mathbf{s}_{n+1} + \frac{1}{3} c_{1,flow} \mathbf{I}, \quad (1.38)$$

$$\mathbf{C} : \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p) = 2G \sqrt{\frac{1}{2} \frac{1}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|}} \mathbf{s}_{n+1} + K \frac{1}{3} c_{1,flow} \mathbf{I} = G \frac{1}{\sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1})}} \mathbf{s}_{n+1} + K \frac{1}{3} c_{1,flow} \mathbf{I}.$$

Za předpokladu rovnosti  $\frac{1}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|} \mathbf{s}_{n+1} = \frac{1}{\|\mathbf{s}_{n+1}^{trial}\|} \mathbf{s}_{n+1}^{trial}$  platí následující vztah

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - \Delta\gamma \left( G \frac{1}{\sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1}^{trial})}} \mathbf{s}_{n+1}^{trial} + K \frac{1}{3} c_{1,flow} \mathbf{I} \right) \quad (1.39)$$

Tímto jsme dostali výraz pro výpočet výsledného tenzoru napětí pomocí jediné neznámé  $\Delta\gamma$  a elastických odhadů příslušných veličin.

Pak platí

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{trial} - \Delta\gamma G \frac{1}{\sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1}^{trial})}} \mathbf{s}_{n+1}^{trial} = \left( 1 - \Delta\gamma G \frac{1}{\sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1}^{trial})}} \right) \mathbf{s}_{n+1}^{trial}, \quad (1.40)$$

$$p_{n+1} = p_{n+1}^{trial} - \Delta\gamma K c_{1,flow}, \quad (1.41)$$

a kritérium plasticity lze přepsat do následujícího tvaru

$$\sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1}^{trial})} - \Delta\gamma G + c_1 \left( p_{n+1}^{trial} - \Delta\gamma K c_{1,flow} \right) - c_2 \text{coh}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + c_2 \Delta\gamma) = 0, \quad (1.42)$$

což je jedna rovnice o jedné neznámé  $\Delta\gamma$ .

Tato rovnice je obecně nelineární a její analytické řešení není možné, proto se vyřeší numericky např. pomocí Newtonovy-Raphsonovy metody.

Na začátku iteračního procesu se volí  $\Delta\gamma = 0$  a provede se Newtonova-Raphsonova iterace (značení iterace je v horním indexu  $i \rightarrow i + 1$ ). Pro odečtení hodnoty koheze  $coh$  během zpevnění na začátku volíme  $\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p$ , protože  $\bar{\varepsilon}_n^p + c_2\Delta\gamma$ .

$$\Delta\gamma^{i+1} = \Delta\gamma^i - \Phi^i \left( \frac{d\Phi^i}{d\Delta\gamma} \right)^{-1}, \quad (1.43)$$

kde  $\Phi^i = \sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1}^{trial})} - \Delta\gamma^i G + c_1(p_{n+1}^{trial} - \Delta\gamma^i K c_{1,flow}) - c_2 coh(\bar{\varepsilon}_n^p + c_2\Delta\gamma^i) = 0$ ,

$$H^i = \frac{dcoh}{d\bar{\varepsilon}^p}(\bar{\varepsilon}_n^p + c_2\Delta\gamma^i), \quad \frac{d\Phi^i}{d\Delta\gamma} = -G - K c_1 c_{1,flow} - c_2^2 H^i.$$

Po iteračním výpočtu  $\Delta\gamma$  (dokonvergovaném) lze vypočítat výsledný tenzor napětí, elastického přetvoření a plastického přetvoření

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - \Delta\gamma \left( G \frac{1}{\sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1}^{trial})}} \mathbf{s}_{n+1}^{trial} + K \frac{1}{3} c_{1,flow} \mathbf{I} \right), \quad (1.44)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \quad (1.45)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e. \quad (1.46)$$

Poznámka:  $\mathbf{s}_{n+1}^{trial} = \mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}) = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - \frac{1}{3} I_1(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}) \mathbf{I}$  je známý tenzor deviatoru napětí. Kdyby neplatila rovnost  $\frac{1}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|} \mathbf{s}_{n+1} = \frac{1}{\|\mathbf{s}_{n+1}^{trial}\|} \mathbf{s}_{n+1}^{trial}$ , tak by nebyla redukce na jednu rovnici možná! Tato rovnost znamená, že počáteční (zkušební, testovací, trial) deviator napětí  $\mathbf{s}_{n+1}^{trial}$  je „rovnoběžný“ (kolineární) s výsledným deviatorem napětí  $\mathbf{s}_{n+1}$ .

### Konstitutivní tenzor pro hladkou plochu kužele Druckerova-Pragerova kritéria

V případě materiálových modelů, kde se pracuje pouze s rostoucími křivkami pracovního diagramu, je nejvhodnější použít tečného konstitutivního tenzoru  $\mathbf{C}^{ep}$  definovaného následovně

$$\mathbf{C}^{ep} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (1.47)$$

Ještě o něco lepší je použít tzv. konzistentní tečný tenzor (konzistentní s daným algoritmem pro návrat napětí na plochu plasticity), který zajistí kvadratickou konvergenci [28].

$$\mathbf{C}^{ep} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e,trial}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e,trial}} + \mathbf{I} \otimes \frac{\partial p_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e,trial}}, \quad (1.48)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{ep} = 2G \left( 1 - \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2} \|\boldsymbol{\varepsilon}_{d,n+1}^{e,trial}\|} \right) \mathbf{P}_d + 2G \left( \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2} \|\boldsymbol{\varepsilon}_{d,n+1}^{e,trial}\|} - GA \right) \mathbf{D} \otimes \mathbf{D} \\ - \sqrt{2} GAK c_1 \mathbf{D} \otimes \mathbf{I} - \sqrt{2} GAK c_{1,flow} \mathbf{I} \otimes \mathbf{D} + K (1 - K c_1 c_{1,flow} A) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \end{aligned}, \quad (1.49)$$

kde  $A = \frac{1}{G + K c_1 c_{1,flow} + c_2^2 H}$ ,  $\mathbf{D} \equiv \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{d,n+1}^{e,trial}}{\|\boldsymbol{\varepsilon}_{d,n+1}^{e,trial}\|}$  je jednotkový tenzor 2. řádu rovnoběžný s  $\boldsymbol{\varepsilon}_{d,n+1}^{e,trial}$ ,  $\mathbf{P}_d =$

$\frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$  je projekční tenzor 4. řádu definovaný

$\boldsymbol{\varepsilon}_d = \mathbf{P}_d : \boldsymbol{\varepsilon}$ , tedy zajišťuje projekci tenzoru přetvoření do jeho deviatorové části  $\boldsymbol{\varepsilon}_d = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} I_1(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I}$ .

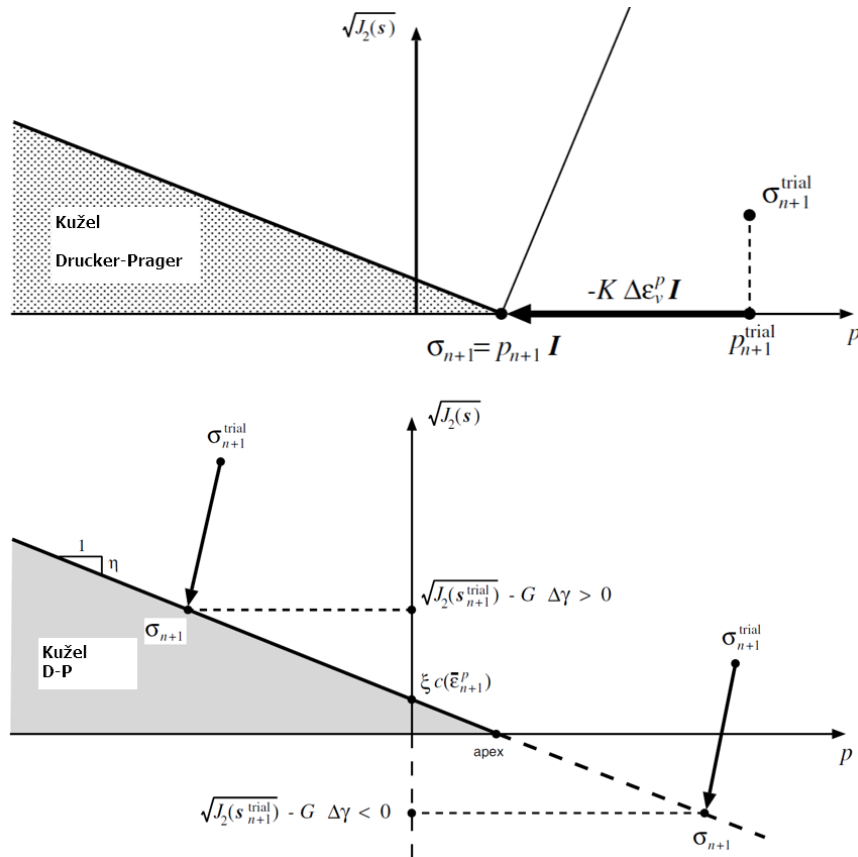
Odvození tohoto analytického vyjádření konzistentního tečného tenzoru přesahuje rámec této práce a lze jej nalézt v knize [28].

### Ošetření vrcholu (singulárního bodu) Druckerova-Pragerova kritéria

Vždy se první začne s návratem elastického testovacího odhadu napětí na hladkou plochu kužele Druckerovy-Pragerovy podmínky plasticity (viz. výše popsaný algoritmus) a teprve až potom se zkontroluje, zda bylo napětí skutečně navráceno na hladkou plochu kužele nebo jestli padlo mimo tento kužel.

Pokud  $\sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1}^{trial})} - \Delta\gamma G \geq 0$ , tak se opravdu jednalo o návrat na plochu kužele Druckerovy-Pragerovy podmínky plasticity a výpočet lze ukončit s navrácením opraveného tenzoru napětí, plastického přetvoření a konstitutivního tečného tenzoru.

Jinak pokud platí  $\sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1}^{trial})} - \Delta\gamma G < 0$ , musí se veškeré výpočty zahodit a je třeba provést nové řešení s návratem přímo do vrcholu kužele Druckerovy-Pragerovy podmínky plasticity podle obrázků a postupu popsaného níže.



Obrázek 1.8: Ilustrace návratu napětí do vrcholu kužele Druckerova-Pragerova kritéria [63]

Z předpokladu návratu napětí do vrcholu kužele podle obrázku plyne, že deviátorová část tenzoru napětí je nulová a výsledný tenzor napětí je roven

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = p_{n+1} \mathbf{I}, \quad (1.50)$$

kde

$$p_{n+1} = \left( p_{n+1}^{trial} - K \Delta \varepsilon_V^p \right) \mathbf{I}, \quad (1.51)$$

a proto

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \left( p_{n+1}^{trial} - K \Delta \varepsilon_V^p \right) \mathbf{I}. \quad (1.52)$$

Definujme  $\alpha \equiv \frac{c_2}{c_1}$ ,  $\beta \equiv \frac{c_2}{c_{1,flow}}$ , tak pak lze návrat na plochu plasticity zapsat následovně

$$p_{n+1}^{trial} - K \Delta \varepsilon_V^p - coh(\bar{\varepsilon}_n^p + \alpha \Delta \varepsilon_V^p) \beta = 0. \quad (1.53)$$

Tato rovnice o jedné neznámé  $\Delta \varepsilon_V^p$  je tedy obecně nelineární a její analytické řešení není možné, proto se vyřeší numericky např. pomocí Newtonovy-Raphsonovy metody.

Na začátku iteračního procesu se volí  $\Delta \varepsilon_V^p = 0$  a provede se Newton-Raphsonova iterace (značení iterace je v horním indexu  $i \rightarrow i+1$ ). Pro odečtení hodnoty koheze  $coh$  během zpevnění na začátku volíme  $\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p$ , protože  $\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p + \alpha \Delta \varepsilon_V^p$ .

$$\Delta \varepsilon_V^{p,i+1} = \Delta \varepsilon_V^{p,i} - r^i \left( \frac{dr^i}{d\Delta \varepsilon_V^p} \right)^{-1}, \quad (1.54)$$



kde  $r^i = p_{n+1}^{trial} - K \Delta \varepsilon_V^{p,i} - coh \left( \bar{\varepsilon}_n^p + \alpha \Delta \varepsilon_V^{p,i} \right) \beta$ ,  $H^i = \frac{dcoh}{d\bar{\varepsilon}^p} \left( \bar{\varepsilon}_n^p + \alpha \Delta \varepsilon_V^{p,i} \right)$ ,

$$\frac{dr^i}{d\Delta \varepsilon_V^p} = -K - \beta H^i \alpha.$$

Po iteračním výpočtu  $\Delta \varepsilon_V^p$  (konvergovaném) lze vypočítat výsledné napětí, elastické přetvoření a plastické přetvoření

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \left( p_{n+1}^{trial} - K \Delta \varepsilon_V^p \right) \mathbf{I}, \quad (1.55)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \quad (1.56)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e. \quad (1.57)$$

### Konstitutivní tenzor pro vrchol kužele Druckerova-Pragerova kritéria

Ve vrcholu kužele Druckerovy-Pragerovy podmínky plasticity pro tenzor napětí platí

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = p_{n+1} \mathbf{I}. \quad (1.58)$$

Derivace tohoto tenzoru napětí podle přetvoření je potom následující

$$\mathbf{C}^{ep} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e,trial}} = \mathbf{I} \otimes \frac{\partial p_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e,trial}}. \quad (1.59)$$

Po derivaci tlaku podle přetvoření se dostane výsledné vyjádření konzistentního tečného konstitutivního tenzoru

$$\mathbf{C}^{ep} = K \left( 1 - \frac{K}{K + \alpha \beta H} \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}. \quad (1.60)$$

## 2 | Kvazistatická analýza viskoelastického modelu

---

### 2.1 Přehled problematiky

V rámci této kapitoly jsou stručně a obecně popsány viskoelastické materiálové modely pro 1D napjatost a pak je vybrán jeden konkrétní model - Kelvinův řetězec, kterým jsou prováděny všechny následující kvazistatické studie. Kelvinův řetězec je popsán detailněji pro 1D napjatost, což je společné pro beton i dřevo a následně je ukázáno použití tohoto Kelvinova řetězce pro víceosou 2D rovinnou napjatost pro ortotropní materiál (dřevo), což se dá ve zjednodušené podobě použít i pro 2D rovinnou napjatost izotropního materiálu (betonu). V této práci jsou provedeny celkem 4 studie, které používají Kelvinův řetězec (2 pro beton a 2 pro dřevo). V této kapitole jsou ukázány 2 z těchto 4 studií (1 pro dřevo a 1 pro beton), kde je materiál namáhán pouze do meze kluzu (předpokládáme, že se tato mez rovná mezi úměrnosti), a proto se jedná pouze o viskoelasticitu bez plasticity nebo bez poškození. První studie se týká analýzy ortotropní verze Kelvinova řetězce na několika benchmarkových úlohách pro dotvarování a relaxaci dřeva, kde nebyl k dispozici experiment, proto bylo provedeno více testovacích úloh a výsledky byly srovnány s přístupem v Eurokódu 5 (EC5) [36]. Druhá studie se týká analýzy Kelvinova řetězce na úloze relaxace napětí v betonovém nosníku zatíženém do meze kluzu a srovnání výsledků s výpočtem v softwaru ANSYS a s experimentálním měřením.

Tato kapitola je zaměřena na algoritmicizaci, implementaci a testování (validaci, použití) isotropního i ortotropního viskoelastického materiálového modelu založeného na zobecněném Kelvinově řetězci. Nezbytnou součástí je stanovení vstupních parametrů Kelvinova řetězce pomocí "particle swarm optimization" metody a metody nejmenších čtverců. Na vybraných případových studiích (srovnání s EC nebo s relaxačním experimentem) je ukázáno, že implementovaný Kelvinův řetězec je vhodný pro popis viskoelastického chování betonu v jeho isotropní podobě i dřeva v jeho ortotropní podobě, a proto jej lze dále použít v kombinaci s modely poškození/plasticity. Tato kombinace viskoelasticity a poškození/plasticity je unikátním novostním příspěvkem této habilitační práce v oblasti kvazistatických analýz konstrukcí. Pro oblast dynamických analýz je tato kombinace obohacena dále ještě o viskozitu v plasticitě a poškození (tzv. viskoplasticitu) pomocí Duvaut-Lions formulace nebo pomocí modifikace pracovního diagramu tzv. "Dynamic Increase Factor (DIF)" součinitelem závislým na rychlosti přetvoření (tzv. "strain rate effect"). V dynamice je dále o mnoho důležitější poměr mezi plasticitou a poškozením a to jak v tahu, tak i v tlaku, protože to udává sklon větve, po které se pohybujeme při odtížení nebo při opětovném přitížení, než zase překročíme stav plasticity nebo poškození dosažený z předchozích přírůstků a uložený pomocí stavových proměnných.

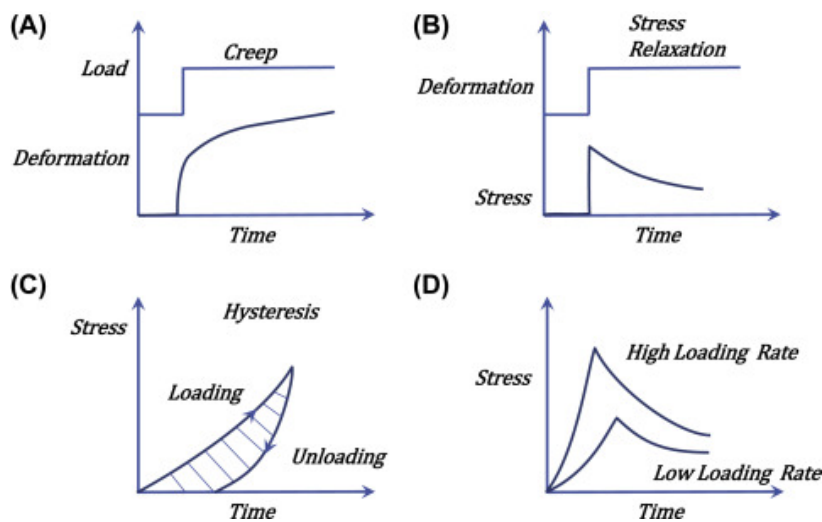
V rámci této studie je navržen konstitutivní vztah pro popis reologické (viskoelastické) mechanické odezvy dřeva na statické nebo kvazistatické zatížení. Viskoelastický model je založen na zobecněném Kelvinově řetězci aplikovaném na isotropní i ortotropní materiál. Isotropní varianta Kelvinova řetězce je testována na vybraných benchmarkových úlohách a na závěr je srovnána s relaxačním experimentem tříbodového ohybu betonového nosníku. Ortotropní varianta Kelvinova řetězce je testována na vybraných benchmarkových úlohách a je srovnána s normovým přístupem podle Eurokódu 5 (EC 5).

Studie spočívá v následujících bodech: a) algoritmicizace viskoelastického modelu aplikovaného na isotropní i ortotropní materiál a jeho implementace do výpočetního softwaru založeného na metodě konečných prvků b) identifikace vstupních parametrů Kelvinova řetězce na časové dotvarovací křivky převzaté z literatury c) vytvoření benchmarkových úloh a srovnávacích studií pro analýzu a validaci viskoelastických konstitutivních vztahů pro isotropní i ortotropní materiál Normový přístup a klasické postupy bez použití speciálních viskoelastických modelů jsou založené na pouhé redukci materiálové tuhosti odpovídající danému času, a proto není možné korektně zohlednit historii zatížení, což je demonstrováno v této studii, která

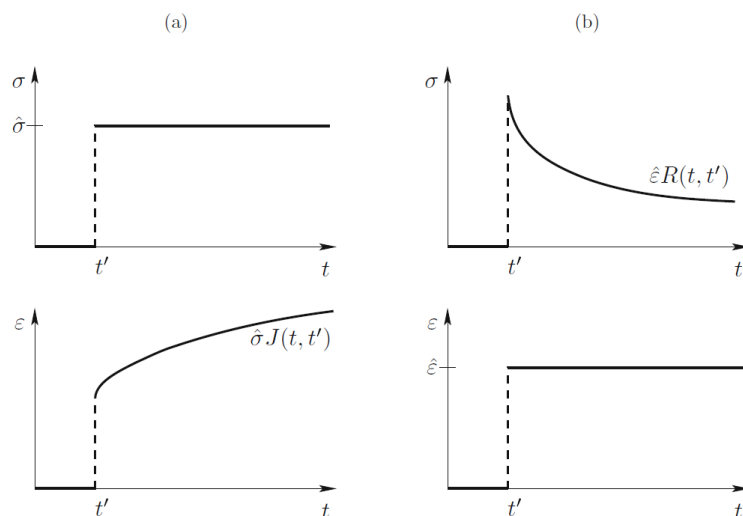
poukazuje na význam použití Kelvinova řetězce jakožto speciální diferenciální formulace viskoelastického materiálového modelu.

## 2.2 Viskoelastické modely

Tato kapitola si klade za cíl uvést čtenáře do problematiky časově závislého (viskózního) chování materiálů, ale zatím jen v lineární elastické oblasti - tzv. lineární viskoelasticy. Na tuto kapitolu se bude navazovat v dalších kapitolách obsahující složitější materiálové modely kombinující tuto viskoelasticy s plasticitou a poškozením. Pokud zatěžujeme materiál pod mezí kluzu (v této práci se navíc ještě předpokládá, že mez kluzu je rovna mezi úměrnosti, tedy že lineární a elastická oblast jsou si rovny a nedochází např. k nelineární elasticitě), tak dochází pouze k viskoelastické odezvě bez vzniku plasticity nebo poškození. Viskoelastické chování materiálu je už podle názvu dáno jeho elastickou (pevnou) částí a jeho viskózní (tekutou) částí. Tato viskózní složka materiálu se projevuje například dotvarováním, relaxací, hysterezí a závislostí na rychlosti zatížení (viz obrázek dole 2.1). Konstitutivní vztahy jsou obecně nelineární a časově závislé. Pro nižší zatížení se však během celé doby zatížení plasticita ani poškození nemusí vyskytnout a lze předpokládat lineární viskoelasticy. Typickými projevy viskoelasticy je dotvarování (creep) - tedy nárůst přetvoření v čase při konstantním napětí a relaxace napětí - tedy pokles napětí v čase při konstantním přetvoření (Obrázek 2.2).

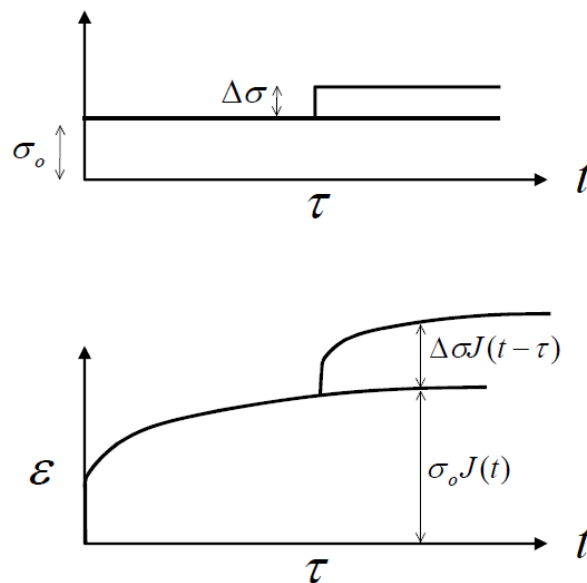


Obrázek 2.1: Viskoelastická odezva dle literatury [98]



Obrázek 2.2: Klasické reologické (viskózní) chování: a) dotvarování (creep) při konstantním napětí, b) relaxace napětí při konstantním přetvoření [10]

Jsou známé dvě formulace: integrální (Volterra) formulace a diferenciální formulace. Volterra, využitím teorie integrálních rovnic, byl hlavním přispěvatelem k teorii viskoelastivity. V této práci je ale zvolena diferenciální formulace kvůli lepší práci se stavovými proměnnými, jak bude podrobněji vysvětleno později. V lineární viskoelasticitě platí tzv. Boltzmannův princip superpozice [19], který platí pro nestárnoucí materiál (materiál s konstantním modulem pružnosti). Pro stárnoucí materiál (změna tuhosti v čase - nárůst modulu pružnosti) byla vybudována obecnější teorie lineární viskoelastivity podle Volterra [88]. Tato teorie lineární viskoelastivity je platná pouze při nižších zatíženích (zhruba do 50% meze pevnosti, kdy se ještě nevyskytuje výrazné poškození nebo plasticita). Při vyšších zatíženích musí být aplikován model kombinující viskoelasticitu s poškozením nebo plasticitou. Historie zatížení má vliv na vztah mezi přetvořením a napětím. Podle principu superpozice u lineárního viskoelastického materiálového modelu můžeme účinky od jednotlivých změn (přírůstků) zatížení v čase (celé historii přitěžování i odtěžování) zapsat následovně 2.3.



Obrázek 2.3: Vliv historie zatížení na výsledné přetvoření během creepu (dotvarování)

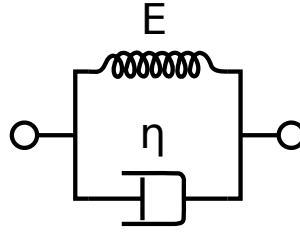
Realistický vztah napětí-deformace, který je založen na lineární viskoelasticitě, lze aproximovat pomocí reologických modelů, které jsou obvykle prezentovány jako systém Kelvinových a Maxwellových článků nebo jejich hybridů.



Obrázek 2.4: Základní jednotky reologického modelu: a) elastická pružina, b) viskózní pístový tlumič [10]

### 2.2.1 Kelvinův-Voigtův model

Kelvinův-Voigtův model je složen z paralelního zapojení jedné pružiny a jednoho tlumiče, jak je ukázáno na schématu 2.5. Pokud jsou materiálové vlastnosti závislé na čase, tak daná diferenciální popisující Kelvinův



Obrázek 2.5: Kelvinův-Voigtův model [93]

model obsahuje druhou derivaci přetvoření.

$$\varepsilon = \varepsilon^e = \varepsilon^v \quad (2.1)$$

$$\sigma = \sigma^e + \sigma^v \quad (2.2)$$

$$\frac{d\sigma^e}{dt} = E(t) \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (2.3)$$

$$\sigma^v = \eta(t) \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (2.4)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma^e}{dt} + \frac{d\sigma^v}{dt} = E(t) \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{d\eta}{dt} \frac{d\varepsilon}{dt} + \eta(t) \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} \quad (2.5)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \left( E(t) + \frac{d\eta}{dt} \right) \frac{d\varepsilon}{dt} + \eta(t) \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} \quad (2.6)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \left( E(t) + \frac{d\eta}{dt} \right) \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (2.7)$$

Pokud lze předpokládat, že materiál má v daném časovém intervalu konstantní vlastnosti ( $E(t) = E = konst.$ ,  $\eta(t) = \eta = konst.$ ), tak se dostane

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (2.8)$$

a pokud lze navíc předpokládat, že je napětí v daném časovém intervalu konstantní

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} \left( 1 - e^{-Et/\eta} \right) \quad (2.9)$$

$$\tau = \frac{\eta}{E} \quad (2.10)$$

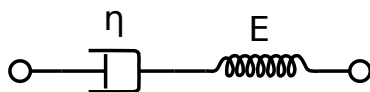
$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} \left( 1 - e^{-t/\tau} \right) \quad (2.11)$$

### 2.2.2 Maxwellův model

Maxwellův model je složen ze sériového zapojení jedné pružiny a jednoho tlumiče, jak je ukázáno na schématu 2.6. Pokud lze předpokládat, že materiál má v daném časovém intervalu konstantní vlastnosti ( $E(t) = E = konst.$ ,  $\eta(t) = \eta = konst.$ ), tak se dostane

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^v \quad (2.12)$$

$$\sigma = \sigma^e = \sigma^v \quad (2.13)$$



Obrázek 2.6: Maxwellův model [94]

$$\frac{d\varepsilon^e}{dt} = \frac{1}{E(t)} \frac{d\sigma^e}{dt} \quad (2.14)$$

$$\frac{d\varepsilon^v}{dt} = \frac{\sigma^v}{\eta(t)} \quad (2.15)$$

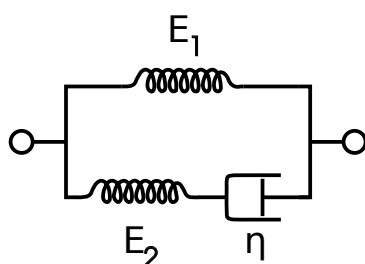
$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon^e}{dt} + \frac{d\varepsilon^v}{dt} = \frac{1}{E(t)} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta(t)} \quad (2.16)$$

### 2.2.3 Zenerův model pevné látky

Zenerův model pevné látky - Standard Linear Solid (SLS) je složený z Maxwellova nebo Kelvinova-Voigtova modelu a osamocené pružiny (poskytující okamžitou pružnou odezvu).

#### a) Maxwellův typ

Tento model je složený z Maxwellova modelu a osamocené pružiny sestavené paralelně 2.7. Pokud lze



Obrázek 2.7: Zenerův model pevné látky SLS - Maxwellův typ [90]

předpokládat, že materiál má v daném časovém intervalu konstantní vlastnosti, tak platí následující vztahy

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \quad (2.17)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad (2.18)$$

$$\sigma_1 = \sigma_1^e \quad (2.19)$$

$$\sigma_2 = \sigma_2^e = \sigma_2^v \quad (2.20)$$

$$\sigma = E_1\varepsilon + E_2(\varepsilon - \varepsilon_2^v) \quad (2.21)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = E_1 \frac{d\varepsilon}{dt} + E_2 \frac{d\varepsilon}{dt} - E_2 \frac{d\varepsilon_2^v}{dt} \quad (2.22)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = E_1 \frac{d\varepsilon}{dt} + E_2 \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{E_2\sigma_2}{\eta} \quad (2.23)$$

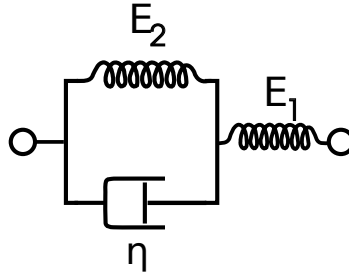
$$\sigma_2 = \sigma - E_1\varepsilon \quad (2.24)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = E_1 \frac{d\varepsilon}{dt} + E_2 \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{E_2(\sigma - E_1\varepsilon)}{\eta} \quad (2.25)$$

$$\sigma + \frac{\eta}{E_2} \frac{d\sigma}{dt} = E_1\varepsilon + \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_2} \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (2.26)$$

## b) Kelvinův typ

Tento model je složený z Kelvinova-Voigtova modelu a osamocené pružiny sestavené sériově 2.7. Pokud lze



Obrázek 2.8: Zenerův model pevné látky SLS - Kelvinův typ [90]

předpokládat, že materiál má v daném časovém intervalu konstantní vlastnosti, tak platí následující vztahy

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 \quad (2.27)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (2.28)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_1}{dt} + \frac{d\varepsilon_2}{dt} \quad (2.29)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2^e = \varepsilon_2^v \quad (2.30)$$

$$\sigma = E_2 \varepsilon_2 + \eta \frac{d\varepsilon_2}{dt} \quad (2.31)$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon - \varepsilon_2 \quad (2.32)$$

$$\sigma = E_2 (\varepsilon - \varepsilon_1) + \eta \frac{d(\varepsilon - \varepsilon_1)}{dt} \quad (2.33)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma}{E_1} \quad (2.34)$$

$$\frac{E_1 + E_2}{E_1} \sigma + \frac{\eta}{E_1} \frac{d\sigma}{dt} = E_2 \varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (2.35)$$

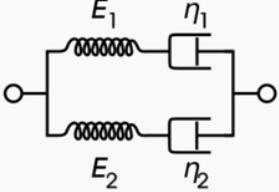
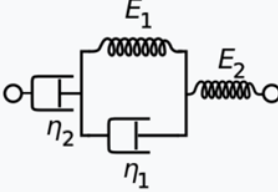
$$\sigma + \frac{\eta}{E_1 + E_2} \frac{d\sigma}{dt} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon + \frac{E_1 \eta}{E_1 + E_2} \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (2.36)$$

## 2.2.4 Ostatní viskoelastické modely

### Burgersův model

Burgersův model je čtyřsložkový 2.9. Prakticky se v konstitutivních vztazích pro kvazistatiku používá spíše Kelvinův nebo Maxwellův řetězec a pro dynamiku se používají viskoelastické modely, které obsahují jen první derivace fyzikálních veličin, proto dále nebudu pokračovat s dalšími schémata odpovídající Burgersovu modelu, protože Burgersovy modely mají nenulové druhé derivace napětí nebo přetvoření podle času, proto je třeba volit hodně malý časový krok, aby v rámci tohoto jednoho časového přírůstku byly hodnoty druhých derivací zanedbatelné kvůli předpokladu konstantních rychlostí (prvních derivací). V dynamice používám Kelvinův-Voigtův model nebo Zenerův SLS model Maxwellova typu pro popis materiálu ve viskoelastické oblasti. V těchto modelech se druhé derivace napětí ani přetvoření nevyskytují, ale pro výstižné numerické vyjádření prvních derivací je také nutné volit malý časový krok, aby numerická chyba při numerické aproximaci derivace její diferencní formou byla malá.

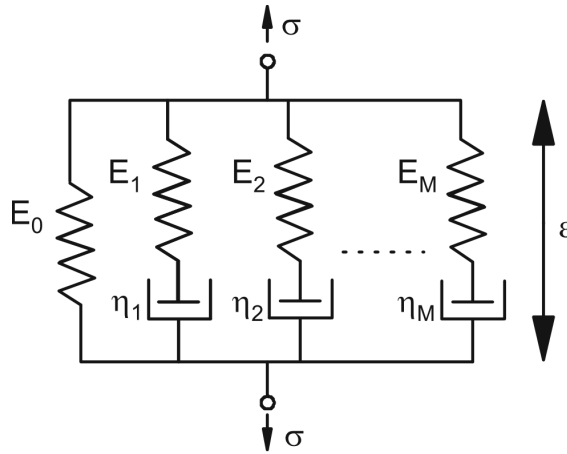
Pokud se v daném časovém přírůstku předpokládá lineární průběh přetvoření  $\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t} = konst.$ , tak lze přírůstek napětí pro Zenerův SLS model Maxwellova typu vypočítat analyticky podle vztahů níže. Tento Zenerův SLS model Maxwellova typu je speciálním případem zobecněného Maxwellova řetězce 2.11, ve kterém je pouze jeden Maxwellův článek.

Maxwell representation	Kelvin representation
	
$\sigma + \left( \frac{\eta_1}{E_1} + \frac{\eta_2}{E_2} \right) \dot{\sigma} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2} \ddot{\sigma} = (\eta_1 + \eta_2) \dot{\epsilon} + \frac{\eta_1 \eta_2 (E_1 + E_2)}{E_1 E_2} \ddot{\epsilon}$	$\sigma + \left( \frac{\eta_1}{E_1} + \frac{\eta_2}{E_1} + \frac{\eta_2}{E_2} \right) \dot{\sigma} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2} \ddot{\sigma} = \eta_2 \dot{\epsilon} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1} \ddot{\epsilon}$

Obrázek 2.9: Čtyřsložkové Burgersovy modely [91]

### Zobecněný Maxwellův řetězec

Tento model se kvůli první (nulté) osamocené pružině, která předchází paralelnímu zapojení Maxwellových článků nazývá „Zobecněný Maxwellův řetězec“ a jeho schéma je na obrázku 2.10. Diferenciální rovnice



Obrázek 2.10: Zobecněný Maxwellův řetězec, převzato z [24]

popisující zobecněný Maxwellův řetězec je následující 2.11.

$$\begin{aligned}
 & \sigma + \left( \sum_{i=1}^N \tau_i \right) \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \left( \sum_{i=1}^{N-1} \left( \sum_{j=i+1}^N \tau_i \tau_j \right) \right) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} + \dots + \\
 & \left( \sum_{i_1=1}^{N-n+1} \dots \left( \sum_{i_a=i_{a-1}+1}^{N-(n-a)+1} \dots \left( \sum_{i_n=i_{n-1}+1}^N \left( \prod_{j \in \{i_1, \dots, i_n\}} \tau_j \right) \right) \dots \right) \right) \frac{\partial^n \sigma}{\partial t^n} + \dots + \left( \prod_{i=1}^N \tau_i \right) \frac{\partial^N \sigma}{\partial t^N} \\
 & = \\
 & E_0 \epsilon + \left( \sum_{i=1}^N (E_0 + E_i) \tau_i \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \left( \sum_{i=1}^{N-1} \left( \sum_{j=i+1}^N (E_0 + E_i + E_j) \tau_i \tau_j \right) \right) \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial t^2} + \dots + \\
 & \left( \sum_{i_1=1}^{N-n+1} \dots \left( \sum_{i_a=i_{a-1}+1}^{N-(n-a)+1} \dots \left( \sum_{i_n=i_{n-1}+1}^N \left( \left( E_0 + \sum_{j \in \{i_1, \dots, i_n\}} E_j \right) \left( \prod_{k \in \{i_1, \dots, i_n\}} \tau_k \right) \right) \right) \dots \right) \right) \frac{\partial^n \epsilon}{\partial t^n} \\
 & \quad + \dots + \left( E_0 + \sum_{j=1}^N E_j \right) \left( \prod_{i=1}^N \tau_i \right) \frac{\partial^N \epsilon}{\partial t^N}
 \end{aligned}$$

Obrázek 2.11: Obyčejná diferenciální rovnice Maxwellova řetězce, převzato z [92]

V algoritmu numerické integrace konstitutivního vztahu se předpokládá konstantní hodnota derivace lineárního odhadu napětí v jednom časovém přírůstku, tedy se vlastně předpokládá lineární průběh přetvoření

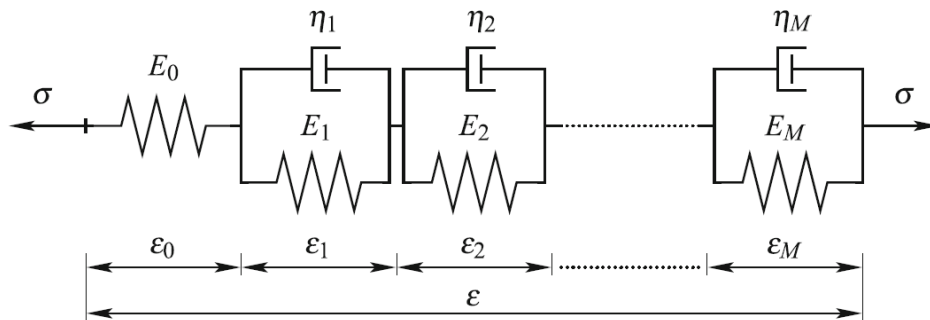


v jednom časovém přírůstku a s ohledem na tento předpoklad musí být volena velikost časového kroku. Algoritmus časové integrace zobecněného Maxwellova řetězce je pěkně popsán v pracích od profesora Kaliského [48, 47]. Zkrácená verze tohoto řetězce, kde je pouze jeden Maxwellův článek, se nazývá Zenerův model pevné látky (anglicky Standard Linear Solid model - zkráceně SLS model) a tento model je použitý v dynamice.

Dalším a pro nás nejdůležitějším viskoelastickým modelem v kvazistatických úlohách je zobecněný Kelvinův řetězec. Tento model je používán v této práci pro kvazistatické úlohy, proto je mu vyčleněna celá další kapitola.

### 2.3 Zobecněný Kelvinův řetězec

V této kapitole se budeme věnovat jednomu konkrétnímu lineárnímu a časově závislému materiálovému modelu zvanému jako Kelvinův řetězec. Tento lineární viskoelastický model je složen ze sady elastických pružinek a viskózních pístových tlumičů 2.4 zapojených podle schématu (Obrázek 2.12). Kelvinův řetězec se skládá z Kelvinových článků zapojených do série a pro zachycení okamžité elastické deformace je obohacen o osamocenou pružinu bez tlumiče (Obrázek 2.12). Pro dotvarování je Kelvinův řetězec výhodnější, protože Maxwellův řetězec vyžaduje převedení funkce poddajnosti na relaxační funkci, což zvyšuje výpočetní náročnost, protože funkci poddajnosti (křivku dotvarování) lze získat snadněji než relaxační křivku.



Obrázek 2.12: Kelvinův řetězec [10]

Hodnota přetvoření v daném čase je závislá nejen na aktuální hodnotě napětí v daném čase, ale na celé historii napětí působící na daný materiál. Pro lineární viskoelastické modely platí princip superpozice, podle kterého lze přetvoření od jednotlivých zatěžovacích stavů v rámci celé historie zatížení lineárně kombinovat (sčítat a násobit konstantou). Toto je silná vlastnost lineárních viskoelastických modelů, které se s výhodou využívá. Ovšem i přes tuto silnou vlastnost, fakt, že je řešení závislé na celé historii zatížení, značně komplikuje výpočty, zejména co se týče nároků na paměť počítače a rychlost výpočtu. Aby nebylo nutné počítat s celou historií napětí, tak se používá diferenciální formulace viskoelastických materiálů a zavedly se tzv. „exponenciální algoritmy“ časové integrace a tady se s výhodou používají Kelvinovy řetězce. Exponenciální algoritmus je založen na sestavení analytickém řešení diferenciálních rovnic popisující viskoelastické chování na daném časovém intervalu. U tohoto přístupu je třeba znát jen počáteční podmínky, tedy řešení na začátku daného intervalu (výsledné řešení na konci předešlého časového intervalu závislé na předchozí historii zatížení). Analytické řešení diferenciálních rovnic je složené z výrazů obsahující exponenciální funkce, a proto se tento algoritmus nazývá exponenciální.

Konstitutivní vztahy pro  $j^{\text{tou}}$  pružinu a  $j^{\text{t}}$  tlumič s vlastnostmi závislými na čase  $E_j(t)$ ,  $\eta_j(t)$  jsou

$$\frac{d\sigma_j^e}{dt} = E_j(t) \frac{d\varepsilon_j}{dt} \quad (2.37)$$

$$\sigma_j^v = \eta_j(t) \frac{d\varepsilon_j}{dt} \quad (2.38)$$

Pokud jsou pružina a tlumič zapojeny paralelně, tak se napětí sčítají a přetvoření jsou si rovny.

$$\sigma_j = \sigma_j^e + \sigma_j^v \quad (2.39)$$

$$\varepsilon_j = \varepsilon_j^e = \varepsilon_j^v \quad (2.40)$$

Pro získání konstitutivního vzorce pro jeden článek Kelvinova řetězce je nutné odvodit napětí a výsledek dosadit do předchozích vztahů pro pružinu a tlumič.

$$\frac{d\sigma_j}{dt} = \frac{d\sigma_j^e}{dt} + \frac{d\sigma_j^v}{dt} = E_j(t) \frac{d\varepsilon_j}{dt} + \frac{d\eta_j}{dt} \frac{d\varepsilon_j}{dt} + \eta_j(t) \frac{d^2\varepsilon_j}{dt^2} \quad (2.41)$$

$$\frac{d\sigma_j}{dt} = \left( E_j(t) + \frac{d\eta_j}{dt} \right) \frac{d\varepsilon_j}{dt} + \eta_j(t) \frac{d^2\varepsilon_j}{dt^2} \quad (2.42)$$

Vzhledem k sériovému zapojení jednotlivých Kelvinových článků je vzorec pro výsledné napětí následující

$$\sigma(t) = \sigma_j(t) = E_0 \varepsilon_0(t) \quad (2.43)$$

a vzorec pro výsledné přetvoření Kelvinova řetězce je

$$\varepsilon(t) = \sum_{j=0}^M \varepsilon_j(t) \quad (2.44)$$

Diferenciální rovnice pro získání jednoho  $j^{\text{th}}$  Kelvinova článku je

$$\frac{d\varepsilon_j}{dt} + \frac{\eta_j(t)}{D_j(t)} \frac{d^2\varepsilon_j}{dt^2} = \frac{1}{D_j(t)} \frac{d\sigma}{dt} \quad (2.45)$$

kde

$$D_j(t) = E_j(t) + \frac{d\eta_j}{dt} \quad (2.46)$$

$M$  diferenciálních rovnic je odvozeno s neznámými proměnnými  $\varepsilon_j$ . Předpoklad je, že přírůstek napětí v intervalu  $\langle t_{i-1}, t_i \rangle$  je znám. Počátečními podmínkami jsou přetvoření  $\varepsilon_j(t_{i-1})$  a rychlost změny přetvoření  $\frac{d\varepsilon_j}{dt}(t_{i-1})$  na konci předchozího přírůstku. Podmínky v čase  $t_0$  jsou

$$\varepsilon_j(t_0) = 0 \quad (2.47)$$

$$\frac{d\varepsilon_j}{dt}(t_0) = \frac{\sigma(t_0)}{\eta_j(t_0)} \quad (2.48)$$

$$\varepsilon_j(t) = J(t, t_0) \sigma_0 \quad (2.49)$$

V případě konstantního napětí  $\sigma(t) = \sigma_0$ , vzhledem k odvození diferenciální rovnici (2.48), rovnice se transformuje do následujícího tvaru:

$$\frac{d\varepsilon_j}{dt} + \tau_j(t_{i-1/2}) \frac{d^2\varepsilon_j}{dt^2} = 0 \quad (2.50)$$

$$\varepsilon_j(t) = J(t, t_0) \sigma_0 \quad (2.51)$$

S následujícím analytickým řešením

$$\varepsilon_j(t) = C_1 + C_2 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (2.52)$$

Integrální konstanty  $C_1$  a  $C_2$  jsou stanoveny jako

$$C_1 = \frac{\sigma_0 \tau}{\eta(t_0)} \quad (2.53)$$

$$C_2 = \frac{\sigma_0 \tau}{\eta(t_0)} \exp\left(-\frac{t_0}{\tau}\right) \quad (2.54)$$

Vztah mezi konstantním napětím a přetvořením je následující

$$\varepsilon_j(t) = J(t, t_0)\sigma_0 \quad (2.55)$$

kde

$$J(t, t_0) = \frac{1 - \exp\left(\frac{-t-t_0}{\tau}\right)}{D(t_0)} H(t-t_0) \quad (2.56)$$

V případě úloh s časově závislým napětím je předpoklad konstantního napětí během jednoho časového kroku příliš omezující a je vhodnější předpokládat lineární změnu napětí v průběhu časového intervalu. To vede ke stabilnějšímu výpočtu a přesnějším výsledkům v každém časovém kroku. Časový krok může být navíc větší. Diferenciální rovnici je možné řešit přesně pro časový interval  $(t_{i-1}, t_i)$  of the size  $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ . Toto je platné za následujících předpokladů:

$$\frac{1}{D_j(t)} \frac{d\sigma}{dt} = \text{const.} \quad (2.57)$$

$$\tau_j(t) = \frac{\eta_j(t)}{D_j(t)} = \text{const.} \quad (2.58)$$

tudíž diferenciální rovnice (2.50) se zjednoduší na

$$\frac{d\varepsilon_j}{dt} + \tau_j(t_{i-1/2}) \frac{d^2\varepsilon_j}{dt^2} = \frac{1}{D_j(t_{i-1/2})} \frac{\Delta\sigma^{(i)}}{\Delta t_i} \quad (2.59)$$

kde

$$\Delta\sigma^{(i)} = \sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1}) \quad (2.60)$$

Analytické řešení zjednodušené rovnice (2.59)

$$\varepsilon_j(t) = C_1 + C_2 \exp\left(-\frac{t-t_{i-1}}{\tau_j}\right) + \frac{\Delta\sigma^{(i)}}{\Delta t_i D_j^{(i-1/2)}} (t-t_{i-1}) \quad (2.61)$$

Derivací výše uvedené rovnice obdržíme

$$\dot{\varepsilon}_j(t) = -\frac{C_2}{\tau_j} \exp\left(-\frac{t-t_{i-1}}{\tau_j}\right) + \frac{\Delta\sigma^{(i)}}{\Delta t_i D_j^{(i-1/2)}} \quad (2.62)$$

A substitucí  $t=t_{i-1}$ , znalosti stavové proměnné rychlosti deformace  $j^{\text{th}}$  članku  $\varepsilon_j^{(i-1)}$  v čase  $t_{i-1}$ , obdržíme jednu rovnici obsahující jednu neznámou integrační konstantu  $C_2$ .

$$-\frac{C_2}{\tau_j} + \frac{\Delta\sigma^{(i)}}{\Delta t_i D_j^{(i-1/2)}} = \dot{\varepsilon}_j^{(i-1)} \Rightarrow C_2 = \frac{\tau_j \Delta\sigma^{(i)}}{\Delta t_i D_j^{(i-1/2)}} - \tau_j \dot{\varepsilon}_j^{(i-1)} \quad (2.63)$$

Konstanta  $C_1$  je získána substitucí  $C_2$  a stavových proměnných  $j^{\text{th}}$  članku  $\varepsilon_j^{(i-1)}$ ,  $\dot{\varepsilon}_j^{(i-1)}$  do první rovnice (2.61).

$$C_1 = \varepsilon_j^{(i-1)} + \tau_j \dot{\varepsilon}_j^{(i-1)} - \frac{\tau_j \Delta\sigma^{(i)}}{\Delta t_i D_j^{(i-1/2)}} \quad (2.64)$$

Zavedením následujícího značení,

$$\beta_j^{(i)} = \exp\left(-\frac{\Delta t_i}{\tau_j}\right), \quad \lambda_j^{(i)} = \frac{\tau_j}{\Delta t_i} \left(1 - \beta_j^{(i)}\right) \quad (2.65)$$

obdržíme rovnice pro rychlost přetvoření a napětí  $j^{tho}$  článku v čase  $t_i$ .

$$\dot{\varepsilon}_j^{(i)} = \beta_j^{(i)} \dot{\varepsilon}_j^{(i-1)} + \frac{1 - \beta_j^{(i)}}{\Delta t_i D_j^{(i-1/2)}} \Delta \sigma^{(i)} \quad (2.66)$$

$$\varepsilon_j^{(i)} = \varepsilon_j^{(i-1)} + \Delta t_i \lambda_j^{(i)} \dot{\varepsilon}_j^{(i-1)} + \frac{1 - \lambda_j^{(i)}}{D_j^{i-1/2}} \Delta \sigma^{(i)} \quad (2.67)$$

Po dosazení vztahů pro jeden Kelvinův článek odvozené výše do Kelvinova řetězce je vztah následující:

$$\varepsilon^{(i)} = \sum_{j=0}^M \varepsilon_j^{(i)} = \sum_{j=0}^M \varepsilon_j^{(i-1)} = \Delta t_i \sum_{j=1}^M \lambda_j^{(i)} \dot{\varepsilon}_j^{(i-1)} + \left( \frac{1}{D_0^{(i-1/2)}} + \sum_{j=1}^M \frac{1 - \lambda_j^{(i)}}{D_j^{(i-1/2)}} \right) \Delta \sigma^{(i)} \quad (2.68)$$

Vyjádřeno ve zkrácené podobě:

$$\varepsilon^{(i)} = \varepsilon^{(i-1)} + \Delta \bar{\varepsilon}^{(i)} + \frac{\Delta \sigma^{(i)}}{E^{(i)}} \quad (2.69)$$

kde

$$\Delta \bar{\varepsilon}^{(i)} = \Delta t_i \sum_{j=1}^M \lambda_j^{(i)} \dot{\varepsilon}_j^{(i-1)} \quad (2.70)$$

a

$$E^{ve} = \left( \frac{1}{D_0^{(i-1/2)}} + \sum_{j=1}^M \frac{1 - \lambda_j^{(i)}}{D_j^{(i-1/2)}} \right)^{-1} \quad (2.71)$$

Následuje výsledný vzorec pro výpočet přírůstku napětí [11].

$$\Delta \sigma^{(i)} = \bar{E}^{(i)} \left( \Delta \varepsilon^{(i)} - \Delta \bar{\varepsilon}^{(i)} \right) \quad (2.72)$$

### 2.3.1 Identifikace parametrů Kelvinova řetězce

Při použití Kelvinova řetězce je důležitá identifikace vstupních parametrů Kelvinova řetězce. V této práci je zvolena optimalizační metoda hejnem částic (anglicky "particle swarm optimization") společně s metodou nejmenších čtverců. Materiálový model Kelvinova řetězce je reologické schéma, kde jsou v sérii spojeny články Kelvinova-Voigtova modelu. Funkce poddajnosti pro jeden Kelvinův-Voigtův článek může být zapísána následovně:

$$J_0(t) = \frac{1}{E} \left( 1 - e^{-\frac{E}{\eta} t} \right) H(t) \quad (2.73)$$

kde  $H(t) = 1$ , when  $t > 0$  and  $H(t) = 0$ , when  $t = 0$ . Model Kelvinova řetězce je vhodný pro popis dotvarování a je v podstatě založen na reprezentaci funkce poddajnosti pomocí Dirichletovy nebo Pronyho série.

$$J_0(t) = \left[ \frac{1}{E_0} + \sum_{j=1}^M \frac{1}{E_j} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) \right] H(t) \quad (2.74)$$

kde  $\tau_j = \frac{\eta_j}{E_j}$  je retardační čas. Je třeba nafitovat  $M$  neznámých párů  $E_j$  a  $\tau_j$  parametrů řetězce na známou časovou křivku součinitele dotvarování. Aproximace součinitele dotvarování je pomocí následující Dirichletovy série:

$$\varphi(t) = E_0 + \sum_{j=1}^M E_j \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) \quad (2.75)$$

Problém identifikace neznámých koeficientů Dirichletovy (Pronyho) řady z experimentálních dat popsali Bažant a kol. [13], kteří prokázali vhodnost použití metody nejmenších čtverců (MNČ) pro stanovení  $E_j$ ,

kde hodnoty retardačních časů  $\tau_j$  byly vybrány empiricky, aby bylo zajištěno rovnoměrné pokrytí časové osy v logaritmickém měřítku. Kompletní identifikaci všech parametrů je možné určit jako kořeny polynomů, jejichž koeficienty jsou determinanty matic, které jsou získány z hodnot aproximované funkce dotvarování a jejich derivací [?]. Identifikaci lze také formulovat jako optimalizační úlohu. Tento přístup je popsán v práci Distefano [32] a Pister [71]. Tito autoři vyřešili problém identifikace jako nelineární optimalizaci. Z hlediska skutečného výpočetního výkonu je možné použít náročnější moderní optimalizační algoritmy založené na imitaci přírodních procesů. Tato myšlenka byla použita v navrženém algoritmu, kde je optimalizace řešena pomocí strategie Particle Swarm [49, 76]. Implementovaný identifikační algoritmus je kombinací Bažantem navržené MNČ s empiricky stanovenými hodnotami  $\tau_j$  a optimalizací, kde jsou tyto hodnoty zpřesňovány tak, aby bylo dosaženo co nejpřesnější aproximace uživatelem definované křivky součinitele dotvarování. Cílová funkce byla definována jako chyba  $RMSE$  následovně:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i^* - y_i)^2}{n}} \quad (2.76)$$

kde  $y_i^*$  je hodnota součinitele dotvarování získaná použitím (vyhodnocením) Dirichletovy řady v daném čase  $t_i$  a  $y_i$  je hodnota součinitele dotvarování definovaná uživatelem a  $n$  je počet bodů. Optimalizační podmínky byly definovány následujícími nerovnostmi

$$0.9\tau_j \leq \tau_j^* \leq 1.1\tau_j \quad (2.77)$$

kde  $\tau_j$  je hodnota empiricky odhadovaného retardačního času a  $\tau_j^*$  je hodnota retardačního času získaného "Particle Swarm" optimalizačním algoritmem. Nejlepší výsledky byly získány s 5-ti Kelvin-Voight články v Kelvinově řetězci. Průměrné  $RMSE$  chyby dosahují hodnot  $0.001266289 \pm 1.27 \cdot 10^{-4}$  pro podélný směr dřeva L a  $0.002733644 \pm 2.84 \cdot 10^{-4}$  pro příčný (radiální) směr dřeva R. Realizace pro 5 článků jsou graficky k nerozeznání od vstupních křivek. V případě 7 a 9 členů byly výsledky také numericky a graficky dostatečně přesné, ale průměrná časová náročnost výpočtu jednotlivé identifikace byla u 7 členů 1.7krát vyšší a u 9 členů 2.6krát vyšší. Tyto výše uvedené výsledky byly použity k rozhodnutí použít defaultně 5 článků Kelvinova řetězce pro strukturální analýzy.

### 2.3.2 Kelvinův řetězec při víceosé napjatosti

Všechny výše uvedené vztahy byly uvedeny pro popis jednoosého zatížení. Pro účely teorie skořepiny (deska-stěna) je třeba odvodit vztahy pro realistické víceosé zatížení. Je nutné vzít v úvahu ortotropní materiálové vlastnosti dřeva. Vztahy pro 2D rovinnou napjatost jsou uvedeny níže. Zápis materiálových směrů dřeva je:  $x$  ( $L$ ) pro podélný a  $y$  ( $R$ ) pro radiální směr. Pro izotropní materiál tato teorie samozřejmě také platí, jen se zjednoduší konstitutivní matice tuhosti. Složky tenzoru napětí pro 2D (rovinnou napjatost) jsou zapsány v následujícím vektoru:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(i)} = \boldsymbol{\sigma}(t_i) = \begin{pmatrix} \sigma_x(t_i) \\ \sigma_y(t_i) \\ \sigma_{xy}(t_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_L(t_i) \\ \sigma_R(t_i) \\ \sigma_{LR}(t_i) \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

Napětí  $\boldsymbol{\sigma}^{(i)}$  v čase  $t_i$  je počítáno ze známého napětí  $\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)}$  v předchozím čase  $t_{i-1}$  a přírůstek napětí  $\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(i)}$ :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(i)} = \boldsymbol{\sigma}^{(i-1)} + \Delta\boldsymbol{\sigma}^{(i)} \quad (2.79)$$

Přírůstek napětí pro 2D rovinnou napjatost je počítán analogicky k 1D vztahům:

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(i)} = \mathbf{C}^{ve(i)} + \Delta\boldsymbol{\sigma}^{(i)} \quad (2.80)$$

kde matice tuhosti  $\mathbf{C}^{ve(i)}$  je získána inverzí matice poddajnosti  $\mathbf{D}^{ve(i)}$ , která je stanovena použitím viskoelastického modulu vypočítaného z 1D vztahu (2.71).

$$E_L^{ve(i)} = \left( \frac{1}{D_{L0}^{(i-1/2)}} + \sum_{j=1}^M \frac{1-\lambda_{Lj}^{(i)}}{D_{Lj}^{(i-1/2)}} \right)^{-1} \quad (2.81)$$

$$E_R^{ve(i)} = \left( \frac{1}{D_{R0}^{(i-1/2)}} + \sum_{j=1}^M \frac{1-\lambda_{Rj}^{(i)}}{D_{Rj}^{(i-1/2)}} \right)^{-1} \quad (2.82)$$

$$G_{LR}^{ve(i)} = \left( \frac{1}{D_{LR0}^{(i-1/2)}} + \sum_{j=1}^M \frac{1-\lambda_{LRj}^{(i)}}{D_{LRj}^{(i-1/2)}} \right)^{-1} \quad (2.83)$$

Efektivní viskoelastická matice poddajnosti je definována následovně:

$$\mathbf{D}^{ve(i)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L^{ve(i)}} & \frac{-\nu_{LR}}{E_R^{ve(i)}} & 0 \\ \frac{-\nu_{RL}}{E_L^{ve(i)}} & \frac{1}{E_R^{ve(i)}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{LR}^{ve(i)}} \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

a efektivní viskoelastická matice tuhosti je její inverzí:

$$\mathbf{C}^{ve(i)} = \left( \mathbf{D}^{ve(i)} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{E_L^{ve(i)}}{1-\nu_{LR}\nu_{RL}} & \frac{\nu_{LR}E_R^{ve(i)}}{1-\nu_{LR}\nu_{RL}} & 0 \\ \frac{\nu_{RL}E_L^{ve(i)}}{1-\nu_{LR}\nu_{RL}} & \frac{E_R^{ve(i)}}{1-\nu_{LR}\nu_{RL}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LR}^{ve(i)} \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

Přírůstek vektoru viskózního přetvoření pro rovinnou napjatost se vypočítá následovně

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{v(i)} = \Delta t^{(i)} \sum_{j=1}^M \begin{pmatrix} \lambda_{Lj}^{(i)} \frac{d\varepsilon_{Lj}^{(i-1)}}{dt} \\ \lambda_{Rj}^{(i)} \frac{d\varepsilon_{Rj}^{(i-1)}}{dt} \\ \lambda_{LRj}^{(i)} \frac{d\gamma_{LRj}^{(i-1)}}{dt} \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

kde stavové proměnné z předchozího času  $t_{i-1}$  jsou  $\frac{d\varepsilon_{Lj}^{(i-1)}}{dt}$ ,  $\frac{d\varepsilon_{Rj}^{(i-1)}}{dt}$  a  $\frac{d\gamma_{LRj}^{(i-1)}}{dt}$ . Je třeba aktualizovat stavové proměnné pro další časový krok:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_{Lj}^{(i)}}{dt} &= \beta_{Lj}^{(i)} \frac{d\varepsilon_{Lj}^{(i-1)}}{dt} + \frac{1-\beta_{Lj}^{(i)}}{\Delta t^{(i)} D_{Lj}^{(i-1/2)}} \Delta \sigma_L^{(i)} \\ \frac{d\varepsilon_{Rj}^{(i)}}{dt} &= \beta_{Rj}^{(i)} \frac{d\varepsilon_{Rj}^{(i-1)}}{dt} + \frac{1-\beta_{Rj}^{(i)}}{\Delta t^{(i)} D_{Rj}^{(i-1/2)}} \Delta \sigma_R^{(i)} \\ \frac{d\gamma_{LRj}^{(i)}}{dt} &= \beta_{LRj}^{(i)} \frac{d\gamma_{LRj}^{(i-1)}}{dt} + \frac{1-\beta_{LRj}^{(i)}}{\Delta t^{(i)} D_{LRj}^{(i-1/2)}} \Delta \tau_{LR}^{(i)} \end{aligned} \quad (2.87)$$

kde

$$\beta_{Lj}^{(i)} = \exp\left(\frac{-\Delta t^{(i)}}{\tau_{Lj}}\right) \quad \beta_{Rj}^{(i)} = \exp\left(\frac{-\Delta t^{(i)}}{\tau_{Rj}}\right) \quad \beta_{LRj}^{(i)} = \exp\left(\frac{-\Delta t^{(i)}}{\tau_{LRj}}\right) \quad (2.88)$$

$$\lambda_{Lj}^{(i)} = \frac{\tau_{Lj}}{\Delta t^{(i)}} \left(1 - \beta_{Lj}^{(i)}\right) \quad \lambda_{Rj}^{(i)} = \frac{\tau_{Rj}}{\Delta t^{(i)}} \left(1 - \beta_{Rj}^{(i)}\right) \quad \lambda_{LRj}^{(i)} = \frac{\tau_{LRj}}{\Delta t^{(i)}} \left(1 - \beta_{LRj}^{(i)}\right) \quad (2.89)$$

$$\tau_{Lj} = \frac{\eta_{Lj}}{E_{Lj}}, \quad \tau_{Rj} = \frac{\eta_{Rj}}{E_{Rj}}, \quad \tau_{LRj} = \frac{\eta_{LRj}}{G_{LRj}} \quad (2.90)$$

Retardační čas  $j^{tho}$  článku Kelvinova řetězce v daném materiálovém směru dřeva je podílem viskozity tlumiče a modulu pružnosti pružinky daného  $j^{tho}$  článku v daném směru dřeva. Tyto vstupní parametry

Kelvinova řetězce jsou stanoveny identifikací součinitele dotvarování závislého na čase. Pro účely této studie "Particle Swarm Optimization" metoda [49, 76] je použita.

### Výhody Kelvinova řetězce

Pokud by nebyla použita diferenciální formulace, tak by bylo nutné vyhodnotit funkci poddajnosti  $i$ -krát, abychom dostali hodnotu přetvoření v  $i^{\text{tm}}$  časovém kroku. Pro  $n$  časových kroků, by bylo třeba funkci poddajnosti vyhodnotit  $1 + 2 + \dots + n = n(n + 1)/2$ -krát. Počet operací se tedy zvyšuje se druhou mocninou, a tak narůstá výpočetní čas. V praktických úlohách se přetvoření a napětí vyhodnocuje v mnoha integračních bodech konečně-prvkového modelu konstrukce a v těchto všech bodech konstrukce (miliony nebo i miliardy) je třeba ukládat všechny stavové proměnné a velkou výhodou diferenciální formulace je, že není třeba držet tyto všechny stavové proměnné v integračních bodech ve všech počítaných časech, ale vždy pouze v předchozím čase, což je velká výhoda oproti přímé integraci. Tato diferenciální formulace je založena na reologických modelech, jako je např. zobecněný Kelvinův nebo Maxwellův řetězec, složených s pružinek a tlumičů.

Označme  $\varepsilon_i$  numerickou aproximaci přetvoření  $\varepsilon$  v čase  $t_i$  a  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ . Pokud hodnota  $\varepsilon_{i-1}$  pro diskrétní čas  $t_{i-1}$  je známá z předchozího času, hodnota  $\varepsilon_i$  může být vypočítána přibližným řešením diferenciální rovnice na intervalu  $[t_{i-1}, t_i]$ . Použitím běžných metod je derivace  $\dot{\varepsilon}$  aproximována diferenčním vztahem  $\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}}{\Delta t_i}$  a rovnice je zapsána např. pro diskrétní čas  $t_{i-1}$  (pak se jedná o Eulerovu zpětnou metodu). Hodnotu přetvoření  $\varepsilon_i$  lze snadno vypočítat z výsledné lineární rovnice a celý postup opakovat pro další časový interval. Navržený proces by stačil k velmi proměnlivému stresu, což vede k nutnosti počítat velmi krátké časové kroky pro správné zachycení vývoje stresu. Často se však stává, že vývoj stresu je plynulý i v delším časovém úseku, a je tedy možné využít delší časové kroky. Chyba vzniklá z diferenciální kompenzace se pak zvyšuje a Eulerova dopředná metoda může nakonec ztratit numerickou stabilitu, když časový krok překročí určitou kritickou hodnotu, což vede k nepoužitelným výsledkům. Uvedené důvody vedly k vývoji alternativní numerické metody, která je založena na tom, že pro konstantní pravou stranu rovnice, konstantní koeficienty a za daných předpokladů jsme schopni danou diferenciální rovnici řešit analyticky výše uvedeným popsaným exponenciálním algoritmem.

## 2.4 Analýza viskoelastického modelu ortotropního materiálu dřeva na testovacích úlohách

Používání dřeva jako konstrukčního materiálu je na vzestupu kvůli jeho vysokému poměru pevnosti k hmotnosti a pozitivnímu dopadu na životní prostředí, což představuje zásadní příspěvek k udržitelné budoucnosti. Vzhledem k tomu, že dřevěné výrobky mají dobrou nosnost při zatížení tlakem i tahem, lze je použít pro velké množství konstrukčních prvků. Dřevo je plně obnovitelný zdroj s nízkou uhlíkovou stopou a vysokou kapacitou skladování uhlíku. Ve srovnání s jinými konstrukčními materiály, jako je beton nebo ocel, jej lze snáze znovu použít nebo recyklovat na konci svého životního cyklu [67, 16]. Dřevěné konstrukce se v posledních desetiletích rychle rozvíjely kvůli svým velkým výhodám z hlediska udržitelnosti, v neposlední řadě v důsledku přechodu EU k ekologicky udržitelnějším stavebním postupům [86].

Dřevo jako anizotropní materiál má různé mechanické vlastnosti ve svých třech kolmých anatomických směrech: podélném (rovnoběžné s vlákny), radiálním, tangenciálním (kolmo na vlákna) a vykazuje různé konstitutivní vztahy při zatížení tahem a tlakem [37]. Kromě toho se mechanické vlastnosti dřeva, jako jsou pevnosti, normálové moduly pružnosti, smykové moduly pružnosti a Poissonovy čísla liší nejen podle anatomických směrů, ale také podle úrovně, rychlosti a typu zatížení (tlakové nebo tahové) [43].

Vlastnosti viskoelastického materiálu jsou vyžadovány pro numerickou simulaci časově závislého chování dřeva. Existuje několik prací zabývajících se časově závislými vlastnostmi dřeva a dřevěných kompozitů [72, 7, 44, 42, 82, 50, 40]. Zatímco základní informace o viskoelasticitě jsou uvedeny v [64] a [4], tak například zkoušky dotvarování ohybem lze nalézt v [102] a [15]. Zkoušky při zatížení tahem a tlakem lze nalézt v [83]. Teoretická analýza týkající se konstitutivních vztahů a modelů byla popsána v [47], [80], [41], [37].

### 2.4.1 Numerická analýza testovacích úloh

#### Materiálové charakteristiky

Pro srovnání dvou přístupů jsou prezentovány dvě sady vlastností ortotropního materiálu. V prvním případě jsou uvedeny běžné časově nezávislé vlastnosti dřeva a je třeba stanovit parametry ortotropního zobecněného Kelvinova řetězce z empirických křivek dotvarování optimalizační metodou hejnem částic (anglicky "particle swarm optimization") společně s metodou nejmenších čtverců, což je popsáno v předchozí kapitole 2.3.1. Druhý přístup vycházející z normy Eurokódu 5 [35] používá redukované hodnoty modulu pružnosti (redukce je provedena pomocí součinitele dotvarování  $\varphi$  (2.91)) v konečném čase po uplynutí jednoho roku ( $t = 365$  dní) (Tabulka 2.1).

$$\varphi = \frac{\varepsilon^c}{\varepsilon^e} \quad (2.91)$$

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^c = (1 + \varphi)\varepsilon^e \quad (2.92)$$

$$\frac{\sigma}{E_{L,t=365}} = \frac{\sigma}{E_{L,t=0}} (1 + \varphi_{t=365}) \quad (2.93)$$

$$E_{L,t=365} = \frac{E_{L,t=0}}{(1 + \varphi_{t=365})} \quad (2.94)$$

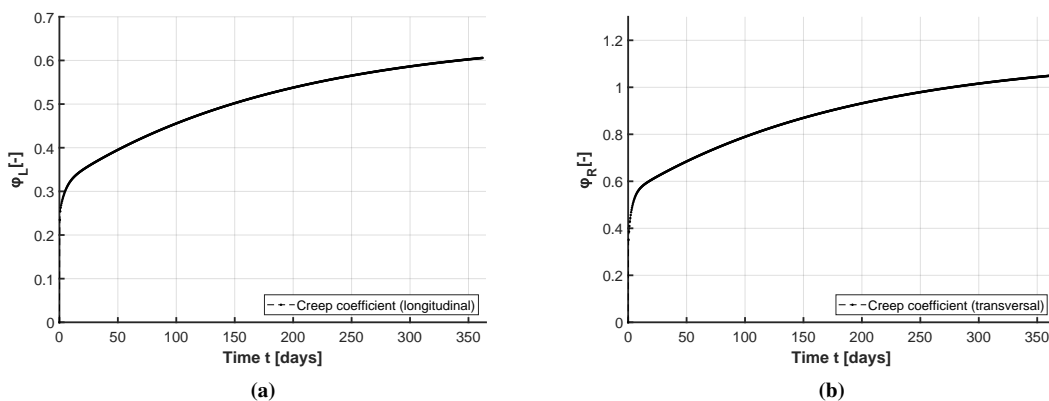
#### Hodnoty vlastností dřeva v čase $t = 0$ dní

Modul pružnosti $E$ [Pa]	Smykový modul pružnosti $G$ [Pa]	Poissonův součinitel $\nu$ [-]
$E_{L,t=0}$ 10 459 081 836	$G_{LR,t=0}$ 900 000 000	$\nu_{LR}$ 0.24
$E_{L,t=0}$ 1 480 099 502		

#### Hodnoty vlastností dřeva v čase $t = 365$ dní

Modul pružnosti $E$ [Pa]	Smykový modul pružnosti $G$ [Pa]	Poissonův součinitel $\nu$ [-]
$E_{L,t=365}$ 6 509 316 770	$G_{LR,t=365}$ 409 090 909	$\nu_{LR}$ 0.24
$E_{L,t=365}$ 721 212 121		

Tabulka 2.1: Materiálové vlastnosti dřeva podle Eurokódu 5



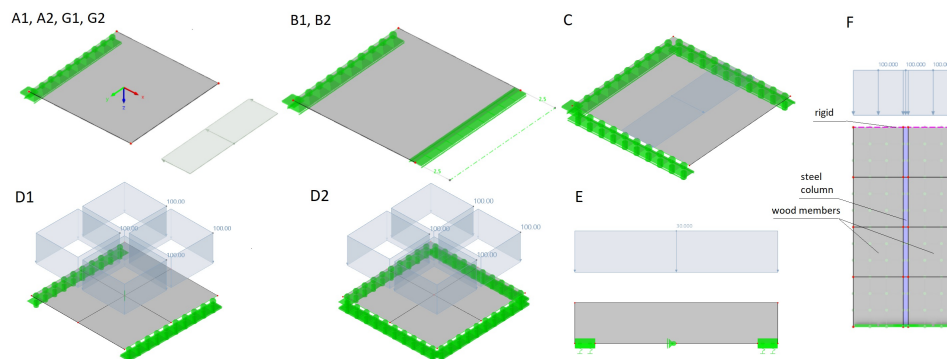
Obrázek 2.13: Časové křivky součinitele dotvarování v podélném a radiálním směru dřeva inspirované z prací [67], [16]



Časové křivky součinitele dotvarování v podélném i v příčném (radiálním) směru dřeva jsou inspirovány prací Ozyhara a kol. [67] a Bengtssona a kol. [16]. Experiment byl proveden pro kratší čas, takže měřená data součinitele dotvarování jsou v této práci extrapolována, aby byl postižen delší časový úsek celého jednoho roku (Obrázek 2.13). Zatěžovací síla je pro podélný směr dřeva 26.2 [MPa] a pro radiální směr dřeva 11.9 [MPa] [67].

### Testovací úlohy

Ortotropní verze zobecněného Kelvinova řetězce je algoritmována, naprogramována a implementována do softwaru založeného na metodě konečných prvků pro skořepinové (stěnové a deskové) prvky. Chování implementovaného Kelvinova řetězce je ukázáno na testovacích úlohách, kterých je celkem 9 a výsledky jsou srovnány s normovým přístupem [35]. Geometrie A1, A2, B1, B2, C, D1, D2, G1 a G2 jsou znázorněny jako jednoduchá stěna 1x1x1 m. Geometrie E je 2 metry dlouhý a 0.4 metru vysoký nosník a geometrie F je kompozitní stěna tvořená ocelovým jádrem a dřevěnými stěnami.



Obrázek 2.14: Specifikace benchmarkových úloh

Úlohy A1 a A2 jsou příklady 1D tlakových zkoušek čistého dotvarování s jednou pevně chycenou hraniční linií. Zatížení působí v podélném (A1) a v radiálním (A2) směru. Úlohy B1 a B2 jsou čistě relaxační úlohy s předepsaným posunem a jednou pevně chycenou hraniční linií. Opět platí, že B1 je zatěžován v podélném směru dřeva a B2 v příčném směru dřeva. Testovací úloha C ukazuje kombinaci dotvarování a relaxace na rovinném příkladu s jednou hraniční linií zatíženou konstantní silou a třemi pevně chycenými hraničními liniemi. Úloha D1 a D2 ukazuje deformaci (průhyb) ohýbané desky s plošným zatížením kolmo na desku (ve směru z). Deska D1 je podepřena na dvou protilehlých hranách a deska D2 má podpory na všech hranách. Úloha E představuje maximální dotvarování průhybu nosníku uprostřed jeho délky. Chování kompozitního materiálu dřevo-ocel (ocelové jádro obklopené dřevěnými stěnami) je prezentováno v úloze F. Poslední úlohy G1 a G2 ukazují časové chování dřevěné stěny s časově závislým vývojem zatížení, aby byl ukázán vliv historie zatížení na výsledek prostřednictvím stavových proměnných. Úloha G1 porovnává posun způsobený 3F působící během celého časového intervalu s dvoustupňovým zatížením F+2F a 2F+F. Úloha G2 porovnává posun způsobený působením 2F během celého časového intervalu s třístupňovým zatížením 2F-F+F a F-F+2F.

### 2.4.2 Výsledky a diskuze

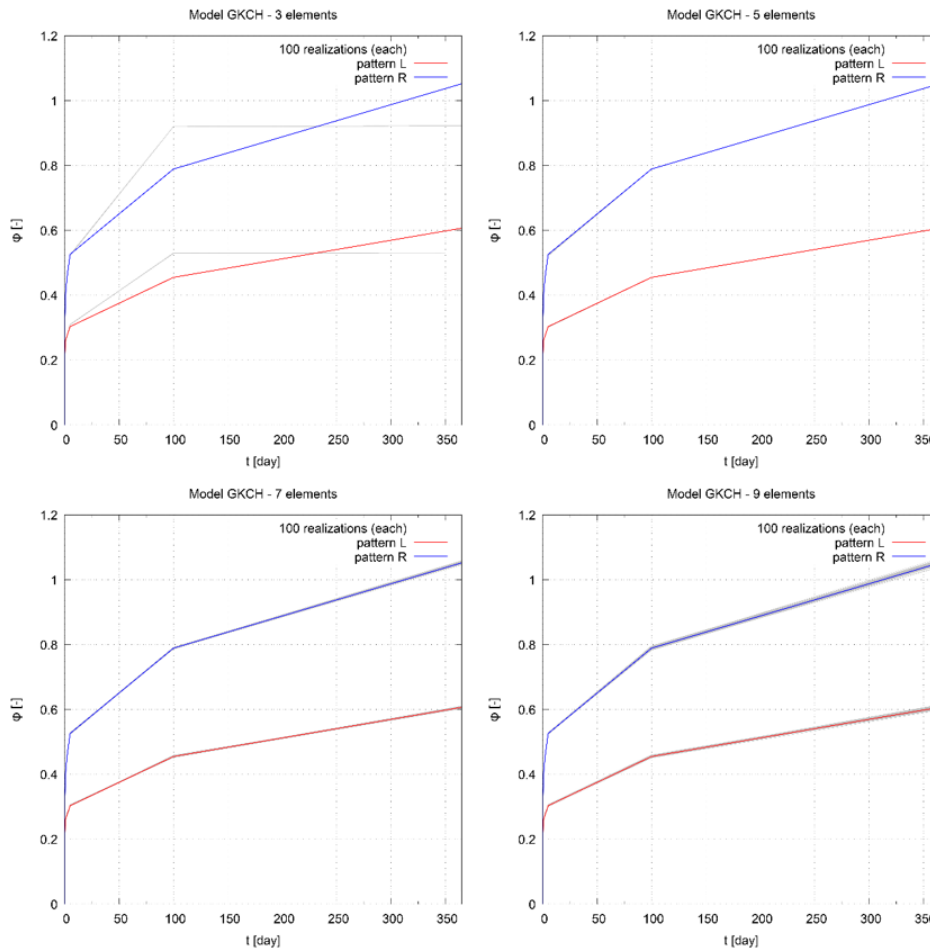
#### Výsledky identifikace parametrů Kelvinova řetězce metodou Particle swarm optimization

Tato část studie je zaměřena na vliv počtu článků Kelvinova řetězce na přesnost výsledné aproximace. Vliv počtu prvků je popsán na dvou (podélných a radiálních) křivkách dotvarování dřeva namáhaného tahem.

Každá identifikační úloha s optimalizací provedená pro 50 částic a 1000 iterací algoritmu byla opakována 100-krát. Výsledky ukázaly, že není možné aproximovat vstupní křivku pouze třemi články Kelvinova řetězce. Tento závěr je názorně demonstrován na obrázku 2.15 (vlevo nahoře), kde je patrná poměrně velká odchylka výsledku od vstupní křivky. Hodnota průměrné chyby RMSE uvedená v tabulce 2.2 je řádově vyšší než v jiných příkladech.

Počet článků	$\overline{\text{RMSE}} \pm \sigma_{\text{RMSE}}$	
	L	R
3	$0.027565871 \pm 4.79 \cdot 10^{-7}$	$0.047621613 \pm 7.56 \cdot 10^{-6}$
5	$0.001266289 \pm 1.27 \cdot 10^{-4}$	$0.002733644 \pm 2.84 \cdot 10^{-4}$
7	$0.002261494 \pm 1.13 \cdot 10^{-3}$	$0.003279400 \pm 8.85 \cdot 10^{-4}$
9	$0.003336227 \pm 1.03 \cdot 10^{-3}$	$0.003554915 \pm 7.49 \cdot 10^{-4}$

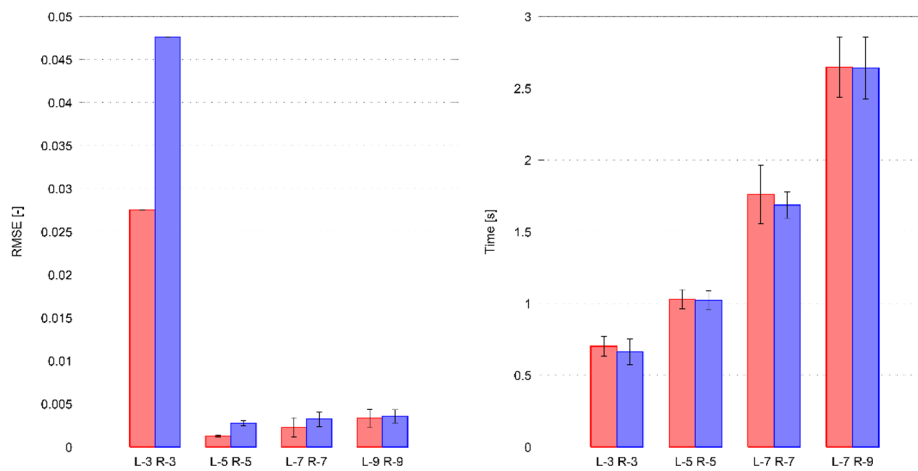
Tabulka 2.2: Průměrné RMSE chyby



Obrázek 2.15: Srovnání jednotlivých identifikací a vstupní časové křivky součinitele dotvarování

Nejpřesnějších výsledků je dosaženo při použití pěti Kelvinových-Voigtových článků v sérii. Zprůměrované chyby RMSE dosáhly hodnot  $0.001266289 \pm 1.27 \cdot 10^{-4}$  pro podélné dotvarování a  $0.002733644 \pm 2.84 \cdot 10^{-4}$  pro radiální dotvarování. Tyto výsledky jsou graficky k nerozeznání od vstupních časových křivek součinitele dotvarování. V případě sedmi a devíti prvků jsou výsledky také dostatečně přesné, ale průměrná časová náročnost výpočtu jedné identifikace je 1.7krát vyšší pro sedm prvků a 2.6krát vyšší pro

devět článků 2.16. Viditelné rozdíly lze vždy zaznamenat na konci křivky, jak je znázorněno na obrázku 2.15. Tyto důvody vedly k rozhodnutí použít pro numerický model pět prvků Kelvinova řetězce.



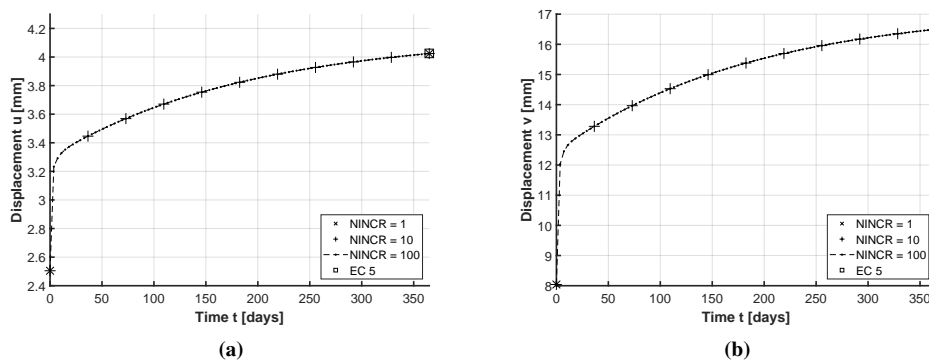
Obrázek 2.16: Průměrné RMSE chyby a časová náročnost jednotlivých identifikací

### Výsledky numerických simulací

Ortotropní viskoelastický materiálový model založený na zobecněném Kelvinově řetězci je analyzován pomocí numerických testovacích úloh.

#### A1 a A2: Analýza zobecněného Kelvinova řetězce na úloze čistého dotvarování

Na obrázku 2.17 jsou zobrazeny průběhy posuvů v čase vypočítané v jednotlivých směrech dřeva pro konstantní zatížení. Na tomto obrázku lze vidět, že výpočet Kelvinovým řetězcem dává stejné výsledky pro libovolnou velikost časového kroku (pro libovolný počet časových přírůstků) a tyto výsledky jsou ve shodě se standardním (normovým) přístupem redukce modulů pružnosti v čase a to jak pro podélný směr dřeva (vlevo), tak i pro příčný směr dřeva (vpravo). Tato shoda byla za předpokladu správného stanovení parametrů Kelvinova řetězce očekávána, protože se jedná o čisté dotvarování a to nezávisle v jednom i druhém směru dřeva. Tímto obrázkem je tedy znovu potvrzena správnost identifikace parametrů Kelvinova řetězce a správnost tohoto modelu při konstantním silovém zatížení v podélném a příčném směru odděleně.

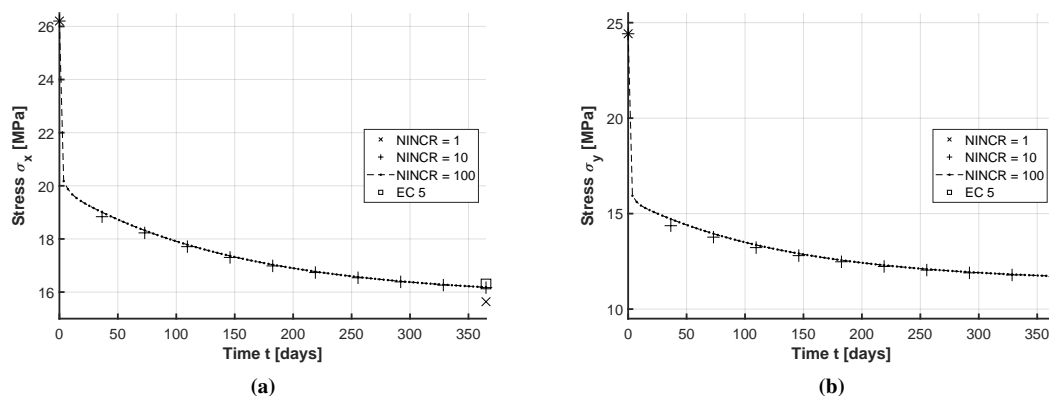


Obrázek 2.17: Úlohy A1 a A2: Časový průběh posuvu v podélném (vlevo) a v radiálním (vpravo) směru

#### B1 a B2: Analýza zobecněného Kelvinova řetězce na úloze čisté relaxace

Na obrázku 2.18 jsou zobrazeny průběhy napětí v čase vypočítané v jednotlivých směrech dřeva pro konstantní deformaci (předepsaný posuv) – tzv. relaxační zkouška. Na tomto obrázku lze vidět, že výpočet

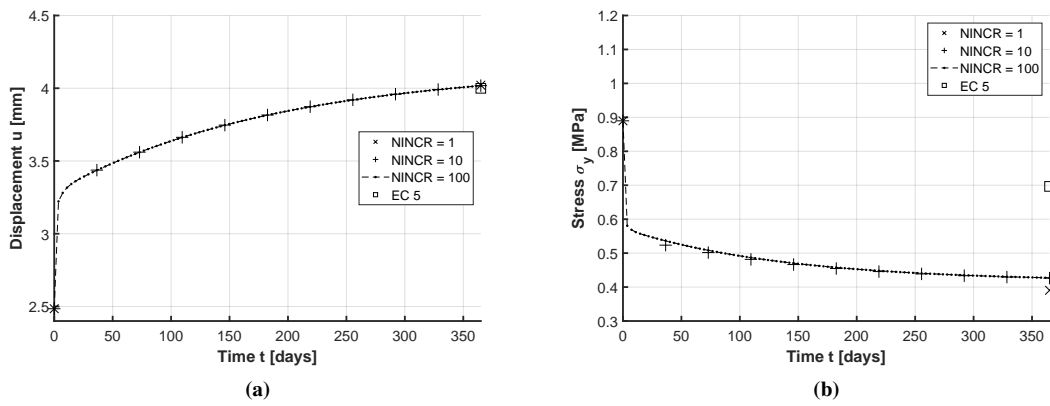
Kelvinovým řetězcem nedává stejné výsledky pro libovolnou velikost časového kroku. Tyto výsledky jsou nyní závislé na počtu časových kroků a jsou ve shodě se standardním (normovým) přístupem redukce modulů pružnosti pouze pro více časových kroků (pro 100 a 1000 přírůstků byly výsledky už téměř totožné, proto jsou uvedeny výsledky pouze do počtu 100 přírůstků) a to jak pro podélný směr dřeva (vlevo), tak i pro příčný směr dřeva (vpravo). Jde vidět, že je rozdíl mezi výslednými časovými průběhy napětí pro 1, 10 a 100 časových přírůstků. Tento drobný rozdíl byl očekáván, protože se nejedná o čisté dotvarování, ale naopak dochází k relaxaci napětí s nelineární časovou změnou napětí a z výše uvedené teorie a předpokladů Kelvinova řetězce je jasné, že Kelvinův řetězec je s jedním časovým přírůstkem přesný jen pro lineární změnu napětí (proto při čistém dotvarování stačí jeden časový přírůstek), protože tam je napětí dokonce konstantní, ale při relaxaci (nelineární změně napětí v čase) je u Kelvinova řetězce potřeba volit více časových kroků (v našem případě minimálně 10). Pokud by nebyla použita pokročilejší časová integrace Kelvinova řetězce, která předpokládá lineární změnu napětí v jednom časovém kroku, ale místo toho by se použila integrace, která předpokládá konstantní napětí v celém časovém kroku, tak by pro přesné vystižení relaxační křivky bylo potřeba volit ještě mnohem více časových kroků (řádově až 1000x více), což by významně prodloužilo celkový výpočetní čas a pro menší počet časových kroků by byly dokonce problémy s konvergencí (výpočet by byl nestabilní, někdy by divergoval nebo osciloval) a přesnost výsledku by byla hodně špatná.



Obrázek 2.18: Časový průběh napětí v podélném (vlevo) a v radiálním (vpravo) směru

### C: Analýza zobecněného Kelvinova řetězce na úloze kombinovaného dotvarování s relaxací

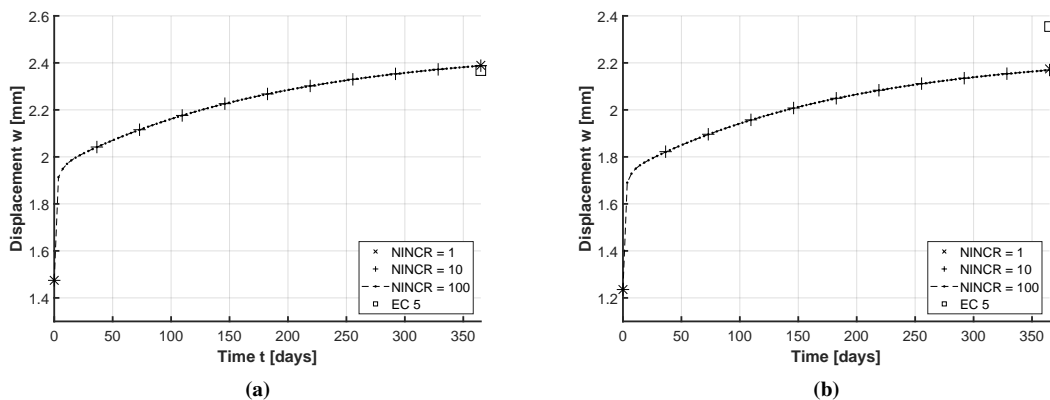
Na obrázku 2.19 jsou zobrazeny průběhy deformace (posuvu) ve směru  $x$  a napětí ve směru  $y$  v čase vy počítané pro konstantní rovnoměrné liniové silové zatížení ve směru  $x$  a zabránění deformacím ve směru  $y$  vhodnou volbou okrajových podmínek (podpor). Na tomto obrázku lze vidět, že výpočet Kelvinovým řetězcem dává stejné výsledky pro libovolnou velikost časového kroku pro posuv ve směru  $x$ , ale ve směru  $y$  se napětí liší ve srovnání s normovým přístupem prosté redukce modulů pružnosti. Tyto výsledky jsou nyní pro napětí ve směru  $y$  nejen závislé na počtu časových kroků, ale ani nejsou ve shodě se standardním (normovým) přístupem redukce modulů pružnosti pro více časových kroků. Tento rozdíl ve výsledné napjatosti ve směru  $y$  je dán ortotropním model Kelvinova řetězce, který se při více-osé napjatosti chová jinak než standardní lineární výpočet s redukovanými moduly pružnosti. Tento rozdíl byl také očekáván kvůli jiné povaze obou přístupů při více-osé napjatosti.



Obrázek 2.19: Časový průběh deformace v podélném směru (vlevo) a napětí v radiálním směru (vpravo)

### D1 and D2: Analýza zobecněného Kelvinova řetězce na úloze ohýbané desky

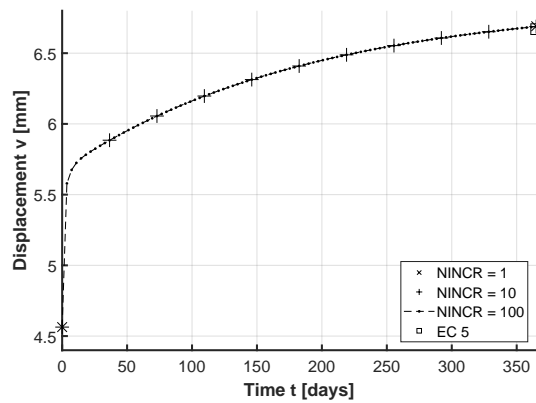
Na obrázku 2.20 jsou zobrazeny časové průběhy průhybu desky ve dvou variantách. První varianta je s podepřením desky u dvou protilehlých stran (viz graf vlevo – značeno jako úloha D1). Druhá varianta s podepřením podporami ze všech čtyř stran (viz 2.14 graf vpravo – značeno jako úloha D2). V první variantě (D1) je vyvolána napjatost dominantně v podélném směru  $x$  a ve druhém směru je zanedbatelná, proto se velmi dobře shodují výsledky Kelvinova řetězce s normovým přístupem. Ve druhé variantě (D2) je vyvolána napjatost v obou směrech (podélném  $x$  i příčném  $y$  směru), proto se neshodují výsledky Kelvinova řetězce s normovým přístupem. Tento rozdíl byl také očekáván kvůli jiné povaze obou přístupů při víceosé napjatosti, protože při víceosé napjatosti se ortotropní model Kelvinova řetězce chová jinak než standardní lineární výpočet s redukovanými moduly pružnosti. Za povšimnutí stojí také to, že výsledky nezávisí na počtu časových kroků ani v jedné z variant, což se také očekávalo, protože v obou variantách jde v podstatě o čisté dotvarování bez významné relaxace napětí.



Obrázek 2.20: Časový průběh průhybu desky podepřené na dvou protilehlých stranách - úloha D1 (vlevo) a podepřené na všech stranách - úloha D2 (vpravo)

### E: Analýza zobecněného Kelvinova řetězce na úloze stěnového modelu nosníku

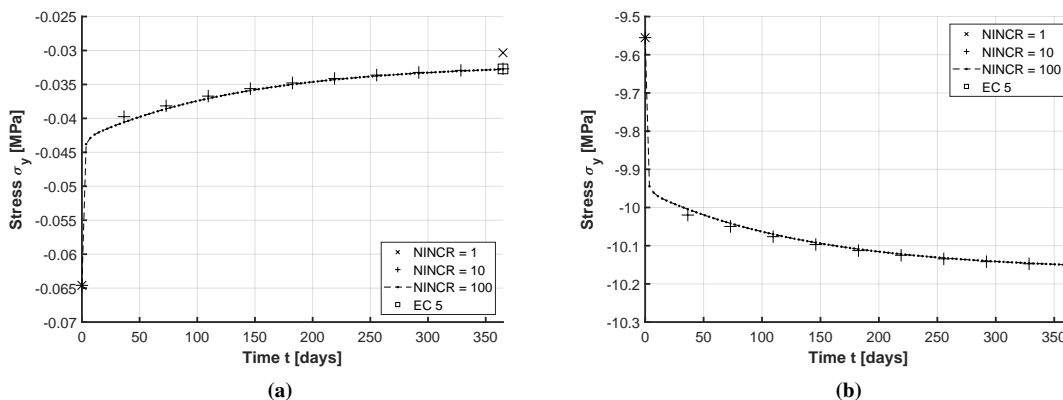
Na obrázku 2.21 je zobrazen časový průběh průhybu stěnového modelu nosníku (stěnový model nosníku znamená, že je nosník modelován 2D rovinnou napjatostí). Výsledky nezávisí na počtu časových kroků, což se také očekávalo, protože jde v podstatě o čisté dotvarování bez významné relaxace napětí. V této úloze je vyvolána napjatost dominantně v podélném směru  $x$  a ve druhém směru je zanedbatelná, proto se velmi dobře shodují výsledky Kelvinova řetězce s normovým přístupem.



Obrázek 2.21: Časový průběh průhybu stěnového modelu nosníku

### F: Analýza ortotropního zobecněného Kelvinova řetězce na stěnovém modelu

Na obrázku 2.22 vlevo je zobrazen časový průběh napětí ve dřevě, na kterém jde vidět, že tlakové napětí ve dřevě relaxuje (snižuje se) v důsledku toho, že mu ocel brání v tlakovém dotvarování. Oproti tomu v oceli tlakové napětí v čase narůstá, protože na sebe přenáší část zrelaxovaného napětí dřeva. V oceli se tedy mění napětí v čase i přesto, že oceli byl přiřazen lineární časově nezávislý materiálový model – je to důsledek časově závislého (viskózního) chování okolního dřeva, které je s ocelovou částí propojeno. Výsledky závisí na počtu časových přírůstků, protože jde o relaxaci napětí ve dřevě a s rostoucím počtem časových přírůstků se výsledky blíží k normovému výsledku, protože jde dominantně o jedno-osou napjatost, kde napětí v kolmém směru hraje zanedbatelnou roli.

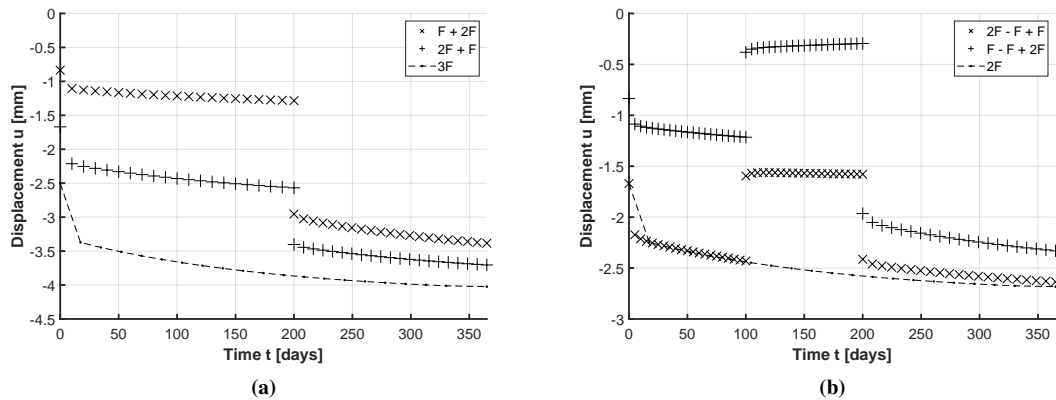


Obrázek 2.22: Vývoj napětí ve dřevěné stěně (vlevo) a v ocelovém jádru (vpravo)

### G: Analýza modelu zobecněného Kelvinova řetězce na příkladu proměnlivého zatížení a jeho výhod

Na tomto posledním obrázku 2.23 jde vidět, že námi testovaný visko-elastický model s diferenciální formulací založenou na Kelvinově řetězci správně funguje pro různou historii zatížení bez nutnosti ukládat stavové proměnné ve všech časových krocích, ale stačí stavové proměnné pouze z předchozího časového kroku. Jde vidět, že u viskózních materiálových modelů výsledné (v konečném čase) hodnoty deformací opravdu závisí na historii zatížení na rozdíl od lineárních modelů bez viskozity. Velká výhoda našeho visko-elastického modelu spočívá 1) v jeho diferenciální formulaci pomocí Kelvinova řetězce a 2) v přesné analytické integraci této diferenciální formulace v jednom časovém přírůstku kvůli předpokladu lineární změny napětí v tomto časovém přírůstku. Tento předpoklad lineární změny napětí v jednom časovém přírůstku je třeba mít na paměti při volbě velikosti časového kroku a např. v případě relaxace napětí, kdy se napětí v čase mění nelineárně, je třeba celý časový úsek rozdělit na více časových kroků, na kterých už napětí bude mít alespoň

přibližně lineární průběh.



**Obrázek 2.23:** Úloha s časově proměnlivým zatížením: časový průběh posunu v podélném směru ve dvou fázích (vlevo) a ve třech fázích (vpravo) pro různou historii zatížení

V rámci této studie byl algoritmován, naprogramován a do výpočetního softwaru založeném na metodě konečných prvků implementován časově závislý viskoelastický materiálový model "Zobecněný Kelvinův řetězec ortotropního materiálu" pro skořepinové (stěnové a deskové) prvky. Tento materiálový model byl numericky analyzován a potvrdilo se, že je vhodný pro výpočet dotvarování a při rozumné volbě velikosti časového kroku také pro relaxaci napětí, jak bylo ukázáno na vybraných testovacích úlohách. Dále bylo na vybraných úlohách ukázáno, jak dokáže daný model zohlednit historii zatížení bez nutnosti ukládat stavové proměnné ve všech počítaných časech, což je důsledek jeho diferenciální formulace. Byl analyzován vliv velikosti časového kroku na přesnost výsledku, a protože jde o model vhodný primárně pro dotvarování, tak bylo prokázáno, že při lineární změně napětí v čase je díky přesné exponenciální integraci postačující pouze jeden časový krok pro přesný výsledek, ale pokud se napětí v čase mění nelineárně, tak je třeba úlohu počítat ve více časových krocích, jejichž velikost je dána mírou nelinearity změny napětí (viz úlohy, kde bylo bráněno volné deformaci například okrajovými podmínkami - podporami). Na závěr lze konstatovat, že analyzovaný viskoelastický model pro ortotropní materiál dřeva lze použít pro všechny typy úloh, samozřejmě při rozumném nastavení velikosti časových kroků.

## 2.5 Analýza viskoelastického modelu izotropního materiálu betonu na experimentální úloze

Smršťování a dotvarování jsou dvě důležité fyzikální reologické vlastnosti betonu, které způsobují zvýšení deformace trvale dlouhodobě zatížené konstrukce. Dodatečné přetvoření betonových konstrukcí způsobené těmito jevy je cca třikrát větší než hodnota okamžité pružné deformace (v některých případech i větší). V souladu s příslušnou evropskou normou by proto měly být tyto vlivy zohledněny při hodnocení mezního stavu použitelnosti betonových konstrukcí, a pokud jsou významné, je třeba zohlednit tyto jevy i pro ověření mezního stavu únosnosti kvůli redistribuci vnitřních sil v důsledku reologie. V betonu dochází k dotvarování při všech úrovních namáhání a je závislé na mnoha parametrech, jako je třída cementu, jakost betonu, relativní vlhkost prostředí, povrch konstrukce ve styku s okolním vzduchem (schnoucí povrch) a stáří betonu (doba po odlití) v momentu zatížení. Smršťování betonu je nezávislé na zatížení a je způsobeno poklesem obsahu pórové vody ve ztvrdlém betonu a je závislé především na relativní vlhkosti prostředí. Tyto reologické vlastnosti jsou popsány např. v práci Bažanta a Jiráka [10]. Účinky dotvarování a smršťování by měly být zohledněny během procesu navrhování konstrukcí. Nedostatečná předpověď nebo zanedbání dotvarování může vést ke strukturálním poruchám, jako například v případě zřícení terminálu 2E letiště Roissy v květnu 2004 [25]. Oba reologické jevy (dotvarování a smršťování) lze odhadnout podle evropské normy pro betonové konstrukce EN 1992-1-1 [79]. V EC2 [79] je dotvarování řešeno součinitelem dotvarování (funkce času), který je závislý na mnoha parametrech, např. na relativní vlhkosti, ploše betonového prvku, který je ve styku se vzduchem (schnoucí plocha), jakost betonu, stáří betonu v době zatížení. Dotvarování



betonových konstrukcí je analyzováno např. v práci Daou a kol. [26].

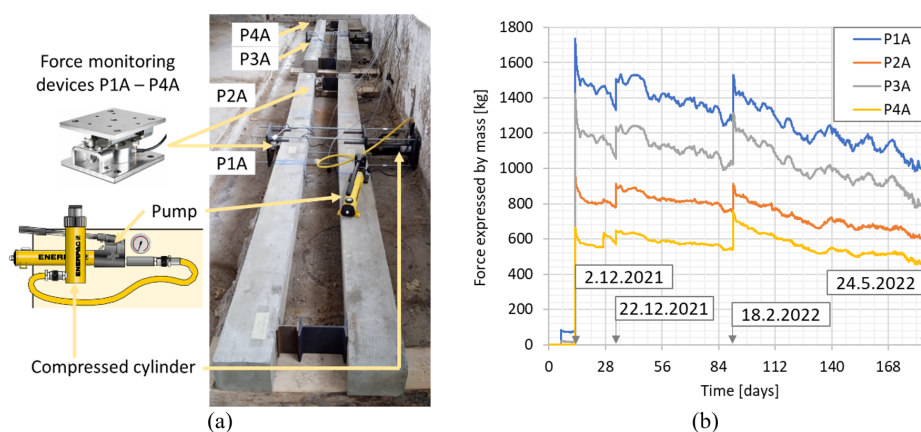
V této studii je srovnán výpočet pomocí implementovaného zobecněného Kelvinova řetězce s experimentem a s výpočty v softwaru ANSYS provedenými kolegy z FAST VUT v Brně (doc. Hradil, Ing. Jindra). Betonové nosníky jsou vystaveny trvalým silám (od tlakových válců), z nichž každý tlačí jednu sadu dvou nosníků k sobě. Poklesy těchto sil (relaxace) jsou dlouhodobě sledovány a data jsou zaznamenávána. Po uplynutí jistého času se síly ve válcích opět mírně zvýšily, aby byl sledován vliv historie zatížení. Poskytnuty jsou také časové průběhy relativní vlhkosti a okolní teploty vzduchu. Kolegové dále provedly numerické analýzy metodou konečných prvků predikující pokles sledovaných sil pomocí softwaru ANSYS [1] s předpoklady dotvarování a smršťování pomocí EC2 [79].

### 2.5.1 Numerická analýza experimentální úlohy

V této studii jsou srovnány výsledky numerických analýz s experimentálními daty dvou sad betonových nosníků sprážených s vodorovně ohraničenými nosníky systémem ocelových desek a prutů. Nosníky byly k sobě přitlačovány v horizontálním směru silou v tlakovém válci. Delší dobu byl sledován pokles předpínací síly ve válci (relaxace napětí) za účelem vyhodnocení vlivů reologických projevů betonu. Během sledovaného časového úseku byla klesající síla ve válci zvýšena dodatečným natlakováním.

#### Experiment

Experimentální systém se skládá z dvojice betonových nosníků C35/45, každý o stejném průřezu 150x200 mm, které jsou vodorovně ohraničeny systémem ocelových desek, ocelových tyčí a stlačeného ocelového válce (2.24). Dohromady jsou dokumentovány experimentální výsledky ze dvou sad takových nosníků. Válce byly slisovány 2.12.2021, což je přibližně 28 dní po odlití betonových trámů. Tlakem na válec byla prostřednictvím systému ocelových plátů a tyčí zavedena síla, která působí v bočním směru a tlačí dva nosníky k sobě. Přímou do tohoto systému jsou umístěna zařízení pro sledování síly (obr. 1 a – P1A, P3A), ostatní monitorovací zařízení jsou umístěna nad podpěrami (obr. 1 a – P2A, P4A). Časové průběhy těchto sil vyjádřené hmotností v kilogramech jsou znázorněny na obrázku 1b. Hodnota síly je sledována v intervalu 20 minut po dlouhou dobu za účelem zkoumání reologických účinků. V této studii je dokumentován časový interval do 24.5.2022 (obrázek 1b). Během tohoto období byla klesající síla v tlakovém válci zvýšena dvakrát, 22.12.2021 a 18.2.2022.



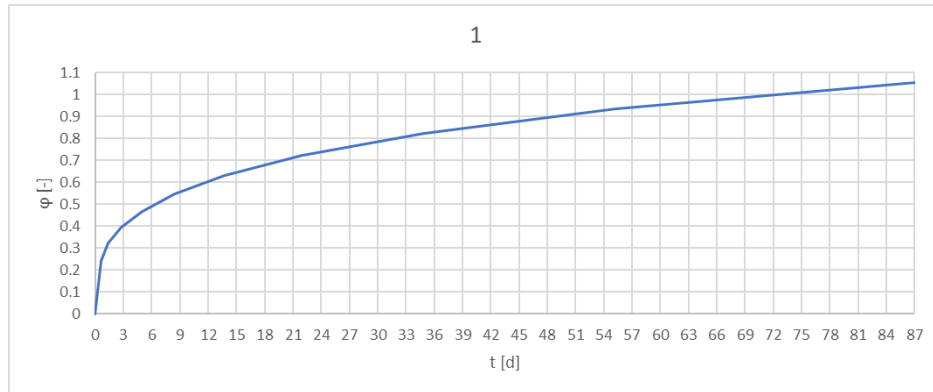
Obrázek 2.24: (a) Experiment, (b) Měřená síla vyjádřena jako hmotnost

#### Materiálové charakteristiky

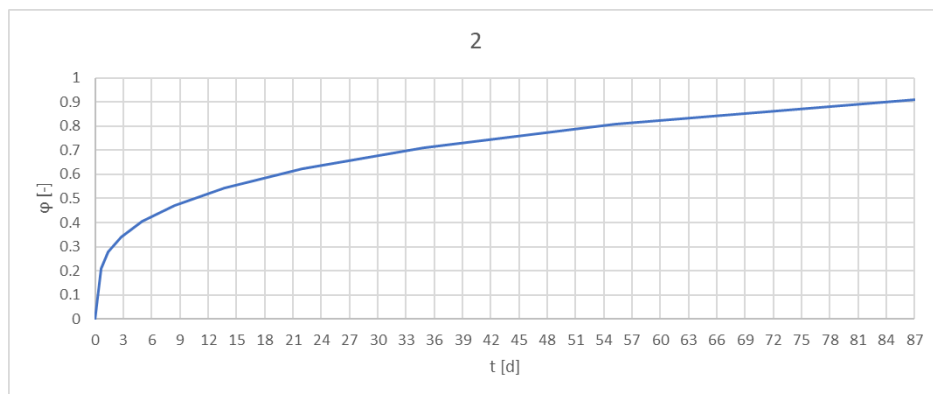
Použité jsou betonové nosníky C35/45 s průřezem 150x200 mm a součinitel dotvarování je stanoven podle EC2 [79] s ohledem na relativní vlhkost vzduchu 78,8 %, což je průměrná hodnota dat do cca 91. dne 2.25. Poté je relativní vlhkost menší, což by způsobilo o něco větší dotvarování. Největší část dotvarování nastává na začátku časového intervalu, proto by toto zjednodušení uvažování relativní vlhkosti na úrovni 78,8 % mohlo být použitelné v rámci požadované přesnosti numerických analýz, ale i přesto byl výpočet proveden



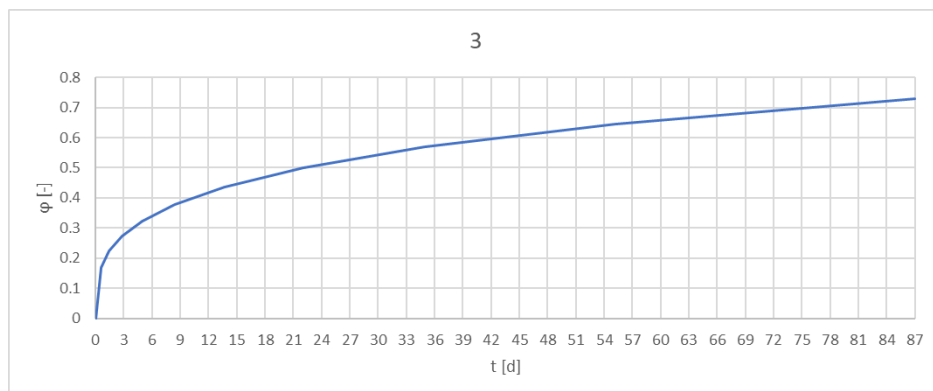
pro další dvě časové křivky součinitele dotvarování 2.26, 2.26. Vliv teplotních změn na dotvarování a smrštění nebyl brán do úvahy, což může ovlivnit výpočet. Tyto teplotní efekty lze zavést začleněním rovnic B.9 a B.10 z přílohy B EN 1992-1-1 [79]. Vliv různých teplot by vycházel z průměrných hodnot z celého analyzovaného časového období, lokální nárůsty a poklesy síly by tedy nebyly zachyceny. Nejdůležitější je tedy porovnat sílu z experimentu se silou vypočítanou pomocí Kelvinova řetězce na konci analyzovaného časového období.



**Obrázek 2.25:** Časová křivka součinitele dotvarování v RFEMu stejná jako v ANSYSu



**Obrázek 2.26:** Druhá časová křivka součinitele dotvarování v RFEMu

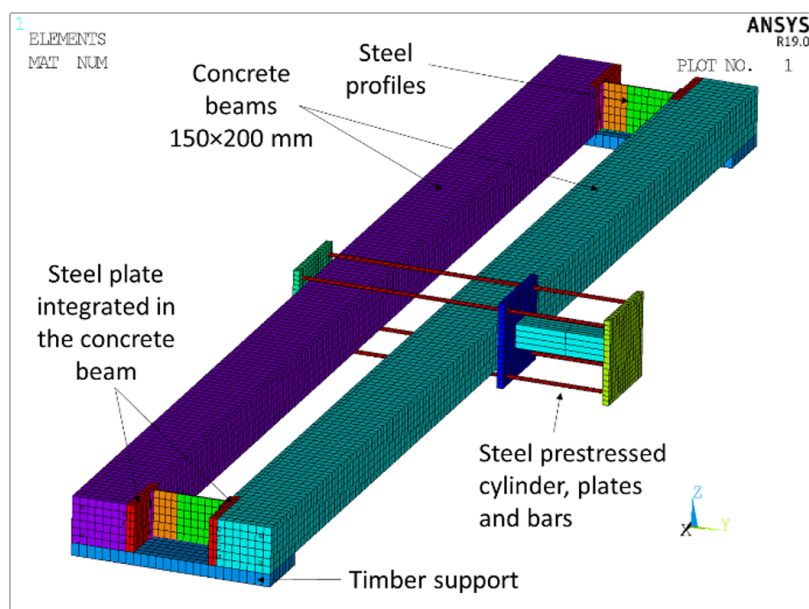


**Obrázek 2.27:** Třetí časová křivka součinitele dotvarování v RFEMu

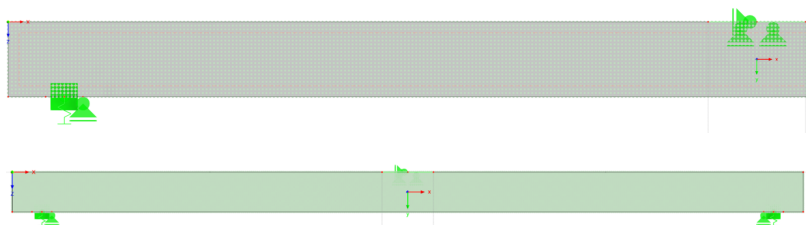
## Numerická analýza

Numerický model konečných prvků byl vytvořen v softwaru ANSYS [1] a v softwaru RFEM [33]. V ANSYSu jsou betonové nosníky modelovány 3D konstrukčními prvky SOLID185, stejně jako ocelové desky

(integrované do betonových nosníků) nad podpěrami, dřevěné podpěry a válec pro předpětí. Výztuž byla modelována pomocí specializovaných prvků REINF184. Geometrie numerického modelu spolu s detaily, oblastmi definovaných kontaktů a okrajovými podmínkami (deformačními omezeními) je dobře dokumentována na obrázku 2.28. V softwaru RFEM je model zjednodušen, je modelován pouze jeden nosník pomocí 2D prvků v rovinné napjatosti 2.29 a je zvolen viskoelastický materiálový model zobecněný Kelvinův řetězec. V softwaru RFEM jsou definovány tři zatěžovací stavy s předepsanými deformacemi: 4.114 mm, 4.531 mm, 5.135 mm.



Obrázek 2.28: MKP model v softwaru ANSYS

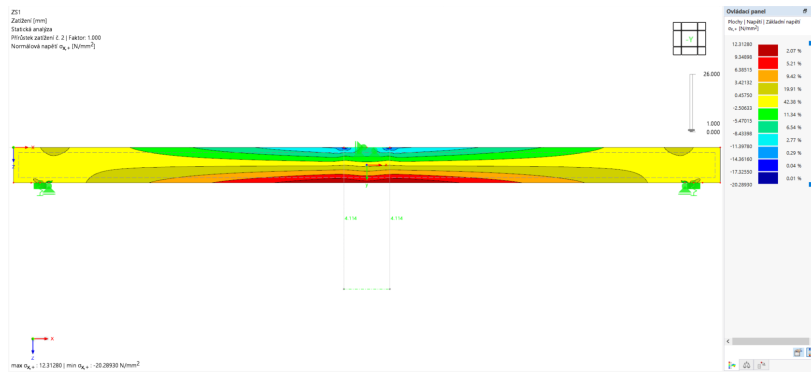


Obrázek 2.29: MKP model v softwaru RFEM - nahoře vysíťovaná leva polovina modelu a dole celý model bez sítě

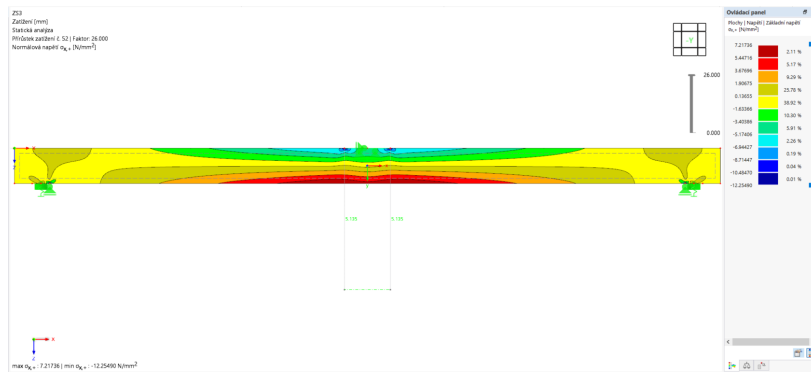
## 2.5.2 Výsledky a diskuze

Numerické analýzy metodou konečných prvků byly provedeny v softwaru ANSYS [1] a RFEM [33]. V softwaru ANSYS je lineární elastický materiálový model pro beton použitý v kombinaci s modelem dotvarování (v knihovně ANSYS označen jako „modified time hardening“). Parametry tohoto modelu dotvarování byly předem zkalibrovány, takže odezva je v souladu s předpoklady dotvarování podle EN 1992-1-1 po uvažované dobu analýzy. V softwaru RFEM byl použitý mnou implementovaný model Kelvinova řetězce a stejný součinitel dotvarování podle EC2 [79] jako v ANSYSu. Na obrázku 2.30 je barevně ukázáno napětí ve směru délky nosníku okamžitě po zatížení (2.12.2021) počítané v softwaru RFEM a na obrázku 2.31 je barevně ukázáno napětí ve směru délky nosníku na konci experimentu (24.5.2022) počítané v softwaru RFEM.

Nejdůležitějším výsledkem je časový průběh síly (v tlakovém válci experimentu) způsobující ohyb nosníku pro danou vyvolanou okamžitou deformaci (průhyb), která byla během časového výpočtu dvakrát zvýšena. Na obrázku 2.32 je vidět, jak ohýbaný nosník relaxuje a jsou tam vidět rozdíly mezi kvazistatickým výpočtem v softwaru RFEM, ANSYS a experimentem. Výsledky ze softwaru ANSYS se liší hlavně kvůli tomu, že byl použitý jiný viskoelastický materiálový model. V RFEMu byl použitý zobecněný Kelvinův

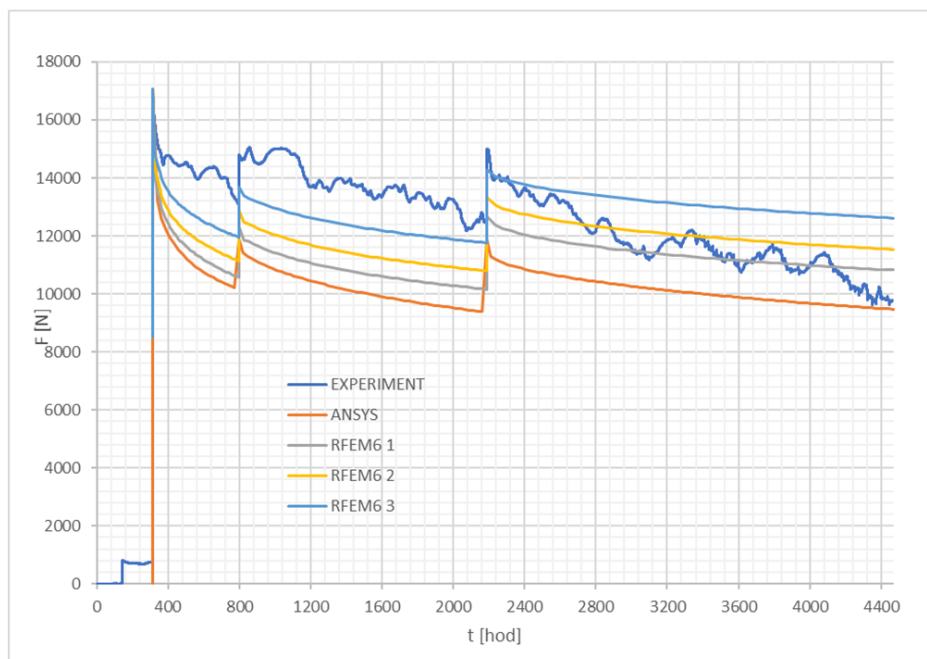


Obrázek 2.30: Napětí ve směru délky nosníku okamžitě po zatížení (2.12.2021) v softwaru RFEM



Obrázek 2.31: Napětí ve směru délky nosníku na konci experimentu (24.5.2022) v softwaru RFEM

řetězec a v ANSYSu byl použitý materiálový model označený v knihovně ANSYSu jako „modified time hardening“. Rozdíly jsou také kvůli tomu, že MKP model v RFEMU je o dost zjednodušený ve srovnání s MKP modelem v ANSYSu (2D model, jen jeden nosník, tření na dřevěných podpórách řešeno jen pomocí odporu od liniové elastické podpory).



Obrázek 2.32: Relaxace ohýbaného betonového nosníku

U obou dvou sad betonových nosníků vede relaxace síly v tlakovém válci předpovězená numerickými

analýzami na základě předpokladů EC2 [79] k většímu snížení síly, než bylo experimentálně naměřeno. Vzhledem k hodnotám na konci analyzovaného období je relativní rozdíl mezi numerickou analýzou a experimentem přibližně 20 % (10 - 12 kN) 2.32. Tento rozdíl lze vysvětlit tím, že byl použitý viskoelastický materiálový model bez kombinace s modelem poškození. V reálu byl beton potrhán kvůli překročení napětí ve směru délky nosníku nad mez pevnosti v tahu 2.30, což v této úloze nebylo bráno do úvahy. Pokud by toto tahové poškození bylo bráno do úvahy, tak by musela být modelována i podélná normálová výztuž, která by tahové zatížení přenesla a tolik by nedotvarovávala jako samotný viskoelastický beton bez porušení a to by znamenalo lepší shodu výsledků výpočtu s experimentem.

Celkově, vezmeme-li v úvahu zjednodušené předpoklady, jako je zanedbání poškození (tedy i výztuže), smrštění, teplotní závislosti dotvarování, jak navrhuje EC2, výsledky založené na numerických analýzách a experimentu jsou v poměrně dobré shodě (20 – 25% rozdíl). Výsledky modelu by mohly být vylepšeny např. zohledněním poškození, smrštění, teplotní závislosti, odlišným přístupem k průměrování relativní vlhkosti. V další studii by mohla být provedena další detailnější analýza s přesnějším zohledněním poškození, relativní vlhkosti, s přihlédnutím k vlivu teploty, který by měl být obecně přesnější (v rámci předpokladů EC2). Srovnání s experimentálními daty lze provádět i za delší časové období a s různou historií předepsané deformace.

## 3 | Kvazistatická analýza viskoelastického modelu s poškozením

### 3.1 Přehled problematiky

Použitelnost betonových a dřevěných konstrukcí je multifyzikální problém, kde je provázána viskoelastická s plasticitou nebo poškozením. V této práci je pro stručnost a názornost okamžitá nelinearita materiálu modelována pouze pomocí modelu poškození (modeluje se tím i plasticita materiálu např. v tlaku). Všechny modely v této práci předpokládají kontinuum (spojité prostředí). Pro numerickou analýzu je použita klasická metoda konečných prvků bez rozšíření prostoru řešení o nespojitě funkce (tedy metody jako XFEM, GFEM, PUM atd. nejsou probírány). Kohezní modely (pomocí speciálních elementů, například v metodě konečných prvků na rozhraní mezi klasickými elementy mechaniky kontinua) také nejsou probírány, stejně tak diskrétní modely nejsou záměrně probírány, protože nebyly cílem této práce. Práce je tedy zaměřena čistě jen na konstitutivních vztazích mechaniky kontinua se spojitými modely poškození (damage mechanics, smeared crack theory).

Materiálový model je založen na kombinaci viskoelastického modelu (zobecněného Kelvinova řetězce) s modelem poškození. Kombinace těchto dvou modelů je důležitá pro reálnější časově závislý popis chování betonu nebo dřeva v konstrukci, protože beton i dřevo vykazují nejen okamžitou nelineární odezvu, ale také časově závislou odezvu v důsledku viskózního charakteru materiálu. Cílem je algoritmovat, implementovat a otestovat jev zvaný jako “creep damage”, tedy poškození způsobené dotvarováním betonu nebo dřeva pomocí materiálového modelu kombinující viskoelastický Kelvinův řetězec s modelem poškození. Je ukázáno, že: a) poškození může vzniknout okamžitě po aplikaci zatížení a pak se v čase vyvíjí (roste a šíří dále), a také je ukázáno, že: b) okamžitě po zatížení se materiál nemusí poškodit, ale poškození může vzniknout až po uplynutí určité doby od zatížení, a až potom se dále vyvíjí. Vliv dotavování na inicializaci poškození a na jeho růst i šíření lze upravit parametrem, který v této práci nazývám jako parametr *alpha*, aby se lépe zohlednil vázaný efekt mezi dotavováním a poškozením.

Publikací zabývajících se návrhem a analýzou materiálového modelu kombinující dotavování a poškození pro popis nelineárního a časově závislého chování materiálu není mnoho, ale pro beton (na rozdíl od dřeva) lze najít alespoň tyto, kde je několik experimentálních nebo analytických postřehů týkajících se nelineárního (terciálního) dotavování pro beton ([12, 9, 9, 70, 66, 34, 65, 74]) nebo pro dřevo [46, 42]. Například dlouhodobé dotavování může zvětšit průhyby ve sloupech, panelech, obloucích a skořepinách prostřednictvím geometrického spojení axiálního (membránového, stěnového) a ohybového působení (P-A efekt), což může vést ke snížení tuhosti a poruchám ve vzpěru atd. V běžné praxi se obvykle předpokládá, že materiál vykazuje lineární viskoelastickou odezvu pro nízké úrovně zatížení, a že okamžitá mechanická odezva dřeva je elastická. Pro vyšší úrovně zatížení (napětí nad mez kluzu, v této práci se předpokládá, že je mez kluzu rovna mezi úměrnosti u dřeva i betonu) se očekává odchylka od lineárního chování materiálu při dotavování. Při vysokém dlouhodobém zatížení trhliny vznikají, rostou, šíří se v důsledku interakce s viskoelasticitou.

Materiály jako beton a dřevo jsou během své životnosti zatěžovány a dochází ke zpožděnému přetvoření v důsledku viskozity (dotavování). Některé teorie naznačují, že mikrotrhliny vznikají a rostou, když je materiál vystaven vysokému dlouhodobému zatížení, čímž přispívají k oslabení materiálu. Proto je důležité porozumět interakci mezi viskoelasticitou a poškozením, abychom mohli navrhnout spolehlivé stavební konstrukce. V literatuře bylo navrženo několik teoretických modelů poškození v závislosti na dotavování, ale pouze pro konkrétní model poškození a hlavně je většina těchto modelů založena na empirických vztazích. Spojení mezi dotavováním a poškozením je většinou realizováno přidáním některých parametrů, které zohledňují mikrostrukturální efekty ([12, 9, 9, 70, 66, 34, 65, 74]).

V této práci je navržen, implementován a analyzován model kombinující viskoelasticitu s poškozením a účelem této studie je demonstrovat časově závislé a nelineární chování betonu a dřeva v softwaru založeném na metodě konečných prvků k predikci dlouhodobého dotvarování a poškození betonových a dřevěných konstrukcí metodou konečných prvků.

## 3.2 Dílčí modely poškození a viskoelasticity

Cílem této práce je seznámit čtenáře s algoritmem spojující paměť ově závislé (viskózní) chování materiálu s poškozením (nebo plasticitou) materiálu, aby bylo možné předpovědět dlouhodobé chování betonu nebo dřeva, proto jsou dále stručně popsány jednotlivé implementované modely poškození a viskoelasticity, aby je bylo možné dále kombinovat. Tento algoritmus je naprogramován a implementován do výpočetního jádra založeného na metodě konečných prvků takovým způsobem, aby vyžadoval co nejméně vstupních parametrů, které jinak často musí být identifikovány na data z experimentu. Cílem je ukázat, jak tento přístup k sestavení materiálového modelu z jednotlivých submodelů funguje na vybraných úlohách při kvazistatickém zatížení. Tyto časově závislé materiálové modely jsou založené na kombinaci viskoelasticity s poškozením. Všechny modely v této práci předpokládají kontinuum (spojité prostředí). Pro numerickou analýzu je použita klasická metoda konečných prvků bez rozšíření prostoru řešení o nespojitě funkce (tedy metody jako XFEM, GFEM, PUM atd. nejsou probírány). Kohezní modely (pomocí speciálních elementů, například v metodě konečných prvků na rozhraní mezi klasickými elementy mechaniky kontinua) také nejsou probírány, stejně tak diskrétní modely nejsou záměrně probírány, protože nebyly cílem této práce. Práce je tedy zaměřena čistě jen na konstitutivních vztazích mechaniky kontinua se spojitými modely poškození.

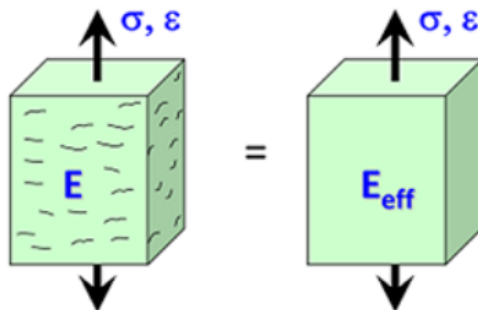
Všechny modely, založené na teorii viskoelasticity, plasticity a poškození, v této práci předpokládají, že deformující se těleso zůstává spojitě a chování materiálu v průběhu přetvárných procesů stačí popsat jako vztah mezi napětím a deformací. Při popisu tělesa jakožto kontinua (spojitého prostředí) si lze představit, že těleso je původně složeno z nekonečně malých elementárních krychliček, které se v průběhu zatěžování deformují, mění svůj tvar i velikost, ale sousední krychličky spolu zůstávají neustále spojeny a podél společných stěn na sebe navzájem působí. Ve skutečnosti však většina materiálů již na počátku zkoumaného zatěžovacího procesu obsahuje drobné defekty vzniklé během výroby (např. betonu nebo kovů) či během formování v přírodních podmínkách (např. zemin a hornin). Při zatěžování se tyto původně mikroskopické defekty pod vlivem rostoucího napětí mohou začít zvětšovat, případně i navzájem spojovat, a jejich růst postupně vede až k porušení materiálu a zhroutení celé konstrukce. Příkladem takových defektů jsou trhliny nebo dutiny. Pokud materiál obsahuje velké množství malých defektů, poměrně rovnoměrně rozptýlených, je vhodným nástrojem k jejich popisu teorie poškození, které je věnována pozornost v této kapitole. Teorie poškození pracuje stále s představou spojitě deformovaného tělesa a vliv rozevření jednotlivých trhlinek nebo zvětšení dutinek nahrazuje odpovídající nepružnou deformací. Při zkoumání větších trhlin, jejichž rozměry jsou už řádově srovnatelné s rozměry konstrukce, je vhodné připustit, že pole posunutí nemusí být nutně všude spojitě [45]. Popisem trhlin jakožto nespojitostí se zabývá lomová mechanika, které není v této práci věnována pozornost.

### 3.2.1 Modely poškození

Modely poškození se používají pro popis chování materiálů, u kterých dochází ke vzniku trhlin nebo jiného poškození struktury materiálu. Modely poškození lze rozdělit do tří základních skupin. První skupinu tvoří spojitě modely poškození, které jsou nejvíce používané při praktických výpočtech, druhou skupinu tvoří nespojitě modely (např. XFEM - prostor řešení je rozšířen o nespojitě bázové funkce) a třetí skupinu tvoří diskrétní modely. Nespojitě a diskrétní modely se používají v lomové mechanice pro vysvětlení jevů a mechanismů, které by nebylo možné popsat spojitými modely (např. větší trhliny, dutiny a všude tam, kde by předpoklad spojitosti deformací neposkytoval dostatečně přesnou aproximaci reálného chování materiálu). V této práci se používají pouze spojitě modely poškození.

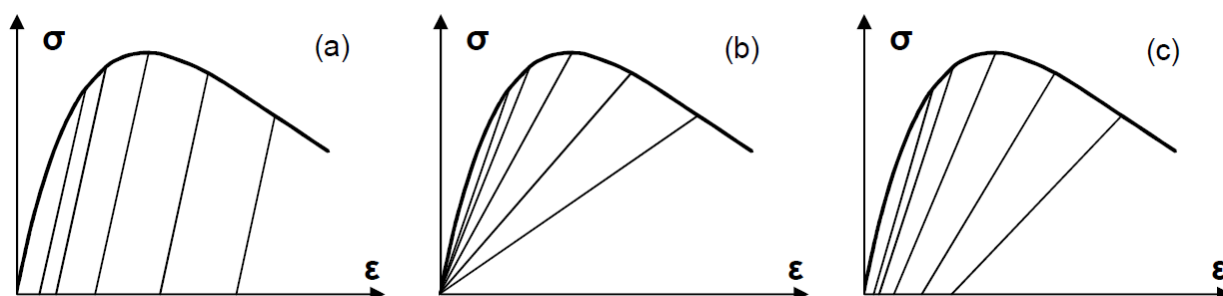
U spojitých modelů poškození se předpokládá po celou dobu výpočtu, že je materiál kontinuum se spojitým vznikem a vývojem porušení (předpoklad spojitě rozptýleného poškození v kontinuu). Spojitě modely se prakticky používají nejčastěji a je pro ně třeba vyvinout konstitutivní zákon zohledňující změkčení (snížení tuhosti a pevnosti) materiálu. Často se tyto modely poškození kombinují s elastoplastickými modely

3.2. Prakticky jde tedy o popis materiálů s pracovním diagramem obsahujícím klesající větev, jako je například beton nebo dřevo, ale samozřejmě i všechny ostatní materiály, u kterých se vlivem porušení vnitřní struktury dramaticky snižuje tuhost. Tyto spojité modely tedy neřeší každou trhlinku zvlášť, ale pouze uvažují jejich „makroskopický (průměrný)“ vliv na výpočet vnitřních sil (napětí) a tuhostí 3.1. Spojité modely poškození se dělí na modely s izotropním a anizotropním charakterem poškození.



**Obrázek 3.1:** Ilustrace základního zjednodušení poškozeného materiálu jako materiálu s redukovanou efektivní (průměrnou) tuhostí pro spojité modely poškození [3]

Tyto modely jsou vhodné pro popis chování materiálu s menšími zhruba rovnoměrně rozprostřenými trhlinkami (tedy někdy se tyto modely nazývají anglicky „smeared cracks“ modely) a jsou tedy vhodné spíše pro málo poškozené materiály během menších zatížení nebo v počátečních fázích porušování materiálu. V případě většího poškození se vznikem větších trhlin je vhodné použít nespojitých modelů poškození, protože poškození materiálu je pak soustředěno do těchto velkých trhlin a deformace je lepší uvažovat jako nespojitě veličiny.



**Obrázek 3.2:** Ilustrace různého chování materiálu: (a) elastoplastické, (b) elastické s poškozením, (c) elastoplastické s poškozením

### Izotropní modely poškození

Izotropní modely poškození redukovují tuhost materiálu stejně ve všech směrech materiálu, lze však rozlišit alespoň tahové a tlakové poškození. Pokud se tedy materiál poškodí v jednom směru  $x$  v tahu, tak se bere, že je poškozen i v ostatních směrech  $y, z$ . To stejné platí pro poškození v tlaku. Některé původní modely poškození [58], [59] uvažovaly dokonce jen jeden parametr poškození  $d$  a tím redukovali celou konstitutivní matici tuhosti, což je dle mých testů hodně nepřesný přístup, proto je v této práci použitý jiný přístup popsáný v kapitole 3.2.1.1.

$$\sigma = (1 - d) \bar{\sigma} = (1 - d) E \varepsilon \quad (3.1)$$

kde efektivní napětí  $\bar{\sigma}$  se vypočítá následovně

$$\bar{\sigma} = E \varepsilon \quad (3.2)$$

Výše uvedené lze zapsat jako

$$\sigma = E^s \varepsilon \quad (3.3)$$



kde  $E^s = (1 - d)E$  je sečná tuhost materiálu. V případě víceosé napjatosti se výsledné napětí spočítá analogicky jako v jednoosé napjatosti

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d) \bar{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - d) \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.4)$$

a proto se sečný tenzor vypočítá také analogicky  $\mathbf{C}^s = (1 - d) \mathbf{C}$ .

### Anizotropní modely poškození

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{II} - \mathbf{D}) : \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{K} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{K} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.5)$$

kde  $\mathbf{II}$  je jednotkový tenzor 4. řádu a  $\mathbf{D}$  je tenzor poškození 4. řádu. V případě anizotropního poškození lze postupovat podobně jako Voyiadjis a kol. [89].

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{M} : \boldsymbol{\sigma} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}^t + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^c = \mathbf{M}^t : \boldsymbol{\sigma}^t + \mathbf{M}^c : \boldsymbol{\sigma}^c \quad (3.6)$$

kde

$$M_{ijkl}^t = \frac{1}{2} \left( \delta_{il} (\delta_{kj} - d_{kj}^t)^{-1} + \delta_{kj} (\delta_{il} - d_{il}^t)^{-1} \right) \quad (3.7)$$

$$M_{ijkl}^c = \frac{1}{2} \left( \delta_{il} (\delta_{kj} - d_{kj}^c)^{-1} + \delta_{kj} (\delta_{il} - d_{il}^c)^{-1} \right)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^t &= \mathbf{P}^t : \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma}^c &= \mathbf{P}^c : \boldsymbol{\sigma} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^t : \mathbf{P}^t + \mathbf{M}^c : \mathbf{P}^c \quad (3.9)$$

Jsou i jiné způsoby, jak vypočítat tenzor poškození 4. řádu  $\mathbf{D}$ , ale jimi se dále zabývat nebudeme.

#### 3.2.1.1 Model poškození pro beton

Model poškození pro beton je převzat z těchto článků ([57, 97, 87, 51, 31, 30, 96, 22, 23, 20, 21]). V této studii je uveden pouze stručný popis modelu poškození pro 2D rovinnou napjatost. Předpokládá se, že lineární matice elastické tuhosti  $C_{ijkl}^e$  se v čase neměnní a jenom výsledná matice zohledňující poškození materiálu má redukované tuhosti  $C_{ijkl}^{dam}(t_n)$ . Lineární elastický odhad napětí je následující

$$\sigma_{ij}^e(t_n) = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(t_n) \quad (3.10)$$

the resulting stress is calculated as follows

$$\sigma_{ij}(t_n) = C_{ijkl}^{dam}(t_n) \varepsilon_{kl}(t_n) \quad (3.11)$$

Mazarsův izotropní model poškození je modifikován, aby lépe zohledňoval různé chování betonu v tahu a tlaku. Proto je třeba provést dekompozici tenzoru napětí do tahové a tlakové části

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^t + \boldsymbol{\sigma}^c \quad (3.12)$$

podle jeho vlastních čísel (hlavních napětí)  $\sigma_i$

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \quad (3.13)$$

Pro tuto dekompozici je vhodné nadefinovat projekční tenzory 4. řádu pro tah  $\mathbf{P}^t$  i tlak  $\mathbf{P}^c$ :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^t &= \mathbf{P}^t : \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma}^c &= \mathbf{P}^c : \boldsymbol{\sigma} \end{aligned} \quad (3.14)$$



kde

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^t &= \sum_{i=1}^{\dim} \langle \sigma_i \rangle (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i) \otimes (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i) \\ \mathbf{P}^c &= \delta_{ik} \delta_{jl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l - \mathbf{P}^t\end{aligned}\quad (3.15)$$

kde  $\langle * \rangle$  je Macaulayova závorka (pro kladné číslo vrátí přesně to stejné reálné číslo a jinak vrátí nulu) a  $\dim$  udává dimenzi úlohy ( $\dim = 2$  pro rovinnou napjatost,  $\dim = 3$  pro prostorovou napjatost). Poznámka: Pokud bychom použili formulaci jako v případě anizotropních modelů poškození [89], tak bychom dostali

$$\mathbf{M} = \frac{1}{1-d^t} \mathbf{P}^t + \frac{1}{1-d^c} \mathbf{P}^c \quad (3.16)$$

Hustota energie vnitřních sil při elastickém přetvoření se vypočítá následovně

$$w = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^t : \boldsymbol{\varepsilon}^e + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^c : \boldsymbol{\varepsilon}^e = w^t + w^c \quad (3.17)$$

Dále se předpokládá, že hustota energie vnitřních sil  $w$  po poškození v tahu i tlaku se změní na  $w_d$

$$w_d = w_d^t + w_d^c \quad (3.18)$$

kde

$$\begin{aligned}w_d^t &= (1-d^t) w^t \\ w_d^c &= (1-d^c) w^c\end{aligned}\quad (3.19)$$

Veličiny  $d^t$  a  $d^c$  jsou tzv. parametry poškození v tahu a tlaku, které se počítají z pracovního diagramu, jak bude popsáno níže.

Výpočet výsledného tenzoru napětí se provede pomocí lineárních odhadů napětí  $\boldsymbol{\sigma}^{trial}$  a parametrů poškození  $d^t$  a  $d^c$  následovně

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= (1-d^t) \boldsymbol{\sigma}^t + (1-d^c) \boldsymbol{\sigma}^c = (1-d^t) \mathbf{P}^t : \boldsymbol{\sigma}^{trial} + (1-d^c) \mathbf{P}^c : \boldsymbol{\sigma}^{trial} = \\ &= [(1-d^t) \mathbf{P}^t + (1-d^c) \mathbf{P}^c] : \boldsymbol{\sigma}^{trial}\end{aligned}\quad (3.20)$$

kde  $\boldsymbol{\sigma}^{trial} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$ . Parametry poškození  $d^t$  a  $d^c$  se odvodí z pracovního diagramu, kde se použijí ekvivalentní přetvoření vypočítaná podle Mazarse a kol. [57]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= \frac{I_\varepsilon}{2(1-2\nu)} + \frac{\sqrt{J_\varepsilon}}{2(1+\nu)} \\ \varepsilon_c &= \frac{I_\varepsilon}{5(1-2\nu)} + \frac{6\sqrt{J_\varepsilon}}{5(1+\nu)}\end{aligned}\quad (3.21)$$

kde

$$\begin{aligned}I_\varepsilon &= I_1(\boldsymbol{\varepsilon}) = trace(\boldsymbol{\varepsilon}) \\ J_\varepsilon &= 3J_2(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \left[ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 \right]\end{aligned}\quad (3.22)$$

S těmito ekvivalentními přetvořeními se jde do pracovního diagramu a odečte se správná hodnota napětí  $\sigma$ . Poměr této hodnoty napětí z diagramu a lineárního odhadu napětí  $\sigma/\sigma^{trial}$  charakterizuje celistvost materiálu. Pokud odečteme tento poměr od hodnoty 1, tak dostaneme příslušnou míru poškození materiálu v tahu i tlaku:

$$\begin{aligned}d^t &= 1 - \frac{\sigma(\varepsilon_t)}{\sigma^{trial}(\varepsilon_t)} \\ d^c &= 1 - \frac{\sigma(\varepsilon_c)}{\sigma^{trial}(\varepsilon_c)}\end{aligned}\quad (3.23)$$

Pokud chceme jako výsledek dostat jen jednu hodnotu parametru poškození, která by charakterizovala celkové poškození (dohromady v tahu i tlaku), tak lze udělat následující vážený průměr získaných dvou parametrů poškození v tahu a tlaku:

$$d = r d_t + (1-r) d_c \quad (3.24)$$

kde  $r = \frac{\sum_{i=1}^{\dim} \langle \sigma_i^{trial} \rangle}{\sum_{i=1}^{\dim} |\sigma_i^{trial}|}$  a  $|\ast|$  je absolutní hodnota čísla  $\ast$ .

Pro materiálové modely simulující poškození materiálu je lepší použít sečný tenzor než tečný, protože u sečného tenzoru je zaručena pozitivní definitnost, kdežto u tečného nikoliv (v případě, že se dostaneme do oblasti klesající větve pracovního diagramu). Sečný konstitutivní tenzor  $\mathbf{C}^s$  je definován následovně

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^s : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.25)$$

Výsledné napětí se vypočítá následovně

$$\boldsymbol{\sigma} = [(1 - d^t) \mathbf{P}^t + (1 - d^c) \mathbf{P}^c] : \boldsymbol{\sigma}^{trial} = [(1 - d^t) \mathbf{P}^t + (1 - d^c) \mathbf{P}^c] : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.26)$$

proto se sečný konstitutivní tenzor vypočítá tímto způsobem

$$\mathbf{C}^s = [(1 - d^t) \mathbf{P}^t + (1 - d^c) \mathbf{P}^c] : \mathbf{C} \quad (3.27)$$

### 3.2.1.2 Model poškození pro dřevo

Model poškození pro dřevo je převzat z těchto článků ([75, 54, 55, 56]). V této studii je uveden pouze stručný popis modelu poškození pro 2D rovinnou napjatost. Předpokládá se, že lineární matice elastické tuhosti  $C_{ijkl}^e$  se v čase neměnná a jenom výsledná matice zohledňující poškození materiálu má redukované tuhosti  $C_{ijkl}^{dam}(t_n)$ . Lineární elastický odhad napětí je následující

$$\sigma_{ij}^e(t_n) = C_{ijkl}^e \varepsilon_{kl}(t_n) \quad (3.28)$$

a výsledné napětí se vypočítá následovně

$$\sigma_{ij}(t_n) = C_{ijkl}^{dam}(t_n) \varepsilon_{kl}(t_n) \quad (3.29)$$

Kritéria poškození jsou zvolena podle ([75, 54, 55, 56])

$$\mathbf{F} - \kappa = \mathbf{0} \quad (3.30)$$

a musí být splněny Kuhn-Tucker podmínka a podmínka konzistence [75]

$$\mathbf{F} - \kappa \leq \mathbf{0} \frac{d\kappa}{dt} \geq \mathbf{0} \frac{d\kappa}{dt} (\mathbf{F} - \kappa) = 0 \quad (3.31)$$

Analytické funkční předpisy pro výpočet parametrů poškození a stavové proměnné  $\kappa$  byly zvoleny tak, aby řádně zohledňovaly celou historii zatížení [75, 55] Pokud  $F_{ij}(t_n) > 1$  pak  $\kappa_{ij}(t_n) = \max\{F_{ij}(t_n), \kappa_{ij}(t_{n-1})\}$ , jinak  $\kappa_{ij}(t_n) = 1$  nebo jednoduše

$$\kappa_{ij}(t_n) = \max\{1, F_{ij}(t_n), \kappa_{ij}(t_{n-1})\} \quad (3.32)$$

Parametry poškození jsou spočítány podle následujícího vztahu [75, 55]

$$d_{ij}(t_n) = d_{ij}(\kappa_{ij}(t_n)) \quad (3.33)$$

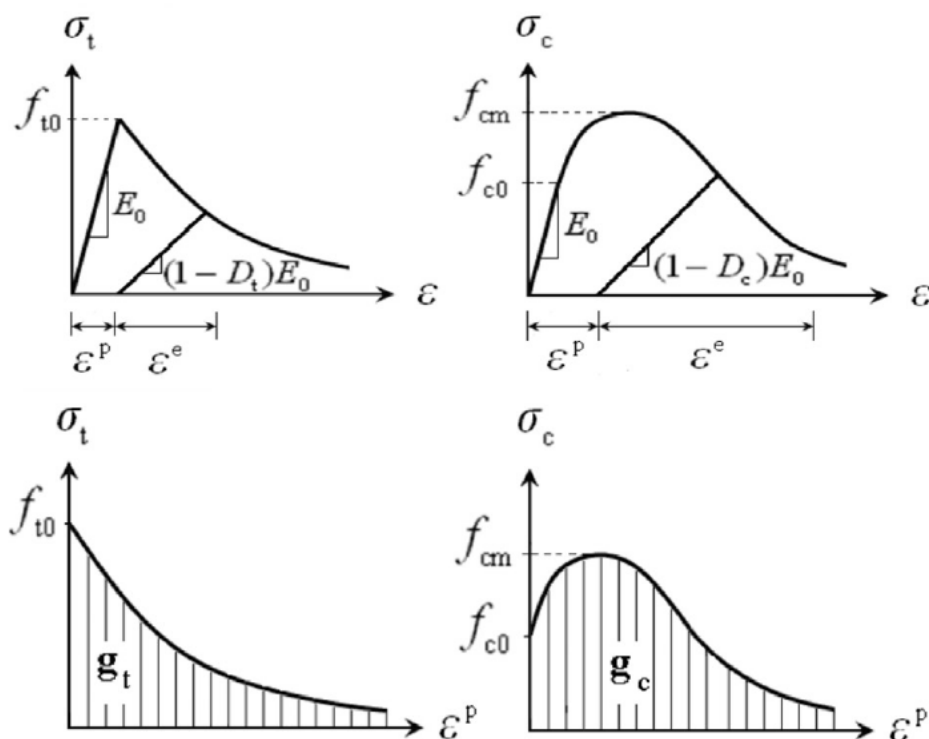
Konstitutivní tuhostní matice materiálu po jeho poškození je počítána jako inverze matice poddajnosti poškozeného materiálu

$$C_{ijkl}^{dam} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1-d_L)E_L} & \frac{-\nu_{LR}(d_L, d_R, d_{LR})}{(1-d_R)E_R} & 0 \\ \frac{-\nu_{RL}(d_L, d_R, d_{LR})}{(1-d_L)E_L} & \frac{1}{(1-d_R)E_R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(1-d_{LR})G_{LR}} \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.34)$$

Tento model poškození je použitý pro popis jak křehké, tak i duktilní (plastické) odezvy materiálu s pomocí daných stavových proměnných.

### 3.2.2 Elastoplastické modely s poškozením

Elastoplastické modely s poškozením [89, 17, 18, 101], jak už název napovídá, kombinují výpočet plasticity [28, 52] s výpočtem poškození [57, 75], jak je znázorněno pro beton na Obrázku 3.3. Tyto modely se uplatní tam, kde se na úrovni materiálového (integračního bodu) nejen přitěžuje, ale také odtěžuje a pak opětovně přitěžuje a jde se třeba i z tahu do tlaku a tím vznikají hysterezní křivky v důsledku disipace, která je odlišná u elasto-plastických modelů a modelů poškození, ale tomu bude věnována samostatná podkapitola 4.4.1 v kapitole týkající se dynamiky 4.



Obrázek 3.3: Chování betonu v jednoosém (a) tahu, (b) tlaku dle literatury [89]

Výpočet napětí pro tyto modely se provede následujícím způsobem

$$\sigma = (\mathbf{II} - \mathbf{D}) : \mathbf{C} : (\epsilon - \epsilon^p) \quad (3.35)$$

Pokud označíme

$$\bar{\sigma} = \mathbf{C} : (\epsilon - \epsilon^p) \quad (3.36)$$

tak lze psát

$$\sigma = (\mathbf{II} - \mathbf{D}) : \bar{\sigma} = \mathbf{K} : \bar{\sigma} \quad (3.37)$$

Implicitní integrační algoritmus se standardně dělí do následujících kroků:

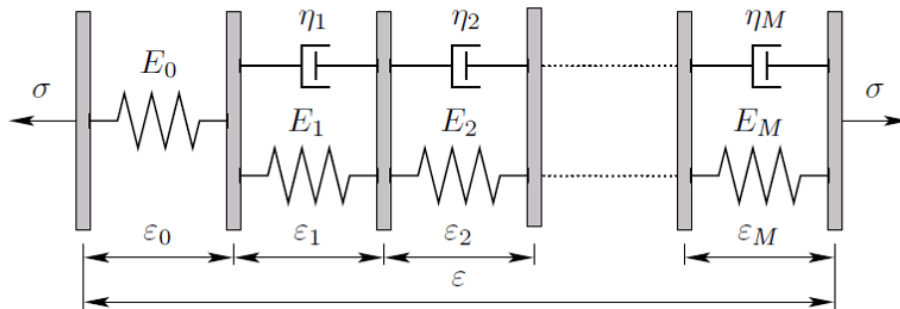
- 1) Elastická predikce
- 2) Plastická korekce (s podmínkou či kritériem plasticity)
- 3) Korekce poškozením (s podmínkou či kritériem poškození)

Zkombinovat plasticitu s poškozením se lehce řekne, ale není to triviální záležitost i v případě, že by byly k dispozici oba modely funkční pro plasticitu i pro poškození odděleně (zvláště, nezávisle odladěné),

pokud by výsledný model měl pracovat s libovolně zadaným pracovním diagramem a tento také při výpočtu plně respektovat, stejně jako jiné, předem naměřené, mechanické vlastnosti. Tomuto tématu dále nebude věnována pozornost a více informací lze najít v odborných člancích nebo jiné literatuře dostupné i na internetu. Spojité modely poškození jsou vhodné pro popis chování materiálu s menšími a zhruba rovnoměrně rozprostřenými trhlinkami a jsou tedy vhodné spíše pro málo poškozené materiály během menších zatížení nebo v počátečních fázích porušování materiálu. V případě většího poškození doprovázeného vznikem větších trhlin je vhodné použít nespojitých modelů poškození, protože poškození materiálu je soustředěno do těchto velkých trhlin a deformace je pak lepší uvažovat jako nespojitě veličiny (viz např. metoda XFEM – Extended Finite Element Method).

### 3.2.3 Viskoelastické modely

V této práci je zvolena diferenciální formulace viskoelastického materiálu (viz kapitola 2 a sekce 2.3), která je, na rozdíl od integrální formulace, vhodná z toho důvodu, že nepotřebuje stavové proměnné ve všech předchozích počítaných časech, ale stačí ji pouze stavové proměnné z předchozího spočítaného času [99, 8]. Při použití diferenciální formulace je viskoelastický konstitutivní vztah aproximován vybraným reologickým modelem (např. Kelvinův řetězec, Maxwellův řetězec) [99]. V této práci byl vybrán a implementován viskoelastický model, který je založen na zobecněném Kelvinově řetězci podle [11, 6]. Schéma Kelvinova řetězce je znázorněno na obrázku (3.4) a skládá se z několika Kelvinových článků zapojených v sérii. Kelvinovy články jsou tvořeny paralelně zapojenou pružinou a pístovým tlumičem. Znovu zdůrazňuji velkou výhodu této diferenciální formulace pomocí reologických modelů, jako je např. mnou vybraný Kelvinův řetězec, a to hlavně úspora paměti počítače, protože není nutné ukládat data ve všech počítaných časech, ale vždy pouze v jednom (předchozím) čase, což se projeví zejména při analýze větších konstrukcí s větším počtem konečných prvků a tedy i s větším počtem integračních bodů.



Obrázek 3.4: Schéma zobecněného Kelvinova řetězce

Složky tenzoru napětí pro 2D rovinnou napjatost jsou zapsány do následujícího vektoru

$$\boldsymbol{\sigma}^{(n)} \equiv \boldsymbol{\sigma}(t_n) = \begin{pmatrix} \sigma_x(t_n) \\ \sigma_y(t_n) \\ \tau_{xy}(t_n) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_L(t_n) \\ \sigma_R(t_n) \\ \tau_{LR}(t_n) \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

Napětí v čase  $t_n$  značené jako  $\boldsymbol{\sigma}^{(n)}$  je vypočítáno z napětí známého v předchozím čase  $t_{n-1}$  označeného jako  $\boldsymbol{\sigma}^{(n-1)}$  a z přírůstku napětí  $\Delta\boldsymbol{\sigma}$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(n)} = \boldsymbol{\sigma}^{(n-1)} + \Delta\boldsymbol{\sigma} \quad (3.39)$$

Stěžejní je tedy vypočítat přírůstek napětí a to se provede následovně [11]

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{ve} : (\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^v) \quad (3.40)$$

kde viskoelastická tuhostní matice  $\mathbf{C}^{ve}$  je inverze viskoelastické matice poddajnosti a vypadá následovně

$$\mathbf{C}^{ve} = (\mathbf{D}^{ve})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{E_L^{ve}}{1-\nu_{LR}\nu_{RL}} & \frac{\nu_{LR}E_R^{ve}}{1-\nu_{LR}\nu_{RL}} & 0 \\ \frac{\nu_{RL}E_L^{ve}}{1-\nu_{LR}\nu_{RL}} & \frac{E_R^{ve}}{1-\nu_{LR}\nu_{RL}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LR}^{ve} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

kde viskoelastická matice poddajnosti je následující

$$\mathbf{D}^{ve} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L^{ve}} & \frac{-\nu_{LR}}{E_R^{ve}} & 0 \\ \frac{-\nu_{RL}}{E_L^{ve}} & \frac{1}{E_R^{ve}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{LR}^{ve}} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Viskoelastická matice poddajnosti  $\mathbf{D}^{ve}$  je sestavena z efektivních viskoelastických modulů, které jsou počítány následovně [11]

$$E_L^{ve} = \left( \frac{1}{D_{L0}} + \sum_{j=1}^M \frac{1-\lambda_{Lj}}{D_{Lj}} \right)^{-1} \quad E_R^{ve} = \left( \frac{1}{D_{R0}} + \sum_{j=1}^M \frac{1-\lambda_{Rj}}{D_{Rj}} \right)^{-1} \quad G_{LR}^{ve} = \left( \frac{1}{D_{LR0}} + \sum_{j=1}^M \frac{1-\lambda_{LRj}}{D_{LRj}} \right)^{-1} \quad (3.43)$$

Zaved' me pomocné proměnné

$$\begin{aligned} \tau_{Lj} &= \frac{\eta_{Lj}}{E_{Lj}} & \beta_{Lj} &= \exp\left(\frac{-\Delta t}{\tau_{Lj}}\right) & \lambda_{Lj} &= \frac{\tau_{Lj}}{\Delta t} (1 - \beta_{Lj}) \\ \tau_{Rj} &= \frac{\eta_{Rj}}{E_{Rj}} & \beta_{Rj} &= \exp\left(\frac{-\Delta t}{\tau_{Rj}}\right) & \lambda_{Rj} &= \frac{\tau_{Rj}}{\Delta t} (1 - \beta_{Rj}) \\ \tau_{LRj} &= \frac{\eta_{LRj}}{G_{LRj}} & \beta_{LRj} &= \exp\left(\frac{-\Delta t}{\tau_{LRj}}\right) & \lambda_{LRj} &= \frac{\tau_{LRj}}{\Delta t} (1 - \beta_{LRj}) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Přírůstek viskózního přetvoření je ve 2D počítán následovně

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^v = \Delta t \sum_{j=1}^M \begin{pmatrix} \lambda_{Lj} \frac{d\varepsilon_{Lj}^{(n-1)}}{dt} \\ \lambda_{Rj} \frac{d\varepsilon_{Rj}^{(n-1)}}{dt} \\ \lambda_{LRj} \frac{d\gamma_{LRj}^{(n-1)}}{dt} \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

kde jsou použity stavové proměnné počítané v předchozím čase  $t_{n-1}$ :  $\frac{d\varepsilon_{Lj}^{(n-1)}}{dt}$ ,  $\frac{d\varepsilon_{Rj}^{(n-1)}}{dt}$ ,  $\frac{d\gamma_{LRj}^{(n-1)}}{dt}$ . Tyto stavové proměnné z předchozího času jsou použity pro aktualizaci proměnných v aktuálním čase následujícím způsobem

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_{Lj}^{(n)}}{dt} &= \beta_{Lj} \frac{d\varepsilon_{Lj}^{(n-1)}}{dt} + \frac{1-\beta_{Lj}}{\Delta t D_{Lj}} \Delta \sigma_L \\ \frac{d\varepsilon_{Rj}^{(n)}}{dt} &= \beta_{Rj} \frac{d\varepsilon_{Rj}^{(n-1)}}{dt} + \frac{1-\beta_{Rj}}{\Delta t D_{Rj}} \Delta \sigma_R \\ \frac{d\gamma_{LRj}^{(n)}}{dt} &= \beta_{LRj} \frac{d\gamma_{LRj}^{(n-1)}}{dt} + \frac{1-\beta_{LRj}}{\Delta t D_{LRj}} \Delta \tau_{LR} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Retardační čas  $j$ -tého článku Kelvinova řetězce v daném materiálovém směru je poměrem odpovídající viskozity  $j$ -tého tlumiče a modulu pružnosti  $j$ -té pružiny v daném materiálovém směru. Tyto viskozity a moduly pružnosti jsou stanoveny identifikací na známé časové křivky součinitele dotvarování dané pro každý materiálový směr dřeva. Na stanovení parametrů Kelvinova řetězce byly použity speciální algoritmy tzv. "Particle Swarm" metody [49, 76]. Optimalizace hejnem částic (z anglického Particle Swarm Optimization, používá se zkratka PSO) je optimalizační meta-heuristická technika v oboru umělé inteligence inspirovaná chováním hejna ptáků při hledání potravy. Poprvé ji popsali Kennedy a Eberhart v roce 1995 [49]. Řadíme ji k dalším technikám používajících inteligenci hejna. Každá částice je definována svoji polohou, rychlostí a pamětí předchozích úspěchů při hledání. Částice jsou ovlivňovány ostatními úspěšnějšími částicemi hejna. Algoritmus počítá pohyb hejna v diskretních časových krocích a neustále upravuje hodnoty popisující částice. Ačkoliv je PSO poměrně nová technika, získala na popularitě při řešení různých optimalizačních úloh.

Mezi její hlavní výhody patří snadná implementace a rychlá konvergence k optimu pro širokou škálu účelových funkcí [5].

### 3.3 Kombinace modelu viskoelasticity s modelem poškození

Cílem této studie je navrhnout, implementovat a analyzovat model provazující poškození s viskoelasticitou popsanou Kelvinovým řetězcem. Tento model je koncipován obecně a místo modelu poškození může být použit model elasto-plastický nebo i kombinovaný model elasto-plastický s poškozením a místo Kelvinova řetězce vhodného pro dotvarování může být použit např. Maxwellův řetězec vhodnější pro relaxaci napětí apod. Kelvinův řetězec v kombinaci s modelem poškození je vhodný pro analýzu vlivu dotvarování na poškození materiálu, ale při volbě menších časových kroků (kdy lze předpokládat lineární průběh napětí v jednom časovém kroku) lze Kelvinův řetězec použít i při relaxaci napětí, jak bylo ukázáno v předchozí kapitole. V této práci je navržen, implementován a analyzován model kombinující viskoelasticitu s poškozením. - Okamžitá odezva materiálu (elastická s poškozením nebo s plasticitou) a časově závislá (viskózní, jako např. dotvarování) je kombinována do jednoho materiálového modelu. Z tohoto důvodu je celkové přetvoření rozloženo do okamžitého přetvoření a viskózního přetvoření. Okamžité přetvoření se vyskytuje hned po aplikaci zatížení, ale viskózní přetvoření se pomalu vyvíjí v čase a způsobuje např. dotvarování a toto dotvarování má vliv na vznik a další vývoj poškození v čase a v této práci je tento vliv zohledněn a analyzován.

Dále je uveden algoritmus pro ortotropní materiál (dřevo), protože pro izotropní materiál (beton) se postupuje analogicky (v podstatě se jen nastaví materiálové vlastnosti stejné ve všech směrech). Za předpokladu malých deformací lze celkové přetvoření rozložit aditivně

$$\varepsilon_{kl}(t) = \varepsilon_{kl}^e(t) + \varepsilon_{kl}^p(t) + \varepsilon_{kl}^d(t) + \varepsilon_{kl}^c(t) \quad (3.47)$$

kde  $\varepsilon_{kl}^e(t)$  je okamžité elastické přetvoření,  $\varepsilon_{kl}^p(t)$  je okamžité plastické přetvoření,  $\varepsilon_{kl}^d(t)$  je okamžité přetvoření od poškození a  $\varepsilon_{kl}^c(t)$  viskózní (časově závislé) přetvoření – např. dotvarování. Složky tenzoru napětí jsou počítány pomocí Hookova zákona v případě nízkého zatížení, kdy není překročena mez kluzu, ani mez úměrnosti (v této práci předpokládáme, že jsou si tyto dvě meze rovny, tedy nebereme v úvahu nelineární elasticitu).

$$\sigma_{ij}(t) = C_{ijkl}^e \varepsilon_{kl}^e(t) \quad (3.48)$$

kde  $C_{ijkl}^e$  je konstitutivní tuhostní matice lineárního ortotropního materiálu podle Hookova zákona (je předpokládáno, že se tato tuhost nemění v čase, tedy že dřevo v čase nezraje - nezvyšuje tuhost jako beton, ani nezmenšuje tuto tuhost). Pokud se vyjádří elastická část přetvoření z rovnice 3.47 a dosadí se do vztahu 3.48, tak se dostane

$$\sigma_{ij}(t) = C_{ijkl}^e \left( \varepsilon_{kl}(t) - \varepsilon_{kl}^p(t) - \varepsilon_{kl}^d(t) - \varepsilon_{kl}^c(t) \right) \quad (3.49)$$

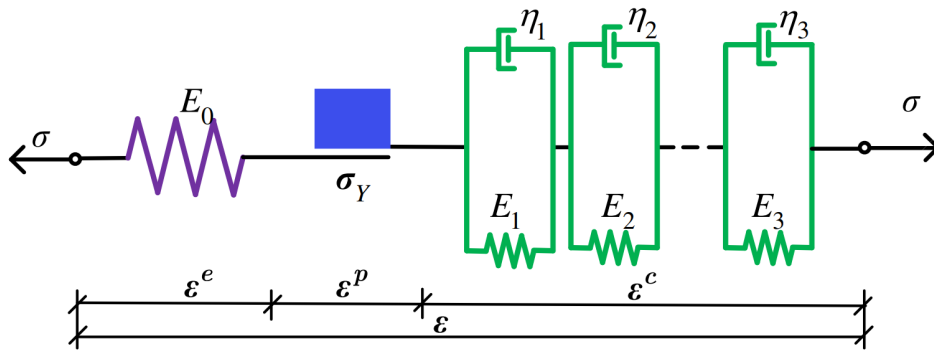
Část odpovídající přetvoření od poškození je počítána pomocí parametrů poškození (anglicky damage parameters), které redukují původní lineárně elastické složky konstitutivní matice tuhosti. Pokud daný model poškození řeší i plastickou odezvu, tak samozřejmě odpovídající složky přetvoření mohou být také vypočítány

$$\varepsilon_{kl}^p(t) + \varepsilon_{kl}^d(t) = \varepsilon_{kl}(t) - \varepsilon_{kl}^c(t) - [C_{ijkl}^e]^{-1} \sigma_{ij}(t) \quad (3.50)$$

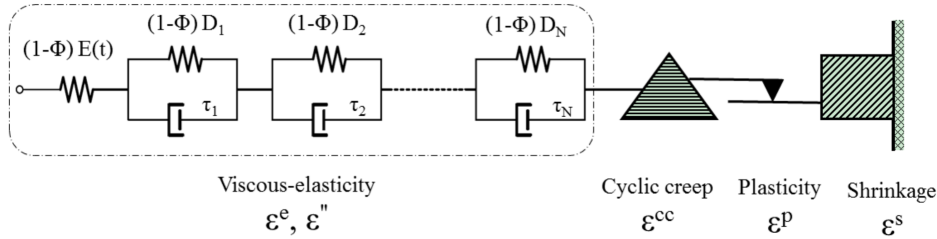
kde jednotlivé složky napětí jsou spočítány pomocí matice zohledňující vliv poškození  $C_{ijkl}^{dam}$ :

$$\sigma_{ij}(t) = C_{ijkl}^{dam}(t) (\varepsilon_{kl}(t) - \varepsilon_{kl}^c(t)) \quad (3.51)$$

Cílem je navrhnout, implementovat a analyzovat algoritmus časové numerické integrace. Tento algoritmus kombinuje dva výše zmíněné modely: 1) model poškození, and 2) viskoelastický model. Schéma stavebnicového modelu je uvedeno na obrázku 3.6, 3.5. V daném čase  $t_n$ , i.e. na konci aktuálního časového kroku  $\langle t_{n-1}, t_n \rangle$  o velikosti  $\Delta t = t_n - t_{n-1}$  v každé iteraci globální Newtonovy metody je postup následující. V každé iteraci v jednom aktuálním časovém přírůstku je přírůstek celkového přetvoření  $\Delta\varepsilon$  vstupní proměnná z MKP řešiče (globální Newton-Raphson), ale jinak všechny ostatní vstupní proměnné jsou skrze celý jeden časový přírůstek konstantní - nemění se po iteracích a jejich hodnota je dána ze zkonvergovaného



Obrázek 3.5: Schéma modulárního modelu: viskoelastická s plasticitou [73]



Obrázek 3.6: Schéma modulárního modelu: viskoelastická s poškozením, cyklickými změnami, plasticitou a vlhkostním přetvořením [100]

předchozího času  $t_{n-1}$  a samozřejmě aktuálním časovým přírůstkem  $\Delta t = t_n - t_{n-1}$ :

1) Zobecněný Kelvinův řetězec je aplikován a viskoelastický přírůstek napětí je spočítán podle vztahů z předchozí kapitoly

$$\Delta \sigma^{ve} = \mathbf{C}^{ve} : (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^v) \quad (3.52)$$

a výsledný přírůstek části přetvoření pro dotvarování se vypočítá takto

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^c = \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}^e : \Delta \boldsymbol{\sigma}^{ve} \quad (3.53)$$

kde  $\mathbf{D}^e = [\mathbf{C}^e]^{-1}$  je lineárně elastická matice poddajnosti. Vzhledem k algoritmu Kelvinova řetězce hodnota kdotvarování v první iteraci závisí pouze na hodnotách proměnných v předchozím čase  $t_{n-1}$ .

2) Model poškození je aplikován a výsledné napětí spolu s konstitutivní maticí jsou spočítány a jdou do globální Newton-Raphson metody v MKP řešiči, aby na základě nevyvážených vnitřních uzlových sil s vnějšími uzlovými silami mohl být vypočítán přírůstek celkového přetvoření pro další iteraci. Základní myšlenka je taková, že celkové přetvoření je redukováno o celé dotvarovací přetvoření nebo jen o nějakou jeho část (což je dále hlavním předmětem výzkumu) a toto redukované přetvoření se použije pro výpočet parametrů poškození podle tohoto vztahu

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{vin}(t_n) = \boldsymbol{\varepsilon}^{in}(t_n) + \alpha \boldsymbol{\varepsilon}^c(t_n) \quad (3.54)$$

nebo v přírůstkové formě

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{vin} = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{in} + \alpha \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^c \quad (3.55)$$

kde  $\boldsymbol{\varepsilon}^{in}(t_n) = \boldsymbol{\varepsilon}(t_n) - \boldsymbol{\varepsilon}^c(t_n) - \boldsymbol{\varepsilon}^M(t_n) - \boldsymbol{\varepsilon}^T(t_n) - \dots$  je okamžité (časově nezávislé, neviskózní) přetvoření, protože to odpovídá okamžité elasto-plastické odezvě s poškozením a při jejím výpočtu je třeba odečíst všechny časově závislé části celkového přetvoření, jako je nejen přetvoření od dotvarování  $\boldsymbol{\varepsilon}^c$ , ale například to může být i vlhkostní přetvoření  $\boldsymbol{\varepsilon}^M$  nebo teplotní přetvoření  $\boldsymbol{\varepsilon}^T$  apod.

V tomto modelu poškození je tedy celkové přetvoření redukováno o část dotvarovacího přetvoření, podobně jako se odečítá tzv. počáteční přetvoření od změny teplotního nebo vlhkostního pole, ale rozdíl je v tom, že nejen okamžitá část přetvoření, ale i část tohoto dotvarovacího přetvoření se podílí na vzniku a vývoji poškození podle rovnice 3.54, kde  $\boldsymbol{\varepsilon}^{vin}$  je nazváno jako viskózní okamžitá (anglicky "viscous instantaneous") část celkového přetvoření zahrnující nejen okamžité přetvoření, ale také část dotvarova-



cího (viskózního) přetvoření. Kolik z dotvarovacího přetvoření  $\varepsilon^c$  se použije v modelu poškození  $\varepsilon^{vin}$  je dáno bezrozměrným parametrem  $\alpha$ . Nelineární část okamžitého přetvoření je značena  $\varepsilon^d$  (podle poškození - anglicky "damage") a okamžité přetvoření je pak rovno lineární okamžité části plus přetvoření vyvolané poškozením (damage):

$$\varepsilon^{in} = \varepsilon^e + \varepsilon^d \quad (3.56)$$

kde  $\varepsilon^e = \mathbf{D}^e : \sigma$  a  $\varepsilon^d$  je přetvoření od poškození, které je stále neznámé, stejně jakop výsledné napětí  $\sigma$  a obojí bude následně počítáno daným modelem poškození. Lineárně elastický odhad napětí je pak dělán pomocí nově zavedeného viskózně-okamžitého přetvoření  $\varepsilon^{vin}(t_n)$  následovně:

$$\sigma^{vin}(t_n) = \mathbf{C} : \varepsilon^{vin}(t_n) \quad (3.57)$$

Parametry poškození jsou nově počítány z tohoto viskózně-okamžitého přetvoření, který obsahuje nejen okamžité přetvoření, ale i část viskózního (dotvarovacího) přetvoření. Parametry poškození se pak standardně vypočítají funkcemi

$$\mathbf{D} = \mathbf{f}(\sigma^{vin}) \quad (3.58)$$

které jsou popsány v [75]. Výsledné napětí se pak vypočítá následovně:

$$\begin{aligned} \sigma(t_n) &= \mathbf{C}^{dam}(t_n) : \varepsilon^{in}(t_n) = (\mathbf{I} - \mathbf{D}(\sigma^{vin}(t_n))) : \mathbf{C}^e : \varepsilon^{in}(t_n) = \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{D}(\sigma^{vin}(t_n))) : \mathbf{C}^e : (\varepsilon(t_n) - \varepsilon^c(t_n)) \end{aligned} \quad (3.59)$$

Pro výpočet přírůstku deformace v globální Newton-Raphson metodě byly testovány tyto varianty konstitutivních matic (jde o modifikovanou metodu Newton-Raphson, protože žádná matice není tečná z důvodu zajištění pozitivní definitnosti a robustnosti výpočtu):  $\mathbf{C} = \mathbf{C}^{ve}$ ,  $\mathbf{C} = \mathbf{C}^{dam}$ ,  $\mathbf{C} = \mathbf{C}^e$  a nejlepší konvergence bylo dosaženo s touto "viskoelastickou" variantou matice  $\mathbf{C} = \mathbf{C}^{ve}$ . Přetvoření, které odpovídá poškození lze vypočítat podle tohoto vztahu

$$\varepsilon^d(t_n) = \varepsilon(t_n) - \varepsilon^c(t_n) - \varepsilon^e(t_n) = \varepsilon(t_n) - \varepsilon^c(t_n) - \mathbf{D}^e : \sigma(t_n) \quad (3.60)$$

V této studii byl zaveden parametr  $\alpha$ , který určuje, jak moc se bude podílet dotvarování na vzniku a vývoji poškození - inspirace přišla z již publikovaného modelu pro beton [70], kde je také používán jeden přídatný parametr, který určuje kolik z dotvarovacího přetvoření se má podílet při výpočtu ekvivaletních přetvoření použitých při výpočtu parametru poškození.

**Poznámka:** Pro izotropní materiál je postup úplně stejný, jen konstitutivní matice tuhosti má jednodušší tvar.



### 3.4 Analýza viskoelastického modelu s modelem poškození ortotropního materiálu dřeva na testovacích úlohách

V této kapitole jsou jako první uvedeny materiálové vlastnosti dřeva a pak jsou uvedeny testovací úlohy, které ukazují chování nového modulárního materiálového modelu na různých konstrukcích s různou geometrií a s různými okrajovými podmínkami (zatížení, podpory).

#### 3.4.1 Numerická analýza testovacích úloh

##### Materiálové vlastnosti dřeva

Materiálové vlastnosti dřeva jsou rozděleny do dvou skupin: a) časově nezávislé 3.1, 3.7, b) časově závislé (viskózní) 3.8.

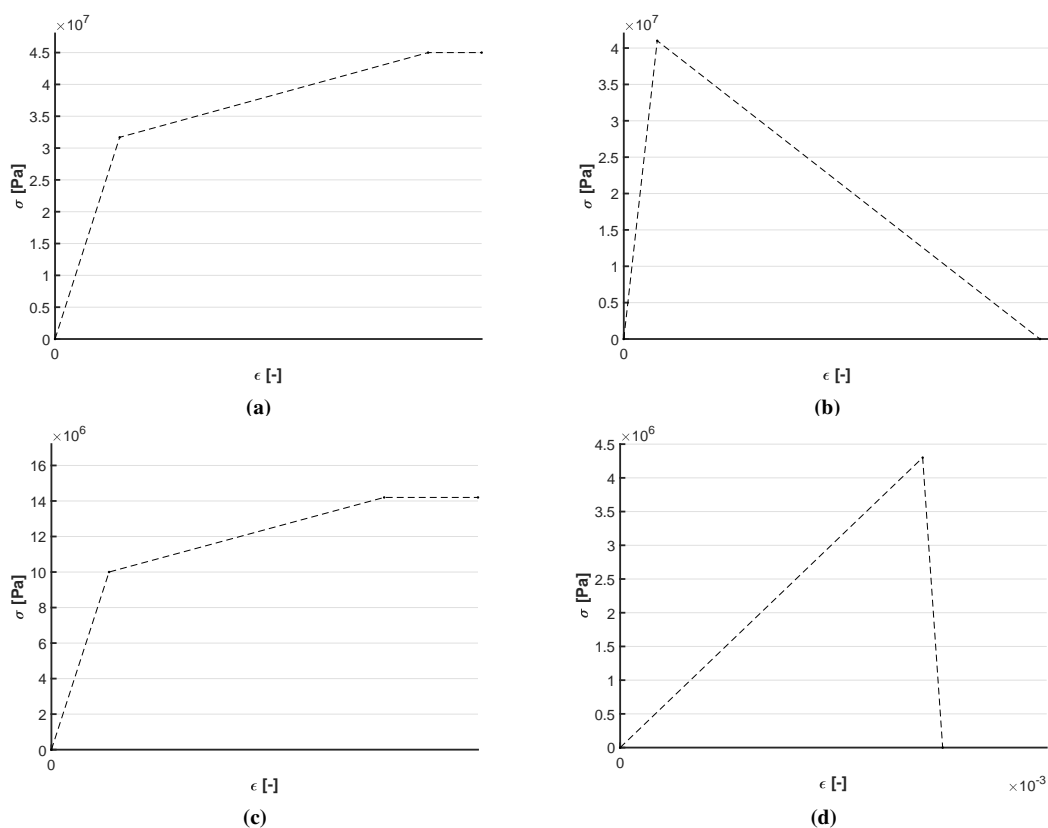
##### a) časově nezávislé vlastnosti dřeva

Materiálové lineární vlastnosti					
Modul pružnosti v tahu/tlaku [Pa]		Modul pružnosti ve smyku [Pa]		Poissonův součinitel [-]	
$E_{L,t0}$	10 459 081 836	$G_{RL,t0}$	900 000 000	$\nu_{RL,t0}$	0.24
$E_{R,t0}$	1 480 099 502	$G_{TL,t0}$	600 000 000	$\nu_{TL,t0}$	0.18
Materiálové nelineární vlastnosti					
Tahová pevnost [Pa]		Tlaková pevnost [Pa]		Smyková pevnost [Pa]	
$F_{t,0}$ (   s vlákny)	41 000 000	$F_{c,0}$ (   s vlákny)	45 000 000	$F_v$	6 900 000
$F_{t,90}$ ( $\perp$ na vlákna)	4 300 000	$F_{c,90}$ ( $\perp$ na vlákna)	14 200 000		
Lomová energie (v tahu) [N/m]					
	$G_{f,0}$ (   s vlákny)				100 000
	$G_{f,90}$ ( $\perp$ na vlákna)				710
	$G_{f,v}$ (ve smyku)				1 200

Tabulka 3.1: Časově nezávislé vlastnosti dřeva

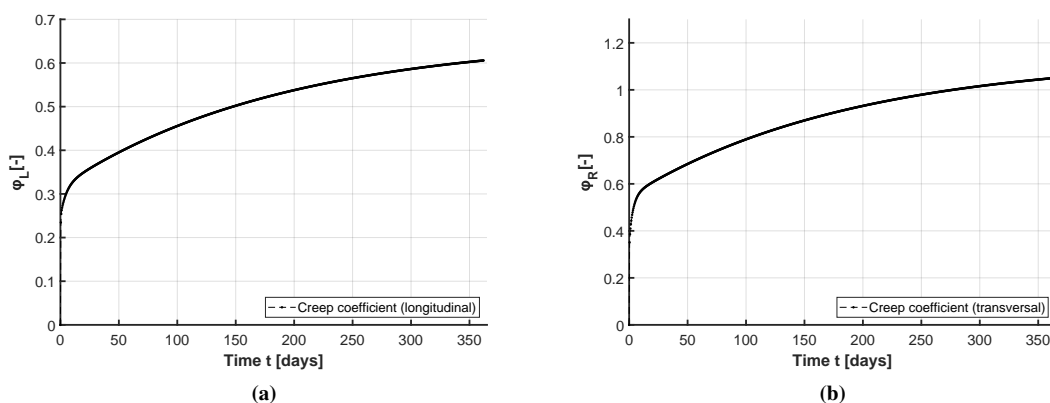
##### b) časově závislé vlastnosti dřeva

Pro stanovení parametrů ortotropního zobecněného Kelvinova řetězce Tyto jsou použité časové křivky součinitele dotvarování 3.8 a dále ve výpočtu už je použitý pouze tento zobecněný Kelvinův řetězec, který představuje viskoelastickou část materiálového modelu. Z praktického hlediska je tedy nutné použít jako vstup modelu časovou křivku součinitele dotvarování místo  $M$  neznámých dvojic  $E_j$  a  $\tau_j$ . Implementovaný algoritmus pro identifikaci parametrů Kelvinova řetězce je navržen pro práci s časovou křivkou součinitele dotvarování, jak je detailně popsáno v předchozí kapitole 2.3.1. Nejlepší výsledky byly získány s 5-ti Kelvinovými-Voigtovými články v Kelvinově řetězci. Průměrné  $RMSE$  chyby dosahují hodnot  $0.001266289 \pm 1.27 \cdot 10^{-4}$  pro podélný směr dřeva L a  $0.002733644 \pm 2.84 \cdot 10^{-4}$  pro příčný (radiální) směr dřeva R. Realizace pro 5 článků jsou graficky k nerozeznání od vstupních křivek. V případě 7 a 9 členů byly



**Obrázek 3.7:** Trilineární / bilineární pracovní diagram se zpevněním a) v tlaku, b) v tahu pro podélný (L nebo x) směr a pro příčný radiální směr (R nebo y) směr c) v tlaku, d) v tahu

výsledky také numericky a graficky dostatečně přesné, ale průměrná časová náročnost výpočtu jednotlivé identifikace byla u 7 členů 1.7krát vyšší a u 9 členů 2.6krát vyšší. Tyto výše uvedené výsledky byly použity k rozhodnutí použít defaultně 5 článků Kelvinova řetězce pro strukturální analýzy.

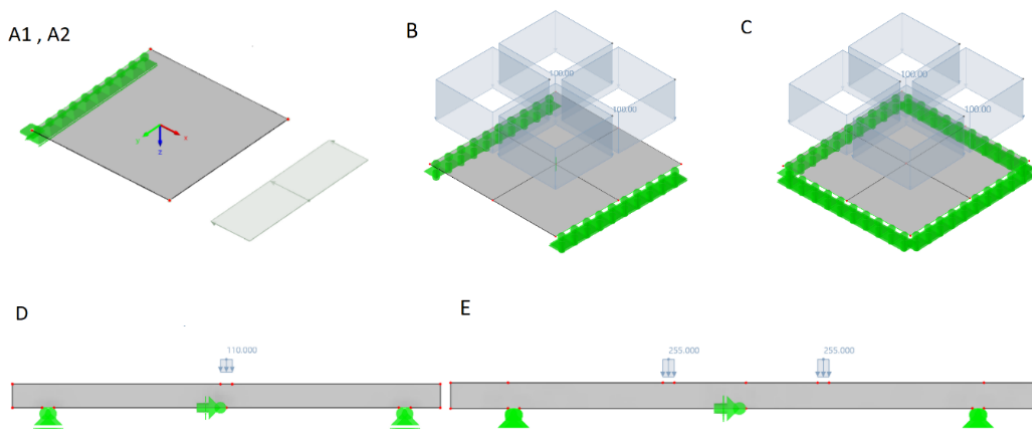


**Obrázek 3.8:** Experimentálně získané časové křivky součinitele dotvarování [67, 16]

## Testovací úlohy

Byly vybrány následující testovací úlohy, abychom otestovali a analyzovali modulární materiálový model kombinující viskoelasticitu s poškozením. Úlohy A1, A2, B, a C jsou reprezentovány jako prostá stěnová konstrukce (2D rovinná napjatost) o rozměrech  $1 \times 1 \times 1$  m. Geometrie D reprezentuje menší desku o rozměrech  $0.3 \times 0.02$  m v rovině napjatosti a kolmo na rovinu o rozměru 0.1 m. Geometrie E reprezentuje nosník o rozměrech  $0.8 \times 0.07$  m v rovině napjatosti a kolmo na rovinu o rozměru 0.07 m (menší trám). Stěny A1

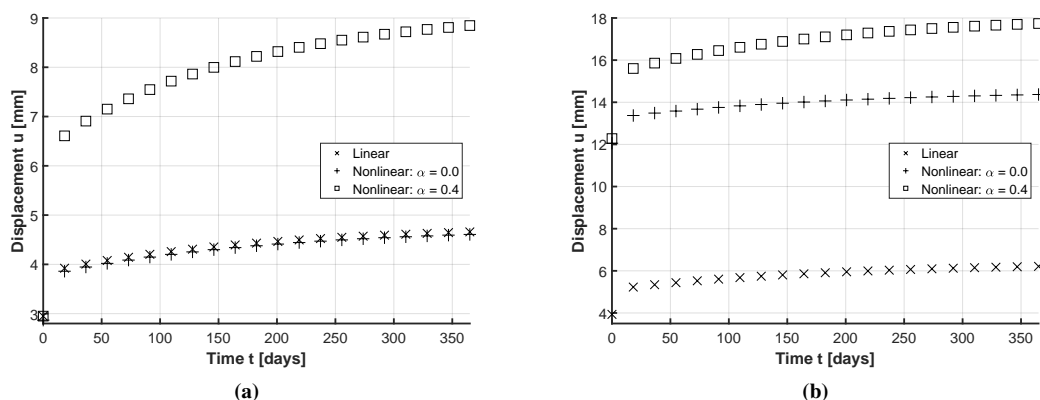
a A2 mají jednu pevnou liniovou podporu a protilehlou linii mají tlakově zatíženou 30 kN/m (A1) a 40 kN/m (A2) v podélném směru dřeva. Stěnová konstrukce B znázorňuje ohybové chování stěnového modelu se dvěma vetknutými protilehlými liniovými podporami a kolmým plošným zatížením. Úloha C také představuje stejný test ohybu jako úloha B, ale deska je nyní vetknutá ze všech čtyř stran. Úloha D ukazuje 2D rovinný napěťový model nosníkové konstrukce připomínající rozměry spíše desku na příkladu tříbodového ohybu s okrajovými podmínkami aplikovanými na krátkých liniích reprezentující podpory nosníku a liniové zatížení uprostřed délky nosníku. Úloha E je také 2D (rovinná napjatost) nosníková konstrukce s tím rozdílem, že se jedná o čtyřbodový ohyb nosníku, kde podpory i zatížení jsou opět aplikovány na krátkých liniích.



Obrázek 3.9: Přehled testovacích úloh

### 3.4.2 Výsledky a diskuze

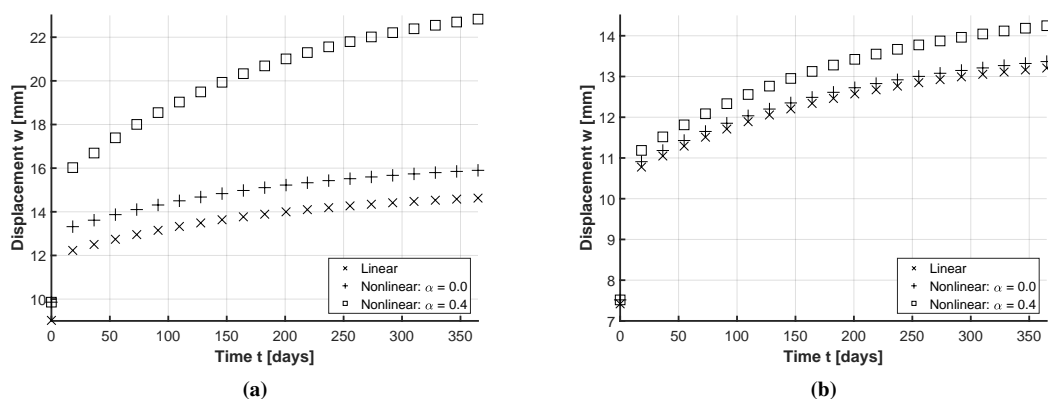
Cílem je ukázat chování nového materiálového modelu s nově zavedeným parametrem  $\alpha$  na výsledné časové odezvy vybraných testovacích úloh. Vliv parametru  $\alpha$  na časové křivky je ukázán na prvních testovacích úlohách porovnáním výsledků s materiálovým modelem bez parametru  $\alpha$  a s materiálovým modelem bez poškození, tedy čistě viskoelastickým. Významný vliv parametru  $\alpha$  je demonstrován v prvních úlohách 3.10, 3.11, 3.12, 3.14, a proto je na obrázcích znázorněno chování materiálového modelu při různých úrovních zatížení pouze s nenulovým parametrem  $\alpha$  níže (obrázky 3.13, 3.15, 3.16, 3.17, 3.18, 3.19).



Obrázek 3.10: Výsledky testovacích úloh A1 a A2: posun  $u$  v podélném směru  $x$  dřeva pro dvě různé úrovně zatížení a) 30 MPa, b) 40 MPa

Obrázek 3.10 ukazuje časový průběh posunu v podélném směru dřeva pro dvě různé úrovně zatížení. Pro obě tyto úrovně zatížení je úloha vypočítána pomocí tří variant materiálového modelu: a) lineární viskoelastický model bez vlivu poškození (zobecněný Kelvinův řetězec), b) viskoelastický model v kombinaci

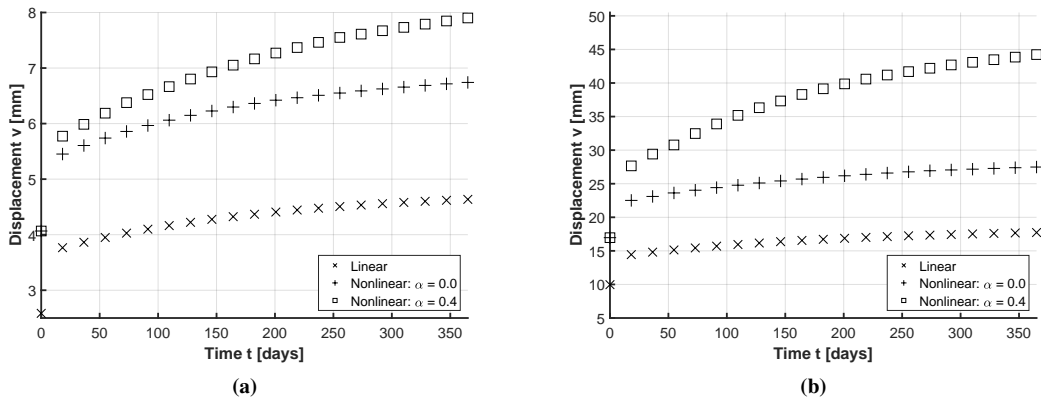
s modelem poškození (zobecněný Kelvinův řetězec + model poškození) bez zohlednění parametru  $\alpha$ , c) viskoelastický model v kombinaci s modelem poškození (zobecněný Kelvinův řetězec + model poškození) s nenulovým parametrem  $\alpha$  nastaveným na 0.4. Je pozorováno, že při nižší úrovni zatížení (30 MPa; těsně pod mezí kluzu dřeva) nedochází k poškození (plasticitě) ihned po zatížení, ale až po uplynutí určité doby v důsledku dotvarování, a to pouze při použití nenulového parametru  $\alpha = 0.4$ , protože se jedná o jednoosou napjatost a není tak možná redistribuce vnitřních sil. Bez vlivu parametru  $\alpha$  nelze mez kluzu překročit, jak je ukázáno na obrázku 3.10 (a). Na druhou stranu je vidět, že při vyšším zatížení dojde hned na začátku po zatížení k překročení meze kluzu a toto poškození se časem zvyšuje jak v případě  $\alpha = 0.4$ , tak i v případě  $\alpha = 0$ , protože odezva na poškození nastala ihned na začátku a roste s dotvarováním v čase i bez vlivu parametru  $\alpha$  3.10 (b). Na tomto obrázku je ukázán význam a vliv parametru  $\alpha$  na vznik a vývoj poškození v čase v důsledku jevu zvaného anglicky jako "creep damage", tedy poškození v důsledku dotvarování.



**Obrázek 3.11:** Výsledky testovacích úloh B a C: průhyb (posunutí kolmo na rovinu desky  $w$ ) skořepinové konstrukce zatížené 615 kN/m<sup>2</sup> v příčném směru a) podepřená na obou stranách, b) podepřená na všech čtyřech stranách

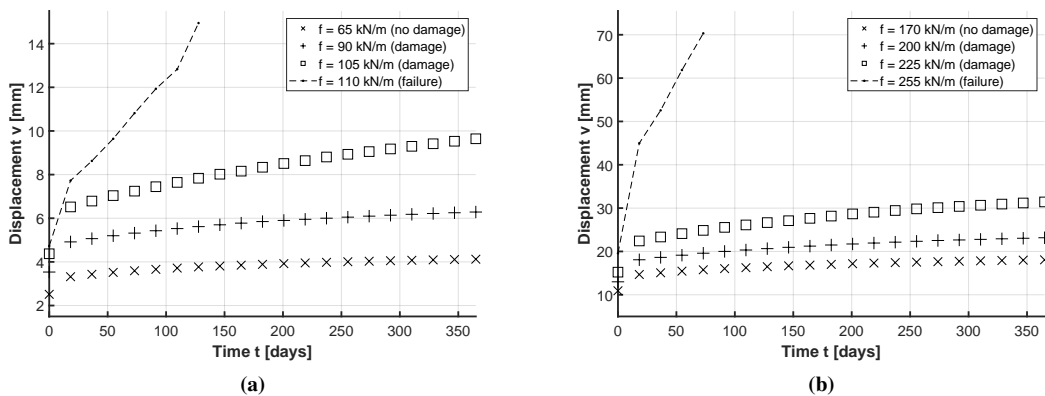
Obrázek 3.11 ukazuje výsledky výpočtu s modulárním materiálovým modelem úloze ohýbané desky, která je podepřená (a) na dvou protilehlých stranách, (b) na všech čtyřech stranách. Tato deska je zatížena spojitým plošným zatížením 615 kN/m<sup>2</sup>. Grafy ukazují časové průběhy průhybu (posunutí  $w$  ve směru kolmém k rovině desky, tedy ve směru  $z$ ) v závislosti na nastavení materiálového modelu. Materiálový model byl nastaven v těchto třech variantách: a) lineární viskoelastický model bez vlivu poškození (zobecněný Kelvinův řetězec), b) viskoelastický model kombinovaný s modelem poškození (zobecněný Kelvinův řetězec + model poškození) bez zohlednění parametru  $\alpha$ , c) viskoelastický model kombinovaný s modelem poškození (zobecněný Kelvinův řetězec + model poškození) s nenulovým parametrem  $\alpha = 0.4$ . Z obrázku 3.11 je vidět, že nový materiálový model dává očekávané výsledky. U lineárního viskoelastického modelu je průhyb nejmenší, v případě kombinované viskoelastické a poškození se získá větší průhyb i bez vlivu parametru  $\alpha$  a samozřejmě největší průhyb v čase nastává při zohlednění vlivu parametru  $\alpha$ . Pokud porovnáme obrázek (a) na levé straně a obrázek (b) na pravé straně, je zřejmé, že v pravém diagramu (deska podepřená ze všech čtyř stran) jsou menší průhyby a na začátku (hned po aplikaci zatížení) nedochází k žádnému poškození (průhyb vypočítaný s lineárním materiálem se shoduje s průhybem vypočítaným s nelineárním materiálem) a až během času, zejména vlivem nenulového parametru  $\alpha$ , se průhyby začnou lišit. Na druhé straně na levém obrázku dochází na začátku k mírnému poškození (průhyby se mírně liší) a tento rozdíl se časem zvětšuje kvůli dotvarování. Největší průhyby jsou opět v případě zohlednění vlivu nenulového parametru  $\alpha$ .

Obrázky 3.12, 3.13, 3.14, 3.15, 3.16, 3.17, 3.18, 3.19 ukazují aplikaci nového materiálového modelu na průhyby nosníků (posun ve směru  $y$ ) modelovanými 2D prvky jako úlohy rovinné napjatosti. Jde o dvě úlohy: D - tříbodový ohyb nosníku, E - čtyřbodový ohyb nosníku. Obě testovací úlohy D a E byly vypočteny se třemi různými nastaveními materiálového modelu: a) lineární viskoelastický model bez vlivu poškození (zobecněný Kelvinův řetězec), b) viskoelastický model kombinovaný s modelem poškození (zobecněný Kelvinův řetězec + model poškození) bez zohlednění parametru  $\alpha$ , c) viskoelastický model v kombinaci s modelem poškození (zobecněný Kelvinův řetězec + model poškození) s nenulovým parametrem  $\alpha = 0.4$ .



**Obrázek 3.12:** Výsledky testovacích úloh D a E: průhyb nosníku (posunutí  $v$  v příčném směru  $y$ ), a) třibodová zkouška ohybem, zatížení čáry 100 kN/m, b) čtyřbodová zkouška ohybem, dvě zatížení vedení 2x240 kN/m

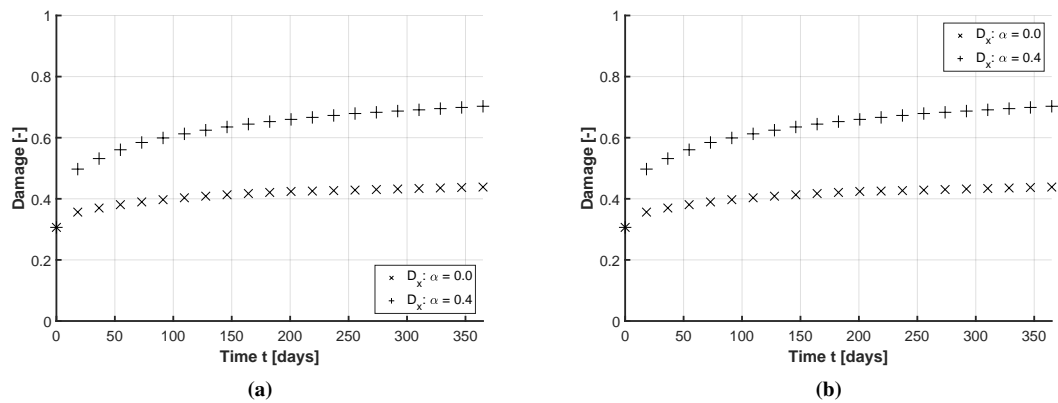
Z obrázku 3.12 je vidět, že v obou případech závisí průhyb nosníku na nastavení materiálového modelu a zásadní vliv má kombinace poškození s dotvarováním. Největší vliv je opět v případě nenulového parametru  $\alpha$  a jev zvaný "creep damage" (poškození v důsledku dotvarování) je demonstrován porovnáním časových průběhů všech tří variant materiálového modelu: 1) viskoelastického, 2) viskoelastického s poškozením bez parametru  $\alpha$ , 3) viskoelastického s poškozením s nenulovým parametrem  $\alpha = 0.4$ .



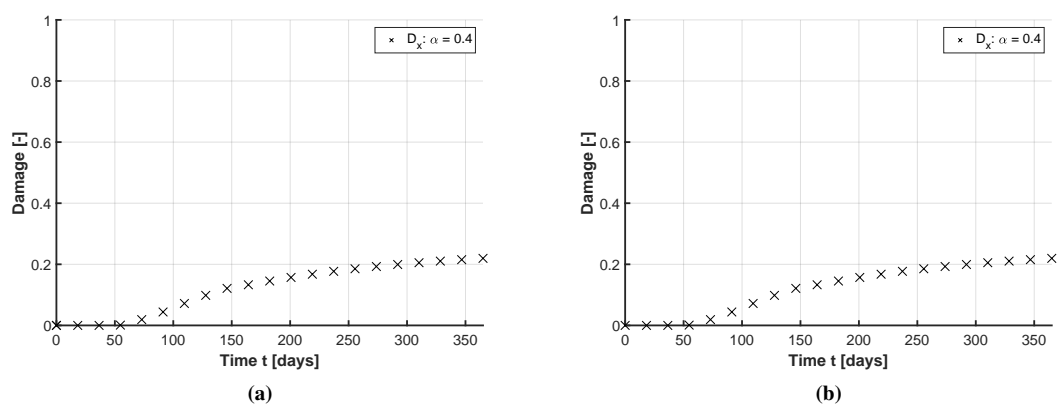
**Obrázek 3.13:** Výsledky srovnávacích úloh D a E: průhyb (posunutí  $v$  v příčném směru  $y$ ) pro různé úrovně zatížení s parametrem  $\alpha$ , a) zkouška třibodovým ohybem, b) zkouška čtyřbodovým ohybem

Obrázek 3.13 ukazuje časové závislosti průhybu nosníku pro různé úrovně zatížení (materiálový model nastavený na nenulovou hodnotu parametru  $\alpha = 0.4$  pro zachycení nejextrémnějšího případu možného chování - největší průhyby). Cílem bylo zjistit, pro jaké úrovně zatížení je odezva nosníku a) bez poškození uprostřed jeho délky, b) s mírným rozvojem poškození v tahu i tlaku, c) s největším rozvojem poškození, d) se ztrátou stability - selhání konstrukce. V obou případech se ukázalo, že nosník nemusí selhat okamžitě po aplikaci zatížení, ale až po určité době. Čas tedy hraje důležitou roli při selhání konstrukce a pro zachycení skutečné odezvy konstrukce není možné tyto viskózní jevy, jako je v tomto případě dotvarování, zanedbat. Časové křivky třibodové ohybové zkoušky (obrázek 3.13 vlevo) ukazují, že k selhání dojde po 109,5 dnech při zatížení 110 kN/m. Časové křivky čtyřbodové ohybové zkoušky ukazují, že k selhání dojde po 73 dnech při zatížení 2x255 kN/m (obrázek 3.13 vpravo).

Obrázek 3.14 ukazuje vývoj poškození uprostřed délky nosníku na jeho spodní tahové straně v podélném směru  $x$  pro tyto úrovně zatížení: a) 100 kN/m pro třibodový ohyb (vlevo), b) 2x250 kN/m pro čtyřbodový ohyb (vpravo). Je pozorováno, že v obou případech k poškození dochází okamžitě po aplikaci zatížení a pak toto poškození s časem narůstá. V případě  $\alpha = 0.4$  poškození časem narůstá více.



**Obrázek 3.14:** Výsledky testovacích úloh D a E: poškození nosníku uprostřed jeho délky pro a) tříbodový ohyb se zatížením 100 kN/m, b) čtyřbodový ohyb se zatížením 2x250 kN/m



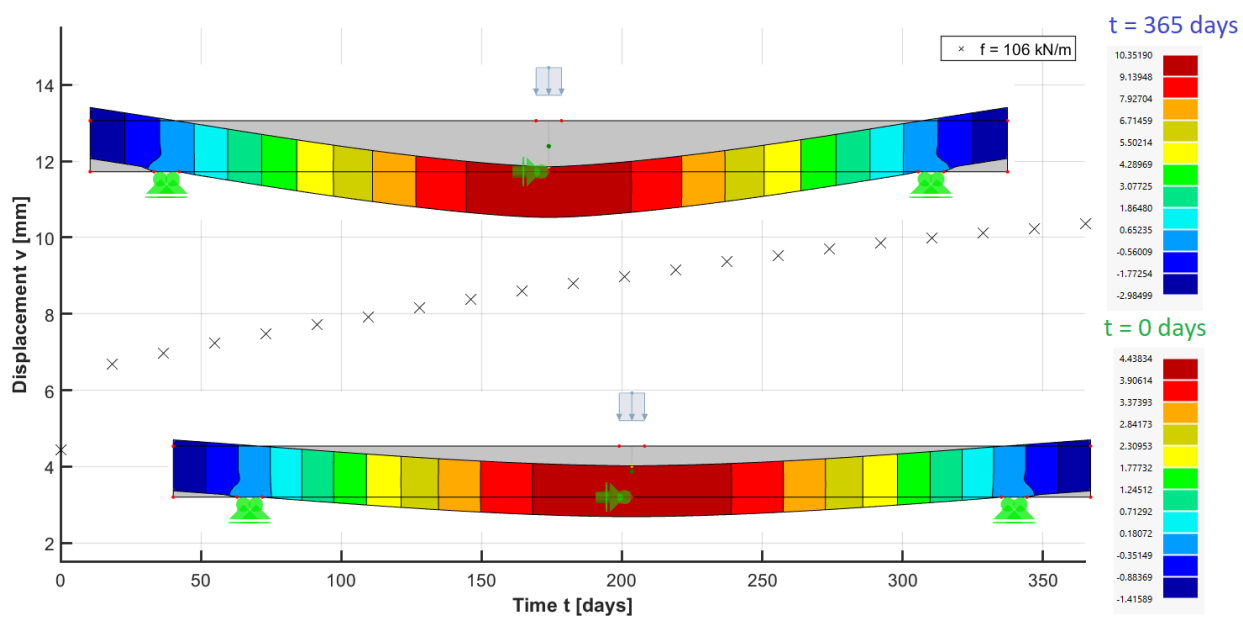
**Obrázek 3.15:** Výsledky testovacích úloh D a E: poškození nosníku uprostřed jeho délky s použitím parametru  $\alpha = 0.4$  pro a) tříbodový ohyb se zatížením 70 kN/m, b) čtyřbodový ohyb pro zatížení 2x180 kN/m

Obrázek 3.15 ukazuje vývoj poškození uprostřed délky nosníku, na spodní straně (tj. poškození tahem v podélném směru  $x$ ) pro úroveň zatížení (70 kN/m vlevo pro tříbodový ohyb a 2x180 kN/m vpravo pro čtyřbodový ohyb). V obou případech k poškození nedochází hned po aplikaci zatížení, ale dochází k němu až po určité době a pak dále s časem narůstá. Záměrně je použita pouze poslední třetí varianta materiálového modelu, kdy je uvažován vliv nenulového parametru  $\alpha$  a je zvolena menší úroveň zatížení, aby se ukázalo, že poškození nenastane ihned po aplikaci zatížení, ale až po určité době v důsledku dotvarování.

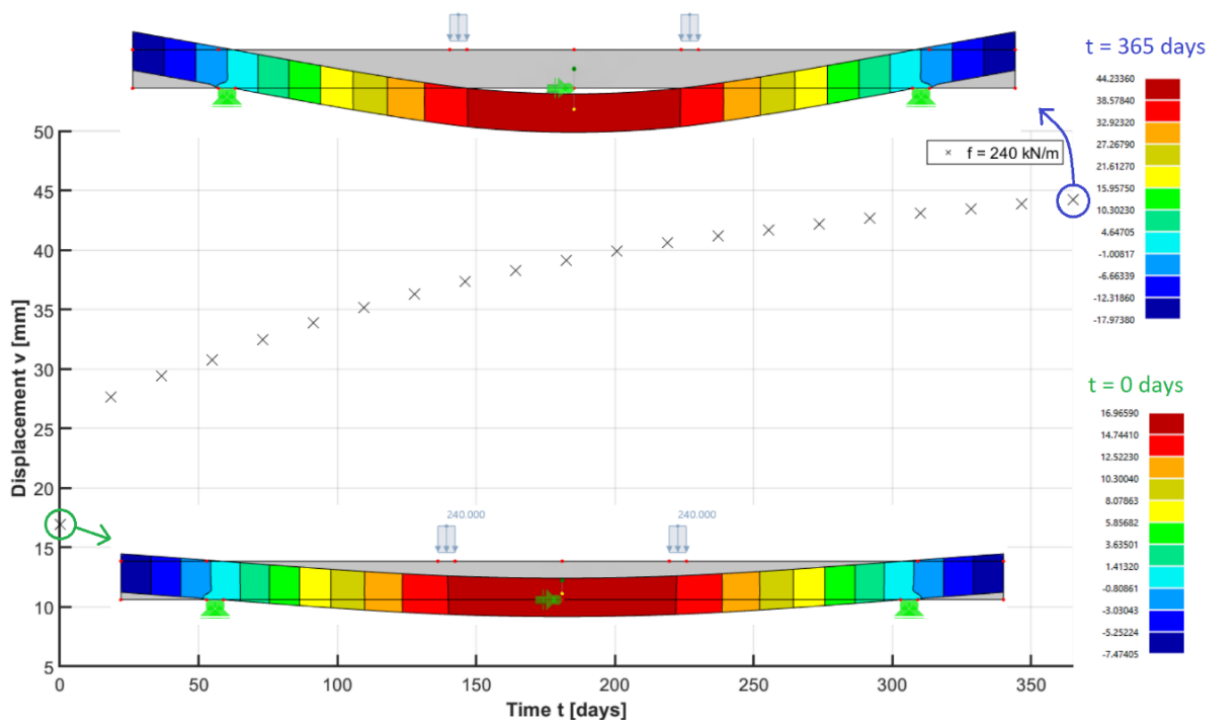
Barevně jsou výsledky tříbodového a čtyřbodového ohybu prezentovány pro průhyb  $v$  a výsledný parametr poškození  $D_x$  ve směru  $x$  na obrázcích 3.16, 3.17, 3.18, 3.19).

Obrázky 3.16 a 3.17 ukazují, jak se průhyb (posunutí ve směru  $y$ ) dřevěného nosníku, který je zatížen tříbodovým (obrázek 3.16) a čtyřbodovým (obrázek 3.17) ohybem, v průběhu času zvyšuje. Je zde dole zobrazen okamžitý průhyb hned po zatížení (v čase  $t = 0$  dní) a nahoře po roce zatížení. Všechny výsledky jsou uvedeny pro  $\alpha = 0.4$ . Je pozorováno, že průhyb se významně zvyšuje s rostoucím časem. To se děje ze dvou důvodů: a) kvůli samotnému dotvarování, ale také b) kvůli rostoucímu poškození v důsledku dotvarování ( $\alpha = 0.4$ ).

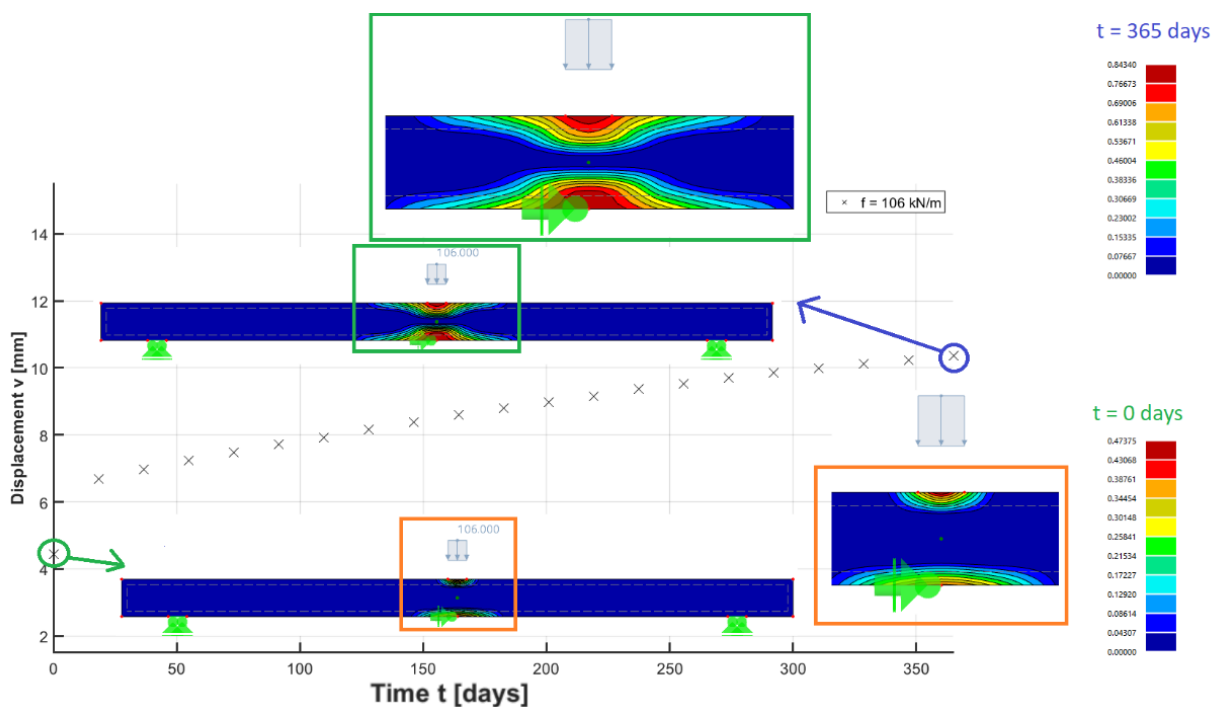
Obrázky 3.18 a 3.19 ukazují rozložení poškození uvnitř dřevěného nosníku, který je zatížen tříbodovým (Obrázek 3.18) a čtyřbodovým (Obrázek 3.19) ohybem. Je zobrazena pouze složka poškození v podélném směru osy  $x$ . Ve spodní části obrázků je znázorněno poškození bezprostředně po aplikaci zatížení ( $t = 0$  dní) a nahoře je barevně znázorněno poškození po jednom roce zatížení. Všechny výsledky jsou uvedeny pro  $\alpha = 0.4$ . V horní části nosníku dochází k poškození tlakem a ve spodní části k poškození tahem. Na obrázku je vidět, že nejen průhyb nosníku (posunutí ve směru  $y$ ), ale i poškození časem narůstá vlivem dotvarování.



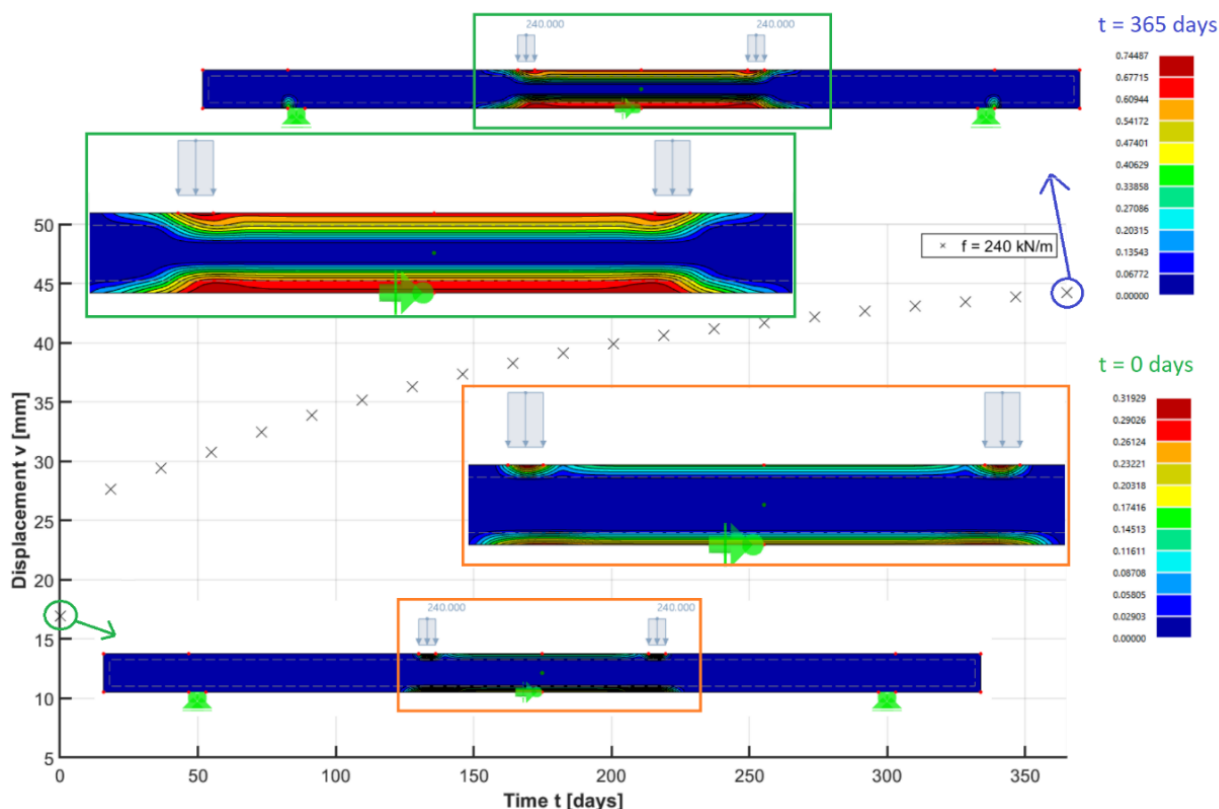
Obrázek 3.16: Průhyb nosníku při třibodové zkoušce ohybem s liovým zatížením 106 kN/m bezprostředně po aplikaci zatížení (0 dní, níže) a po 365 dnech zatížení (výše)



Obrázek 3.17: Průhyb nosníku při čtyřbodové zkoušce ohybem se dvěma čarami zatížení 2x240 kN/m bezprostředně po zatížení (0 dní, níže) a po 365 dnech zatížení (výše)



**Obrázek 3.18:** Poškození nosníku v podélném směru  $x$  při tříbodové zkoušce ohybem s lineovým zatížením 106 kN/m na začátku zatěžování (0 dní, níže) a po 365 dnech zatížení (výše)



**Obrázek 3.19:** Poškození nosníku v podélném směru  $x$  při čtyřbodové ohybové zkoušce se dvěma čarami zatížení 2x240 kN/m na začátku zatížení (0 dní, níže) a po 365 dnech zatížení (výše)

V této studii byl algoritmizován, do softwaru založeném na metodě konečných prvků implementován a na testovacích úlohách analyzován materiálový model umožňující současný výpočet dotvarování a poškození ortotropního materiálu dřeva. Materiálový model je založen na kombinaci ortotropního visko-



elastického modelu (zobecněného Kelvinova řetězce) s modelem poškození. Kombinace těchto dvou modelů byla důležitá pro reálnější časově závislý popis chování dřeva v konstrukci, protože dřevo vykazuje nejen okamžitou nelineární elasto-plastic-damage odezvu, ale také časově závislou odezvu v důsledku viskózního charakteru materiálu. V této práci se podařilo ukázat jev zvaný anglicky jako “creep damage”, tedy poškození způsobené dotvarováním dřeva. Bylo ukázáno, že: a) poškození nebo plastizace se v čase vyvíjí (roste a šíří dále), a také že: b) okamžitě po zatížení se dřevo nemusí poškodit nebo plastizovat, ale poškození nebo plastizace může vzniknout až v určitém čase od zatížení, a až potom se dále vyvíjí.

Výsledky jsou vždy spočítány ve třech variantách: 1) s lineárním visko-elastickým materiálem, 2) nelineárním (plastic-damage) visko-elastickým materiálem bez vlivu parametru creep-damage parametru (hodnotu parametru alfa rovna nule), 3) nelineárním (plastic-damage) visko-elastickým materiálem s vlivem creep-damage parametru (hodnotu parametru alfa rovna 0.4). Je ukázáno, že creep-damage parameter alfa má vliv na vznik a vývoj plasticity nebo poškození v čase a pro vystižení reálného časově závislého chování dřeva je třeba ho brát do úvahy.

První testovací úloha (A – 30 MPa, 40 MPa) ukázala, jak se nový materiálový model chová během 1D tlakového namáhání v elasto-plastické oblasti (řešeno pomocí modelu poškození, protože nás nezajímá odtěžovací křivka) v podélném i příčném směru, kdy a) plastizace se v čase vyvíjí (roste a šíří dále), b) okamžitě po zatížení dřevo neplastizuje, ale plastizace může vzniknout až v určitém čase od zatížení, a až potom se dále vyvíjí. V 1D tahovém namáhání nelze sledovat chování v nelineární oblasti, protože dřevo se v tahu chová křehce (mez úměrnosti = mez kluzu = mez pevnosti), tedy chová se z počátku lineárně a pak hned dosáhne meze pevnosti v tahu a za touto mezí se začne poškozovat (odpor dřeva či napětí ve dřevě klesá k nule). Při řešení Newtonovou metodou a předepsaném vnějším silovém zatížení větším než mez úměrnosti v tahu (= mez pevnosti v tahu) nelze najít rovnováhu s vnitřními silami, a proto tato metoda vyčerpá všechny iterace, což demonstruje konvergenční graf. Výsledky jsou spočítány ve všech třech výše zmíněných variantách.

Druhá sada úloh je “doplňková” a jejím cílem bylo ukázat, jak se nový materiálový model chová ve skořepinovém prvku namáhaném v ohybu (deskový model). Pro tento účel byla vybrána deska, která byla shora spojitě namáhána a byla podepřena I) jen na dvou protějších stranách, II) na všech čtyřech obvodových stranách. Na výsledcích bylo opět ukázáno, že: a) poškození nebo plastizace se v čase vyvíjí (roste a šíří dále), a také že: b) okamžitě po zatížení se dřevo nemusí poškodit nebo plastizovat, ale poškození nebo plastizace může vzniknout až v určitém čase od zatížení, a až potom se dále vyvíjí. Kvůli více-osé napjatosti jsou v této úloze výsledky pestřejší a lze pozorovat, jak při vyšším zatížení postupně v čase dřevo plastizuje (duktilně se poškozuje) v místech a směrech, kde je namáháno tlakem, a na této stejné úloze lze také pozorovat, jak se dřevo křehce poškozuje v místech a směrech, kde je dřevo namáháno tahem nebo smykem. Výsledky jsou spočítány ve třech výše zmíněných variantách.

Poslední dvě testovací úlohy jsou o tříbodovém a čtyřbodovém ohybu nosníku modelovaném jako rovinná úloha (2D plane stress) se dvěmi normálovými složkami napětí a jednou smykovou složkou napětí. Tyto úlohy ukázaly chování nového materiálového modelu dřeva při ohybovém namáhání dřevěného nosníku. Na výsledcích bylo opět ukázáno, že: a) poškození nebo plastizace se v čase vyvíjí (roste a šíří dále), a také že: b) okamžitě po zatížení se dřevo nemusí poškodit nebo plastizovat, ale poškození nebo plastizace může vzniknout až v určitém čase od zatížení, a až potom se dále vyvíjí. Kvůli víceosé napjatosti jsou v této úloze výsledky pestřejší a lze pozorovat, jak při vyšším zatížení postupně v čase dřevo plastizuje (duktilně se poškozuje) v místech a směrech, kde je namáháno tlakem, a na této stejné úloze lze také pozorovat, jak se dřevo křehce poškozuje v místech a směrech, kde je dřevo namáháno tahem nebo smykem. Výsledky jsou spočítány ve třech výše zmíněných variantách.

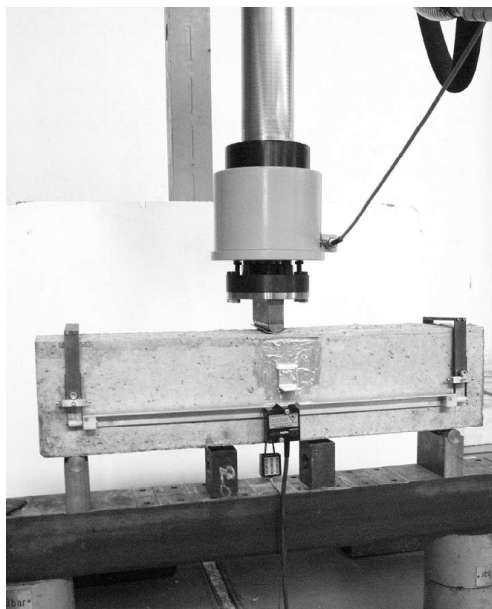
### 3.5 Analýza viskoelastického modelu s modelem poškození izotropního materiálu betonu na experimentální úloze

V této kapitole je provedena analýza modulárního modelu zobecněného Kelvinova řetězce s modelem poškození na izotropním materiálu betonu. První je popsán experiment, potom materiálové vlastnosti betonu a nakonec výsledky numerické analýzy.

### 3.5.1 Numerická analýza experimentální úlohy

#### Experiment

Pro účely této práce je z článku [65] převzat experiment měřící nelineární a časově závislé chování betonového nosníku u tříbodového ohybu. Fotografie experimentu je na obrázku 3.20.



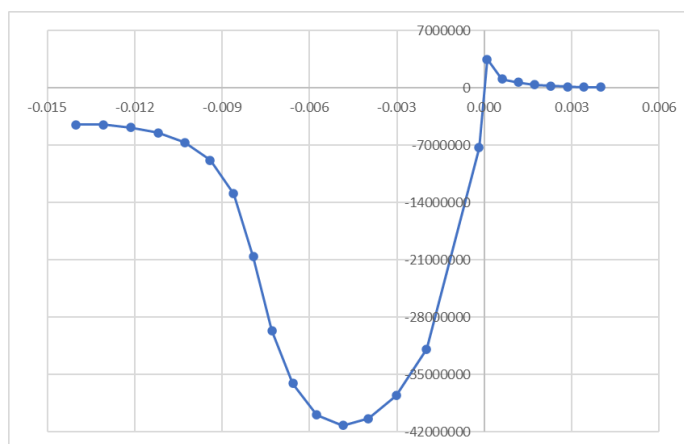
Obrázek 3.20: Fotografie experimentu

#### Model betonového nosníku

Pro numerickou analýzu je použitý MKP model levé poloviny nosníku (viz 3.26), nosník je bez vrubu a rozměry nosníku jsou následující: délka 0.7 m, výška průřezu 0.2 m, šířka průřezu 0.1 m. Dále jsou uvedeny důležité vstupní materiálové vlastnosti betonu, které jsou rozděleny do dvou skupin: a) časově nezávislé 3.21, b) časově závislé (viskózní) 3.22.

##### a) Časově nezávislé vlastnosti modelu poškození

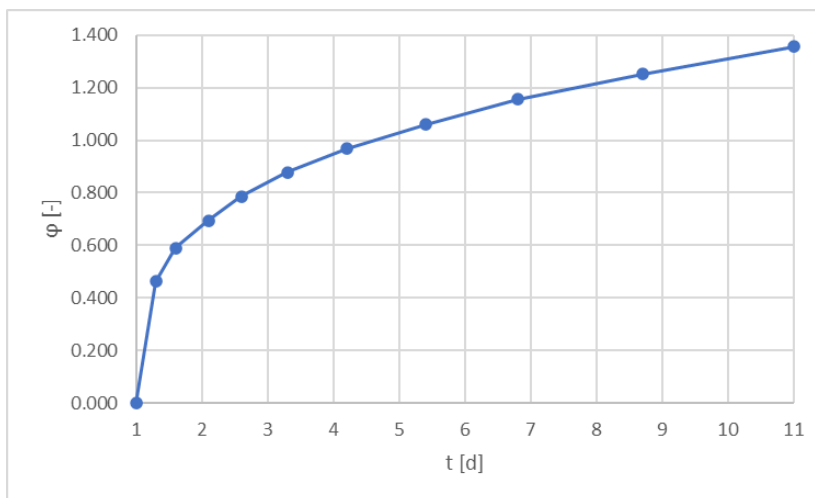
Modul pružnosti a meze pevnosti v tlaku i tahu jsou následující:  $E = 39 \text{ GPa}$ ,  $f_c = 41.25 \text{ MPa}$ ,  $f_t = 3.48 \text{ MPa}$ . Pracovní diagram betonu je názorně ukázán na obrázku 3.21.



Obrázek 3.21: Pracovní diagram betonu

### b) Časově závislé vlastnosti modelu viskoelasticity

Časová křivka součinitele dotvarování betonu je ukázána na obrázku 3.22.

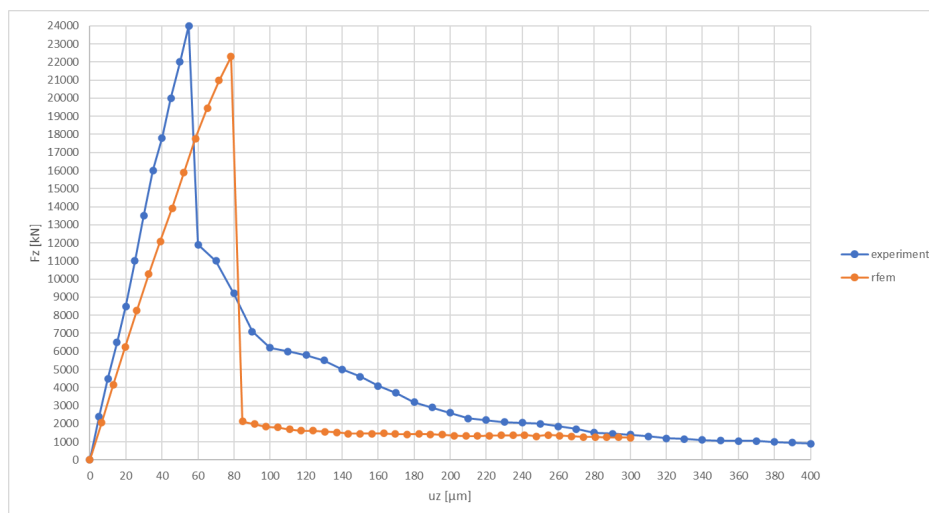


Obrázek 3.22: Časová křivka součinitele dotvarování betonu

## 3.5.2 Výsledky a diskuze

### Časově nezávislá odezva modelu poškození

Pro časově nezávislou analýzu je předepisován průhyb  $u_z$  a sledována je síla  $F_z$  potřebná pro navození tohoto průhybu. Na obrázku 3.23 je vidět, že nelineární okamžitá (časově nezávislá) odezva modelu poškození 3.2.1.1 zhruba odpovídá reálnému měření v experimentu, takže tento model lze použít v kombinaci s viskoelastickým modelem (zobecněným Kelvinovým řetězcem) pro další časově závislou analýzu.

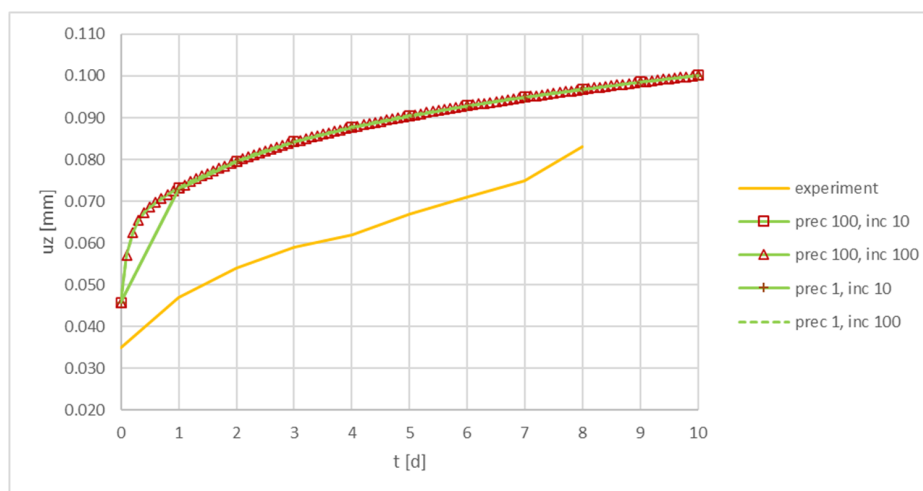


Obrázek 3.23: Srovnání modelem poškození vypočítané křivky deformace vs. zatížení s experimentem

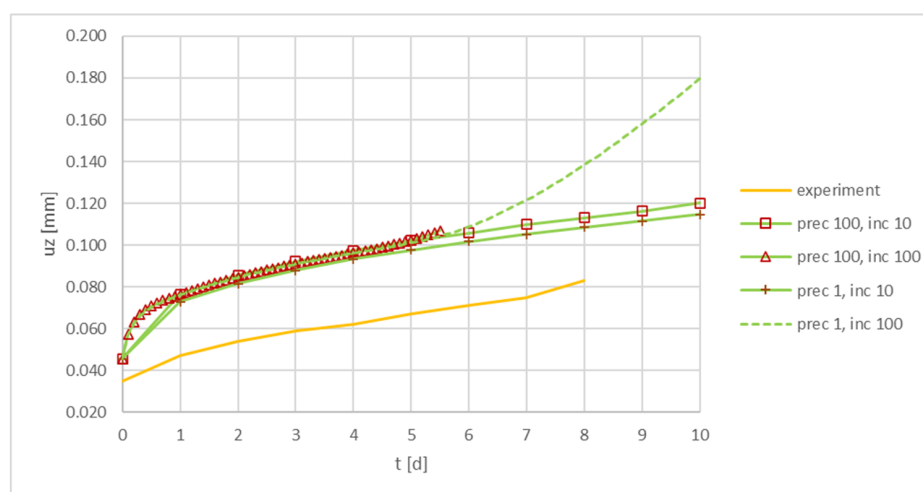
### Časově závislá odezva modelu poškození

Pro časově závislou analýzu je předepsána síla  $F_z = 16.78$  [kN] a je sledován časový průběh průhybu  $u_z$  a poté na barevných obrázcích je také sledováno poškození  $D$ , které je maximem jednotlivých složek poškození. Časově závislá analýza (anglicky time-dependent analysis, zkratka TDA) je provedena pomocí

modulárně sestaveného materiálového modelu kombinující viskoelastický model (zobecněný Kelvinův řetězec) 2.3 s modelem poškození 3.2.1.1. Byl srovnán vliv parametru  $\alpha$ , počet časových kroků a přísnost konvergenčních kritérií na výsledek výpočtu. Pro výpočet byly použity hodnoty  $\alpha = 0$  a  $\alpha = 0.5$  3.24, 3.25. Časový krok pro dobu zatěžování 10 dní byl zvolen na 10 a 100 kroků a přísnost konvergenčních kritérií byla nastavena na 1 a 100.



**Obrázek 3.24:** Srovnání modelem poškození vypočítaných časových průběhů deformace s experimentem pro  $\alpha = 0$



**Obrázek 3.25:** Srovnání modelem poškození vypočítaných časových průběhů deformace s experimentem pro  $\alpha = 0.5$

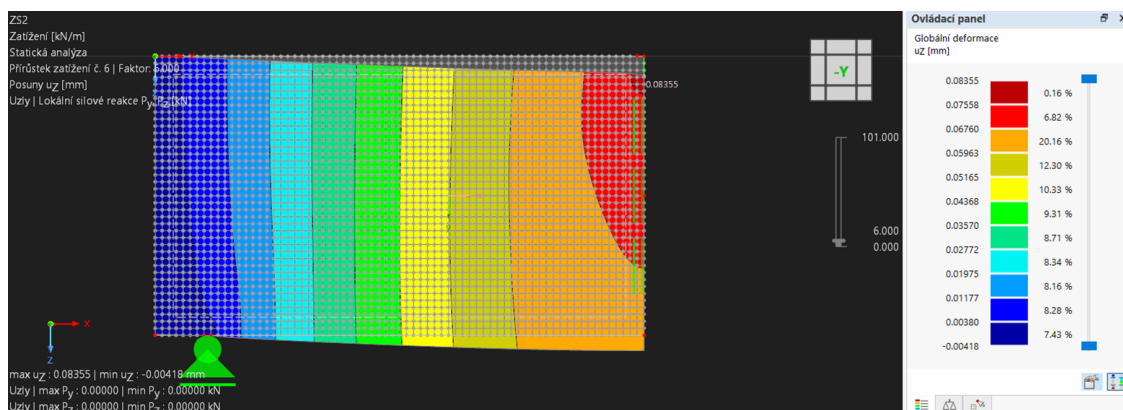
Z obrázků 3.24, 3.25 je jasné, že výsledky závisí na zvolené přísnosti konvergenčních kritérií (anglicky precision - v grafu zkráceně prec, kde vyšší číslo znamená přísnější kritérium), ale větší vliv na výsledek má velikost časového kroku, který je dán zadaným počtem časových kroků (čím větší počet časových kroků tím nepřímě úměrně menší velikost jednoho časového kroku). Výsledky jsou přesněji spočítány s vyšším počtem časových kroků kvůli časové redistribuci vnitřních sil a s vyšší hodnotou "precision". Kdyby se vnitřní síly s časem neměnily, tak by výpočet nezávisel na počtu časových kroků. Z časových průběhů průhybu je jasné, že pro danou hladinu zatížení dojde k selhání pouze s nenulovou hodnotou parametru  $\alpha = 0.5$  a to zhruba po pěti dnech, jak je vidět na obrázku 3.25, což je o dva dny dříve, než bylo naměřeno v experimentu (tam to začalo selhávat po sedmi dnech). Nalezení času, kdy konstrukce ztratí stabilitu není numericky jednoduchá úloha, protože to závisí na nastavení konvergenčních kritérií, u kterých je vhodné zpřísnit kritérium na vyváženost vnitřních sil s vnějšími, a také deformační kritérium, u kterého se sleduje zrychlený nárůst deformace (stabilitní analýza by zasloužila samostatnou pozornost, ale na to není v této práci volný prostor).

### Posun a poškození na začátku a po pěti dnech

Na obrázcích 3.26, 3.27, 3.28 je vidět, že průhyb  $u_z$  roste v čase a je vyšší pro vyšší hodnotu parametru  $\alpha$ . Zajímavé jsou výsledky ukazující poškození na začátku a po pěti dnech 3.29, 3.30, 3.31. Pokud je  $\alpha = 0$ , tak je poškození po pěti dnech téměř stejné jako na začátku a časový nárůst průhybu  $u_z$  je jen v důsledku viskoelastického dotvarování. Pokud je však  $\alpha = 0.5$ , tak roste v důsledku viskoelasticity nejen průhyb  $u_z$ , ale také poškození  $D$ , jak je patrné z obrázku 3.31.



Obrázek 3.26: Posun  $u_z$  na začátku



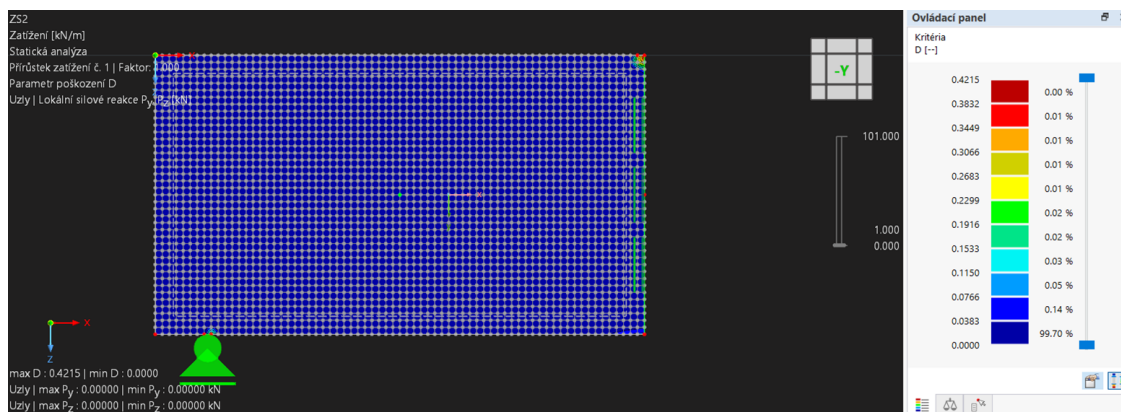
Obrázek 3.27: Posun  $u_z$  po 5 dnech pro  $\alpha = 0.0$



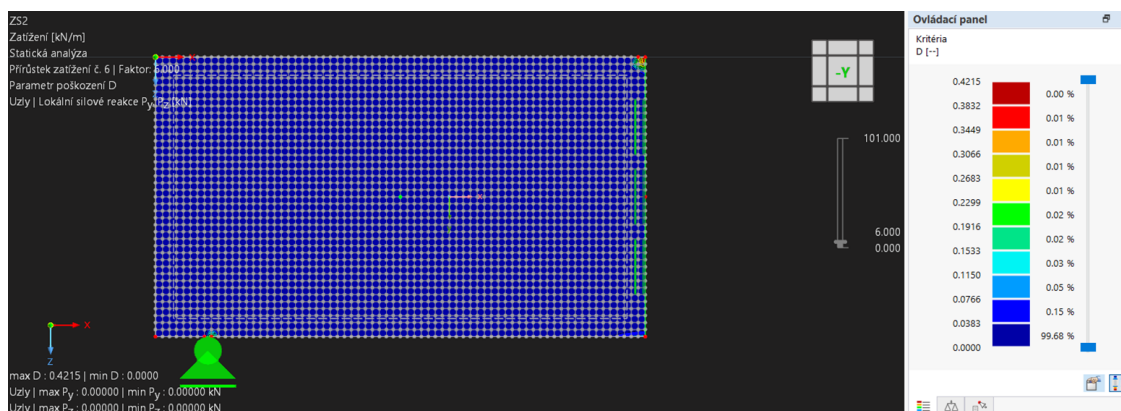
Obrázek 3.28: Posun  $u_z$  po 5 dnech pro  $\alpha = 0.5$

Z výsledků je zřejmé, že závisí na volbě parametru  $\alpha$  a počtu časových kroků. S hodnotou parametru  $\alpha = 0.5$  vychází výpočet blíže k experimentu. Vliv tohoto parametru při podrobnějších časově závislých výpočtech s nelineárním materiálem by měl být zohledněn.

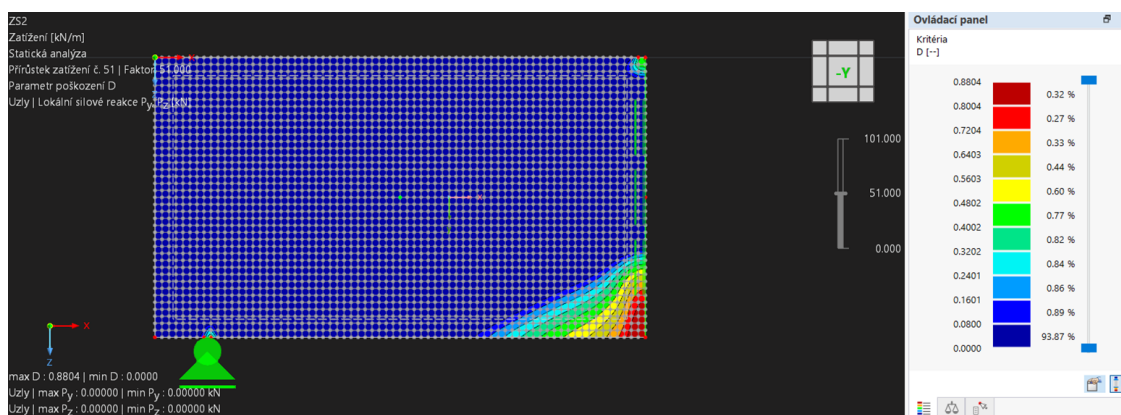




Obrázek 3.29: Maximální poškození  $D$  na začátku



Obrázek 3.30: Maximální poškození  $D$  po 5 dnech pro  $\alpha = 0.0$



Obrázek 3.31: Maximální poškození  $D$  po 5 dnech pro  $\alpha = 0.5$

## 4 | Dynamická analýza modulárně koncipovaného materiálového modelu

### 4.1 Přehled problematiky

V této kapitole je první formulována pohybová rovnice při diskretizaci řešené oblasti konečnými prvky, pak jsou popsány dvě metody časové integrace těchto pohybových rovnic (explicitní a implicitní), což je nutný základ pro jakékoliv časově závislé výpočty v dynamice (spektrálními metodám používaným v dynamice není v této práci věnována pozornost). Dále je popsána problematika tlumení materiálovými modely v dynamice v elastické oblasti, což se týká viskoelastických materiálových modelů. Na to navazuje kapitola pojednávající o vlivu plasticity, poškození a vlivu kombinace těchto dvou nelinearit na okamžitou odezvu materiálu při předepsané historii zatížení. Pro rychlé (dynamické) děje je nutné použít plasticitu i poškození s viskozitou (viskoplastické modely včetně poškození), proto je na tuto problematiku zaměřena další kapitola. Analýza a validace modulárně koncipovaného materiálového modelu je provedena srovnáním výsledků numerického výpočtu nelineární a časově závislé odezvy železobetonového nosníku na dopad ocelového razníku s experimentem v poslední kapitole.

### 4.2 Pohybová rovnice v metodě konečných prvků

Virtuální práce vnějších sil se musí rovnat virtuální práci vnitřních sil. Pro jeden prvek s hranicí objemu a povrchu můžeme zapsat tuto rovnováhu virtuální práce takto:

$$\int_{\Omega_e} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega_e + \int_{\Gamma_e} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma_e + \sum_{i=1}^n \delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{f}_i = \int_{\Omega_e} (\delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} + \delta \mathbf{u}^T c \dot{\mathbf{u}} + \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}) d\Omega_e \quad (4.1)$$

kde  $\delta \mathbf{u}$  představuje virtuální posunutí a  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  příslušné přetvoření,  $\rho$  je hustota materiálu,  $c$  je parametr viskózního tlumení,  $\mathbf{b}$  jsou objemové a  $\mathbf{t}$  povrchové síly,  $\mathbf{f}_i$  představuje koncentrované síly a  $\delta \mathbf{u}_i$  příslušné virtuální posunutí. Parametr tlumení  $c$  nebere v úvahu vnitřní (materiálový) ani vnější odpor. Viskozita materiálu se nebere v úvahu, protože má vliv pouze v případě nenulové rychlosti deformace v daném hmotném bodě (přetvoření tělesa). Vliv vnějšího prostředí se nebere v úvahu, protože vektor napětí, který působí proti pohybu, vzniká i ve vnitřních bodech těles. Po diskretizaci konečnými prvky dostaneme následující vztahy

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \dot{\mathbf{d}} \quad \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \ddot{\mathbf{d}} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{d} \quad (4.2)$$

Kombinací rovnic 4.1 a 4.2 se dostane

$$\delta \mathbf{d}^T \left( \int_{\Omega_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega_e \ddot{\mathbf{d}} + \int_{\Omega_e} c \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega_e \dot{\mathbf{d}} + \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega_e - \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega_e - \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma_e - \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i \right) = 0 \quad (4.3)$$

kde se předpokládá, že soustředěné síly  $\mathbf{f}_i$  působí v uzlech. Označme první dva integrály v rovnici jako konzistentní matici hmotnosti a matici tlumení.

$$\mathbf{M}_e = \int_{\Omega_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega_e \quad (4.4)$$

$$\mathbf{C}_e = \int_{\Omega_e} c \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega_e \quad (4.5)$$

Slovo konzistentní znamená, že matice vyplývá přímo z diskretizace konečného prvku s odpovídajícími tvarovými funkcemi  $\mathbf{N}$ . Definujme vektory vnitřních a vnějších uzlových sil

$$\mathbf{f}_e^{\text{int}} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega_e \quad (4.6)$$

$$\mathbf{f}_e^{\text{ext}} = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega_e + \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma_e + \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i \quad (4.7)$$

Dosazením z rovnic 4.4, 4.5, 4.6 a 4.7 do rovnice 4.3 a zohledněním skutečnosti, že variace  $\delta \mathbf{d}$  může být libovolná, a proto se druhý tvar součinu musí rovnat nule, získáváme

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}_e \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{f}_e^{\text{int}} = \mathbf{f}_e^{\text{ext}} \quad (4.8)$$

Pro lineární elastický materiál bez materiálové nelinearity můžeme pro vnitřní uzlové síly napsat následující vztah

$$\mathbf{f}_e^{\text{int}} = \mathbf{K}_e \mathbf{d} \quad (4.9)$$

kde

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega_e \quad (4.10)$$

je matice tuhosti prvku, přičemž je konstitutivní maticí materiálu. Potom lze rovnici 4.8 přepsat

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}_e \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}_e \mathbf{d} = \mathbf{f}_e^{\text{ext}} \quad (4.11)$$

Rovnice 4.8 a 4.11 vyjadřují v diskretizované formě druhý Newtonův zákon, nebo obecněji zákon zachování hybnosti. Při zápisu těchto rovnic v globálním tvaru, tedy pro všechny stupně volnosti analyzované struktury, získáme

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{f}^{\text{int}} = \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (4.12)$$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (4.13)$$

Pohybovou rovnici diskrétního modelu konstrukce vystavené dynamickému zatížení lze zapsat následovně

$$\mathbf{M} \mathbf{a}(t) + \mathbf{C} \mathbf{v}(t) + \mathbf{f}^{\text{int}}(t) = \mathbf{f}^{\text{ext}}(t) \quad (4.14)$$

kde  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  jsou matice hmoty a tlumení a  $\mathbf{f}^{\text{ext}}$ ,  $\mathbf{f}^{\text{int}}$  jsou vektory vnějších a vnitřních sil a  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$ ,  $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{u}}$  jsou posunutí, rychlost a zrychlení.

Numerický proces přímé integrace pohybové rovnice 4.14 v časovém intervalu  $t \in \langle t_0, t_m \rangle$  se nazývá časová analýza. Čas je diskretizován na konečný počet časových okamžiků  $t_0, t_1, \dots, t_m$ . Vzdálenost mezi jednotlivými časovými okamžiky  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$  se nazývá časový krok. Délky časových kroků  $\Delta t_i$  ovlivňují přesnost, stabilitu a rychlost numerického řešení. V čase  $t = 0$  musí být definovány počáteční podmínky  $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0$ ,  $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0$ . Rovnice 4.14 pak vypadá následovně

$$\mathbf{M} \mathbf{a}_i + \mathbf{C} \mathbf{v}_i + \mathbf{f}_i^{\text{int}} = \mathbf{f}_i^{\text{ext}} \quad (4.15)$$



### 4.2.1 Časová numerická integrace pohybové rovnice

#### Explicitní metoda - centrální diference

Předpokládáme, že časové kroky jsou natolik malé, abychom mohli rychlost a zrychlení vypočítat pomocí následujících vztahů

$$\mathbf{v}_i = \frac{1}{2\Delta t_i} (\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_{i-1}) \quad (4.16)$$

$$\mathbf{a}_i = \frac{1}{\Delta t_i^2} (\mathbf{u}_{i+1} - 2\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{i-1}) \quad (4.17)$$

Dosazením vztahů 4.16 a 4.17 pro rychlost a zrychlení do pohybové rovnice 4.15 dostaneme následující vzorec

$$\left( \frac{1}{\Delta t_i^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t_i} \mathbf{C} \right) \mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{f}_i^{ext} - \mathbf{f}_i^{int} + \frac{2}{\Delta t_i^2} \mathbf{M} \mathbf{u}_i - \left( \frac{1}{\Delta t_i^2} \mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t_i} \mathbf{C} \right) \mathbf{u}_{i-1} \quad (4.18)$$

Metoda má všechny výhody explicitních metod, pokud  $[\mathbf{C}] = [\mathbf{0}]$  nebo  $[\mathbf{C}] = \alpha [\mathbf{M}]$ , kde  $\alpha$  je hmotnostní koeficient Rayleighova tlumení. Největší efektivity je dosaženo, když je matice hmoty  $\mathbf{M}$  diagonální. Explicitní metody jsou podmíněně stabilní. Časové kroky musí splňovat následující podmínku [84]

$$\Delta t_i \leq \frac{T_n}{\pi} \quad (4.19)$$

kde  $T_n$  je nejmenší vibrační perioda (nejmenší doba jednoho kmitu).

#### Implicitní metoda - Newmark

Implicitní metoda podle Newmarka je založena na řešení pohybové rovnice 4.14 v časovém okamžiku  $t_i$  podle následujícího vztahu

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i-1} + \Delta t_i \mathbf{v}_{i-1} + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t_i^2 \mathbf{a}_{i-1} + \beta \Delta t_i^2 \mathbf{a}_i \quad (4.20)$$

kde

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i-1} + (1 - \gamma) \Delta t_i \mathbf{a}_{i-1} + \gamma \Delta t_i \mathbf{a}_i \quad (4.21)$$

kde  $\beta$  a  $\gamma$  jsou Newmarkovy parametry. Cílem této metody je vypočítat výsledné posuvy, rychlosti a zrychlení v čase  $t_i$  pomocí přírůstků od času  $t_{i-1}$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i-1} + \Delta \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i-1} + \Delta \mathbf{v}_i, \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_{i-1} + \Delta \mathbf{a}_i \quad (4.22)$$

Přírůstky rychlosti a zrychlení se vypočítají pomocí přírůstků posuvů následovně

$$\Delta \mathbf{a}_i = \Delta \bar{\mathbf{a}}_i + \frac{1}{\beta h^2} \Delta \mathbf{u}_i, \Delta \mathbf{v}_i = \Delta \bar{\mathbf{v}}_i + \frac{\gamma}{\beta h} \Delta \mathbf{u}_i \quad (4.23)$$

kde

$$\Delta \bar{\mathbf{a}}_i = \left( -\frac{1}{\beta \Delta t_i} \mathbf{v}_{i-1} - \frac{1}{2\beta} \mathbf{a}_{i-1} \right), \Delta \bar{\mathbf{v}}_i = \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t_i \mathbf{a}_{i-1} - \frac{\gamma}{\beta} \mathbf{v}_{i-1} \quad (4.24)$$

Přírůstky posuvů se vypočítají následovně

$$\Delta \mathbf{u}_i = \sum_{k=1}^{n_{ITER}} \Delta \Delta \mathbf{u}_i \quad (4.25)$$

kde

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{K}}_i^k \Delta \Delta \mathbf{u}_i &= {}^k \Delta \Delta \mathbf{f}_i - \mathbf{M} \Delta \bar{\mathbf{a}}_i - \mathbf{C} \Delta \bar{\mathbf{v}}_i & \text{pro } k = 1 \\ \hat{\mathbf{K}}_i^k \Delta \Delta \mathbf{u}_i &= {}^k \Delta \Delta \mathbf{f}_i & \text{pro } k > 1\end{aligned}\quad (4.26)$$

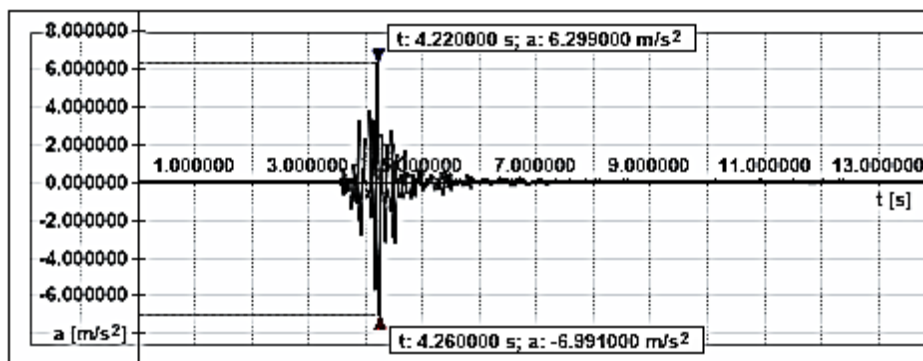
kde

$$\hat{\mathbf{K}}_i = \frac{1}{\beta \Delta t_i^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t_i} \mathbf{C} + {}^k \mathbf{K}_{T,i} \quad (4.27)$$

kde  ${}^k \mathbf{K}_{T,i}$  je tečná matice tuhosti pro k-tou iteraci i-tého časového přírůstku.

### Srovnání explicitní a implicitní metody

Pro výběr nevhodnější numerické metody pro přechodovou seismickou analýzu typické stavební konstrukce (viz obrázek 4.13) byl použit skutečný akcelerogram z Itálie (viz obrázek 4.1) spolu s materiálovým modelem Drucker-Prager. Akcelerogram poměrně silného zemětřesení byl zvolen tak, aby byl dostatečně silný na to, aby způsobil obrovské nelineární chování s poškozením a plastickou poddajností, kde nelze použít spektrální analýzu a je třeba použít přechodovou analýzu využívající přímou integraci pohybové rovnice. Porovnání metody explicitní a implicitní metody bylo zaměřeno na přesnost a výpočetní výkon. Pro explicitní metodu byl kvůli požadavkům na stabilitu použit časový krok 0,0001s. Stejný časový krok byl zvolen i pro implicitní metodu pro porovnání doby zpracování obou metod. Dalším důvodem bylo získání velmi přesného referenčního řešení pro srovnání přesnosti. Grafy časového průběhu vodorovného posunutí pra-



Obrázek 4.1: Akcelerogram Umbro-Marchigiana, stanice Colfiorita-Casermette [84]

vého horního rohu budovy ukazují velmi dobrou shodu mezi explicitní a implicitní metodou. Je také vidět, že programy RFEM a ANSYS poskytují prakticky totožné výsledky [84]. Zajímavým dílčím pozorováním této studie je zjištění, že obě základní numerické metody pro analýzu přechodových jevů, tedy explicitní metoda a Newmarkova implicitní metoda, jsou pro seismické analýzy konkurenceschopné.

Výpočet provedený implicitní metodou pro stejný časový krok byl přibližně pětikrát pomalejší než explicitní metoda. Zvýšení časového kroku u implicitní metody ukázalo, že tato metoda je dostatečně přesná, dokud časový krok nebyl dvacetkrát větší než u explicitní metody. Implicitní metoda poskytuje dobré výsledky po dobu výpočtu čtyřikrát kratší než metoda explicitní. Ale protože je obtížné odhadnout nejvyšší přijatelný časový krok z hlediska přesnosti, lze dojít k závěru, že explicitní a implicitní metody jsou srovnatelné pro seismickou analýzu, ale implicitní Newmarkova metoda je mírně preferována [84]. Pro přesnou nelineární seismickou analýzu nemůžeme použít spektrální metody, ale musíme použít metody přímé integrace pohybové rovnice. Můžeme použít obě metody (explicitní i implicitní) s mírnou výhodou explicitní metody s ohledem na časovou náročnost.

### 4.3 Tlumení viskoelastickými materiálovými modely v dynamice

Existuje celá řada zdrojů dynamického tlumení vibrací ve stavebních konstrukcích. Obecně může být tlumení způsobeno buď vnějším prostředím, nebo ztrátou energie v důsledku strukturální deformace. Nejběžnějším způsobem zohlednění tlumení v pohybové rovnici je Rayleighovo tlumení (viz. [81], [78] a [60]). Rayleighovo tlumení je úměrné lineární kombinaci matice tuhosti a hmoty. Tato podkapitola se zabývá

zdůvodněním použití Rayleighova tlumení a pojednává o jiném řešení, protože neexistuje přímá fyzikální interpretace parametru hmotnostního tlumení a parametru tlumení tuhosti. K tlumení dané vnitřním odporem konstrukce dochází v případě použití nepružných materiálů, kdy se zatěžovací a odlehčovací část diagramu deformace-napětí liší, a proto dochází k rozptylu v zatěžovacích cyklech, jak je popsáno v ([77], [28] a [63]). Dalším zdrojem tlumení je tření v konstrukčních spojích.

### 4.3.1 Rayleighovo tlumení

Pro Rayleighovo tlumení je matice tlumení  $\mathbf{C}_e^R$  definována jako lineární kombinace konzistentní matice hmoty  $\mathbf{M}_e$  a matice tuhosti  $\mathbf{K}_e$ .

$$\mathbf{C}_e^R = \alpha \mathbf{M}_e + \beta \mathbf{K}_e \quad (4.28)$$

Pokud se dosadí do rovnice 4.28

$$\mathbf{M}_e$$

z rovnice 4.4 a

$$\mathbf{K}_e$$

z rovnice 4.10, tak se pro prvkovou matici tlumení dostane následující vztah

$$\mathbf{C}_e^R = \alpha \int_{\Omega_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega_e + \beta \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega_e \quad (4.29)$$

Matice tlumení má dvě části a první je shodná s tím, jak je definováno v 4.5, kde  $c = \alpha\rho$  a její fyzikální podstata je nejasná. Druhá část výrazu neodpovídá vztahu 4.5, ale je úměrná matici tuhosti. Tlumení pro  $\alpha = 0$  a  $\beta > 0$  je tedy úměrné rychlosti deformace tělesa. Vnitřní uzlové síly vznikají pouze tehdy, když se těleso v čase deformuje a pokud se těleso pohybuje jako tuhý celek, tak žádné vnitřní síly nevznikají.

### 4.3.2 Tlumení materiálovou viskozitou

Jak už bylo zmíněno, vnitřní tlumení způsobené materiálem vzniká pouze při přetváření tělesa a je závislé na rychlosti přetvoření. Ke tlumení materiálem se používají viskoelastické materiálové modely. Pro tuto práci jsem vybral tři nejznámější viskoelastické modely pro tlumení způsobené viskozitou materiálu a ty jsou popsány níže. Například pro relativně jednoduchý a známý viskoelastický materiálový model „zobecněný Maxwellův řetězec“ daný schématem 2.10 vypadá konstitutivní vztah, jak je uvedeno v předchozí kapitole 2, ve tvaru diferenciální rovnice takto 2.11. V algoritmu numerické integrace konstitutivního vztahu se předpokládá konstantní hodnota derivace lineárního odhadu napětí v jednom časovém přírůstku, tedy se vlastně předpokládá lineární průběh přetvoření v jednom časovém přírůstku a s ohledem na tento předpoklad musí být volena velikost časového kroku. Algoritmus časové integrace zobecněného Maxwellova řetězce je pěkně popsán v pracích od profesora Kaliskeho [48, 47]. Zkrácená verze tohoto řetězce, kde je pouze jeden Maxwellův členek, se nazývá Zenerův model pevné látky (Standard Linear Solid model - zkráceně SLS model) a tento model je použitý v dynamice.

Ve kvazistatických výpočtech je vhodné volit časový krok s takovou velikostí, aby bylo možné časový průběh napětí aproximovat lineární funkcí, tedy aby derivace napětí podle času byla v rámci jednoho časového kroku konstantní a průběh napětí podél celého výpočetního časového intervalu je po částech lineární (multilineární) křivka, ale v dynamice je výhodné ještě navíc předpokládat lineárnost přetvoření uvnitř jednoho časového kroku, tedy aby derivace přetvoření podle času byla konstantní uvnitř tohoto jednoho časového kroku. Pro výpočet napětí uvnitř tohoto jednoho časového kroku pak lze na úrovni materiálového (integračního) bodu použít tohoto konstitutivního vztahu 4.30.

$$\left( \sigma(t), \frac{d\sigma}{dt}(t) \right) = f \left( \varepsilon(t), \frac{d\varepsilon}{dt}(t) \right) \quad (4.30)$$

Dále je vhodné v dynamice uvnitř jednoho časového kroku předpokládat nejen konstantní rychlosti změny napětí a přetvoření, ale také konstantní materiálové vlastnosti. Výhodu tohoto předpokladu ukáží na nejjed-

nodušším viskoelastickém Kelvinově modelu.

### Kelvinův-Voigtův model

Schéma i odvození Kelvinova-Voigtova modelu je uvedeno v kapitole 2.2.1, zde je uveden pouze výsledný vztah důležitý pro implementaci do výpočetního softwaru. Pokud jsou materiálové vlastnosti závislé na čase, tak daná diferenciální popisující Kelvinův model obsahuje druhou derivaci přetvoření

$$\frac{d\sigma}{dt} = \left( E(t) + \frac{d\eta}{dt} \right) \frac{d\varepsilon}{dt} + \eta(t) \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} \quad (4.31)$$

Pokud lze předpokládat, že materiál má v daném časovém intervalu konstantní vlastnosti ( $E(t) = E = konst.$ ,  $\eta(t) = \eta = konst.$ ), tak se dostane

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (4.32)$$

Dále se předpokládá, že jsou materiálové vlastnosti konstantní.

### Maxwellův model

Schéma i odvození modelu Maxwell je uvedeno v kapitole 2.2.2, zde je uveden pouze výsledný vztah důležitý pro implementaci do výpočetního softwaru.

$$\sigma + \frac{\eta}{E} \frac{d\sigma}{dt} = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (4.33)$$

### Zenerův model SLS

Schéma i odvození Zenerova modelu Standard Linear Solid (SLS) je uvedeno v kapitole 2.2.3, zde je uveden pouze výsledný vztah důležitý pro implementaci do výpočetního softwaru. Zde je uveden Maxwellův typ Zenerova modelu SLS, protože ten je použitý ve výpočtech pro tuto práci.

$$\sigma + \frac{\eta_2}{E_2} \frac{d\sigma}{dt} = E_1\varepsilon + \frac{\eta_2(E_1 + E_2)}{E_2} \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (4.34)$$

Prakticky se v konstitutivních vztazích pro dynamiku používají viskózní modely, které obsahují jen první derivace fyzikálních veličin, proto dále nebudu pokračovat s dalšími schémata, jako třeba schéma pro Burgersův model. Burgersovy modely mají nenulové druhé derivace napětí nebo přetvoření podle času, proto je třeba volit hodně malý časový krok, aby v rámci tohoto jednoho časového přírůstku byly hodnoty druhých derivací zanedbatelné.

V této práci jsou v dynamice použité tyto modely: Kelvinův model a Zenerův model SLS Maxwellova typu pro popis materiálu ve viskoelastické oblasti, která je dále sériově propojena s viskoplastickými modely včetně poškození. V těchto modelech se druhé derivace napětí ani přetvoření nevyskytují, ale pro výstižné numerické vyjádření prvních derivací je také nutné volit malý časový krok, aby numerická chyba při numerické aproximaci derivace její diferenční formou byla malá. Pokud se v daném časovém přírůstku předpokládá lineární průběh přetvoření  $\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t} = konst.$ , tak lze přírůstek napětí pro SLS model Maxwellova typu vypočítat analyticky podle vztahů zobecněného Maxwellova řetězce, protože tento SLS model Maxwellova typu je speciálním případem zobecněného Maxwellova řetězce, ve kterém je pouze jeden Maxwellův členek. V algoritmu numerické integrace konstitutivního vztahu se předpokládá konstantní hodnota derivace lineárního odhadu napětí v jednom časovém přírůstku, tedy se vlastně předpokládá lineární průběh přetvoření v jednom časovém přírůstku a s ohledem na tento předpoklad musí být volena velikost časového kroku. Algoritmus časové integrace zobecněného Maxwellova řetězce je pěkně popsán v pracích od profesora Kaliskeho [48, 47].

### 4.3.2.1 Tlumení Kelvinovým-Voigtovým modelem

Ukažme si nyní, jak se tlumení způsobené Kelvinovým-Voigtovým modelem projeví v pohybové rovnici. Dosadíme výraz pro  $\sigma(t)$  z rovnice 4.32 do rovnice 4.6. Pro vektor vnitřních uzlových sil získáme

$$\mathbf{f}_e^{\text{int}} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T (\boldsymbol{\sigma}^e + \eta \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) d\Omega_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T (\boldsymbol{\sigma}^e + \eta \mathbf{B} \dot{\mathbf{d}}) = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^e + \eta \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{d}} \quad (4.35)$$

Vzhledem k tomu, že tlumení je v této studii způsobeno materiálem, tak záměrně není použita matice tlumení  $\mathbf{C}$ . Pohybová rovnice pak vypadá následovně

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{d}} + \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^e + \eta \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{d}} = \mathbf{f}_e^{\text{ext}} \quad (4.36)$$

Rovnici pak lze přepsat pro lineární elastický materiál jako

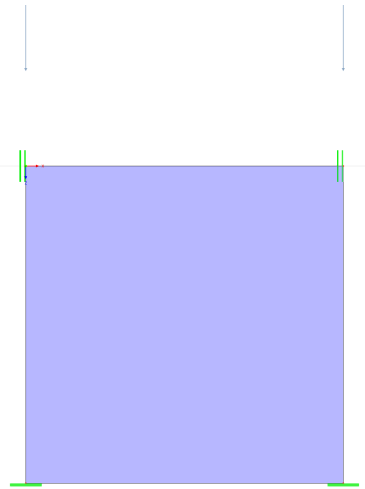
$$\mathbf{f}_e^{\text{int}} = \mathbf{K}_e \mathbf{d} + \eta \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{d}} d\Omega_e \quad (4.37)$$

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{f}_e^{\text{int}} = \mathbf{f}_e^{\text{ext}} \quad (4.38)$$

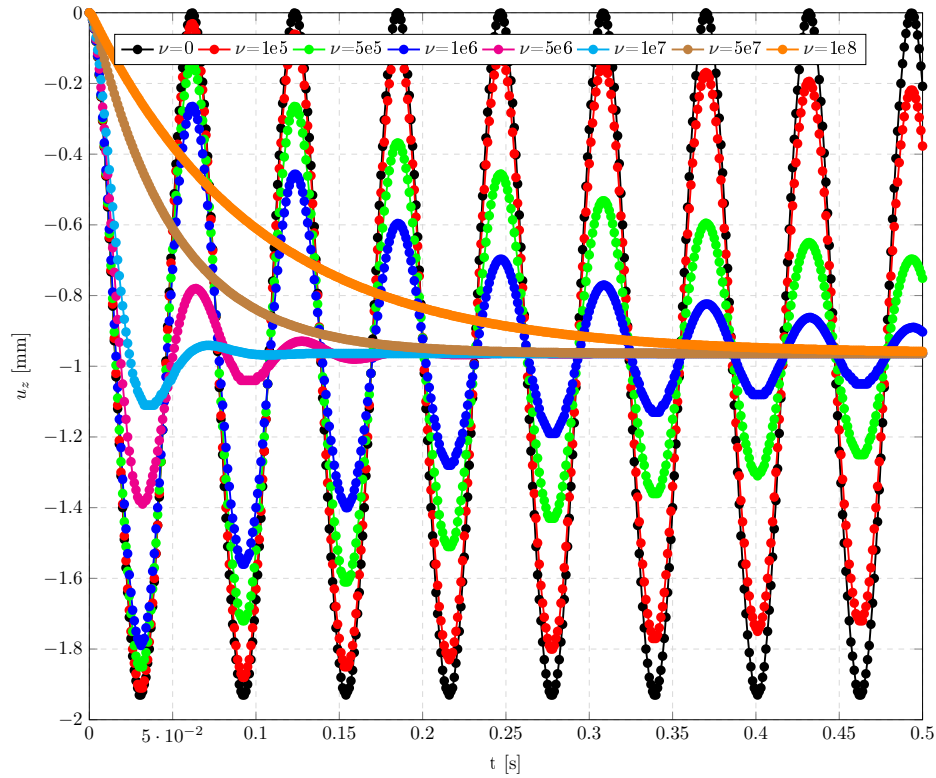
a dosazením  $\mathbf{f}_e^{\text{int}}$  do rovnice 4.38 se dostane

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}_e \mathbf{d} + \eta \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{d}} d\Omega_e = \mathbf{f}_e^{\text{ext}} \quad (4.39)$$

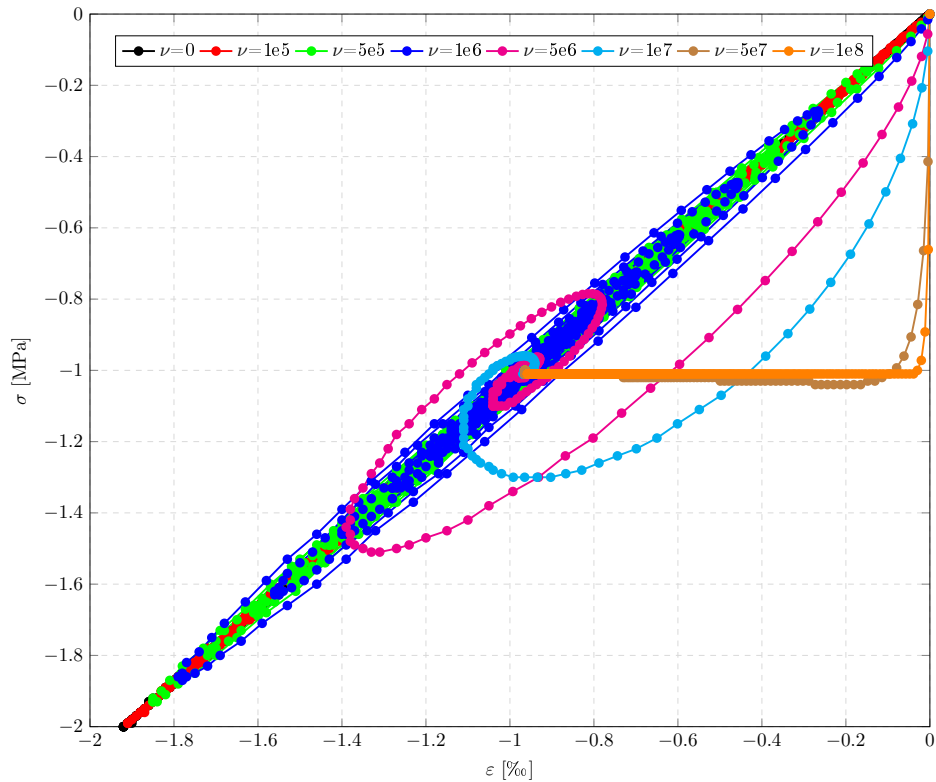
Tlumení pomocí Kelvinova-Voigtova modelu je ukázáno na jednoprvkové testovací úloze 4.2 a výsledky demonstující funkčnost tohoto materiálového modelu na tlumení je ukázána na těchto obrázcích 4.3, 4.4, 4.5. Na obrázku 4.4 jde pěkně vidět, jak se hystereze zvětšuje s rostoucí viskozitou, protože při vyšší viskozitě se více energie po silovém impulzu přemění na teplo a pro hodně vysokou viskozitu  $\eta = 1e8$  je impulz v materiálu natolik utlumen, že nedojde ani k jednomu prokmitnutí za rovnovážný ustálený stav ( $\epsilon = -0.001$  [-],  $\sigma = -1$  [MPa], pro  $E = 1$  [GPa]). Při nižších viskozitách je deformace po silovém impulzu méně utlumena a pro viskozitu  $\eta \leq 1e7$  deformace vlivem setrvačných sil prokmitne za rovnovážnou polohu a čím menší viskozita, tím větší prokmitnutí a při nulové viskozitě nedochází k žádnému útlumu.



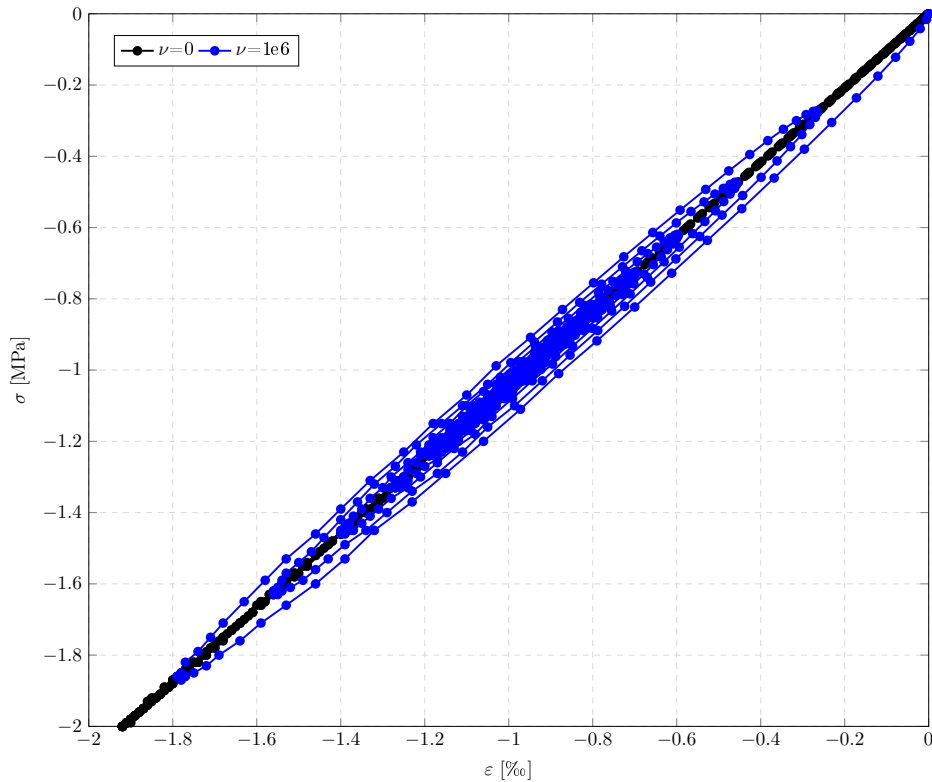
Obrázek 4.2: Testovací jednoprvková úloha



Obrázek 4.3: Tlumení Kelvinovým-Voigtovým modelem pro 8 různých viskozit



Obrázek 4.4: Hystereze způsobená Kelvinovým-Voigtovým modelem pro 8 různých viskozit



**Obrázek 4.5:** Hystereze způsobená Kelvinovým-Voigtovým modelem pro dvě různé viskozity

#### 4.3.2.2 Srovnání Rayleighova tlumení s tlumením viskoelastickým Kelvinovým-Voigtovým modelem

Rayleighovo tlumení závisí pouze na rychlostech hmotných bodů v prostoru a toto tlumení vzniká i v případě pohybu tělesa jako tuhého celku vlivem koeficientu  $\alpha$ . Pro srovnání Rayleighova tlumení a tlumení způsobeného Kelvin-Voigt modelem předpokládáme  $\alpha = 0$ . Pohybová rovnice pak vypadá následovně

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{d}} + \beta \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega_e \dot{\mathbf{d}} + \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega_e = \mathbf{f}_e^{ext} \quad (4.40)$$

Porovnáme-li rovnici s Kelvin-Voigtovým materiálovým modelem 4.36 s touto rovnicí 4.40, je vidět, že rozdíl mezi nimi spočívá pouze ve členu s první derivací deformačních parametrů podle času, tedy rychlostí  $\dot{\mathbf{d}}$ . Pokud tyto rovnice zjednodušíme (redukujeme) na 1D úlohy, dosadíme Youngův modul  $E$  za konstitutivní matici  $\mathbf{D}$  a porovnáme výrazy u  $\dot{\mathbf{d}}$ , získáme vztah

$$\beta E \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{B} d\Omega_e \dot{\mathbf{d}} = \eta \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{B} d\Omega_e \dot{\mathbf{d}} \quad (4.41)$$

a následně jednoduchý vztah mezi parametry  $\beta, \eta$  obou modelů

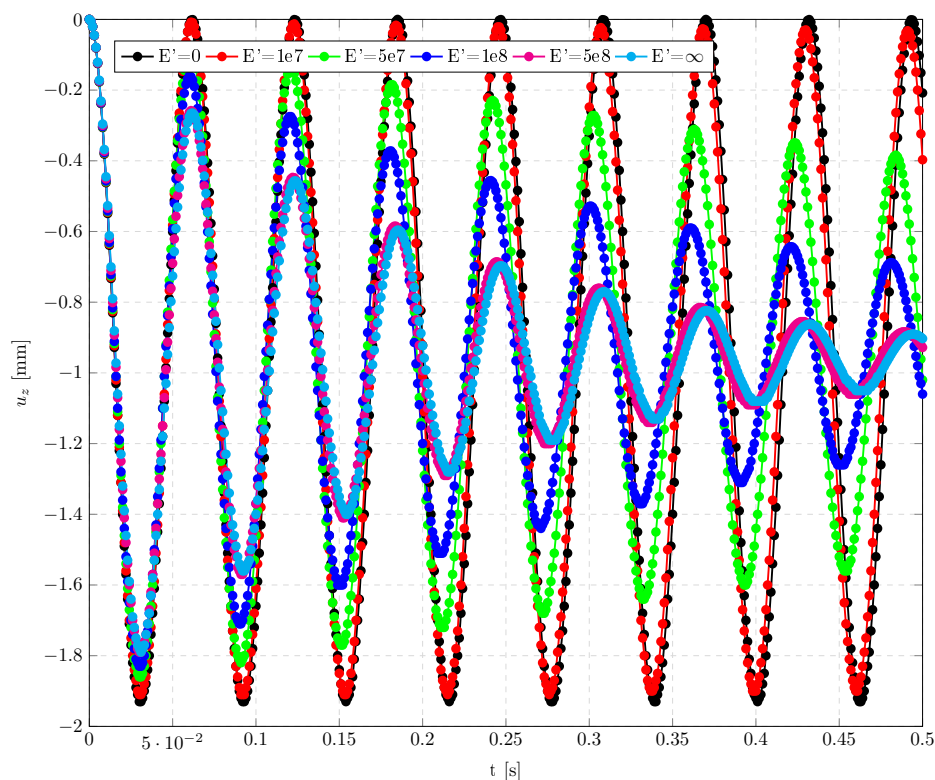
$$\beta E = \eta \quad (4.42)$$

Je zřejmé, že Rayleighovo tlumení a tlumení způsobené Kelvin-Voigt materiálovým modelem jsou pro 1D problémy totožné.

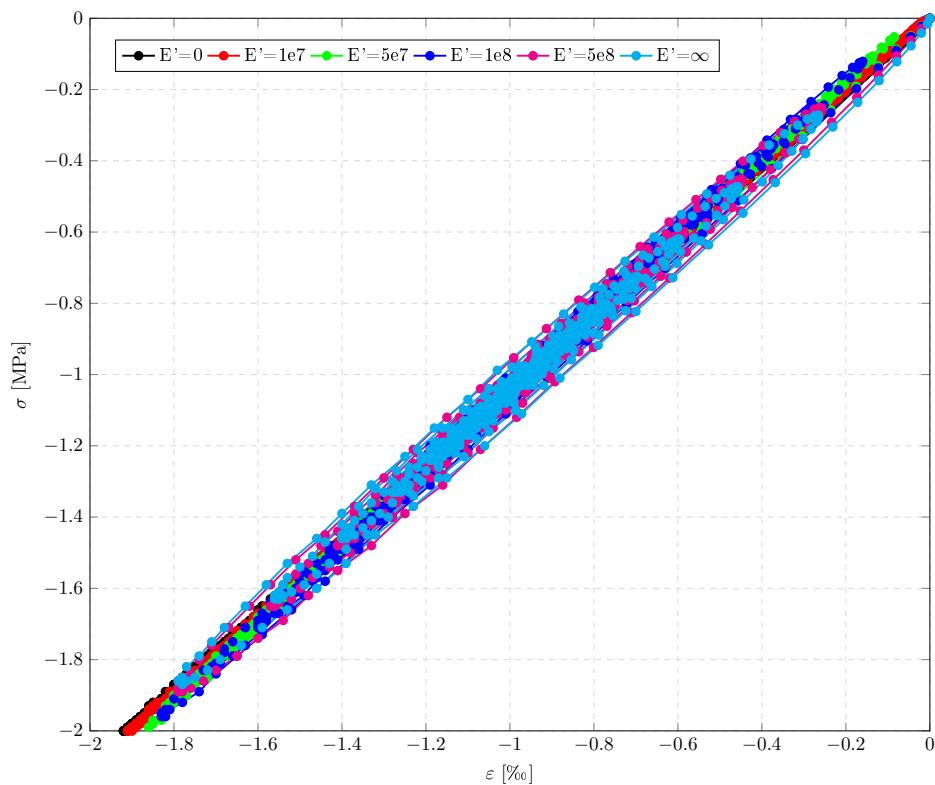
#### 4.3.2.3 Tlumení Zenerovým modelem SLS

Tlumení pomocí Zenerova modelu SLS je ukázáno na jednoprvkové testovací úloze 4.2 a výsledky demonstrující funkčnost tohoto materiálového modelu na tlumení je ukázána na těchto obrázcích 4.6, 4.7, 4.8. Na obrázku 4.6 je ukázána schopnost Zenerova modelu tlumit kmitání po silovém impulzu, který odpovídá

dopadu závaží na kostku a odpovídající hysterezní křivky jsou ukázány na obrázku 4.7, 4.8 pro viskozitu tlumiče  $\eta = 1e6$  a různé nastavení hodnoty modulu pružiny, která je zapojena s tlumičem v sérii.



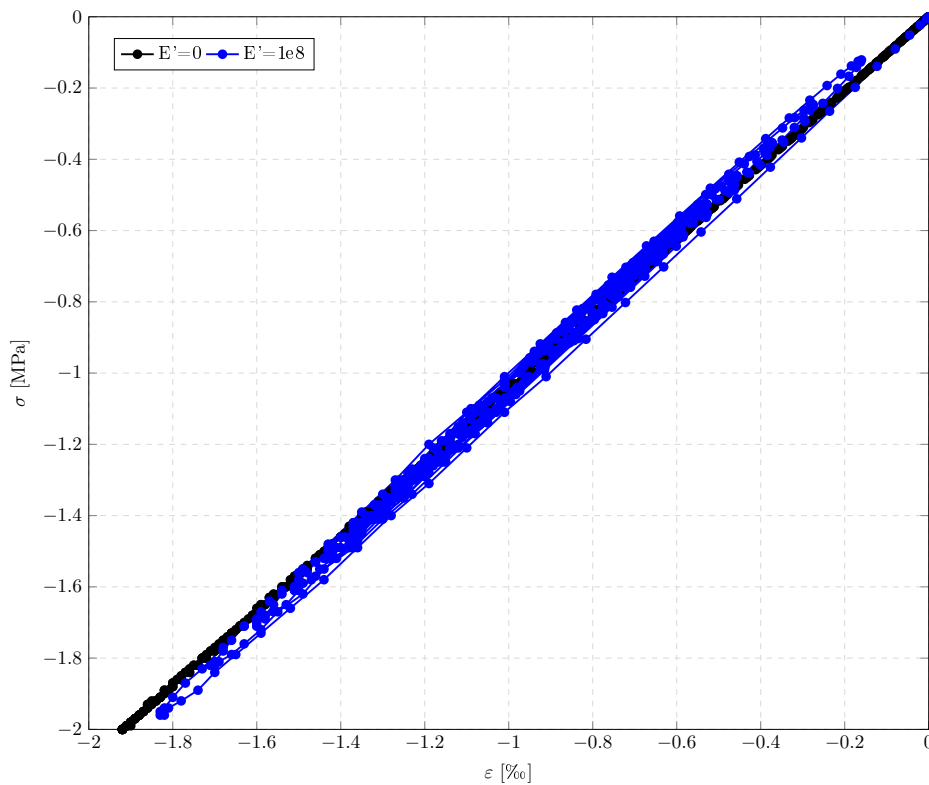
Obrázek 4.6: Tlumení Zenerovým modelem SLS



Obrázek 4.7: Hystereze způsobená Zenerovým modelem SLS

Zenerův model SLS není na rozdíl od Kelvinova-Voigtova modelu ekvivalentem Rayleighova tlumení,





**Obrázek 4.8:** Hystereze způsobená Zenerovým modelem SLS pro dvě hodnoty modulu pružnosti pružiny, která je v sérii s tlumičem

ale více odpovídá reálnému vnitřnímu (viskóznímu) tlumení materiálem, proto je mu věnována pozornost, a také proto je dále vybrán jako vhodný viskoelastický model pro kombinaci s plasticitou a poškozením u rychlých dynamických úloh. Nejdříve musely být stanoveny hodnoty jeho dvou neznámých vstupních parametrů - viskozity tlumiče  $\eta$  a modulu pružnosti pružiny  $E_2$ , která je s tlumičem v sérii podle schématu 2.7. Stanovení hodnot dvou neznámých parametrů je popsáno v následujícím textu o dynamickém útlumu kmitání.

## Útlum

Viskózní chování ve viskoelastickém modelu bylo nastaveno podle útlumu kmitání betonu. Pro experimentálně vyšetřovaný trám o rozměrech  $1.7 \times 0.25 \times 0.12$  m a hustotě  $2500 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  vychází hmotnost  $127.5 \text{ kg}$ . Potom je dominantní frekvence odpovídajícímu prvnímu svislému ohybovému tvaru kmitu  $137.8 \text{ Hz}$ .

Jestliže vlastní úhlová frekvence je

$$\omega = 865.93 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

a poměrný útlum uvažujeme o velikosti

$$\xi = 0.05$$

potom

$$\beta = 1.154 \cdot 10^{-4}$$

Pro Kelvinův model se poté viskozita vypočítá následovně

$$\eta = E\beta = 3.1 \cdot 10^{10} \cdot 1.154 \cdot 10^{-4} = 3.5774 \cdot 10^6$$

Cílem bylo stanovit materiálové parametry Zenerova viskoelastického modelu SLS. Pro tento model bylo nutné stanovit dva neznámé parametry (viskozitu  $\eta$  a modul v sérii u viskozity  $E_2$ ), tak aby se tlumilo kmitání poměrným útlumem 2–3% dle normy. Hodnoty parametrů se stanovily na testovací úloze z poměrného útlumu betonu, tak aby tlumení bylo odpovídající všem požadavkům. Po odladění parametrů se mohl tento model přidat sériově k viskoplastickému modelu včetně poškození, tak aby byl stále respektován i

zadaný pracovní diagram betonu a závislost tohoto diagramu na rychlosti přetvoření. Pro ověření hodnoty poměrného útlumu se vycházelo z pohybové rovnice

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_n\dot{u} + \omega_n^2u = \left(\frac{\omega_n^2}{k}\right)p(t)$$

poměrný útlum je

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}}, \text{ kde } c_{cr} = 2m\omega_n = \frac{2k}{\omega_n} = 2\sqrt{km}$$

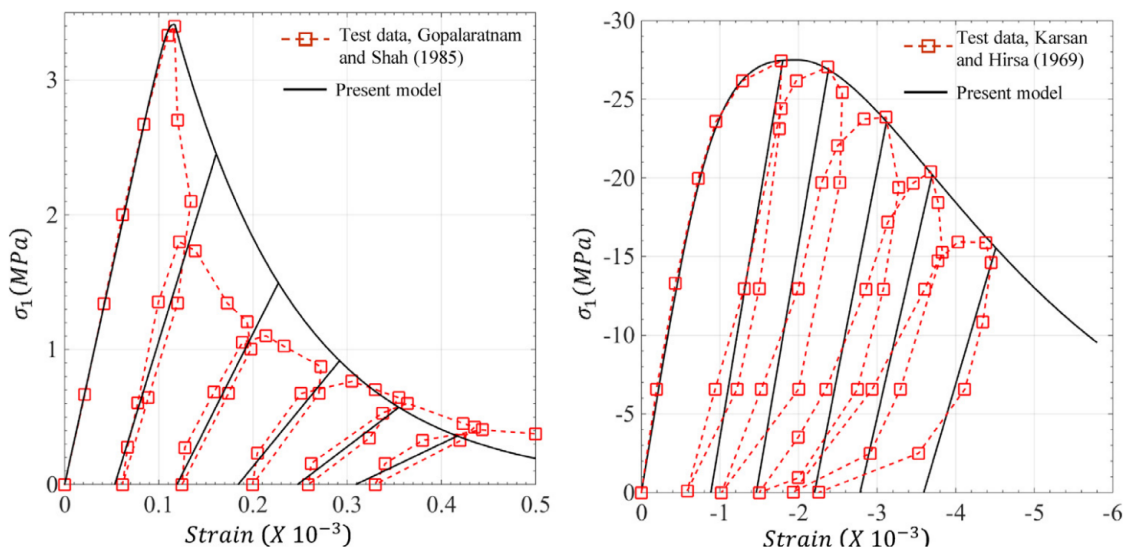
je koeficient kritického tlumení, netlumená vlastní úhlová frekvence se spočítá dle

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Nakonec byly hodnoty vstupních parametrů Zenerova modelu SLS stanoveny takto:  $E_1 = E = 3.1 \cdot 10^{10}$ ,  $E_2 = 1.2 \cdot 10^9$ ,  $\eta = 1.9 \cdot 10^7$ , což je ve shodě s literaturou [27]. Analýza různých zdrojů tlumení ukázala, že je potřeba používat nejen vnější tlumení, ale také (a hlavně) vnitřní tlumení pomocí modelů materiálové nepružnosti (viskoelastická, plasticita/poškození) namísto jednoduchého Rayleighova tlumení, které je pro tlumení v nelineární časově závislé analýze nedostatečné. Výrazný vliv na tlumení má disipace energie při plasticitě a poškození materiálu a kvůli důležitosti této kombinace plasticity a poškození v dynamice (při odtížení a opětovném přitížení) je tato problematika zařazena do samostatné sekce, která právě následuje.

#### 4.4 Kombinace plasticity s poškozením

V této podkapitole je ukázána odlišnost plastických modelů od modelů poškození a na testovacích úlohách je ukázána nutnost jejich kombinace při cyklickém zatížení a odtížení, které jsou v dynamice naprosto běžnou záležitostí na rozdíl od statiky. Je prokázáno, že beton se při odtížení a opětovném přitížení pohybuje v pracovním diagramu po křivce, která není rovnoběžná s počáteční lineární částí, ani se nevrací do počátku jako u modelů poškození, ale chová se, jak je uvedeno na obrázku 4.9 převzatém z literatury [68].



Obrázek 4.9: Poměr plasticity ku poškození [68]

V této práci jsou analyzovány dva přístupy pro kombinaci plasticity s poškozením. Oba přístupy se liší jen volbou hodnoty parametru  $pd$ , který má následující význam. Lineární odhad napětí, po kterém následuje plastická korekce, se vypočítá následovně:

$$\sigma_{n+1}^{trial} = \mathbf{C} : (\epsilon_{n+1} - \epsilon_n^p - pd\epsilon_n^d) \quad (4.43)$$

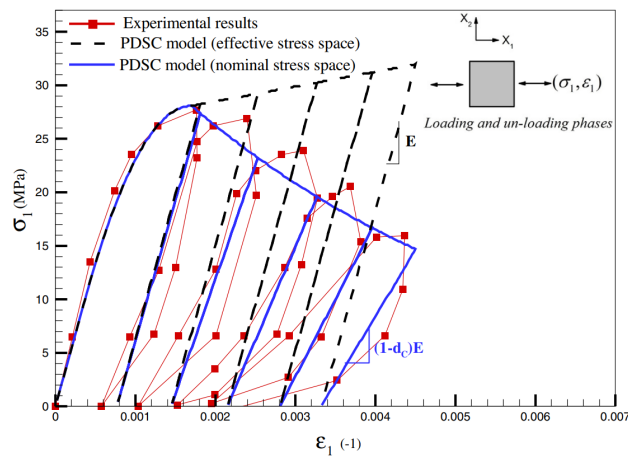
1) *Plastická korekce*, kde celkové přetvoření vstupující do plastického modelu (Rankine-Hill)  $\varepsilon_{n+1}$  není redukováno o část patřící poškození z předchozího přírůstku  $pd = 0$  nebo je redukováno o část patřící poškození  $pd = 1$ :  $\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^d$ . Výstupem plastického modelu je  $\varepsilon_{n+1}^p$  a platí  $\varepsilon_{n+1}^{e1} = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p - pd\varepsilon_n^d \Rightarrow \sigma_{n+1}^1 = \mathbf{C} : \varepsilon_{n+1}^{e1}$ .

2) *Korekce modelem poškození* se vstupem  $\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p$  a dále všechny stavové proměnné z předchozího přírůstku pro daný model  $d_n^t, d_n^c$  včetně kumulovaných plastických přetvoření v tahu i v tlaku. Výstupem je  $\varepsilon_{n+1}^d, d_{n+1}^t, d_{n+1}^c$  a platí  $\varepsilon_{n+1}^{e2} = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p - \varepsilon_{n+1}^d \Rightarrow \sigma_{n+1}^2 = \mathbf{C} \varepsilon_{n+1}^{e2}$ .

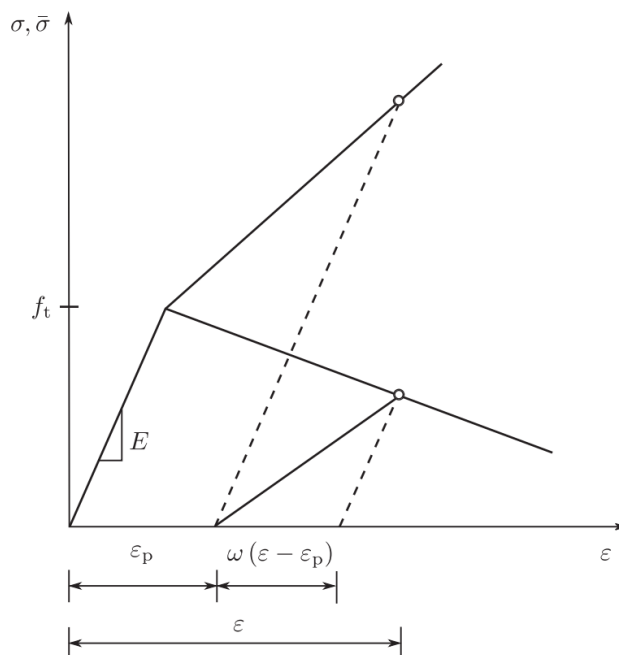
Výsledné napětí tedy splňuje vztah

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^2 = \mathbf{C} : \varepsilon_{n+1}^{e2} = \mathbf{C} : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p - \varepsilon_{n+1}^d)$$

Na obrázcích 4.10, 4.11 je vysvětlen princip kombinace plasticity a poškození, který je použitý v této práci.



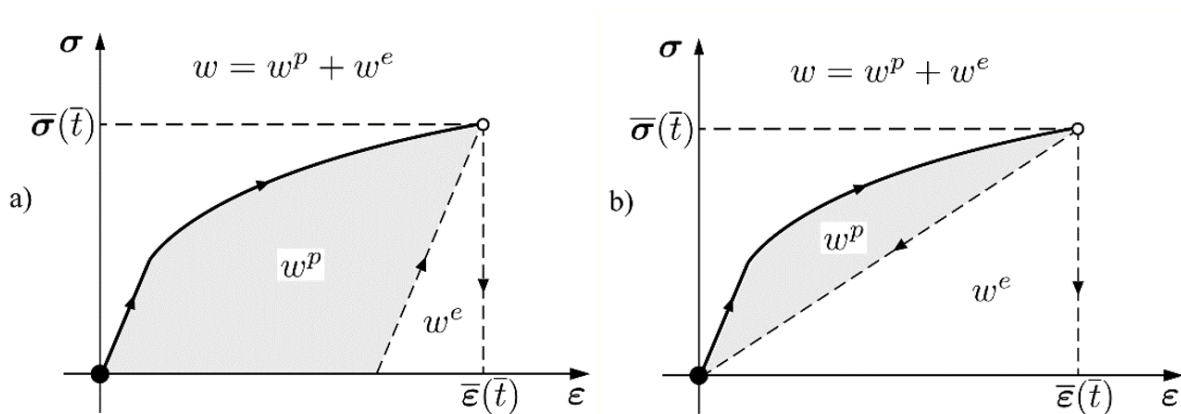
Obrázek 4.10: Odezva betonu při jednoosém cyklickém zatěžování v tahu [14]



Obrázek 4.11: Poměr plasticity ku poškození [39]

#### 4.4.1 Rozdíl mezi plasticitou a poškozením

Obrázek 4.12 ukazuje diagram zatěžování a odlehčování pro a) elastoplastický model b) model poškození pro 1D stav napětí a přetvoření s vyznačením plochy odpovídající množství disipované energie.



**Obrázek 4.12:** Křivky zatěžování a odtěžování pro (a) elastoplastické a (b) elasto-poškozené materiály s rozdělením energie na elastickou a disipativní [84]

Tato disipační energie se ztrácí z mechanického systému ve formě tepla a tento proces se projevuje v dynamice jako tlumení. Součet této disipační energie  $w^p$  plus elastické energie  $w^e$  se rovná celkové energii použité pro deformační práci.

V případě plasticity dochází k tlumení v okamžiku, kdy dojde k plastické deformaci a později (při odtížení a opětovném přitížení do aktuální meze kluzu) již vibrace nejsou tlumeny, pokud není opět překonáno dosud maximální napětí podle zákona zpevnění. Plasticita neovlivňuje přirozenou frekvenci struktury a množství disipované energie se vypočítá následovně 4.44

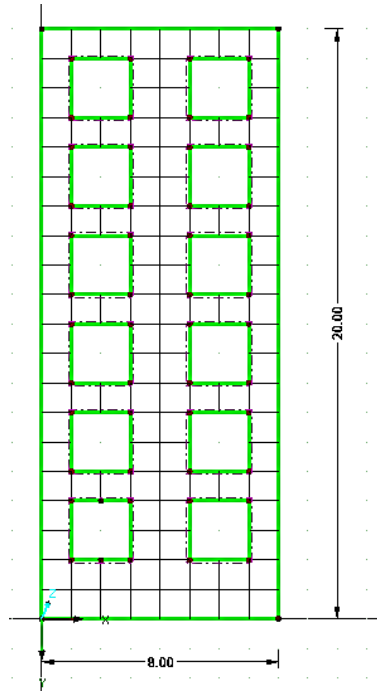
$$w^p(\bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} \boldsymbol{\sigma}(t) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(t) dt = \int_0^{\bar{t}} \boldsymbol{\sigma}(t) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) dt - \frac{1}{2} \mathbf{C}^{-1} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{t}) : \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{t}) \quad (4.44)$$

V případě poškození dojde k tlumení v okamžiku, kdy dojde k poškození materiálu, a později již vibrace nejsou tlumeny, pokud není opět překonáno dosud maximální namáhání. Poškození způsobí změkčení materiálu, takže se sníží vlastní frekvence a množství disipované energie se vypočítá následovně 4.45

$$w^p(\bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} \boldsymbol{\sigma}(t) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(t) dt = \int_0^{\bar{t}} \boldsymbol{\sigma}(t) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) dt - \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\bar{t}) : \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{t}) \quad (4.45)$$

#### 4.4.2 Rozdíl mezi materiálovými modely s plasticitou a poškozením v dynamice

Cílem této kapitoly je provnat odezvy stavební konstrukce na dva různé nelineární materiálové modely. Pro srovnání obou materiálových modelů je použitý stěnový model (rovinná napjatost) šestipodlažní budovy (viz obrázek dole 4.13) vystavené seismickému zatížení podle akcelerogramu z italské Umbro-Marchigiany. Jsou použity tři různé materiálové modely: lineární elastický model, Drucker-Prager model plasticity a Mazarsův model spojitého poškození. Pro všechny výpočty byla použita geometrická nelinearita, ale její vliv je poměrně malý kvůli relativně malým hodnotám posunutí a rotací.



**Obrázek 4.13:** Analyzovaná betonová stěna s počátečním modulem pružnosti 21 GPa, velikost prvků 1 metr, tloušťka 0,2 metru [62]

### Materiálový model s plasticitou

Kvůli rychlosti výpočtu byl vybrán nejjednodušší elastoplastický model s kritériem Drucker-Prager s izotropním zpevněním, protože zahrnuje různé chování materiálu v tahu a tlaku, které je pro beton charakteristické. Kritérium plasticity má následující tvar [28]

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p) = \sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})} + c_1 \frac{1}{3} I_1(\boldsymbol{\sigma}) - c_2 \text{coh}(\bar{\varepsilon}^p) \quad (4.46)$$

kde  $J_2$  je druhý invariant deviátorového napětí,  $I_1$  je první invariant napětí,  $\text{coh}$  je koheze, která je závislá na akumulovaném plastickém přetvoření  $\bar{\varepsilon}^p$  a příslušné koeficienty  $c_1$ ,  $c_2$  jsou voleny podle požadované aproximace Mohr-Coulomb kritéria nebo lze vypočítat pomocí dvou podmínek pro příslušné meze kluzu v tahu a tlaku. Pro výpočet výsledné napjatosti byl použit standardní postup s elastickou predikcí a plastickou korekcí s tzv. "return mapping" implicitním algoritmem. Po iterativním výpočtu plastického multiplikátoru se výsledný tenzor napětí vypočítá následovně

$$\boldsymbol{\sigma}_{i+1} = \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{trial} - \Delta\gamma \mathbf{D}^e : \mathbf{N}_{i+1} \quad (4.47)$$

kde  $\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{trial} = \mathbf{D}^e : (\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_i^p)$  je lineární (elastická) predikce tenzoru napětí a  $\mathbf{D}^e : \mathbf{N}_{i+1}$  představuje vektor (směr) plastické korekce. Velikost plastické korekce je dána hodnotou plastického multiplikátoru, která je v případě obecně zadané křivky zpevnění daná vnitřním cyklem lokální (na úrovni materiálového bodu - integračního bodu konečného prvku) Newtonovy metody. V případě Drucker-Prager modelu se musí dát pozor při návratu na plochu plasticity v místech vrcholu plochy (podmínky, kritéria) plasticity, kde se směr (vektor) plastické korekce počítá jiným způsobem [28].

### Materiálový model s poškozením

Pro tuto studii byl vybrán následující model poškození podle [57]

$$\boldsymbol{\sigma}_{i+1} = [(1 - d^t) \mathbf{P}^t + (1 - d^c) \mathbf{P}^c] : \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{trial} \quad (4.48)$$

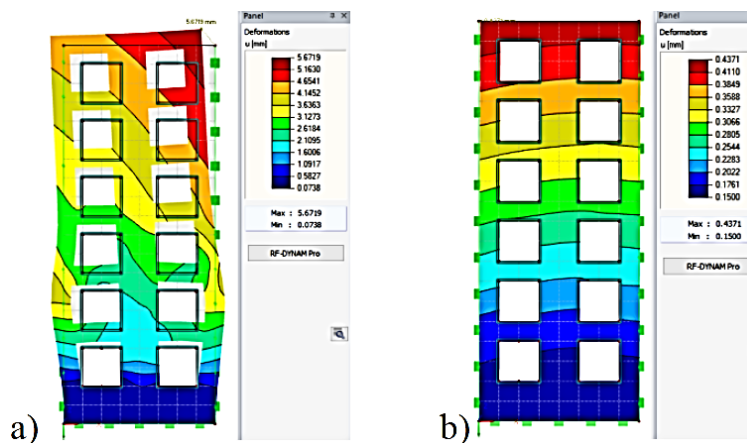
kde  $\sigma_{i+1}^{trial} = \mathbf{D}^e : \varepsilon_{i+1}$ . Parametry poškození jsou odvozeny z pracovního diagramu napětí-přetvoření, kde jsou použity následující ekvivalentní deformace

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= \frac{I_\varepsilon}{2(1-2\nu)} + \frac{\sqrt{J_\varepsilon}}{2(1+\nu)} \\ \varepsilon_c &= \frac{I_\varepsilon}{5(1-2\nu)} + \frac{6\sqrt{J_\varepsilon}}{5(1+\nu)}\end{aligned}\quad (4.49)$$

Parametry modelů byly zvoleny tak, aby byla zajištěna dostatečná míra plastizace nebo poškození v nejvíce namáhaných místech konstrukce pro daný akcelerogram. Záměrem analýzy není provést výpočty potřebné pro reálnou stavbu, ale pouze porovnat chování různých materiálových modelů (model plasticity vs. model poškození).

Během zemětřesení došlo v některých částech konstrukce k plastizaci, což se projevilo zvýšeným tlumením a změnou rozložení napětí ve srovnání s výsledky pro lineární materiál. Z výsledků je patrné, že v čase 10 s (tj. prakticky přímo po skončení seismicity) došlo k trvalé deformaci tvaru budovy, což je v souladu s očekáváním. Došlo k celkovému nárůstu výšky i šířky objektu v oblasti plastizace. Ve vyšších patrech, kde k plastizaci nedošlo, zůstala šířka objektu stejná. Nárůst výšky a částečné roztažení do šířky se může zdát na první pohled překvapivé, ale tyto jevy lze vysvětlit tím, že došlo k plastizaci pouze v tahu (v tlaku nebyla překročena mez kluzu), a že kývání budovy z jedné strany na druhou způsobilo plastizaci na obou stranách budovy. To mělo za následek nejen její naklonění, ale i nárůst výšky a šířky celé budovy.

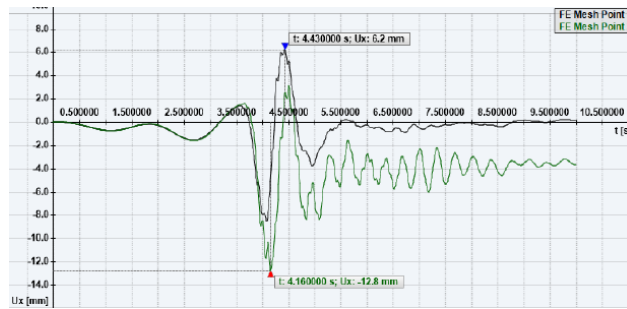
Model poškození předpokládá, že konstrukce selže kvůli mikrotrhlinám. Trhlinky nejsou lokalizovány, ale předpokládá se, že se vyskytují spojitě (smeared crack model). Podle teorie modelu poškození se mikrotrhliny po odeznění zatížení uzavřou a deformace zmizí podobným způsobem, jako tomu bylo v případě lineárního elastického modelu. Poškození materiálu se projevilo tím, že deformačně-napěťová křivka měla při odlehčování jinou trajektorii a tím došlo k disipaci energie, což mělo za následek tlumení kmitání. Po skončení seismicity nezůstala na rozdíl od modelu plasticity žádná trvalá deformace, ale došlo k trvalému poklesu tuhosti materiálu a v důsledku toho ke změně odezvy konstrukce na zatížení. Pokles tuhosti má vliv na časovou odezvu v dynamice, protože snižuje vlastní frekvence kmitání. Následující obrázky ukazují rozdíly v odezvě konstrukce na stejné seismické zatížení pro různé materiálové modely. Odpovídající výsledky obou materiálových modelů byly umístěny vedle sebe, např. výsledné deformace, přičemž totéž je znázorněno pro čas maximálního posunutí (viz obrázek 4.14).



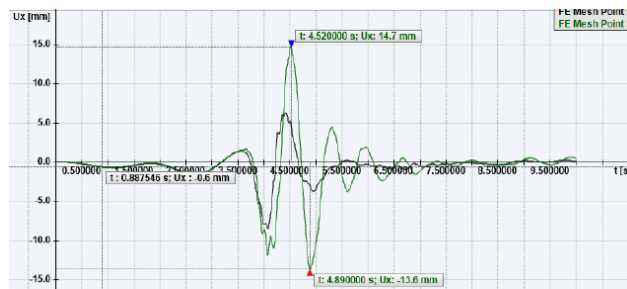
Obrázek 4.14: Výsledné tvary budovy a) Drucker-Pragerův model plasticity, b) model poškození Mazars [84]

Hlavním cílem studie bylo porovnat odezvu modelu plasticity a modelu poškození na seismické zatížení. Výsledky se na první pohled zdály poněkud překvapivé, ale při bližším zkoumání se ukázalo, že jsou správné, a že odpovídají příslušným materiálovým modelům. V případě modelu plasticity zůstala budova po skončení zemětřesení mírně nakloněná (viz obrázek 4.15, což se očekávalo), a také jako celek byla vyšší a širší. Tento výsledek byl dosažen, protože plastizace probíhala pouze v tahu a v důsledku kmitání budovy z jedné strany na druhou docházelo postupně k plastizaci v důsledku tahu na obou stranách budovy. V případě modelu poškození zůstala geometrie budovy po skončení zemětřesení stejná, i když došlo k porušení materiálu, protože mikrotrhliny se po vymizení zatížení uzavřely a deformace zůstaly nulové. Poškození se projevilo pouze snížením tuhosti materiálu v poškozených oblastech, což je na obrázku 4.16 také demon-

strováno klesající frekvencí. Ztráta energie ve formě tepla se v numerickém řešení projevila jako zvýšené tlumení.



Obrázek 4.15: Drucker-Pragerův model plasticity – Časový diagram horizontálního posunutí nejvyššího a nejnižšího uzlu [84]

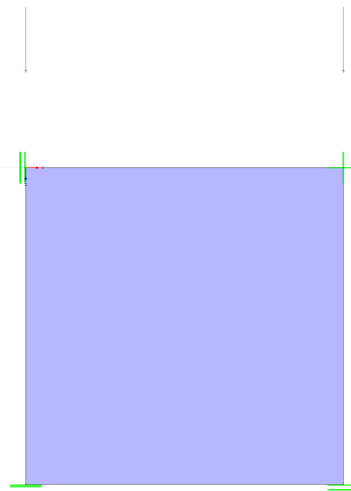


Obrázek 4.16: Mazarsův model poškození - Časový diagram horizontálního posunutí nejvyššího a nejnižšího uzlu [84]

Závěrem je, že matematický model materiálu má významný vliv na nelineární časovou odezvu konstrukce (analýza zemětřesení) a realita je někde mezi analyzovaným modelem plasticity a poškození, proto doporučujeme použít kombinaci plasticity a poškození současně v jednom materiálovém modelu, což je podrobněji popsáno v následující kapitole.

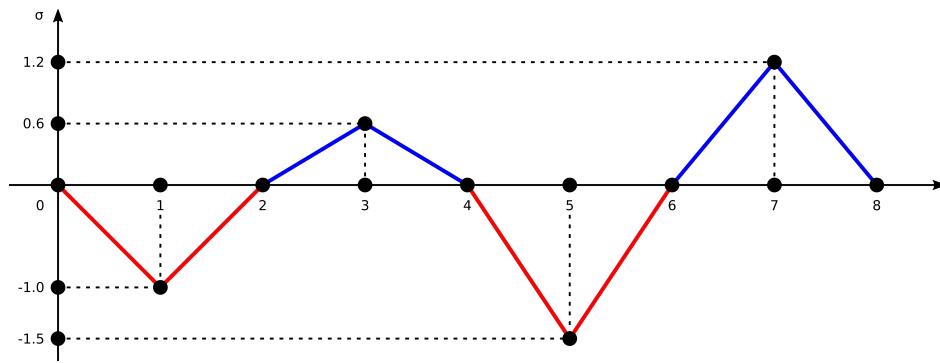
### 4.4.3 Plasticita s poškozením při cyklickém zatížení a odtížení

Na obrázku 4.17 je ukázána geometrie a okrajové podmínky (zatížení a podpory) pro úlohu jednoosé napjatosti, ve které je sledována kvazistatická odezva pro dvě různé definované křivky (historie) zatížení: a) tlak-tah-tlak-tah 4.18, b) tah-tlak-tah-tlak 4.19.

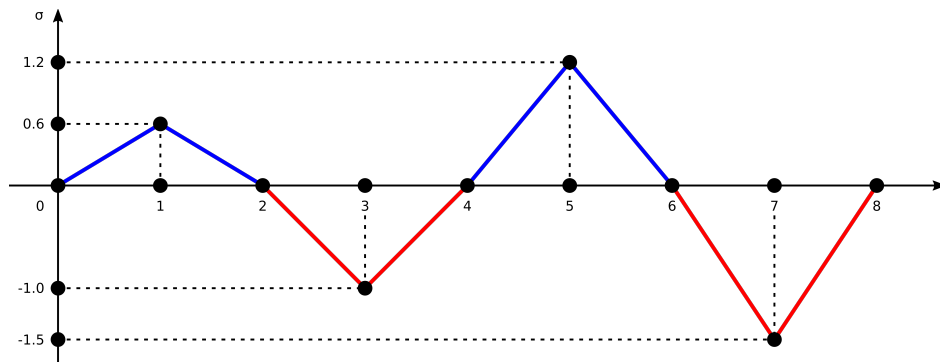


Obrázek 4.17: Jednoprvková testovací úloha pro cyklické zatěžování

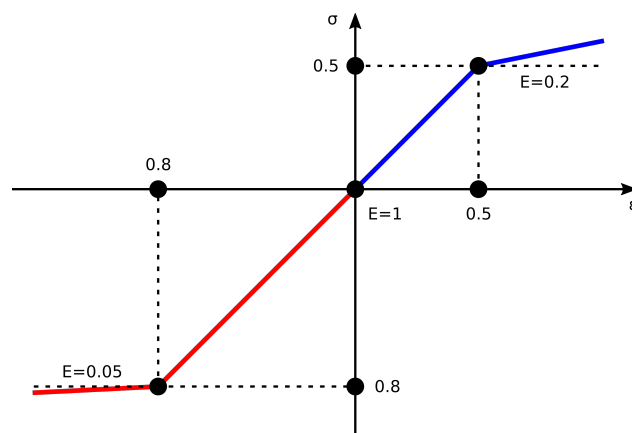
Pracovní diagram je definován jednoduše s jednotkovým modulem pružnosti a vymyšlenými mezemi kluzu odlišnými v tahu a tlaku podle následujícího grafu 4.20.



Obrázek 4.18: Předepsaný průběh napětí pro cyklické zatěžování: tlak-tah-tlak-tah



Obrázek 4.19: Předepsaný průběh napětí pro cyklické zatěžování: tah-tlak-tah-tlak

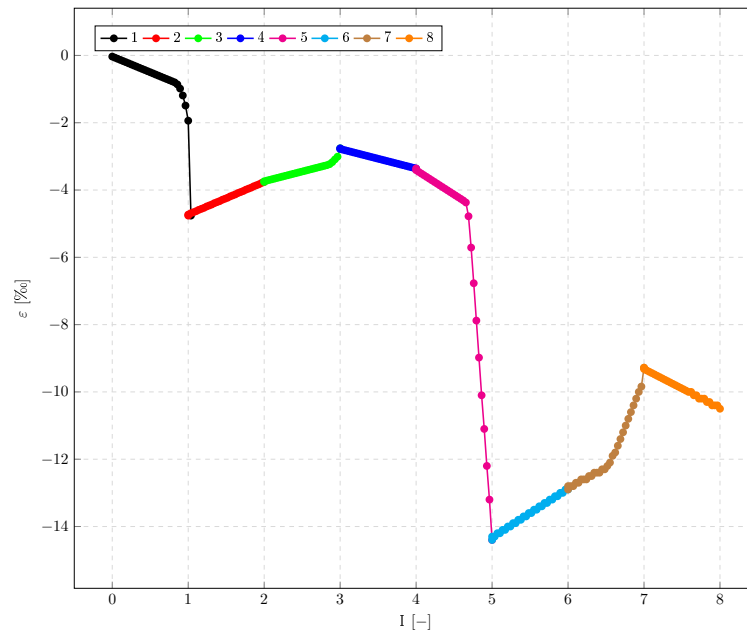


Obrázek 4.20: Pracovní diagram materiálu pro benchmark

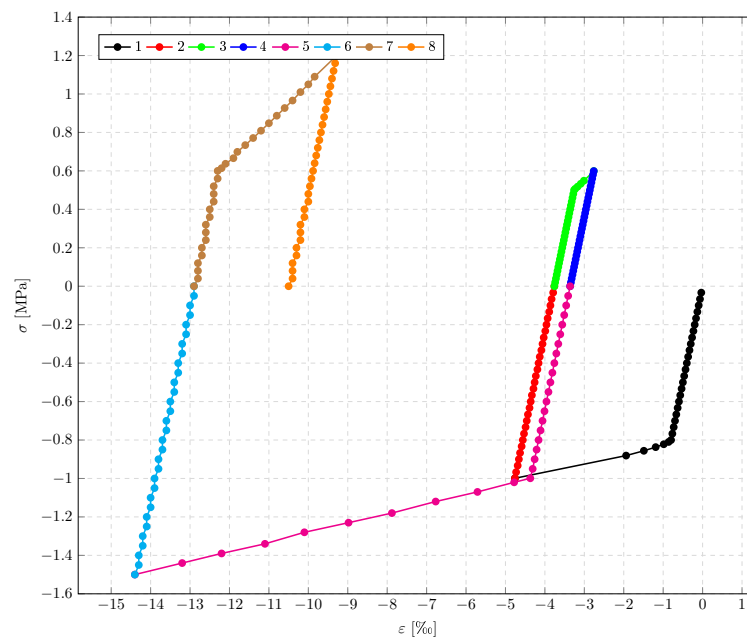


#### 4.4.3.1 Plasticita při cyklickém zatížení a odtížení

Jako první jsou ukázány výsledky pro elastoplastický model podle kritéria Rankine-Hill (RH) [52, 53] vypočítané pro předepsanou historii zatížení tlak-tah-tlak-tah 4.18. Na obrázku 4.21 jsou ukázány deformace a na obrázku 4.22 je ukázána deformačně-napěťová křivka.



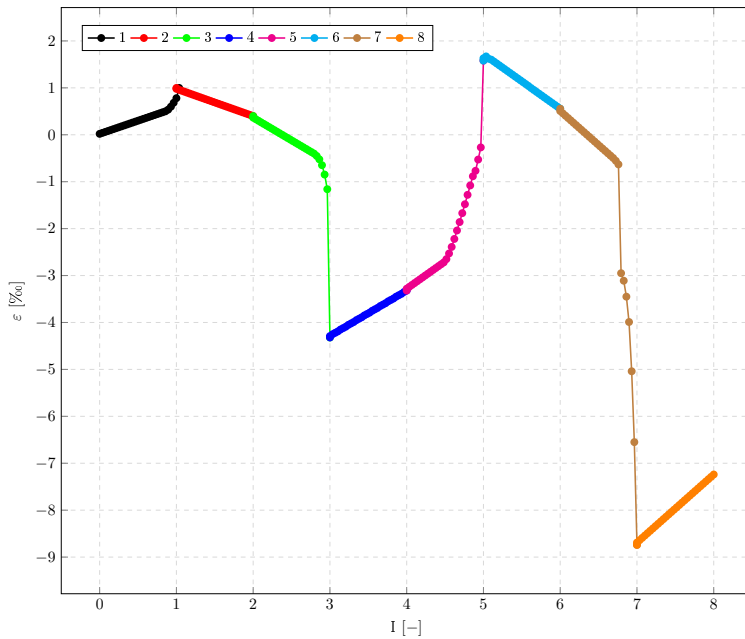
Obrázek 4.21: Model plasticity Rankine-Hill: průběh přetvoření pro předepsané napětí tlak-tah-tlak-tah



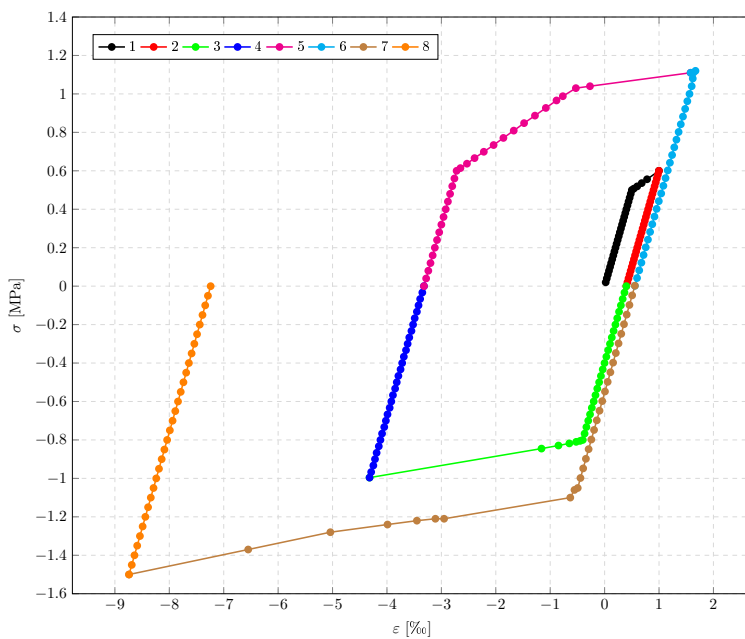
Obrázek 4.22: Model plasticity Rankine-Hill: přetvoření vs. napětí pro předepsané napětí tlak-tah-tlak-tah

Dále jsou ukázány výsledky pro elastoplastický model Rankine-Hill vypočítané pro předepsanou historii zatížení tah-tlak-tah-tlak 4.19. Na obrázku 4.23 jsou ukázány deformace a na obrázku 4.24 je ukázána deformačně-napěťová křivka.

Z těchto výsledků je krásně vidět, jak se model plasticity chová při odtížení a opětovném přitížení při cyklickém zatěžování a odtěžování s předepsanými dvěma historiemi zatížení, kde se v první historii začíná tahem a ve druhé tlakem. Rozdíl ve výsledcích u těchto dvou historií zatížení je evidentní a v obou případech jde krásně vidět, že i když zatížení v obou případech vymizí, tak zůstanou trvalé nenulové deformace kvůli teorii plasticity (křivka odtížení je rovnoběžná s počáteční lineární částí pracovního diagramu materiálu).



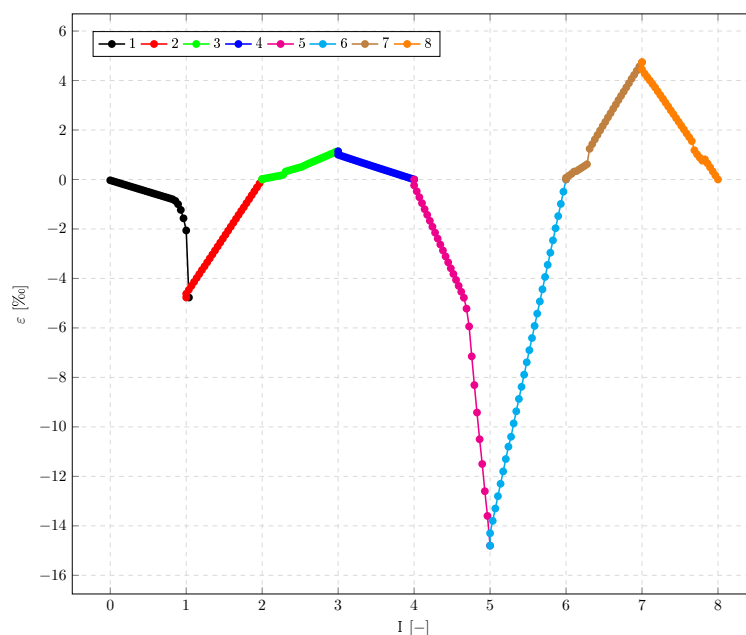
Obrázek 4.23: Model plasticity Rankine-Hill: průběh přetvoření pro předepsané napětí tah-tlak-tah-tlak



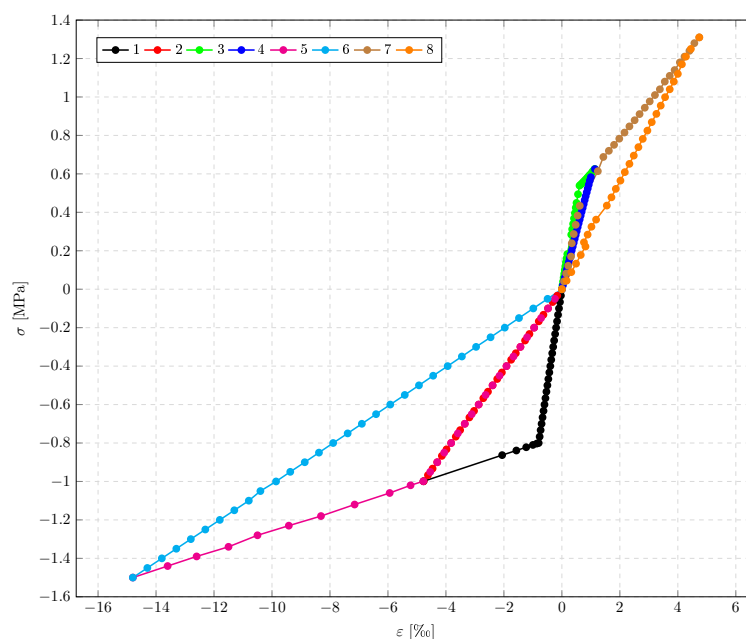
Obrázek 4.24: Model plasticity Rankine-Hill: přetvoření vs. napětí pro předepsané napětí tah-tlak-tah-tlak

#### 4.4.3.2 Poškození při cyklickém zatížení a odtížení

V této sekci jsou ukázány výsledky pro model poškození Mazars vypočítané pro předepsanou historii zatížení tah-tlak-tah-tlak 4.18. Na obrázku 4.25 jsou ukázány deformace a na obrázku 4.26 je ukázána deformačně-napěťová křivka.



**Obrázek 4.25:** Model poškození modifikovaný Mazars: průběh přetvoření pro předepsané napětí tlak-tah-tlak-tah

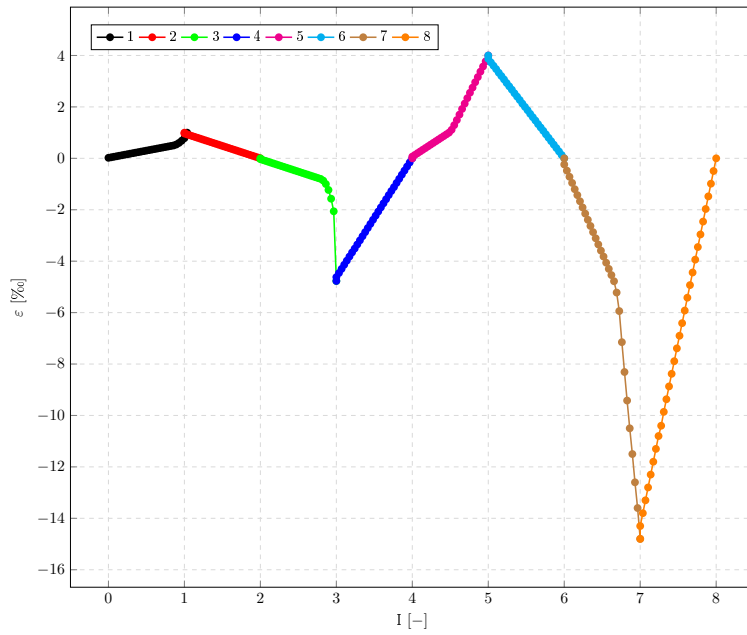


**Obrázek 4.26:** Model poškození Mazars: přetvoření vs. napětí pro předepsané napětí tlak-tah-tlak-tah

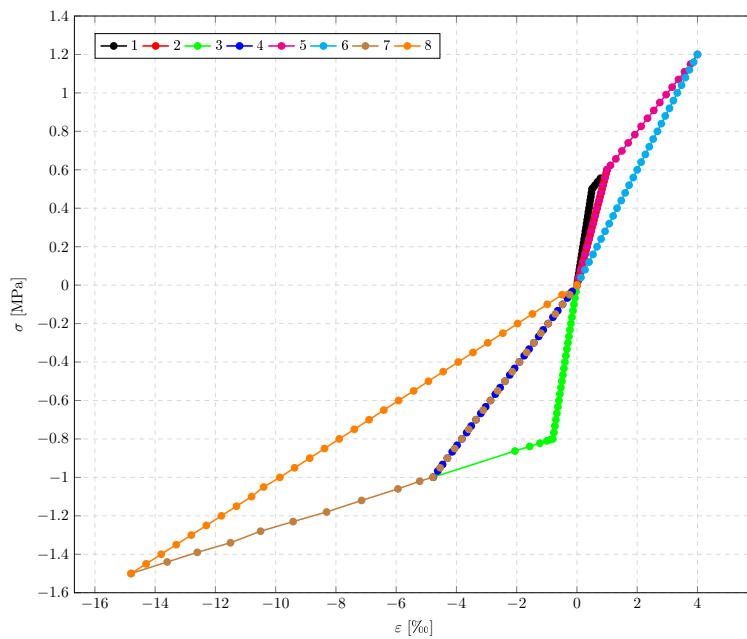
Dále jsou ukázány výsledky pro model poškození Mazars vypočítané pro předepsanou historii zatížení tah-tlak-tah-tlak 4.19. Na obrázku 4.27 jsou ukázány deformace a na obrázku 4.28 je ukázána deformačně-napěťová křivka.

Z těchto výsledků je krásně vidět, jak se model poškození chová při odtížení a opětovném přitížení při cyklickém zatěžování a odtěžování s předepsanými dvěma historiemi zatížení, kde se v první historii začíná tahem a ve druhé tlakem. Rozdíl ve výsledcích u těchto dvou historií zatížení je evidentní a v obou případech jde krásně vidět, že když zatížení v obou případech vymizí, tak nezůstanou trvalé deformace kvůli

teorii poškození (křivka odtížení není rovnoběžná s počáteční lineární částí pracovního diagramu materiálu, ale vrací se do počátku).



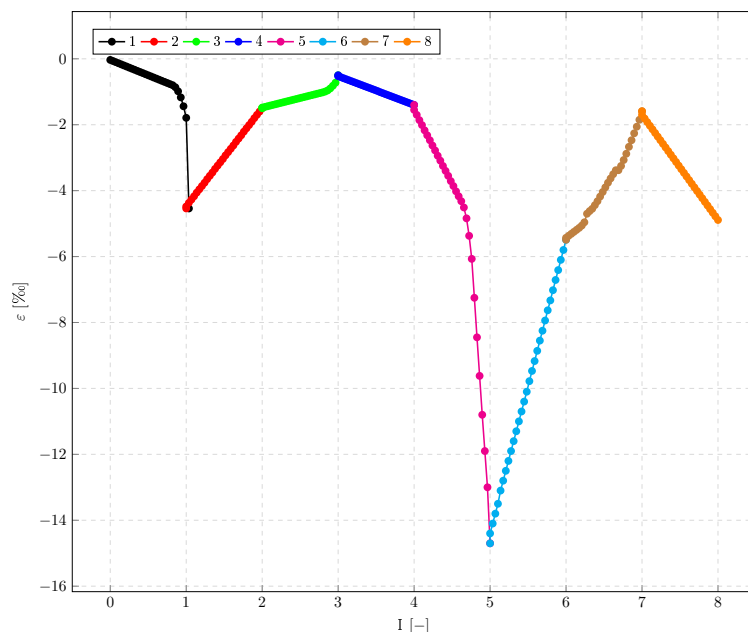
Obrázek 4.27: Model poškození Mazars: průběh přetvoření pro předepsané napětí tah-tlak-tah-tlak



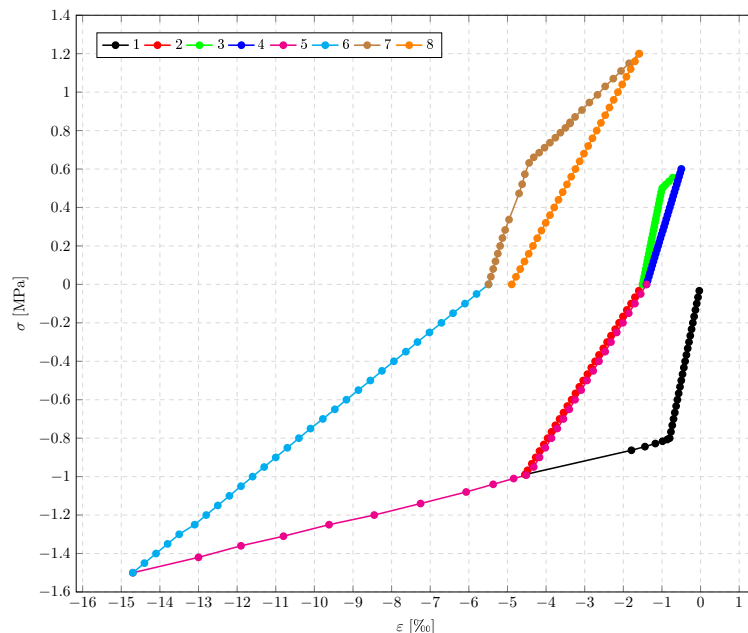
Obrázek 4.28: Model poškození Mazars: přetvoření vs. napětí pro předepsané napětí tah-tlak-tah-tlak

#### 4.4.3.3 První kombinace plasticity s poškozením při cyklickém zatížení a odtížení

V této sekci jsou ukázány výsledky pro první variantu ( $pd = 0$ ) modelu kombinující plasticitu (Rankine-Hill) s poškozením (Mazars) vypočítané pro předepsanou historii zatížení tlak-tah-tlak-tah 4.18. Na obrázku 4.29 jsou ukázány deformace a na obrázku 4.30 je ukázána deformačně-napěťová křivka.



**Obrázek 4.29:** Kombinace modelu plasticity Rankine-Hill s modelem poškození Mazars: průběh přetvoření pro předepsané napětí tlak-tah-tlak-tah pro  $pd = 0$

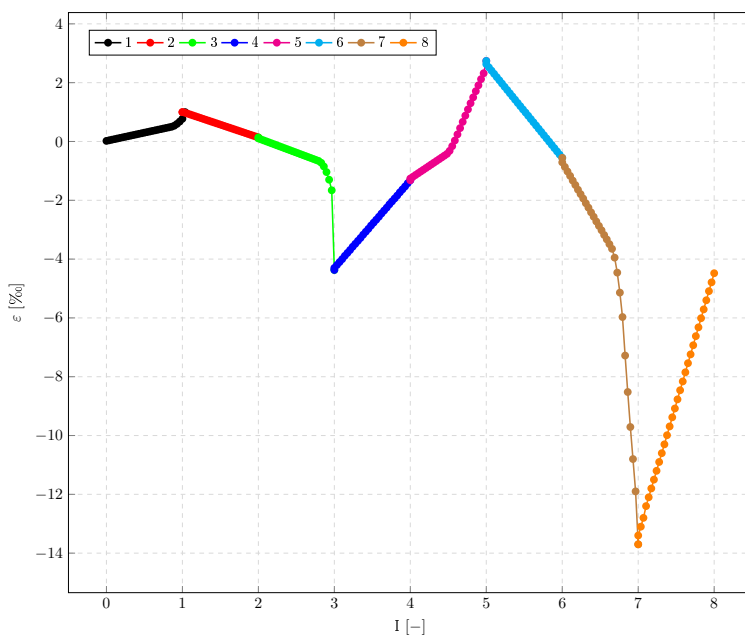


**Obrázek 4.30:** Kombinace modelu plasticity Rankine-Hill s modelem poškození Mazars: přetvoření vs. napětí pro předepsané napětí tlak-tah-tlak-tah pro  $pd = 0$

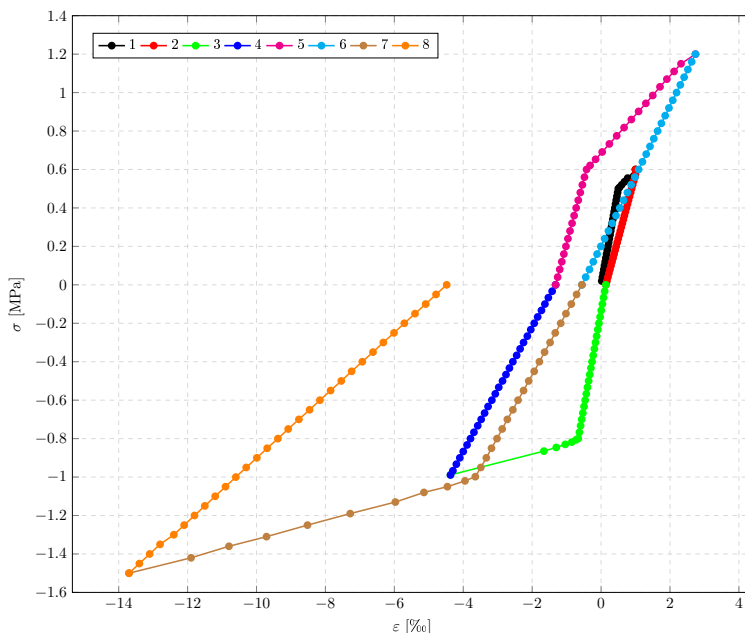
Dále jsou ukázány výsledky pro první variantu ( $pd = 0$ ) modelu kombinující plasticitu (Rankine-Hill) s poškozením (Mazars) vypočítané pro předepsanou historii zatížení tlak-tah-tlak-tah 4.18. Na obrázku 4.29 jsou ukázány deformace a na obrázku 4.30 je ukázána deformačně-napěťová křivka.

Z těchto výsledků je krásně vidět, jak se model kombinující plasticitu a poškození chová při odtížení a opětovném přitížení při cyklickém zatěžování a odtěžování s předepsanými dvěma historiemi zatížení, kde

se v první historii začíná tahem a ve druhé tlakem. Rozdíl ve výsledcích u těchto dvou historií zatížení je evidentní a v obou případech jde krásně vidět, že když zatížení v obou případech vymizí, tak zůstanou trvalé deformace kvůli teorii plasticity, ale jsou jiné než při samotné plasticitě kvůli teorii poškození (křivka odtížení není rovnoběžná s počáteční lineární částí pracovního diagramu materiálu, ale ani se nevrací do počátku).



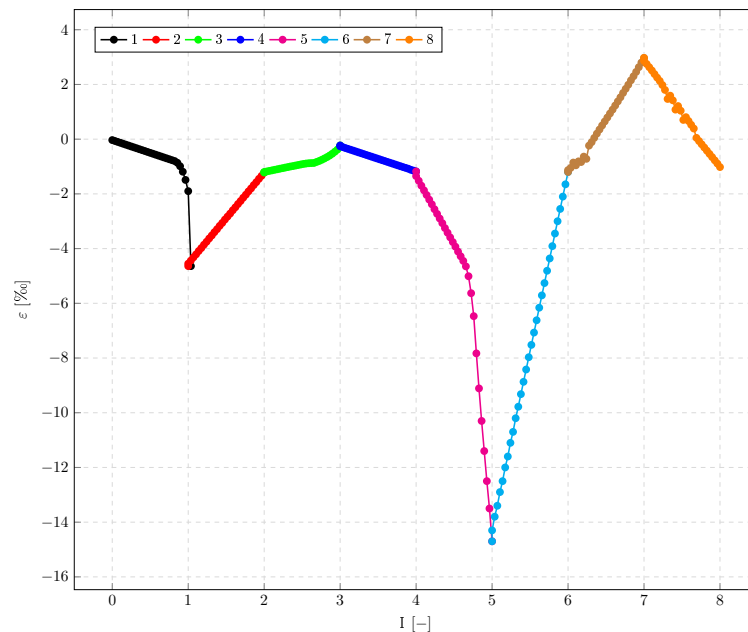
**Obrázek 4.31:** Kombinace modelu plasticity Rankine-Hill s modelem poškození Mazars: průběh přetvoření pro předepsané napětí tah-tlak-tah-tlak pro  $p_d = 0$



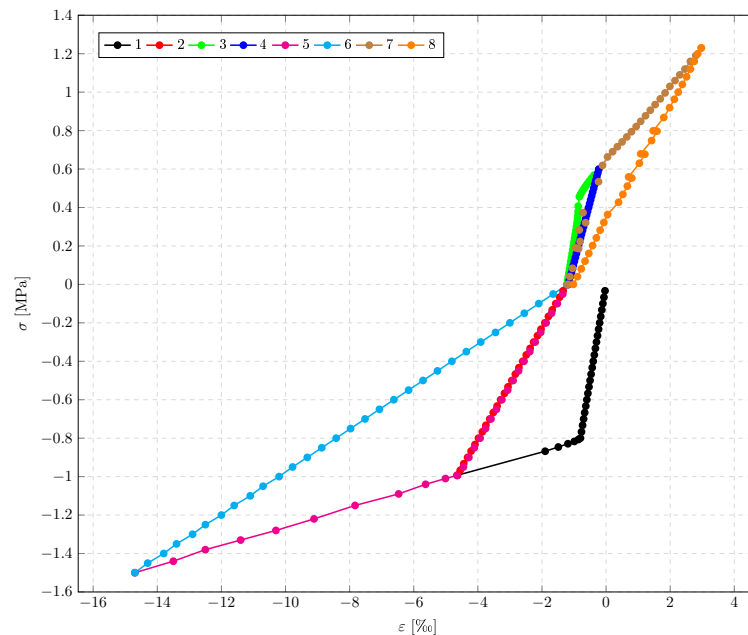
**Obrázek 4.32:** Kombinace modelu plasticity Rankine-Hill s modelem poškození Mazars: přetvoření vs. napětí pro předepsané napětí tah-tlak-tah-tlak pro  $p_d = 0$

#### 4.4.3.4 Druhá kombinace plasticity s poškozením při cyklickém zatížení a odtížení

V této sekci jsou ukázány výsledky pro první variantu ( $pd = 1$ ) modelu kombinující plasticitu (Rankine-Hill) s poškozením (Mazars) vypočítané pro předepsanou historii zatížení tlak-tah-tlak-tah 4.18. Na obrázku 4.33 jsou ukázány deformace a na obrázku 4.34 je ukázána deformačně-napěťová křivka.



**Obrázek 4.33:** Kombinace modelu plasticity Rankine-Hill s modelem poškození Mazars: průběh přetvoření pro předepsané napětí tlak-tah-tlak-tah pro  $pd = 1$

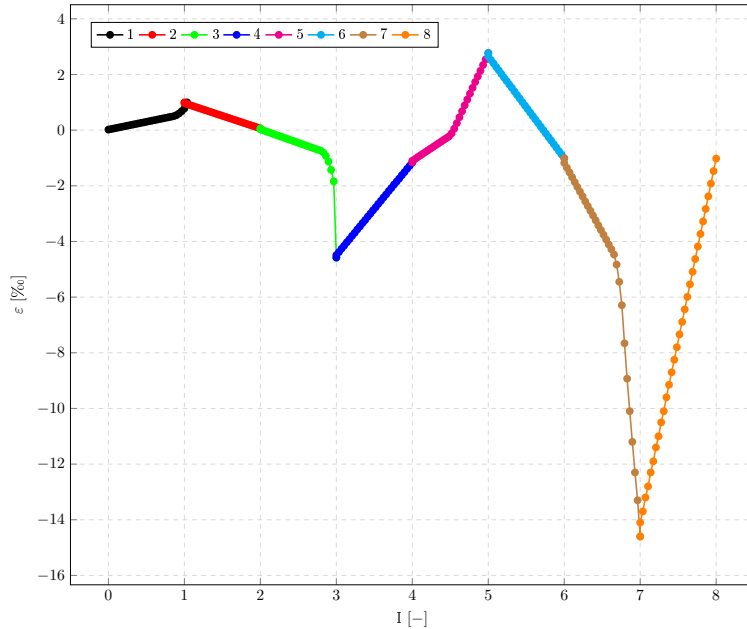


**Obrázek 4.34:** Kombinace modelu plasticity Rankine-Hill s modelem poškození Mazars: přetvoření vs. napětí pro předepsané napětí tlak-tah-tlak-tah pro  $pd = 1$

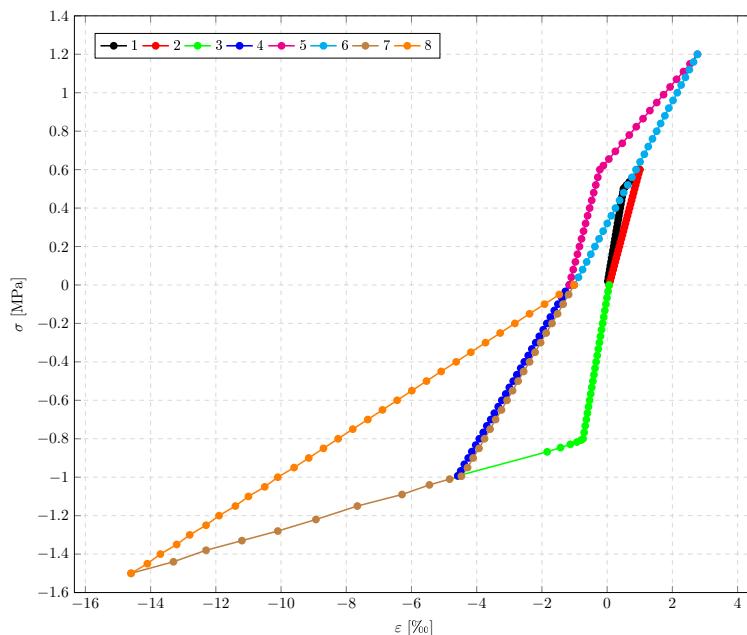
Dále jsou ukázány výsledky pro první variantu ( $pd = 1$ ) modelu kombinující plasticitu (Rankine-Hill) s poškozením (Mazars) vypočítané pro předepsanou historii zatížení tah-tlak-tah-tlak 4.19. Na obrázku 4.35 jsou ukázány deformace a na obrázku 4.36 je ukázána deformačně-napěťová křivka.

Z těchto výsledků je krásně vidět, jak se model kombinující plasticitu a poškození chová při odtížení a opětovném přitížení při cyklickém zatěžování a odtěžování s předepsanými dvěma historiemi zatížení, kde

se v první historii začíná tahem a ve druhé tlakem. Rozdíl ve výsledcích u těchto dvou historií zatížení je evidentní a v obou případech jde krásně vidět, že když zatížení v obou případech vymizí, tak zůstanou trvalé deformace kvůli teorii plasticity, ale jsou jiné než při samotné plasticitě kvůli teorii poškození (křivka při odtížení není rovnoběžná s počáteční lineární částí pracovního diagramu materiálu, ale ani se nevrací do počátku). Výsledky pro tuto 2. variantu modelu kombinující plasticitu s poškozením se liší od výsledků pro 1. variantu kombinovaného modelu, protože sklony křivek při odtížení se liší.

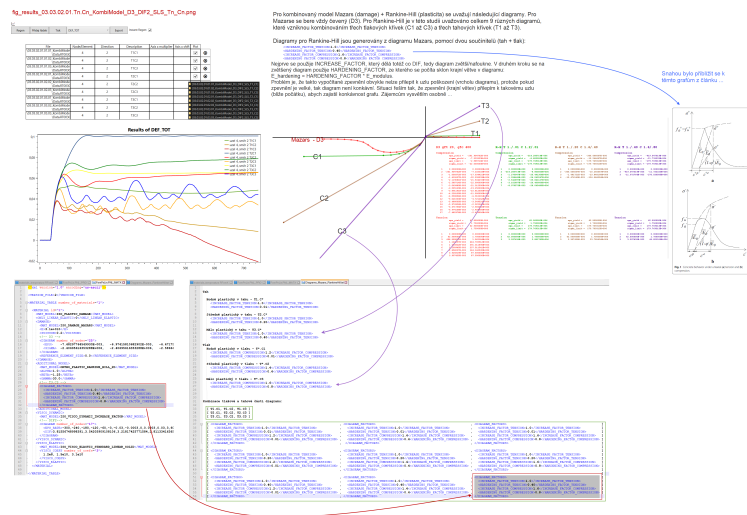


**Obrázek 4.35:** Kombinace modelu plasticity Rankine-Hill s modelem poškození Mazars: průběh přetvoření pro předepsané napětí tah-tlak-tah-tlak pro  $pd = 1$



**Obrázek 4.36:** Kombinace modelu plasticity Rankine-Hill s modelem poškození Mazars: přetvoření vs. napětí pro předepsané napětí tah-tlak-tah-tlak pro  $pd = 1$





**Obrázek 4.37:** Přehled vstupního souboru s definicí materiálového modelu s různými poměry plasticity ku poškození v tahu i tlaku

## 4.5 Viskoplastické modely včetně poškození

Pokud je konstrukce zatížena rychlým dynamickým zatížením, kdy se na úrovni materiálového (integračního) bodu přetvoření mění velmi rychle, tedy rychlost deformace (rychlost přetvoření – anglicky “strain rate”)  $\frac{d\varepsilon}{dt}$  je moc vysoká, tak je nutné v konstitutivním vztahu zahrnout vliv této rychlosti přetvoření. Tato rychlost přetvoření má vliv na tuhostní i pevnostní charakteristiky materiálu (na moduly pružnosti i na meze kluzu nebo meze pevnosti), tedy v podstatě má vliv na celý pracovní diagram materiálu. Tato závislost na rychlosti přetvoření (strain rate effect) je v nelineární dynamice velmi známý jev, který není vhodné opomíjet. Tento efekt je důsledkem viskózní povahy materiálu, která v obecném případě může mít ještě větší dopady – materiál je obecně závislý nejen na první derivaci přetvoření (na rychlosti přetvoření), ale také na druhé a vyšší derivaci přetvoření (na zrychlení atd.).

$$\sigma(t) = f\left(\varepsilon(t), \frac{d\varepsilon}{dt}(t), \frac{d^2\varepsilon}{dt^2}(t), \frac{d^3\varepsilon}{dt^3}(t), \dots\right) \quad (4.50)$$

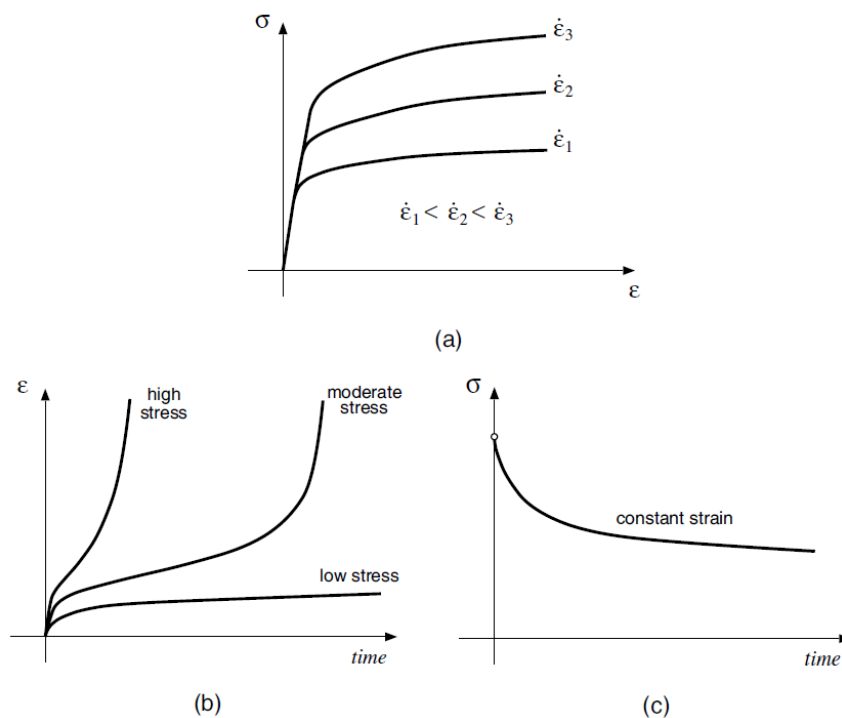
V obecném případě je závislost mezi napětím a přetvořením popsána konstitutivním vztahem daným následující diferenciální rovnicí (není to úplně korektní matematický zápis, ale schématicky pro pochopení je to vhodné).

$$\left(\sigma(t), \frac{d\sigma}{dt}(t), \frac{d^2\sigma}{dt^2}(t), \frac{d^3\sigma}{dt^3}(t), \dots\right) = f\left(\varepsilon(t), \frac{d\varepsilon}{dt}(t), \frac{d^2\varepsilon}{dt^2}(t), \frac{d^3\varepsilon}{dt^3}(t), \dots\right) \quad (4.51)$$

### 4.5.1 Viskoplastické materiálové modely v dynamice

Viskoplastické modely analogicky k viskoelastickým modelům popisují časově závislou odezvu způsobenou viskozitou, ale nyní za mezí kluzu (v plastické oblasti). V podstatě je jejich účelem popis nelineárního chování materiálu v závislosti na rychlosti přetvoření. Viskoplastické materiálové modely jsou takové, u kterých konstitutivní vztah mezi tenzorem napětí a přetvoření závisí na čase a na rozdíl od viskoelastických modelů uvažují trvalé (plastické) deformace. Ve srovnání s elastoplastickými modely popsány v předchozí části textu jsou tyto modely časově závislé, závisejí na konkrétní velikosti časového kroku, jde o skutečný čas, nikoliv jen o pseudočas, jak tomu bylo u časově nezávislých plastických modelů. Tyto časově závislé modely zohledňují např. vliv rychlosti zatížení na odezvu materiálového modelu, ale také další jevy zmíněné již u viskoelastických modelů, jako je dotvarování materiálu (creep) při konstantním zatížení nebo relaxace napětí při konstantní deformaci.

Viskoplastické modely se standardně dělí na dva typy (1) Perzyna, (2) Duvaut-Lions, ale lze vymyslet ještě další formulace, které se ovšem nepoužívají tak často. První formulace je založena na předpokladu,



**Obrázek 4.38:** Vliv viskozity na deformačně-napěťové chování materiálu: (a) vliv rychlosti deformace na pracovní diagram, (b) vliv velikosti napětí na průběh deformace v čase (dotvarování, creep), (c) průběh napětí v čase pro konstantní zatížení (relaxace napětí)

že viskoplastický tok je kolmý na nějakou plochu plastického (viskoplastického) potenciálu (analogicky k plastickému toku) a druhá formulace je založena na „viskózní“ modifikaci výsledků plastického modelu. Kvůli větší obecnosti je v této práci použita Duvaut-Lions formulace. Předpokládá se, jako ve staticce, že máme malá přetvoření, tedy platí aditivní rozklad:

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^{vp} \quad (4.52)$$

### Duvaut-Lions formulace

Duvaut-Lions formulace je založena na výpočtu viskoplastického přetvoření  $\epsilon^{vp}$  viskózní „regularizací“ (modifikací) již vypočítaného výsledného plastického přetvoření  $\epsilon^p$

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \frac{1}{\eta} \mathbf{C}^{-1} : (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{C} : (\epsilon - \epsilon^p)) \quad (4.53)$$

kde

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : (\epsilon - \epsilon^{vp}) \quad (4.54)$$

a pak

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \frac{1}{\eta} (\epsilon - \epsilon^{vp} - \epsilon + \epsilon^p) = \frac{1}{\eta} (\epsilon^p - \epsilon^{vp}) \quad (4.55)$$

### Implicitní algoritmus viskoplastického výpočtu

Ve druhé formulaci jsou známy hodnoty veličin z konce předchozího kroku  $n$  ( $\epsilon_n^{vp}$ ,  $\bar{\epsilon}_n^{vp}$  apod.) a plastické přetvoření v následujícím kroku  $n + 1$  ( $\epsilon_{n+1}^p$ ). Cílem je vypočítat výsledné viskoplastické přetvoření  $\epsilon_{n+1}^{vp}$  a odpovídající napětí  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  pro nový časový přírůstek  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  a jemu odpovídající přírůstek přetvoření

$\Delta\varepsilon = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n$  podle výše popsané „regularizace“.

$$\frac{\varepsilon_{n+1}^{vp} - \varepsilon_n^{vp}}{\Delta t} = \frac{1}{\eta} (\varepsilon_{n+1}^p - \varepsilon_{n+1}^{vp}) \quad (4.56)$$

$$\varepsilon_{n+1}^{vp} = \frac{\eta}{\eta + \Delta t} \varepsilon_n^{vp} + \frac{\Delta t}{\eta + \Delta t} \varepsilon_{n+1}^p \quad (4.57)$$

$$\sigma_{n+1} = \mathbf{C} : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{vp}) \quad (4.58)$$

Dosažením viskoplastického přetvoření (3.4.100) do rovnice pro výpočet napětí (3.4.101) se dostane

$$\sigma_{n+1} = \mathbf{C} : \varepsilon_{n+1} - \frac{\eta}{\eta + \Delta t} \mathbf{C} : \varepsilon_n^{vp} - \frac{\Delta t}{\eta + \Delta t} \mathbf{C} : \varepsilon_{n+1}^p \quad (4.59)$$

což je ve shodě s vyjádřením pomocí elastického odhadu napětí

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= \frac{\eta}{\eta + \Delta t} \sigma_{n+1}^{trial} + \frac{\Delta t}{\eta + \Delta t} \mathbf{C} : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) = \\ &= \frac{\eta}{\eta + \Delta t} \mathbf{C} : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^{vp}) + \frac{\Delta t}{\eta + \Delta t} \mathbf{C} : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) \end{aligned} \quad (4.60)$$

Nárůst viskoplastického přetvoření  $\varepsilon^{vp}$  je s jistým zpožděním oproti okamžitému plastickému přetvoření  $\varepsilon^p$ , proto  $\varepsilon^{vp}(t) < \varepsilon^p(t)$  při nárůstu zatížení. Čím je větší rozdíl mezi plastickým a viskoplastickým přetvořením, tím je větší rychlost změny viskoplastického přetvoření, a to nepřímo úměrně viskozitě materiálu  $\eta$ .

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sigma_{n+1} &= \mathbf{C} : \varepsilon_{n+1} - \mathbf{C} : \varepsilon_n^{vp} = \mathbf{C} : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^{vp}) \\ \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \sigma_{n+1} &= \mathbf{C} : \varepsilon_{n+1} - \mathbf{C} : \varepsilon_{n+1}^p = \mathbf{C} : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) \end{aligned} \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} \sigma_{n+1} &= \mathbf{C} : \varepsilon_{n+1} - \mathbf{C} : \varepsilon_{n+1}^p = \mathbf{C} : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) \\ \lim_{\eta \rightarrow \infty} \sigma_{n+1} &= \mathbf{C} : \varepsilon_{n+1} - \mathbf{C} : \varepsilon_n^{vp} = \mathbf{C} : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^{vp}) \end{aligned} \quad (4.62)$$

Jde vidět, že v případě  $\Delta t \rightarrow 0$  nebo  $\eta \rightarrow \infty$  je přírůstek napětí lineárně elastický a v případě  $\Delta t \rightarrow \infty$  nebo  $\eta \rightarrow 0$  je přírůstek elastoplastický, což je v souladu s požadavky na viskoelastoplastický materiálový model.

### Příklad na 1D napjatost

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{1}{\eta} (\varepsilon^p - \varepsilon^{vp})$$

Po časové diskretizaci a s využitím výše uvedeného vztahu se výsledné napětí po viskózní regularizaci vypočítá následovně

$$\sigma_{n+1} = E\varepsilon_{n+1} - \frac{\eta}{\eta + \Delta t} E : \varepsilon_n^{vp} - \frac{\Delta t}{\eta + \Delta t} E : \varepsilon_{n+1}^p$$

Necht' máme řízenou deformaci s tímto předpisem pro časový vývoj přetvoření (okamžité elastické přetvoření a lineární časový vývoj plastického přetvoření s předpokladem nulového zpevnění)

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_y}{E} + \alpha t$$

Duvaut-Lions formulaci pak lze zapsat následovně

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{1}{\eta} (\alpha t - \varepsilon^{vp})$$

s počáteční podmínkou  $\varepsilon^{vp}(0) = 0$ . Řešení výše uvedené obyčejné diferenciální rovnice je následující

$$\varepsilon^{vp}(t) = \alpha t - \eta\alpha \left(1 - e^{-\frac{t}{\eta}}\right)$$

a napětí tedy vychází

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= E(\varepsilon(t) - \varepsilon^{vp}(t)) \\ \sigma(t) &= \sigma_y + E\eta\alpha \left(1 - e^{-\frac{t}{\eta}}\right)\end{aligned}$$

Po dosazení za čas

$$t = \frac{E\varepsilon - \sigma_y}{E\alpha}$$

se dostane výsledný vztah mezi přetvořením a napětím

$$\sigma(\varepsilon) = \sigma_y + E\eta\alpha \left(1 - e^{-\frac{\sigma_y - E\varepsilon}{E\alpha\eta}}\right)$$

Po využití následujících vzorců (které dostaneme např. rozvojem exponenciální funkce do mocninné řady)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 - e^{-\frac{a}{x}}\right) &= a \\ \lim_{x \rightarrow 0} x \left(1 - e^{-\frac{a}{x}}\right) &= 0\end{aligned}$$

se dostanou výsledné vztahy mezi přetvořením a napětím pro limitní případy, kdy je rychlost deformace buď nekonečně velká, nebo limitně nulová. Jde vidět, že pro případ nekonečně velké rychlosti deformace je odezva viskoplastického modelu lineární, tedy zpevnění materiálu v důsledku viskozity je výrazné. Naopak je tomu pro nízkou rychlost deformace, kdy je odezva modelu ideálně plastická, tedy zpevnění materiálu je nulové a napětí je stále na počáteční mezi kluzu.

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sigma(\varepsilon) &= E\varepsilon \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sigma(\varepsilon) &= \sigma_y\end{aligned}$$

Viskózní parametr lze stanovit například následujícím způsobem

$$\eta = \frac{\eta_0}{\dot{\varepsilon}_{eq}^n} \quad (4.63)$$

Lze použít např. ekvivalentní von Misesovu rychlost přetvoření

$$\dot{\varepsilon}_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_d : \dot{\varepsilon}_d} \quad (4.64)$$

kde  $\dot{\varepsilon}_d = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_v$ ,  $\dot{\varepsilon}_v = \frac{1}{3}(\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22} + \dot{\varepsilon}_{33}) \mathbf{I}$ . Pokud je napětí tahové

$$\eta = \eta_s + trans(\eta_t - \eta_s) \quad (4.65)$$

Pokud je napětí tlakové

$$\eta = \eta_s + trans(\eta_c - \eta_s) \quad (4.66)$$

kde  $\eta_t = \frac{\eta_{0t}}{\dot{\varepsilon}_{eq}^n}$ ,  $\eta_c = \frac{\eta_{0c}}{\dot{\varepsilon}_{eq}^n}$ ,  $\eta_s = \eta_t srate$  a  $trans = \left(\frac{-I_1}{\sqrt{3}J_2}\right)^{pwrt}$ .

#### 4.5.2 Viskoplastické modely s poškozením

Dobrá práce kombinující viskoelasticitu s viskoplasticitou a poškozením je např. [29]. Ve všech viskózních materiálových modelech v dynamice je vhodné předpokládat, že se nejen napětí mění lineárně v rámci jednoho časového kroku, ale také přetvoření. Viskoplastické modely s poškozením, jak už název napovídá, kombinují výpočet viskoplasticity s výpočtem poškození. Výpočet napětí pro tyto modely se provede následujícím způsobem

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{II} - \mathbf{D}) : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}) \quad (4.67)$$

Implicitní integrační algoritmus se standardně dělí do následujících kroků:

1. *Elastická predikce*
2. *Viskoplastická korekce*
3. *Korekce poškozením*

Zkombinovat viskoplasticitu s poškozením není triviální záležitostí i v případě, že by byly k dispozici oba modely funkční pro viskoplasticitu i pro poškození odděleně (zvláště, nezávisle odladěné), pokud by výsledný model měl pracovat s libovolně zadaným pracovním diagramem a tento také při výpočtu plně respektovat, stejně jako jiné, předem naměřené, mechanické vlastnosti. Tomuto tématu dále nebude věnována pozornost a více informací lze najít v odborných článcích nebo jiné literatuře dostupné i na internetu.

Časově nezávislé modely vypadají takto jednoduše:

$$\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{ij}, \text{stavové proměnné}) \quad (4.68)$$

ale už tehdy jsou problémy s konvergencí a výpočet zabere dost času u 3D úloh s plasticitou nebo s poškozením a to vzhledem k problematice klesajících větví pracovních diagramů. Co teprve časově závislé modely, které mají mnohem složitější konstitutivní vztah. V obecném případě je závislost mezi napětím a přetvořením popsána konstitutivním vztahem daným následujícími diferenciálními rovnicemi (není to úplně korektní matematický zápis, ale schématicky pro pochopení je to vhodné).

$$\left( \sigma_{ij}, \frac{d\sigma}{dt}, \frac{d^2\sigma}{dt^2}, \dots \right) = f \left( \varepsilon_{ij}, t, \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}, \frac{d^2\varepsilon_{ij}}{dt^2}, \dots, \text{stavové proměnné} \right) \quad (4.69)$$

Cílem bylo najít z hlediska času výpočtu i času implementace nejméně náročné, ale zároveň i dostatečně přesné a robustní (spolehlivé) řešení. Pro rychlé dynamické děje u betonových konstrukcí byly na základě provedených numerických studií, zkušeností členů týmu s dynamickými výpočty a s ohledem na dosavadní teoretické poznatky implementovány a otestovány tyto tři materiálové modely obsahující:

1. *viskoelasticitu s viskoplasticitou (VEVP)*
2. *viskoelasticitu s poškozením (VEVD)*
3. *viskoelasticitu s viskoplasticitou včetně poškození (VEVPD)*

#### **Viskoelasticita s viskoplasticitou (VEVP)**

Tento kombinovaný model je založen na následujících submodelech: *a) viskoelastický model*, kde se pro výpočet visko-elastického přetvoření  $\varepsilon^{ve}$  používá model *Standard Linear Solid (SLS)*, a *b) viskoplastický model*, který zohledňuje viskozitu (strain rate effect) prostřednictvím DIF křivek, přičemž výstupem je viskózní plastické přetvoření  $\varepsilon^{vp}$ . Výsledný konstitutivní vztah pro daný kombinovaný model je následující:

$$\sigma = \mathbf{C} : (\varepsilon - \varepsilon^{ve} - \varepsilon^{vp}) \quad (4.70)$$

#### **Viskoelasticita s poškozením (VEVD)**

Zmíněný kombinovaný model je založen na následujících submodelech: *a) viskoelastický model*, kde je pro výpočet visko-elastického přetvoření  $\varepsilon^{ve}$  použit model *Zenerův model SLS* a *b) model poškození s viskozitou*, u něhož je viskozita (strain rate effect) viskozita prostřednictvím DIF křivek a výstupem je tenzor poškození  $\mathbf{D}_v$ . Výsledný konstitutivní vztah je poté následující:

$$\sigma = (\mathbf{\Pi} - \mathbf{D}_v) : \mathbf{C} : (\varepsilon - \varepsilon^{ve}) \quad (4.71)$$

#### **Viskoelasticita s viskoplasticitou včetně poškození (VEVPD)**

Tento finální kombinovaný model je založen na submodelech: *a) viskoelastický model*, *b) viskoplastický model* a *c) model poškození s viskozitou*. První z výše uvedených modelů používá pro výpočet visko-elastického přetvoření  $\varepsilon^{ve}$  Zenerův model SLS. Druhý model ve výsledné kombinaci zohledňuje viskozitu (strain rate

effect) prostřednictvím DIF křivek a výstupem je visko-plastické přetvoření  $\varepsilon^{vp}$ . Poslední model v kombinaci opět zohledňuje viskozitu prostřednictvím DIF křivek, ale výstupem je tenzor poškození  $\mathbf{D}_v$ . Výsledný konstitutivní vztah je pro popsanou finální kombinaci následující:

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{\Pi} - \mathbf{D}_v) : \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{ve} - \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}) \quad (4.72)$$

Pro výše popsaný kombinovaný model byla provedena následující numerická implementace:

1) *Viskoelastická predikce* (Zenerův model SLS/Kelvinův-Voigtův model), ve které je na vstupu v daném časovém přírůstku celkové přetvoření redukováno o visko-plastické přetvoření a visko-poškození zkonvergované z předchozího přírůstku. Vstupem je  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{vp} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{vd}$ , nový časový krok a stavové proměnné z předchozího přírůstku, ze kterých se se vypočítá nový přírůstek visko-elastického přetvoření. Výstupem je  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{ve}$  a platí  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e1} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{ve} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{vp} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{vd} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^1 = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e1}$ .

2) *Viskoplastická korekce*, kde je vstup do viskoplastického modelu (Rankine-Hill s pracovním diagramem modifikovaným DIF křivkou podle rychlosti přetvoření) se vstupním přetvořením redukováným o aktuální visko-elasticitu a visko-plasticitu/poškození z předchozího přírůstku  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{ve} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{vp} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{vd}$  a všechny stavové proměnné z předchozího přírůstku pro daný model  $\boldsymbol{\varepsilon}_n^{vp}$  včetně kumulovaného visko-plastického přetvoření. Výstupem je  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp}$  a platí  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e2} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{ve} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{vd} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^2 = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e2}$ .

3) *Korekce modelem poškození s viskozitou* se vstupem  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{ve} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp}$  a dále všechny stavové proměnné z předchozího přírůstku pro daný model  $d_n^{vd} \rightarrow d_n^{vt}, d_n^{vc}$  včetně kumulovaných plastických přetvoření v tahu i v tlaku. Výstupem je  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vd}, d_{n+1}^{vd}, d_{n+1}^{vc}$  a platí  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e3} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{ve} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vd} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^3 = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e3}$ .

Výsledné napětí tedy splňuje vztah

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^3 = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e3} = \mathbf{C} : \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{ve} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vd} \right) \quad (4.73)$$

Při použití Duvautovy-Lionsovy (D-L) formulace v kombinaci viskoelastického a viskoplastického (včetně poškození) modelu nevystihuje úplně přesně odezvu materiálu na rychlé dynamické zatížení. Z tohoto důvodu a hlavně z důvodu, aby nebylo třeba stanovovat (identifikovat) větší množství vstupních parametrů se mi jako lepší než D-L formulace ukázalo použít křivku "Dynamic Increase Factor (DIF)" přímo pro modifikaci zadaného pracovního diagramu v závislosti na aktuální hodnotě rychlosti přetvoření.

## Viskoplastické modely s poškozením pomocí DIF křivek

Viskoplasticita je v této práci řešena pomocí tzv. DIF (Dynamic Increase Factor) křivek. Byla testována i Duvautova-Lionsova formulace podle teorie popsané v kapitole 4.5.1, ale ta se ukázala jako prakticky nepoužitelná, protože vyžaduje stanovení (identifikaci) mnoha vstupních parametrů a to na časově závislých rychlých dynamických úlohách. Při redukci vstupních parametrů se bohužel nedostanou dobré výsledky, proto jsem tuto cestu zavrhl a vydal se cestou pomocí DIF křivek. Pro analýzu byly vybrány tyto DIF křivky.

### DIF křivka pro tlakové zatížení

V tlakové oblasti je dle modelu CEB nutno rozlišovat výpočet DIF dle rychlosti deformace ve dvou intervalech: Pro  $\dot{\varepsilon} \leq 30s^{-1}$ )

$$\text{DIF} = \frac{f_c}{f_{cs}} = \left( \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_s} \right)^{1.026\alpha}$$

Pro  $\dot{\varepsilon} > 30s^{-1}$ )

$$\text{DIF} = \frac{f_c}{f_{cs}} = \gamma_s \left( \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_s} \right)^{\frac{1}{3}}$$

kde  $f_c$  resp.  $f_{cs}$  je dynamická pevnost v tlaku při rychlosti přetvoření  $\dot{\varepsilon}$  resp. statická pevnost při rychlosti přetvoření  $\dot{\varepsilon}$  Platnost výše uvedených vztahů je pro rychlost přetvoření  $\dot{\varepsilon}$  v rozsahu  $< 30 \cdot 10^{-6}; 300 > s^{-1}$

a statická úroveň rychlosti přetvoření  $\dot{\epsilon}_s$  je uvažována o velikosti  $30 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ . Pro koeficient  $\gamma_s$  platí

$$\log \gamma_s = 6.15\alpha - 2$$

kde

$$\alpha_s = \frac{1}{5 + 9 \frac{f_{cs}}{f_{co}}}$$

v němž je hodnota  $f_{co}$  uvažována o velikosti 10 MPa. Z výše uvedených vztahů vyplývá, že faktor pro je vyšší pro betony s nižší pevností v tlaku.

### DIF křivka pro tahové zatížení

Vztah pro výpočet DIF faktoru v tahu v závislosti na velikosti rychlosti deformace je dán vztahy: Pro  $\dot{\epsilon} \leq 30 \text{ s}^{-1}$ )

$$\text{DIF} = \frac{f_t}{f_{ts}} = \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_s} \right)^{1.016\delta}$$

Pro Pro  $\dot{\epsilon} > 30 \text{ s}^{-1}$ )

$$\text{DIF} = \frac{f_t}{f_{ts}} = \beta \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_s} \right)^{\frac{1}{3}}$$

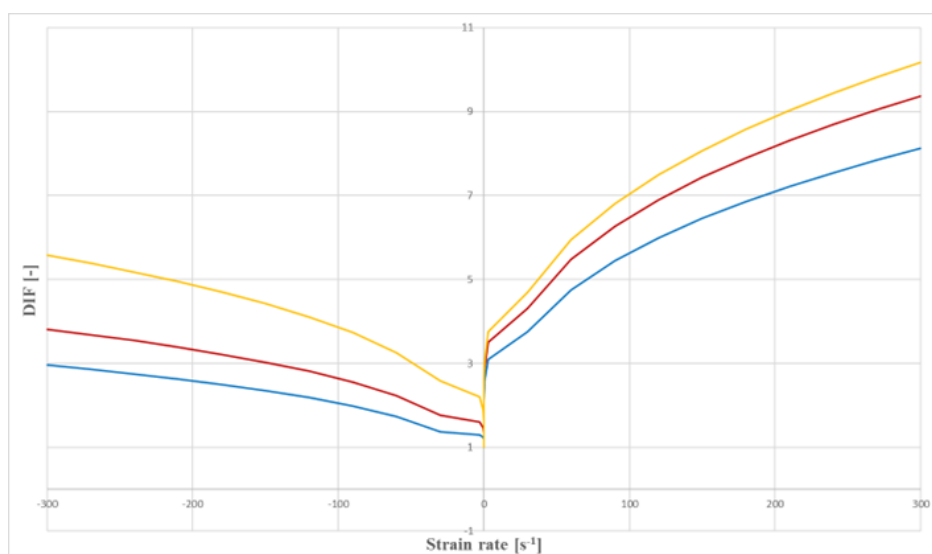
kde  $f_t$  resp.  $f_{ts}$  je dynamická pevnost v tahu při rychlosti přetvoření  $\dot{\epsilon}$  resp. statická pevnost při rychlosti přetvoření  $\dot{\epsilon}$ . Platnost výše uvedených vztahů je pro rychlost přetvoření  $\dot{\epsilon}$  v rozsahu  $< 30 \cdot 10^{-6}; 300 > \text{ s}^{-1}$  a statická úroveň rychlosti přetvoření  $\dot{\epsilon}_s$  je uvažována o velikosti  $30 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ . Pro koeficient  $\beta$  platí

$$\log \beta = 7.11\delta - 2.33$$

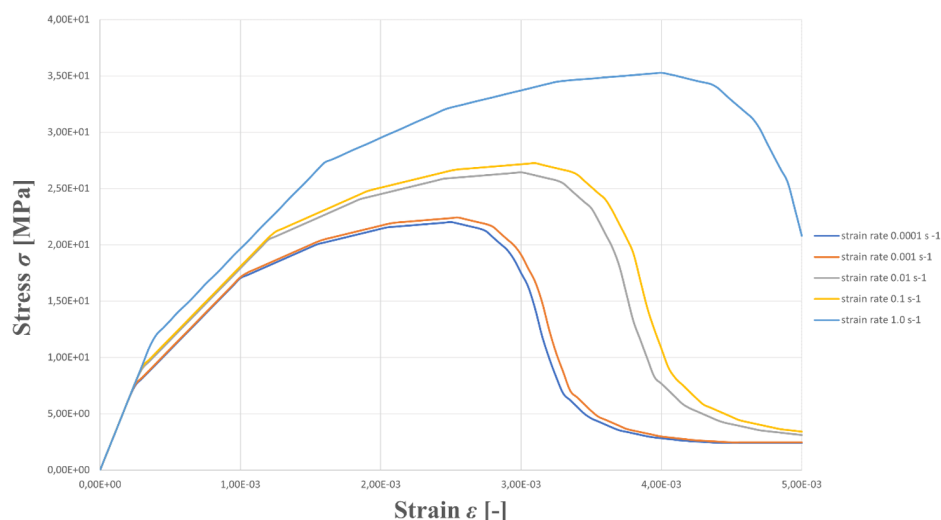
kde

$$\beta = \frac{1}{10 + 6 \frac{f_{ts}}{f_{to}}}$$

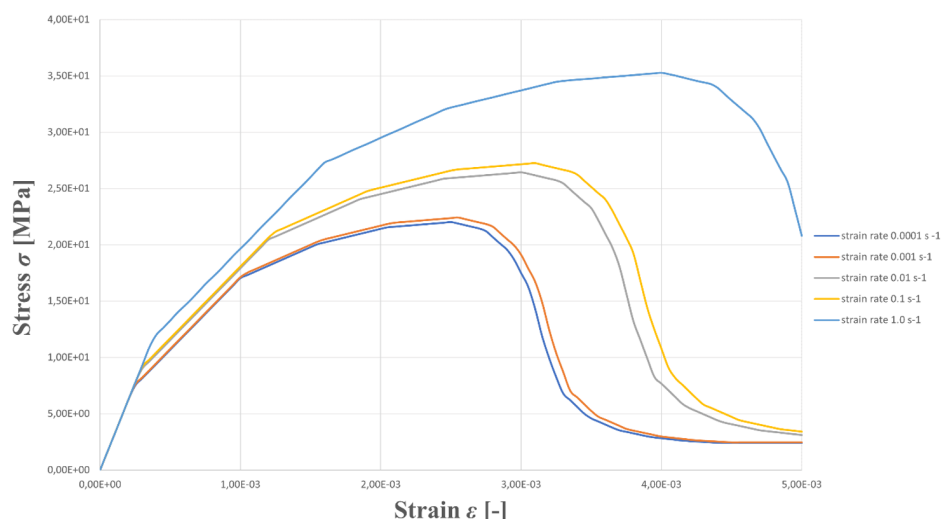
v němž je hodnota  $f_{co}$  uvažována o velikosti 10 MPa. Z výše uvedených vztahů vyplývá, že faktor pro je vyšší pro betony s nižší pevností v tahu a obsahuje diskontinuitu při rychlosti přetvoření  $30 \text{ s}^{-1}$ . Na obrázku 4.39 jsou ukázány tři různé DIF křivky, pro které byl daný materiálový model testován. Na obrázku 4.40 je ukázána závislost pracovního diagramu betonu v tlaku na rychlosti přetvoření podle DIF křivky. Na obrázku 4.41 je ukázána závislost pracovního diagramu betonu v tahu na rychlosti přetvoření podle DIF křivky.



Obrázek 4.39: DIF křivky č. 1, 2, 3 od shora dolů



Obrázek 4.40: Závislost pracovního diagramu betonu v tlaku na rychlosti přetvoření podle DIF křivky



Obrázek 4.41: Závislost pracovního diagramu betonu v tahu na rychlosti přetvoření podle DIF křivky

## 4.6 Nelineární a časově závislá odezva železobetonového nosníku na dopad ocelového razníku

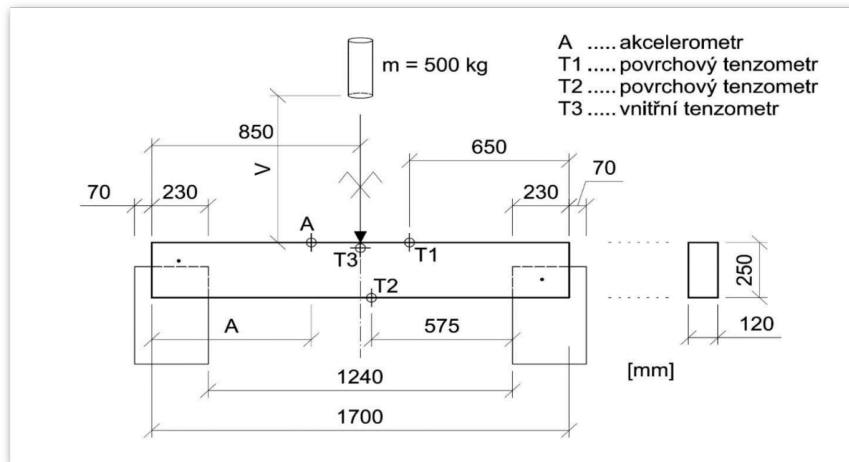
Tato kapitola je nejdůležitější kapitolou celé práce, protože ukazuje výsledky nelineární a časově závislé odezvy železobetonového nosníku na rychlé dynamické zatížení a tyto výsledky srovnává měřením z experimentu a tím je provedena validace materiálového modelu.

### 4.6.1 Experiment a MKP model

#### Experiment

Schéma experimentu včetně rozměrů je uvedeno na obrázku 4.42 a fotografie je na obrázku 4.43. Fotografie je pro případ, kdy je nosník připevněn ke dřevěným podložkám, ale v této práci jsou k dispozici data měření bez připevnění, takže i MKP model je proveden bez připevnění a je pozorováno odrážení nosníku od dřevěných podložek. MKP model, který dělali kolegové v Ansysu je na obrázku 4.44.

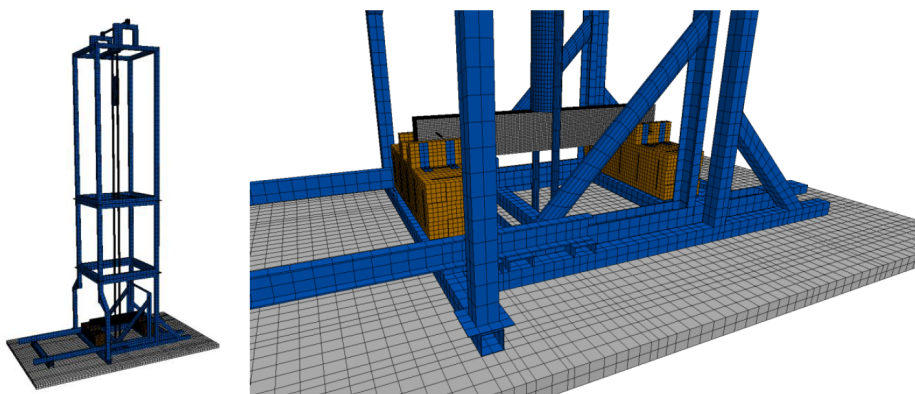




Obrázek 4.42: Geometrie experimentu



Obrázek 4.43: Fotografie experimentu - v našem měření nebyl nosník připevněn ke dřevěným podložkám



Obrázek 4.44: Padostroj

Fotografie středu nosníku, u kterého jsou 20 cm od středu délky připojeny snímače (akcelerometr nahoře, značky pro kameru v polovině), jsou v čase před dopadem razníku na obrázku 4.45 a po dopadu razníku na obrázku 4.46.



Obrázek 4.45: Nosník před dopadem - detail na snímače



Obrázek 4.46: Nosník po dopadu - detail na snímače

Na závěr experimentu bylo provedeno měření průhybu nosníku po dopadu v ustáleném stavu 4.47.



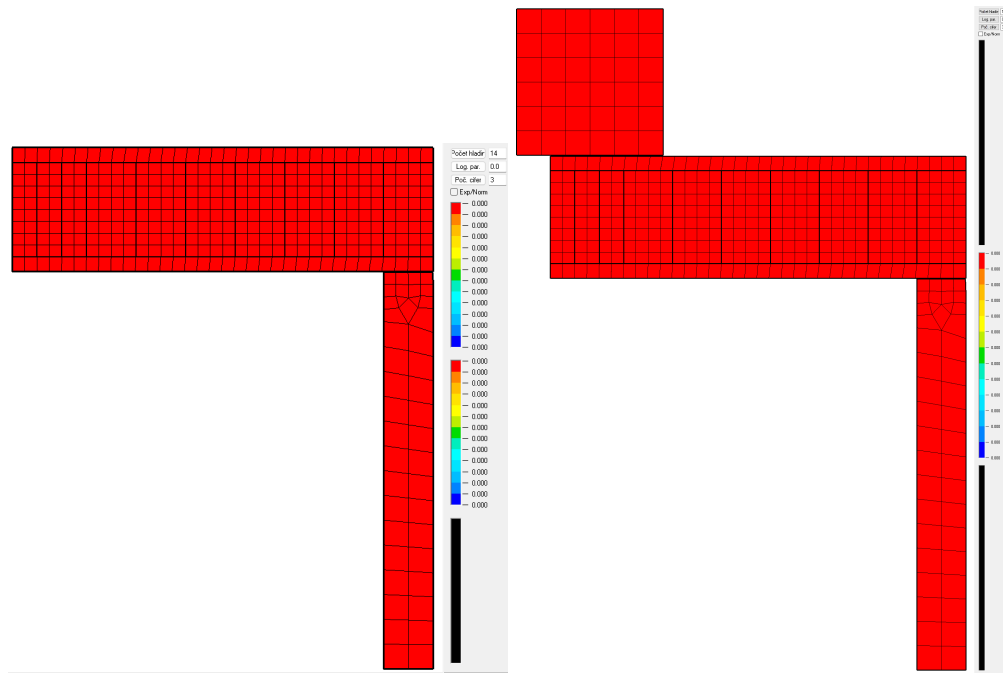
Obr. 17 7IX-1



Obrázek 4.47: Měření průhybu nosník po dopadu v ustáleném stavu

## MKP model

MKP model železobetonového nosníku s razníkem těsně před dopadem v čase 0.000 [s] je na obrázku 4.48 bez dřevěných podložek (nahrazeno liniovou elastickou podporou s vyloučením v tahu) vlevo a se dřevěnými podložkami je vpravo. Přístup k sestavení materiálového modelu pro nelineární časově závislou dynamickou



**Obrázek 4.48:** MKP model železobetonového nosníku po dopadu razníku v čase 0.000 [s] s liniovou podporou vlevo a se dřevěnými podložkami vpravo

odezvu betonového nosníku je jedinečný v tom, že upravuje celý pracovní diagram podle aktuální hodnoty součinitele DIF (Dynamic Increase Factor), který je závislý na rychlosti přetvoření. Dále je na materiál nahlíženo jako na viskoelastický materiál s plasticitou a poškozením počítanými z modifikovaného pracovního diagramu betonu. Jedinečnost je také ve stavebnicovém přístupu kombinace viskoelasticity, plasticity a poškození. Lze vybrat libovolný model viskoelasticity, plasticity a poškození a navíc lze zohlednit různé poměry plasticity ku poškození. Právě vliv DIF součinitele jako funkce závislé na rychlosti přetvoření, vliv viskoelasticity a vliv poměrů plasticity ku poškození byly stěžejní body analýzy a výsledky byly srovnány s experimentem.

První skupina modelů kombinuje plasticitu s poškozením takovým způsobem, že plasticita zůstává v efektivním napětí-ovém prostoru, ale vstup do plastického modelu je očištěn o část odpovídající poškození z předchozího zkonvergovaného času, což odpovídá naší volbě parametru  $pd = 1$  (viz kapitola 4.4).

1) *Viskoelastická predikce* (Standard Linear Solid/Kelvin-Voigt), ve které je na vstupu v daném časovém přírůstku celkové přetvoření redukováno o viskoplastické přetvoření včetně poškození zkonvergované z předchozího přírůstku. Vstupem je  $\epsilon_{n+1} - \epsilon_n^{vp} - \epsilon_n^{vd}$ , nový časový krok a stavové proměnné z předchozího přírůstku, ze kterých se se vypočítá nový přírůstek visko-elastického přetvoření. Výstupem je  $\epsilon_{n+1}^{ve}$  a platí  $\epsilon_{n+1}^{e1} = \epsilon_{n+1} - \epsilon_{n+1}^{ve} - \epsilon_n^{vp} - \epsilon_n^{vd} \Rightarrow \sigma_{n+1}^1 = \mathbf{C} : \epsilon_{n+1}^{e1}$ .

2) *Viskoplastická korekce*, kde je vstup do viskoplastického modelu (Rankine-Hill s viskozitou pomocí DIF křivky) se vstupním přetvořením redukováným o aktuální viskoelasticitu a viskoplasticitu/poškození z předchozího přírůstku  $\epsilon_{n+1} - \epsilon_{n+1}^{ve} - \epsilon_n^{vp} - \epsilon_n^{vd}$  a všechny stavové proměnné z předchozího přírůstku pro daný model  $\epsilon_n^{vp}$  včetně kumulovaného visko-plastického přetvoření. Výstupem je  $\epsilon_{n+1}^{vp}$  a platí  $\epsilon_{n+1}^{e2} = \epsilon_{n+1} - \epsilon_{n+1}^{ve} - \epsilon_{n+1}^{vp} - \epsilon_n^{vd} \Rightarrow \sigma_{n+1}^2 = \mathbf{C} : \epsilon_{n+1}^{e2}$ .

3) *Korekce modelem poškození s viskozitou* se vstupem  $\epsilon_{n+1} - \epsilon_{n+1}^{ve} - \epsilon_{n+1}^{vp}$  a dále všechny stavové proměnné z předchozího přírůstku pro daný model  $d_n^{vd} \rightarrow d_n^{vt}, d_n^{vc}$  včetně kumulovaných plastických přetvoření v tahu i v tlaku. Výstupem je  $\epsilon_{n+1}^{vd}, d_{n+1}^{vd}, d_{n+1}^{vc}$  a platí  $\epsilon_{n+1}^{e3} = \epsilon_{n+1} - \epsilon_{n+1}^{ve} - \epsilon_{n+1}^{vp} - \epsilon_{n+1}^{vd} \Rightarrow \sigma_{n+1}^3 = \mathbf{C} \epsilon_{n+1}^{e3}$ .



Výsledné napětí tedy splňuje vztah

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^3 = \mathbf{C} : \varepsilon_{n+1}^3 = \mathbf{C} : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{ve} - \varepsilon_{n+1}^{vp} - \varepsilon_{n+1}^{vd})$$

Druhá skupina modelů kombinuje plasticitu s poškozením takovým způsobem, že plasticita opět pracuje v efektivním napět'ovém prostoru, ale vstup nyní není očistěn o část vzniklou přídatným poškozením, což odpovídá naší volbě parametru  $pd = 0$  (viz kapitola 4.4). Model poškození vždy následuje v daném čase v sérii po elastoplastickém výpočtu a pracuje s celkovým ekvivalentním přetvořením. Není analyzována varianta, kdy je plasticita řešena v prostoru nominálních (konečných - poškozených) napětí, vždy je řešena v efektivním prostoru napětí (neovlivněných poškozením) [39].

Byla také testována varianta, kde model poškození nepracoval s celkovým přetvořením, ale pouze s plastickým přetvořením a uplatňoval se tzv. "plastic damage evolution law" - to je vývoj parametrů poškození v závislosti na akumulovaném plastickém přetvoření podle vztahu odvozeného např. z pracovního diagramu s danými odtěžovacími křivkami 4.10, 4.11. Z rovnice (76) z publikace [38] soudím, že parametr  $pd = 0$ . Později Grassl a kol. 2013 [39] postupovali tak, že  $pd = 1$ . Z rovnice (18) v článku [69] je ukázáno, jak se počítá lineární elastický odhad napětí a tam je zřejmé, že pro plastický výpočet je třeba se vždy držet efektivního napět'ového prostoru (viz kapitola 4.4).

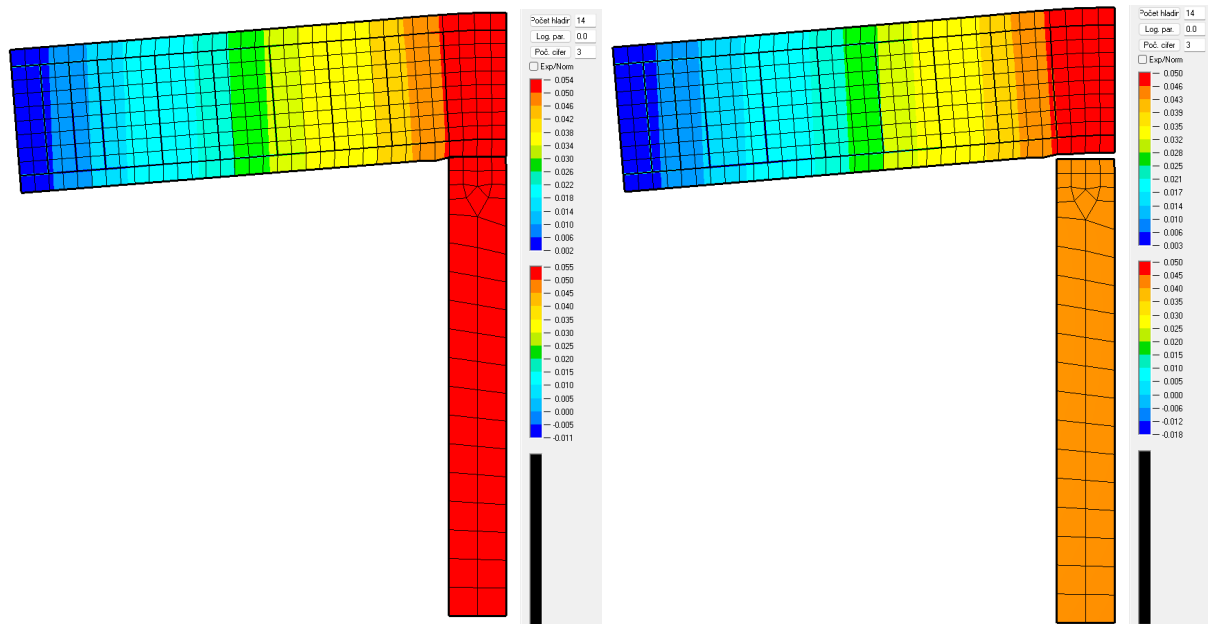
Při použití Duvautovy-Lionsovy formulace v kombinaci viskoelastického a viskoplastického (včetně poškození) modelu nevystihuje úplně přesně odezvu materiálu na rychlé dynamické zatížení, pokud nenafitujeme velké množství vstupních parametrů [61]. Z těchto důvodů se mi lepší než Duvautova-Lionsova (D-L) formulace jevílo použít křivku "Dynamic Increase Factor"(DIF) přímo pro modifikaci zadaného pracovního diagramu na základě aktuální hodnoty rychlosti přetvoření.

## 4.6.2 Výsledky a diskuze

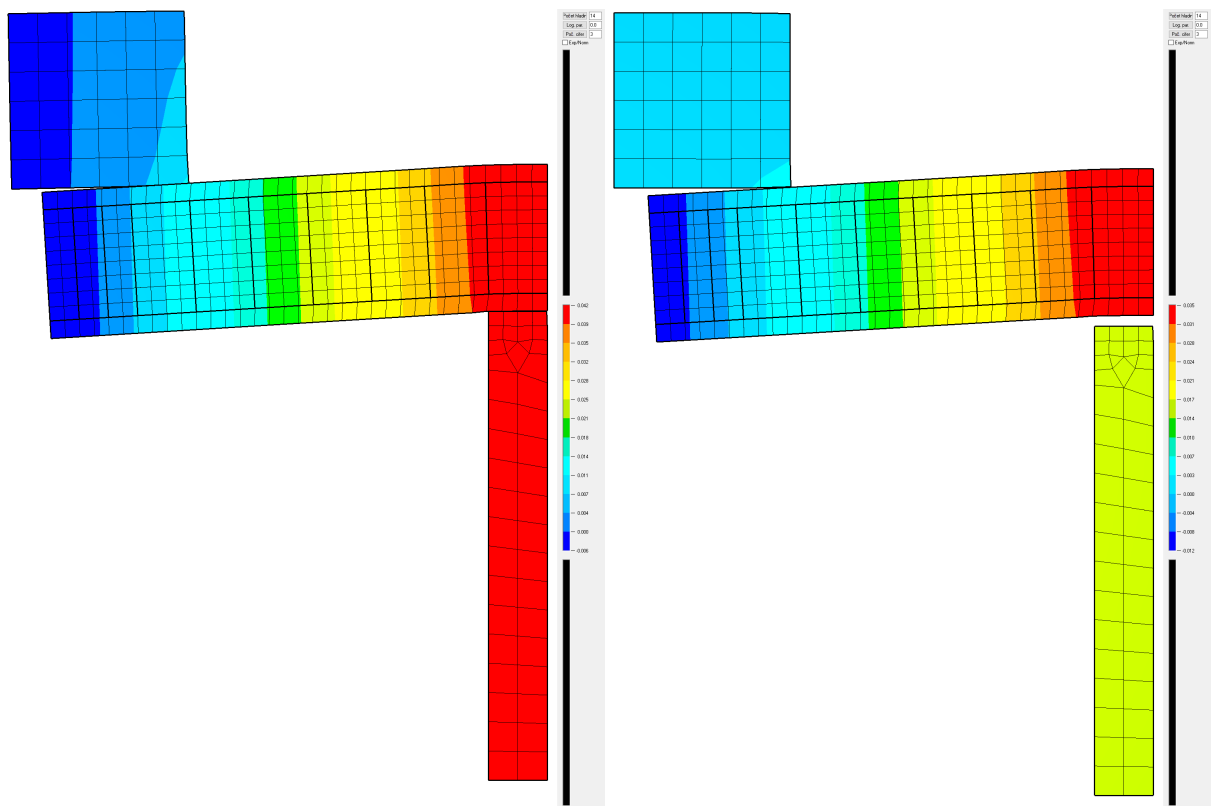
### Ukázka chování nosníku po dopadu razníku

Všechny numerické výpočty výše popsaných studií byly realizovány přímo ve výpočetním jádru programového systému RFEM firmy Dlubal Software. Přesný konečný počet provedených analýz není přesně znám, ale lze konstatovat, že pro naladění vstupních parametrů implementovaného MKP modelu a jeho otestování bylo nutné provést řádově stovky výpočtů, pomocí nichž bylo dosaženo optimální podoby výpočtového modelu, a které zároveň přispěly k odhalení a následnému vyřešení několika chyb. Na základě níže uvedených výsledků lze nakonec konstatovat, že dosažený stav materiálového modelu a úroveň implementace splňuje veškerá přísná kritéria nastavená pro distribuci dynamických knihoven do programu RFEM respektive jeho uživatelům. S ohledem na velké množství všech výsledků budou dále prezentovány jen ty nejdůležitější.

Na prvním obrázku s liniovými elastickými podporami s vyloučením v tahu 4.49 vlevo je ukázáno, jak razník po dopadu na nosník způsobí průhyb a vpravo, jak se razník odrazí od nosníku. Na druhém obrázku se dřevěnými podporami s elastoplastickým materiálem 4.50 vlevo je ukázáno, jak razník po dopadu na nosník způsobí průhyb a vpravo, jak se razník odrazí od nosníku, a také jak se nosník odrazí od dřevěných podložek. Jde jen o vzhled, co se tam děje, protože pro přesnější analýzu jsou dále uvedené časové křivky. Jde vidět, že když se vymodelují podpory více realisticky včetně kontaktu mezi nimi a nosníkem, tak se výsledky liší a vypadají, že jsou blíže experimentu - nosník se více odrazí od dřevěných podpor a celkově se více energie spotřebuje do dřeva a nosník potom tolik moc nezplastizuje a nepoškodí se, proto se může více elasticky vypružit a odrazit zpět, což se pozorovalo v experimentu. Je třeba ale poznamenat, že v experimentu nosník vyskočil nejen nahoru po odrazu razníku, ale také se pohnul do boku kvůli nesymetriím v reálném experimentu, což jsme v modelu nezohlednili, protože jsme si symetrii vynutili. Tento experiment je velmi náročný na provedení a na přesnost měření má vliv spousta faktorů. Z tohoto důvodu mají výsledky výpočtu ukázat nutnost zohlednění všech jevů (viskoelasticity s viskoplasticitou včetně poškození), čehož je v této práci dosaženo stavebnicovým algoritmem kombinující jednotlivé jednodušší modely. Na obrázcích 4.49, 4.50 je vidět, jak MKP model železobetonového nosníku vypadá po dopadu razníku v čase 0.025 [s] vlevo a v čase 0.15 [s] vpravo pro obě varianty podpor (nahore s liniovou elastickou podporou s vyloučením v tahu a dole s vymodelovanými dřevěnými podložkami).



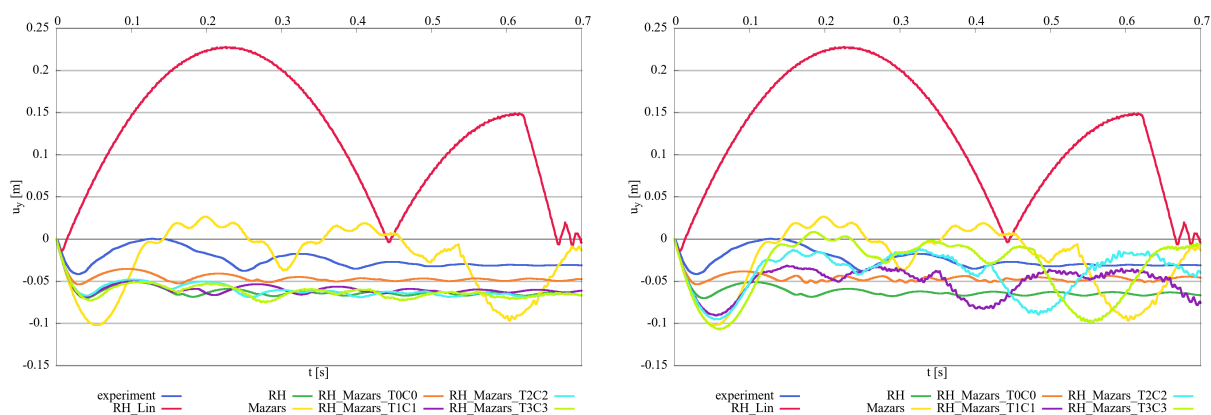
**Obrázek 4.49:** MKP model železobetonového nosníku po dopadu razníku v čase 0.025 [s] vlevo a v čase 0.15 [s] vpravo pro líniovou elastickou podporu s vyloučením v tahu



**Obrázek 4.50:** MKP model železobetonového nosníku po dopadu razníku v čase 0.025 [s] vlevo a v čase 0.15 [s] vpravo pro vymodelovanou dřevěnou podporu s elastoplastickým materiálem

## Vliv plasticity a poškození

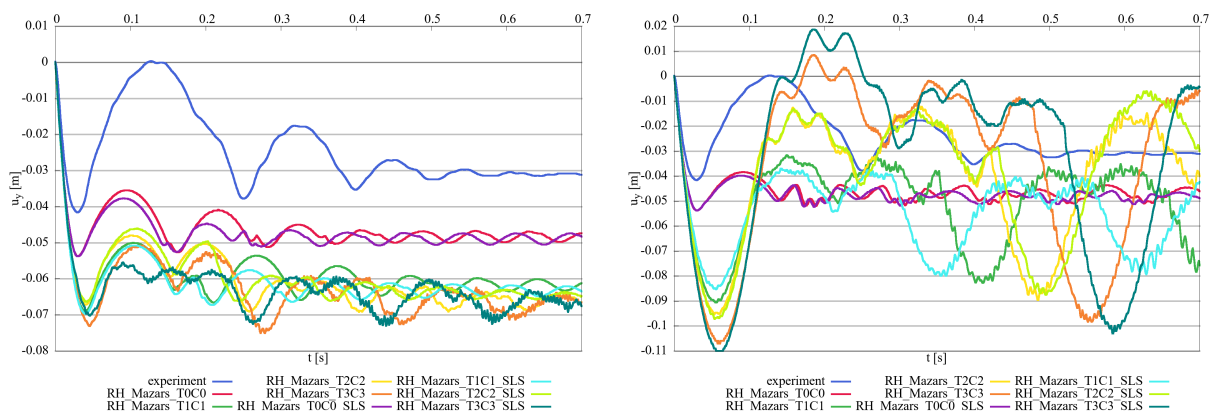
Na obrázku 4.51 je ukázán vliv lineární elasticity, plasticity, poškození a jejich kombinací na dynamickou odezvu železobetonového nosníku s  $pd = 0$  vlevo a s  $pd = 1$  vpravo. Měření z experimentu je vyznačeno modrou křivkou a je velice důležité pro validaci materiálového modelu. Je vidět, že s lineárním elastickým materiálovým modelem (RH\_Lin - červená křivka) jsou výsledky úplně mimo realitu a stejně tak se samotným modelem poškození Mazars (Mazars - žlutá křivka) jsou výsledky mimo realitu, i když výsledná časová křivka už vypadá mnohem lépe než s lineárním materiálem, ale je patrný výrazný odraz nosníku od podpor ve srovnání s experimentem a samozřejmě také výrazný odraz razníku od nosníku, tedy s modelem poškození se nosník chová stále dost elasticky, což se očekávalo vzhledem ke tvaru odtěžovací křivky. Mnohem lépe je na tom samotný elastoplastický model Rankine-Hill (RH - tmavě zelená křivka), ale ten zase naopak způsobí výrazně menší odraz nosníku od podpor i razníku od nosníku, takže ten se chová mnohem více plasticky, což se také očekávalo vzhledem ke tvaru odtěžovací křivky. Je tedy jasné, že reálný materiál je někde mezi modelem plasticity a modelem poškození a je vhodné je kombinovat. Výsledky jednotlivých kombinací RH\_Mazars\_T0C0, RH\_Mazars\_T1C1, RH\_Mazars\_T2C2, RH\_Mazars\_T3C3 jsou ukázány na stejném obrázku 4.51, aby bylo vidět, co způsobí. Význam zkratk T1C1 apod. je vysvětlen na obrázku 4.37. Jednoduše lze říci, že čím vyšší číslo, tím větší vliv modelu poškození na kombinaci plasticita-poškození, tedy T0C0 má nejmenší vliv poškození v kombinovaném modelu a T3C3 má největší vliv poškození v kombinovaném modelu. T0C0 je nastavení plasticity s horizontálními větvemi zpevnění (s nulovým zpevněním) a pak se u T1C1, T2C2, T3C3 zpevnění zvětšuje, čímž se zvyšuje vliv poškození v kombinaci plasticita-poškození. Z grafu je vidět, že nejbližše experimentu je oranžová křivka (RH\_Mazars\_T0C0) pro obě varianty  $pd = 0$  vlevo (neodečítá se přetvoření příslušející poškození z předchozího času od přetvoření, které jde na vstupu do elastoplastického modelu v aktuálním čase) a s  $pd = 1$  vpravo (odečítá se přetvoření příslušející poškození z předchozího času od přetvoření, které jde na vstupu do elastoplastického modelu v aktuálním čase).



**Obrázek 4.51:** Vliv lineární elasticity, plasticity, poškození a jejich kombinací na dynamickou odezvu železobetonového nosníku s  $pd = 0$  vlevo a s  $pd = 1$  vpravo

## Vliv viskoelasticity

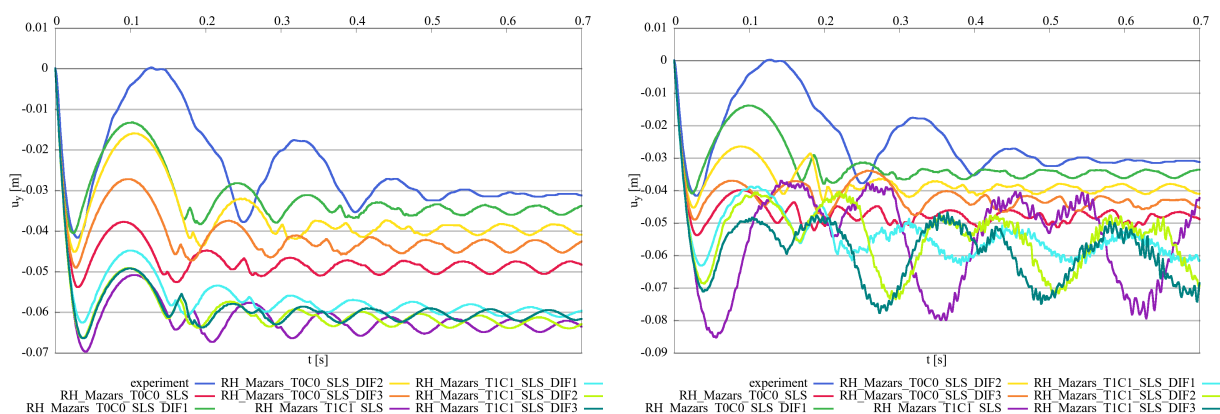
Na obrázku 4.52 je vidět, co s výsledky udělá Zenerův model SLS, jehož parametry byly převzaty z literatury [27] pro beton, ale výztuži byla nastavena pouze elastoplastičita bez viskozity, což může způsobovat menší útlum oproti reálnému měření. Z výsledků vyplývá, že SLS model má vliv na výsledné časové křivky, ale pro větší vliv by bylo třeba změnit parametry např. identifikací na experimentální křivku. V této dynamické úloze, kde materiál hodně plastizuje a poškozuje se, má viskoelasticita mnohem menší vliv než viskoplasticita včetně viskopškození, což je testováno dále pomocí DIF křivek.



**Obrázek 4.52:** Vliv Zenerova modelu SLS na dynamickou odezvu železobetonového nosníku s  $pd = 0$  vlevo a s  $pd = 1$  vpravo

### Vliv viskoplasticity

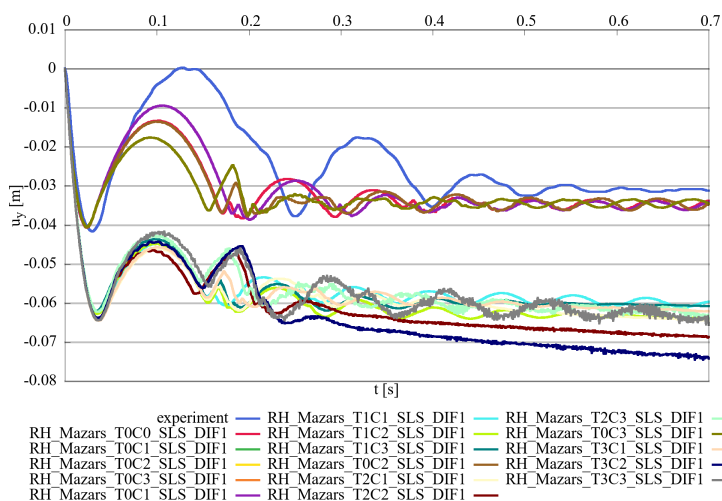
Na obrázku 4.53 jsou vykresleny časové křivky průběhu posunu ve svislém směru  $u_y$  spočítané pro tři různé DIF křivky (DIF1, DIF2, DIF3), dvě kombinace plasticity s poškozením T0C0, T1C1 a pevně zvolený SLS model. Jde vidět, že nejlépe experimentu (modrá křivka) je kombinace RH\_Mazars\_T0C0\_SLS\_DIF1 (zelená křivka), pak RH\_Mazars\_T0C0\_SLS\_DIF2 (žlutá křivka) a pak RH\_Mazars\_T0C0\_SLS\_DIF2 (oranžová křivka).



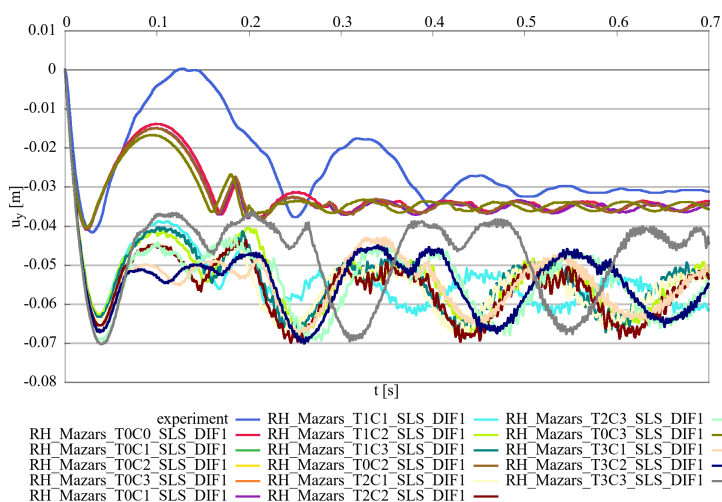
**Obrázek 4.53:** Vliv DIF křivek na dynamickou odezvu železobetonového nosníku s  $pd = 0$

### Vliv různých kombinací plasticity a poškození pro tři různé DIF křivky

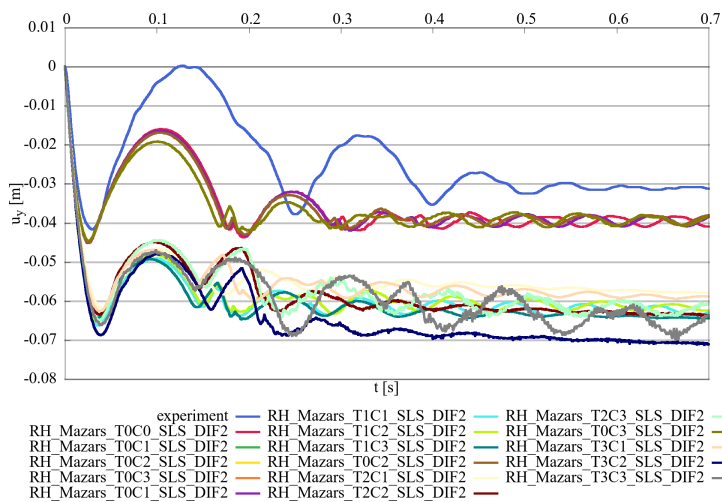
Všechny časové křivky vždy pro pevně danou DIF křivku postupně s  $pd = 0$  a s  $pd = 1$  pod sebou, jsou uvedeny na obrázcích 4.54, 4.55, 4.56, 4.57, 4.58, 4.59. Nejlépe ze všech variant vychází RH\_T0C1\_SLS\_DIF1 s  $pd = 0$  a RH\_T0C0\_SLS\_DIF1 s  $pd = 1$ , ale dají se i jiné varianty, které mají T0 a maximálně C2. Nejlepší výsledky jsou s křivkou DIF1. Pro tyto nejlepší varianty čas  $t = -0.025[s]$  i hodnota maximálního průhybu  $u_y = -0.041[m]$  odpovídají experimentu a dokonce i konečný (ustálený) průhyb zhruba odpovídá experimentu  $u_y = -0.035[m]$  vs.  $u_y = -0.031[m]$ .



Obrázek 4.54: Vliv poměrů plasticity ku poškození na dynamickou odezvu železobetonového nosníku pro DIF křivku č. 1 s  $pd = 0$

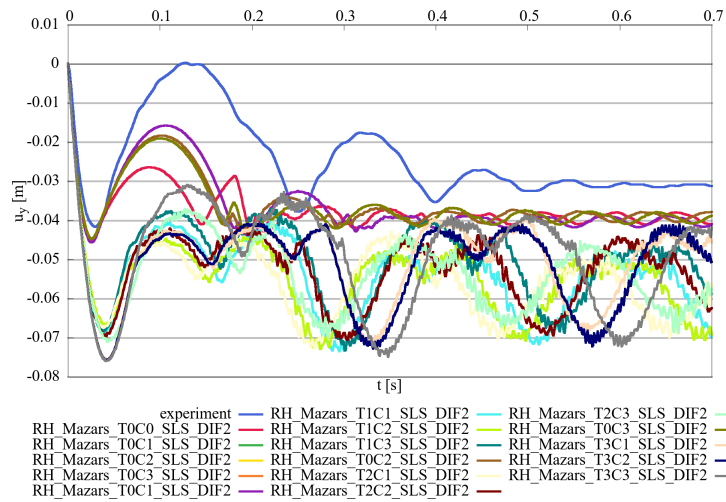


Obrázek 4.55: Vliv poměrů plasticity ku poškození na dynamickou odezvu železobetonového nosníku pro DIF křivku č. 1 s  $pd = 1$

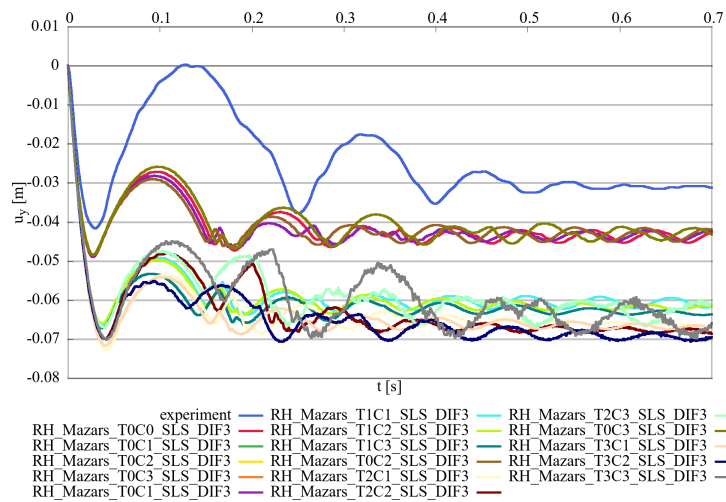


Obrázek 4.56: Vliv poměrů plasticity ku poškození na dynamickou odezvu železobetonového nosníku pro DIF křivku č. 2 s  $pd = 0$

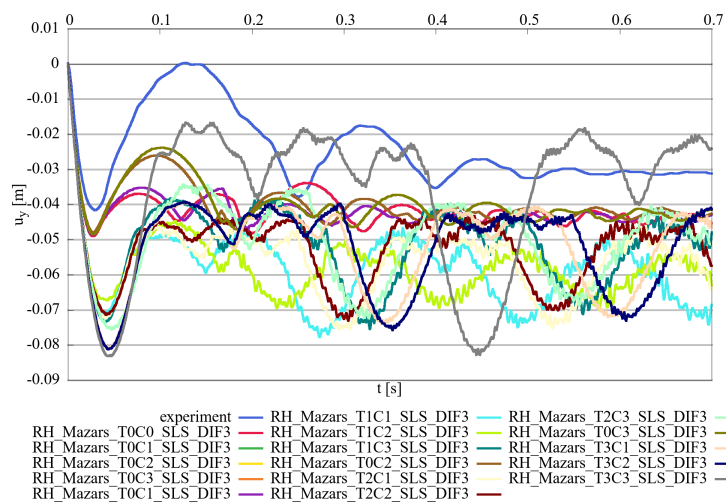




Obrázek 4.57: Vliv poměrů plasticity ku poškození na dynamickou odezvu železobetonového nosníku pro DIF křivku č. 2 s  $pd = 1$



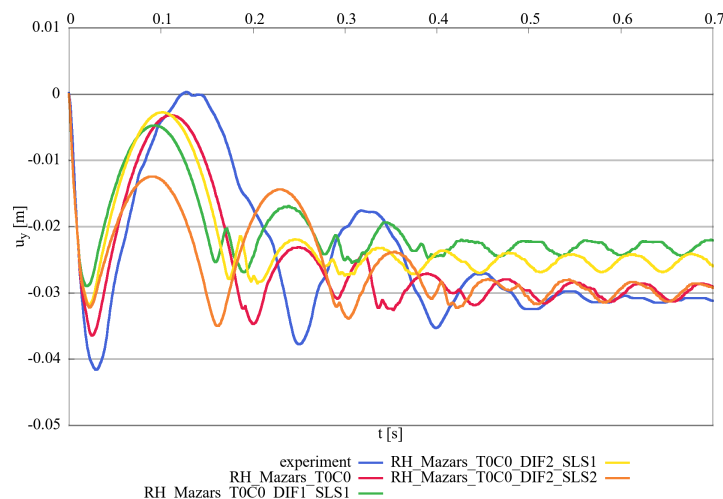
Obrázek 4.58: Vliv poměrů plasticity ku poškození na dynamickou odezvu železobetonového nosníku pro DIF křivku ač. 3 s  $pd = 0$



Obrázek 4.59: Vliv poměrů plasticity ku poškození na dynamickou odezvu železobetonového nosníku pro DIF křivku č. 3 s  $pd = 1$

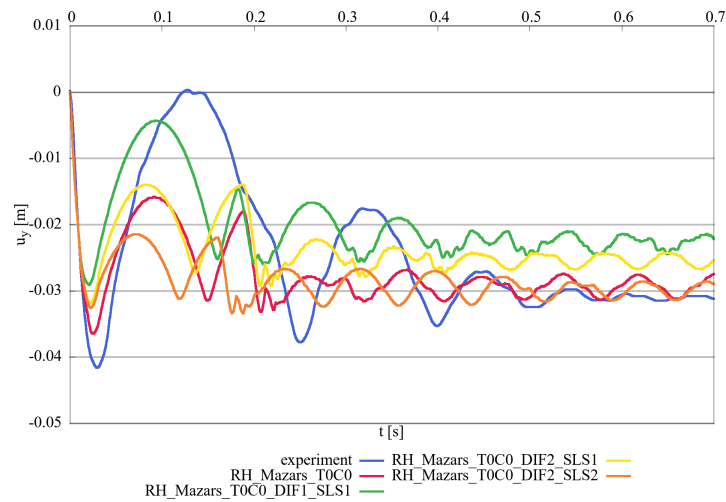
Slabým místem dynamické analýzy je výztuž (modul pružnosti  $E = 20$  [GPa], mez kluzu  $f_y = 500$  [MPa], modul zpevnění  $E_p = 841$  [MPa]). Tato výztuž je také hodně namáhána (obzvláště na tahové straně), takže hodně plastizuje a tuto plastizaci je třeba vzít do úvahy, což se povedlo, ale problém je v tom, že je rychle namáhána, tedy jsou tam vysoké rychlosti přetvoření (nad  $1.0$  [1/s]) a měla by být modelována jako viskoplastická, aby brala do úvahy tuto rychlost přetvoření. Viskoplasticitu bohužel v současné době není možné zadat 1D prvkům v RFEMu, proto jsem ji nemohl do výpočtu zahrnout. Přemýšlel jsem i o variantě, kde by byla výztuž modelována pomocí 2D prvků, ale to by znamenalo hodně malou výšku obdelníkových prvků, což by pak vedlo v explicitní metodě na hodně malý časový krok (40x menší) a prodloužil by se zhruba tolikrát i celkový výpočetní čas a to je prakticky nepoužitelné. V explicitní metodě se velikost časového kroku počítá tak, že se projde každý prvek v konstrukci a najde se na něm nejmenší vzdálenost, protože velikost časového kroku musí být maximálně taková, aby zvuková vlna nedošla během jednoho časového přírůstku dále, než na tuto nejmenší vzdálenost. Rychlost šíření zvukové vlny v materiálu je  $c = \sqrt{E\rho}$ , pro beton vychází cca  $3500$  [m/s], pro ocel  $5000$  [m/s]. Nejmenší vzdálenost v betonu mezi uzly je  $0.25$  [m], stejně tak v oceli. Rozhodující je tedy ocel, kde vychází maximální velikost časového kroku  $t = s/v = 0.25/5000 = 5 \cdot 10^{-5}$  [s]. Kdybychom chtěli namodelovat výztuž 2D prvky, tak by musela být jejich výška cca  $0.01$  [m] pro podélnou výztuž (tam by pak musel být 25x menší časový krok) a pro třmínky cca 40x menší časový krok. Navíc by se ty prvky museli zmenšit i v podélném směru, tím by se zvětšila v každém kroku úloha a výpočet by se ještě o to více prodloužil (zhruba 50x). Pracovní diagram oceli nelze modifikovat, protože předem nevíme, jaká bude rychlost přetvoření výztuže v daném čase a v daném místě.

V budoucnu autor této práce implementuje viskoplastický materiálový model také pro 1D prvky, aby byla reálněji modelována i výztuž a tím se očekává lepší přiblížení k reálnému měření v experimentu. To, že má výztuž nezanedbatelný vliv dokazují poslední obrázky 4.60, 4.61, kde bylo zvýšeno pouze zpevnění výztuže z hodnoty  $E_p = 841$  [MPa] na hodnotu  $E_p = 5046$  [MPa], tedy hodně malé zpevnění bylo nahrazeno vyšším zpevněním, které je ale stále v rozumných mezích (zhruba čtvrtina modulu pružnosti). Stojí za to srovnat např. RH\_Mazars\_TOC0 pro  $pd = 0$  na obrázku 4.60 pro výztuž s vyšším zpevněním a vlevo na obrázku 4.52 pro výztuž s původním nižším zpevněním. Rozdíl mezi těmito dvěma křivkami je evidentní, a proto lze potvrdit fakt, že materiálový model výztuže má velký vliv na časovou dynamickou odezvu nosníku v případě, že je nosník hodně poškozen a výztuž tak přebírá velkou část zatížení.



**Obrázek 4.60:** Výsledky s výztuží s vyšší mezí kluzu a vyšším zpevněním pro  $pd = 0$

Nejlépe ze všech variant vychází RH\_T0C1\_SLS\_DIF1 s  $pd = 0$  a RH\_T0C0\_SLS\_DIF1 s  $pd = 1$ . Nejlepší výsledky jsou s křivkou DIF1. Pro tyto nejlepší varianty čas  $t = -0.025$  [s] i hodnota maximálního průhybu  $u_y = -0.041$  [m] odpovídají experimentu a dokonce i konečný (ustálený) průhyb zhruba odpovídá experimentu  $u_y = -0.035$  [m] vs.  $u_y = -0.031$  [m]. Z uvedených výsledků vyplývá, že pro reálnou časově závislou odezvu v dynamice je nutné zohlednit všechny důležité aspekty reálného materiálu, jako je viskoelasticita a kombinace viskoplasticity s viskopoškozením. Pokud zvolíme samotný model poškození nebo samotný elastoplastický model, tak výsledky nikdy nebudou uspokojivé, ale pokud tyto dva nelineární



**Obrázek 4.61:** Výsledky s výztuží s vyšší mezí kluzu a vyšším zpevněním pro  $pd = 1$

modely vhodně nakombinujeme do jednoho nelineárního materiálového modelu, tak jsou výsledky mnohem lepší, ale stále ještě chybí zahrnutí viskozity např. pomocí DIF křivek v plasticitě s poškozením (viskoplasticita/poškození) a pomocí Zenerova SLS modelu v elastické oblasti (viskoelasticita). Celkově výsledky pro  $pd = 0$  vycházejí ve srovnání s experimentem lépe než výsledky pro  $pd = 1$ . Nakonec se ukázalo, že nejlepší variantou je model, který kombinuje všechny dílčí modely (zahrnuje všechny reálné jevy), jeho nastavení odpovídá údajům uváděným v literatuře a pro budoucí použití nepotřebuje téměř žádnou identifikaci vstupních parametrů, což je velká výhoda ve srovnání s materiálovými modely jiných softwarů, jako je např. model "LS-DYNA Concrete Material Model 159"[, murray2007users] který byl v rámci této studie také implementován, ale ukázal se být prakticky nepoužitelný kvůli velkému množství neznámých vstupních parametrů.

## 5 | Závěr

---

V této práci byly algoritmovány, naprogramovány, implementovány do softwaru založeném na metodě konečných prvků a analyzovány časově závislé materiálové modely, které vznikly kombinací modelu viskoelastivity s modelem poškození pro kvazistatickou analýzu a kombinací modelu viskoelastivity s viskoplasticitou včetně poškození pomocí DIF křivek pro dynamickou analýzu. Byl naprogramován modulární přístup k sestavení výsledného materiálového modelu z jednotlivých dílčích modelů viskoelastivity, plasticity, poškození a viskozity v této nelineární oblasti.

Výsledky kvazistatické analýzy ukázaly, že viskoelastická materiálu hraje velkou roli při numerické predikci vzniku a rozvoji poškození v čase. Bez zahrnutí viskoelastického modelu do výpočtu by nebylo možné predikovat vznik a rozvoj poškození v čase, tedy pokud by poškození nevzniklo při výpočtu hned na začátku, tak by pak už bez viskoelastického modelu nevzniklo nikdy, což neodpovídá realitě. V reálu byl tento jev pozorován u betonových i dřevěných konstrukcí, ale matematickým modelováním a numerickým simulacím tohoto jevu se u betonu povrchně věnovala jen úzká skupinka lidí a u dřeva nikdo. V této práci byl ukázán modulární přístup, jak sestavit materiálový model, pomocí kterého lze predikovat nejen standardní vliv dotvarování na poškození materiálu při klasickém sériovém provázání těchto dvou jevů do jednoho modelu, ale také byl analyzován vliv parametru, který byl označen jako  $\alpha$ , na tuto interakci. Bylo ukázáno, že pro zachycení reálného vlivu dotvarování na poškození je potřeba tento parametr zohlednit, protože bez něj by v některých případech v důsledku dotvarování buď nedošlo k poškození vůbec nebo by k poškození došlo až za nereálně hodně dlouhou dobu, což by nesedělo s reálným pozorováním. Tento vliv dotvarování na poškození je třeba v materiálovém modelu zahrnout co nejpřesněji (pomocí parametru  $\alpha$ ), protože jinak by mohlo být predikováno, že konstrukce po celou dobu zatížení konstrukce neztratí stabilitu (neselže), ale v reálu by konstrukce za jistý čas (pro danou úroveň zatížení) mohla selhat. Zjednodušeně lze říci, že při použití tohoto modulárního materiálového modelu je možné predikovat vznik a vývoj poškození materiálu v čase a tím pádem je možné předpovědět, jestli při daném zatížení po uplynutí určité doby použitelnosti konstrukce selže. Tímto modulárním přístupem je také možné zahrnout např. a) vliv vlhkostních a teplotních změn materiálu (smrštění, bobtnání) jako počáteční přetvoření závislé jen na čase a ne na napětíovém stavu materiálu, b) vliv cyklických změn (např. vlhkosti) na dotvarování (mechanosorpční efekt - dotvarování je výrazně umocněno tím, že v průběhu zatížení dojde k cyklickému vysoušení a vlhčení materiálu), c) vliv únavy materiálu (v této práci není zahrnuto, protože nevyšetřujeme úlohy s vysokým počtem zatěžovacích cyklů) apod.

Výsledky dynamické analýzy ukázaly, že pro zachycení reálné časově závislé nelineární odezvy je potřeba sestavit model, který zohledňuje všechny jevy, které se v materiálu ve skutečnosti vyskytují. Tento materiálový model byl sestaven z jednotlivých dílčích modelů viskoelastivity, plasticity, poškození, a také viskozity v nelineární oblasti pomocí DIF křivky (viskoplasticita včetně poškození). Studie srovnávající výsledky modelů s experimentem ukázala, že nejbližší reálnému měření je model zahrnující viskoelasticitu s viskoplasticitou/poškozením. Bylo spočítáno přes 200 variant materiálového modelu s různým nastavením vstupních parametrů, u kterých byla nejistota, jak je nastavit, protože se jednalo o unikátní kombinace. Slabým místem dynamické analýzy je výztuž, která hodně plastizuje a hlavně se velmi rychle přetváří (nad 1.0 [1/s]), takže by měla být modelována jako viskoplastická. Pracovní diagram oceli nelze modifikovat předem v integračních (materiálových) bodech prvků konstrukce, protože nevíme, jaká bude rychlost přetvoření výztuže v daném čase a v daném místě. V budoucnu autor této práce implementuje viskoplastický materiálový model také pro 1D prvky, aby byla reálněji modelována i výztuž a tím se očekává lepší přiblížení k reálnému měření v experimentu. Nastavení modulárně koncipovaného modelu odpovídá údajům uváděným v literatuře a pro budoucí použití nepotřebuje téměř žádnou identifikaci vstupních parametrů, což je velká

výhoda ve srovnání s materiálovými modely jiných softwarů, jako je např. model "LS-DYNA Concrete Material Model 159"[, murray2007users] který byl v rámci této studie také implementován, ale ukázal se být prakticky nepoužitelný kvůli velkému množství neznámých vstupních parametrů. Zjednodušeně lze říci, že prezentovaný modulárně koncipovaný materiálový model lze použít pro numerickou simulaci nelineární a časově závislé odezvy na rychlé dynamické zatížení, jako jsou například dopady, nárazy, vibrace.

Na závěr bych se chtěl podělit o to, kde se bude můj výzkum v budoucnu dále ubírat. Mojí snahou je sjednocující popis materiálu jak ve kvazistatických, tak i v dynamických úlohách, protože materiál je ve skutečnosti v obou případech jen jeden. Tento materiál neví nic o tom, jak rychle bude zatěžován, aby se na to připravil, a proto je vhodné diskutovat možnost jednoho matematického modelu, který by byl schopný popsat jeden vybraný materiál v obou analýzách (kvazistatické i dynamické). Disipace energie je všude, kde je neelastický materiál (kvůli plasticitě nebo poškození) a projeví se hlavně při cyklickém zatěžování bez ohledu na rychlost zatížení, ale viskozita materiálu se projeví jinak při pomalém zatížení a jinak při rychlém zatížení. Otázkou je, jestli je to stále ta stejná viskozita materiálu nebo jde o jinou materiálovou viskozitu, třeba už z chemicko-fyzikálního pohledu. Pokud jde o projev stejné viskozity, tak by mohl jeden materiálový model popisovat chování materiálu při pomalých i rychlých dějích. Např. u dotvarování je projev viskozity popsán Kelvinovým řetězcem, kde jsou parametry Kelvinova řetězce identifikovány na dlouhodobou časovou křivku součinitele dotvarování, ale oproti tomu v dynamice jsou parametry viskoelastického modelu (nejčastěji zkráceného Maxwellova řetězce - Zenerova SLS modelu) nastaveny tak, aby reálně tlumily kmitání a parametry viskoplastického modelu včetně poškození jsou nastaveny pomocí DIF křivky, pomocí které reálněji zohledňujeme nárůst pevností s nárůstem rychlostí přetvoření (platí to pro vysoké rychlosti přetvoření). Možná by mohl být použitý jeden materiálový model pro kvazistatickou i dynamickou analýzu, ale nastavení jeho parametrů bude muset vždy odpovídat rychlostem přetvoření, které se u daného časového děje vyskytují v materiálu. V této práci byl uveden algoritmus pro sestavení tohoto jednoho "univerzálního" materiálového modelu modulárním způsobem - sestavením z jednotlivých submodelů pro viskoelasticitu a viskoplasticitu včetně poškození, ale parametry tohoto modelu týkající se viskozity musely být stanoveny v závislosti na tom, jestli se jedná o pomalé (kvazistatické) děje nebo o rychlé (dynamické) děje.

## Seznam obrázků

---

1.1	Křivky zatížení a odtížení podle samostatného modelu poškození u jednoosé napjatosti dle literatury [2] . . . . .	2
1.2	Cyklické zatěžování a odtěžování s různým nastavením materiálového modelu dle literatury [95] . . . . .	2
1.3	Princip Newtonovy–Raphsonovy metody [63] . . . . .	5
1.4	Princip modifikované Newtonovy–Raphsonovy metody [63] . . . . .	5
1.5	Kombinace Newtonovy-Raphsonovy metody a její modifikované varianty [63] . . . . .	5
1.6	Ilustrace Rankinova-Hillova kritéria ve 2D prostoru hlavních napětí (rovinná napjatost) pro izotropní materiál betonu [63] . . . . .	6
1.7	Srovnání dvou aproximací Mohrova-Coulombova kritéria pomocí kritéria Drucker-Prager v 2D prostoru hlavních napětí (rovinná napjatost) [28] . . . . .	8
1.8	Ilustrace návratu napětí do vrcholu kužele Druckerova-Pragerova kritéria [63] . . . . .	12
2.1	Viskoelastická odezva dle literatury [98] . . . . .	15
2.2	Klasické reologické (viskózní) chování: a) dotvarování (creep) při konstantním napětí, b) relaxace napětí při konstantním přetvoření [10] . . . . .	15
2.3	Vliv historie zatížení na výsledné přetvoření během creepu (dotvarování) . . . . .	16
2.4	Základní jednotky reologického modelu: a) elastická pružina, b) viskózní pístový tlumič [10] . . . . .	16
2.5	Kelvinův-Voigtův model [93] . . . . .	17
2.6	Maxwellův model [94] . . . . .	18
2.7	Zenerův model pevné látky SLS - Maxwellův typ [90] . . . . .	18
2.8	Zenerův model pevné látky SLS - Kelvinův typ [90] . . . . .	19
2.9	Čtyřsložkové Burgersovy modely [91] . . . . .	20
2.10	Zobecněný Maxwellův řetězec, převzato z [24] . . . . .	20
2.11	Obyčejná diferenciální rovnice Maxwellova řetězce, převzato z [92] . . . . .	20
2.12	Kelvinův řetězec [10] . . . . .	21
2.13	Časové křivky součinitele dotvarování v podélném a radiálním směru dřeva inspirované z prací [67], [16] . . . . .	28
2.14	Specifikace benchmarkových úloh . . . . .	29
2.15	Srovnání jednotlivých identifikací a vstupní časové křivky součinitele dotvarování . . . . .	30
2.16	Průměrné RMSE chyby a časová náročnost jednotlivých identifikací . . . . .	31
2.17	Úlohy A1 a A2: Časový průběh posunu v podélném (vlevo) a v radiálním (vpravo) směru . . . . .	31
2.18	Časový průběh napětí v podélném (vlevo) a v radiálním (vpravo) směru . . . . .	32
2.19	Časový průběh deformace v podélném směru (vlevo) a napětí v radiálním směru (vpravo) . . . . .	33
2.20	Časový průběh průhybu desky podepřené na dvou protilehlých stranách - úloha D1 (vlevo) a podepřené na všech stranách - úloha D2 (vpravo) . . . . .	33
2.21	Časový průběh průhybu stěnového modelu nosníku . . . . .	34
2.22	Vývoj napětí ve dřevěné stěně (vlevo) a v ocelovém jádru (vpravo) . . . . .	34
2.23	Úloha s časově proměnlivým zatížením: časový průběh posunu v podélném směru ve dvou fázích (vlevo) a ve třech fázích (vpravo) pro různou historii zatížení . . . . .	35
2.24	(a) Experiment, (b) Měřená síla vyjádřena jako hmotnost . . . . .	36
2.25	Časová křivka součinitele dotvarování v RFEMu stejná jako v ANSYSu . . . . .	37
2.26	Druhá časová křivka součinitele dotvarování v RFEMu . . . . .	37



2.27	Třetí časová křivka součinitele dotvarování v RFEMu . . . . .	37
2.28	MKP model v softwaru ANSYS . . . . .	38
2.29	MKP model v softwaru RFEM - nahoře vysíťovaná leva polovina modelu a dole celý model bez sítě . . . . .	38
2.30	Napětí ve směru délky nosníku okamžitě po zatížení (2.12.2021) v softwaru RFEM . . . . .	39
2.31	Napětí ve směru délky nosníku na konci experimentu (24.5.2022) v softwaru RFEM . . . . .	39
2.32	Relaxace ohýbaného betonového nosníku . . . . .	39
3.1	Ilustrace základního zjednodušení poškozeného materiálu jako materiálu s redukovanou efektivní (průměrnou) tuhostí pro spojité modely poškození [3] . . . . .	43
3.2	Ilustrace různého chování materiálu: (a) elastoplastické, (b) elastické s poškozením, (c) elastoplastické s poškozením . . . . .	43
3.3	Chování betonu v jednoosém (a) tahu, (b) tlaku dle literatury [89] . . . . .	47
3.4	Schéma zobecněného Kelvinova řetězce . . . . .	48
3.5	Schéma modulárního modelu: viskoelastická s plasticitou [73] . . . . .	51
3.6	Schéma modulárního modelu: viskoelastická s poškozením, cyklickými změnami, plasticitou a vlhkostním přetvořením [100] . . . . .	51
3.7	Trilineární / bilineární pracovní diagram se zpevněním a) v tlaku, b) v tahu pro podélný (L nebo x) směr a pro příčný radiální směr (R nebo y) směr c) v tlaku, d) v tahu . . . . .	54
3.8	Experimentálně získané časové křivky součinitele dotvarování [67, 16] . . . . .	54
3.9	Přehled testovacích úloh . . . . .	55
3.10	Výsledky testovacích úloh A1 a A2: posun $u$ v podélném směru $x$ dřeva pro dvě různé úrovně zatížení a) 30 MPa, b) 40 MPa . . . . .	55
3.11	Výsledky testovacích úloh B a C: průhyb (posunutí kolmo na rovinu desky $w$ ) skořepinové konstrukce zatížené 615 kN/m <sup>2</sup> v příčném směru a) podepřené na obou stranách, b) podepřené na všech čtyřech stranách . . . . .	56
3.12	Výsledky testovacích úloh D a E: průhyb nosníku (posunutí $v$ v příčném směru $y$ ), a) tříbodová zkouška ohybem, zatížení čáry 100 kN/m, b) čtyřbodová zkouška ohybem, dvě zatížení vedení 2x240 kN/m . . . . .	57
3.13	Výsledky srovnávacích úloh D a E: průhyb (posunutí $v$ v příčném směru $y$ ) pro různé úrovně zatížení s parametrem $\alpha$ , a) zkouška tříbodovým ohybem, b) zkouška čtyřbodovým ohybem . . . . .	57
3.14	Výsledky testovacích úloh D a E: poškození nosníku uprostřed jeho délky pro a) tříbodový ohyb se zatížením 100 kN/m, b) čtyřbodový ohyb se zatížením 2x250 kN/m . . . . .	58
3.15	Výsledky testovacích úloh D a E: poškození nosníku uprostřed jeho délky s použitím parametru $\alpha = 0.4$ pro a) tříbodový ohyb se zatížením 70 kN/m, b) čtyřbodový ohyb pro zatížení 2x180 kN/m . . . . .	58
3.16	Průhyb nosníku při tříbodové zkoušce ohybem s liniovým zatížením 106 kN/m bezprostředně po aplikaci zatížení (0 dní, níže) a po 365 dnech zatížení (výše) . . . . .	59
3.17	Průhyb nosníku při čtyřbodové zkoušce ohybem se dvěma čarami zatížení 2x240 kN/m bezprostředně po zatížení (0 dní, níže) a po 365 dnech zatížení (výše) . . . . .	59
3.18	Poškození nosníku v podélném směru $x$ při tříbodové zkoušce ohybem s liniovým zatížením 106 kN/m na začátku zatěžování (0 dní, níže) a po 365 dnech zatížení (výše) . . . . .	60
3.19	Poškození nosníku v podélném směru $x$ při čtyřbodové ohybové zkoušce se dvěma čarami zatížení 2x240 kN/m na začátku zatížení (0 dní, níže) a po 365 dnech zatížení (výše) . . . . .	60
3.20	Fotografie experimentu . . . . .	62
3.21	Pracovní diagram betonu . . . . .	62
3.22	Časová křivka součinitele dotvarování betonu . . . . .	63
3.23	Srovnání modelem poškození vypočítané křivky deformace vs. zatížení s experimentem . . . . .	63
3.24	Srovnání modelem poškození vypočítaných časových průběhů deformace s experimentem pro $\alpha = 0$ . . . . .	64
3.25	Srovnání modelem poškození vypočítaných časových průběhů deformace s experimentem pro $\alpha = 0.5$ . . . . .	64
3.26	Posun $u_z$ na začátku . . . . .	65

3.27	Posun $u_z$ po 5 dnech pro $\alpha = 0.0$ . . . . .	65
3.28	Posun $u_z$ po 5 dnech pro $\alpha = 0.5$ . . . . .	65
3.29	Maximální poškození $D$ na začátku . . . . .	66
3.30	Maximální poškození $D$ po 5 dnech pro $\alpha = 0.0$ . . . . .	66
3.31	Maximální poškození $D$ po 5 dnech pro $\alpha = 0.5$ . . . . .	66
4.1	Akcelerogram Umbro-Marchigiana, stanice Colfiorita-Casermette [84] . . . . .	70
4.2	Testovací jednoprvková úloha . . . . .	73
4.3	Tlumení Kelvinovým-Voigtovým modelem pro 8 různých viskozit . . . . .	74
4.4	Hystereze způsobená Kelvinovým-Voigtovým modelem pro 8 různých viskozit . . . . .	74
4.5	Hystereze způsobená Kelvinovým-Voigtovým modelem pro dvě různé viskozity . . . . .	75
4.6	Tlumení Zenerovým modelem SLS . . . . .	76
4.7	Hystereze způsobená Zenerovým modelem SLS . . . . .	76
4.8	Hystereze způsobená Zenerovým modelem SLS pro dvě hodnoty modulu pružnosti pružiny, která je v sérii s tlumičem . . . . .	77
4.9	Poměr plasticity ku poškození [68] . . . . .	78
4.10	Odezva betonu při jednoosém cyklickém zatěžování v tahu [14] . . . . .	79
4.11	Poměr plasticity ku poškození [39] . . . . .	79
4.12	Křivky zatěžování a odtěžování pro (a) elastoplastické a (b) elasto-poškozené materiály s rozdělením energie na elastickou a disipativní [84] . . . . .	80
4.13	Analyzovaná betonová stěna s počátečním modulem pružnosti 21 GPa, velikost prvků 1 metr, tloušťka 0,2 metru [62] . . . . .	81
4.14	Výsledné tvary budovy a) Drucker-Pragerův model plasticity, b) model poškození Mazars [84] . . . . .	82
4.15	Drucker-Pragerův model plasticity – Časový diagram horizontálního posunutí nejvyššího a nejnižšího uzlu [84] . . . . .	83
4.16	Mazarsův model poškození - Časový diagram horizontálního posunutí nejvyššího a nejnižšího uzlu [84] . . . . .	83
4.17	Jednoprvková testovací úloha pro cyklické zatěžování . . . . .	83
4.18	Předepsaný průběh napětí pro cyklické zatěžování: tlak-tah-tlak-tah . . . . .	84
4.19	Předepsaný průběh napětí pro cyklické zatěžování: tah-tlak-tah-tlak . . . . .	84
4.20	Pracovní diagram materiálu pro benchmark . . . . .	84
4.21	Model plasticity Rankine-Hill: průběh přetvoření pro předepsané napětí tlak-tah-tlak-tah . . . . .	85
4.22	Model plasticity Rankine-Hill: přetvoření vs. napětí pro předepsané napětí tlak-tah-tlak-tah . . . . .	85
4.23	Model plasticity Rankine-Hill: průběh přetvoření pro předepsané napětí tah-tlak-tah-tlak . . . . .	86
4.24	Model plasticity Rankine-Hill: přetvoření vs. napětí pro předepsané napětí tah-tlak-tah-tlak . . . . .	86
4.25	Model poškození modifikovaný Mazars: průběh přetvoření pro předepsané napětí tlak-tah-tlak-tah . . . . .	87
4.26	Model poškození Mazars: přetvoření vs. napětí pro předepsané napětí tlak-tah-tlak-tah . . . . .	87
4.27	Model poškození Mazars: průběh přetvoření pro předepsané napětí tah-tlak-tah-tlak . . . . .	88
4.28	Model poškození Mazars: přetvoření vs. napětí pro předepsané napětí tah-tlak-tah-tlak . . . . .	88
4.29	Kombinace modelu plasticity Rankine-Hill s modelem poškození Mazars: průběh přetvoření pro předepsané napětí tlak-tah-tlak-tah pro $pd = 0$ . . . . .	89
4.30	Kombinace modelu plasticity Rankine-Hill s modelem poškození Mazars: přetvoření vs. napětí pro předepsané napětí tlak-tah-tlak-tah pro $pd = 0$ . . . . .	89
4.31	Kombinace modelu plasticity Rankine-Hill s modelem poškození Mazars: průběh přetvoření pro předepsané napětí tah-tlak-tah-tlak pro $pd = 0$ . . . . .	90
4.32	Kombinace modelu plasticity Rankine-Hill s modelem poškození Mazars: přetvoření vs. napětí pro předepsané napětí tah-tlak-tah-tlak pro $pd = 0$ . . . . .	90
4.33	Kombinace modelu plasticity Rankine-Hill s modelem poškození Mazars: průběh přetvoření pro předepsané napětí tlak-tah-tlak-tah pro $pd = 1$ . . . . .	91
4.34	Kombinace modelu plasticity Rankine-Hill s modelem poškození Mazars: přetvoření vs. napětí pro předepsané napětí tlak-tah-tlak-tah pro $pd = 1$ . . . . .	91



4.35	Kombinace modelu plasticity Rankine-Hill s modelem poškození Mazars: průběh přetvoření pro předepsané napětí tah-tlak-tah-tlak pro $pd = 1$ . . . . .	92
4.36	Kombinace modelu plasticity Rankine-Hill s modelem poškození Mazars: přetvoření vs. napětí pro předepsané napětí tah-tlak-tah-tlak pro $pd = 1$ . . . . .	92
4.37	Přehled vstupního souboru s definicí materiálového modelu s různými poměry plasticity ku poškození v tahu i tlaku . . . . .	93
4.38	Vliv viskozity na deformačně-napěťové chování materiálu: (a) vliv rychlosti deformace na pracovní diagram, (b) vliv velikosti napětí na průběh deformace v čase (dotvarování, creep), (c) průběh napětí v čase pro konstantní zatížení (relaxace napětí) . . . . .	94
4.39	DIF křivky č. 1, 2, 3 od shora dolů . . . . .	99
4.40	Závislost pracovního diagramu betonu v tlaku na rychlosti přetvoření podle DIF křivky . . . . .	100
4.41	Závislost pracovního diagramu betonu v tahu na rychlosti přetvoření podle DIF křivky . . . . .	100
4.42	Geometrie experimentu . . . . .	101
4.43	Fotografie experimentu - v našem měření nebyl nosník připevněn ke dřevěným podložkám . . . . .	101
4.44	Padostroj . . . . .	101
4.45	Nosník před dopadem - detail na snímače . . . . .	102
4.46	Nosník po dopadu - detail na snímače . . . . .	102
4.47	Měření průhybu nosník po dopadu v ustáleném stavu . . . . .	102
4.48	MKP model železobetonového nosníku po dopadu razníku v čase 0.000 [s] s liniovou podporou vlevo a se dřevěnými podložkami vpravo . . . . .	103
4.49	MKP model železobetonového nosníku po dopadu razníku v čase 0.025 [s] vlevo a v čase 0.15 [s] vpravo pro liniovou elastickou podporu s vyloučením v tahu . . . . .	105
4.50	MKP model železobetonového nosníku po dopadu razníku v čase 0.025 [s] vlevo a v čase 0.15 [s] vpravo pro vymodelovanou dřevěnou podporu s elastoplastickým materiálem . . . . .	105
4.51	Vliv lineární elasticity, plasticity, poškození a jejich kombinací na dynamickou odezvu železobetonového nosníku s $pd = 0$ vlevo a s $pd = 1$ vpravo . . . . .	106
4.52	Vliv Zenerova modelu SLS na dynamickou odezvu železobetonového nosníku s $pd = 0$ vlevo a s $pd = 1$ vpravo . . . . .	107
4.53	Vliv DIF křivek na dynamickou odezvu železobetonového nosníku s $pd = 0$ . . . . .	107
4.54	Vliv poměrů plasticity ku poškození na dynamickou odezvu železobetonového nosníku pro DIF křivku č. 1 s $pd = 0$ . . . . .	108
4.55	Vliv poměrů plasticity ku poškození na dynamickou odezvu železobetonového nosníku pro DIF křivku č. 1 s $pd = 1$ . . . . .	108
4.56	Vliv poměrů plasticity ku poškození na dynamickou odezvu železobetonového nosníku pro DIF křivku č. 2 s $pd = 0$ . . . . .	108
4.57	Vliv poměrů plasticity ku poškození na dynamickou odezvu železobetonového nosníku pro DIF křivku č. 2 s $pd = 1$ . . . . .	109
4.58	Vliv poměrů plasticity ku poškození na dynamickou odezvu železobetonového nosníku pro DIF křivku ač. 3 s $pd = 0$ . . . . .	109
4.59	Vliv poměrů plasticity ku poškození na dynamickou odezvu železobetonového nosníku pro DIF křivku č. 3 s $pd = 1$ . . . . .	109
4.60	Výsledky s výztuží s vyšší mezí kluzu a vyšším zpevněním pro $pd = 0$ . . . . .	110
4.61	Výsledky s výztuží s vyšší mezí kluzu a vyšším zpevněním pro $pd = 1$ . . . . .	111

## Seznam tabulek

---

2.1	Materiálové vlastnosti dřeva podle Eurokódu 5 . . . . .	28
2.2	Průměrné RMSE chyby . . . . .	30
3.1	Časově nezávislé vlastnosti dřeva . . . . .	53

## Literatura

---

- [1] ANSYS INC. Ansys mechanical theory reference release 19.0. 2019.
- [2] ANTONIOU, M., NIKITAS, N., ANASTASOPOULOS, I., AND FUENTES, R. Scaling laws for shaking table testing of reinforced concrete tunnels accounting for post-cracking lining response. *Tunnelling and Underground Space Technology* 101 (2020), 103353.
- [3] ARIZONA STATE UNIVERSITY. Asu engineering faculty hub. <https://faculty.engineering.asu.edu/>, 2023. [Online; accessed 12-October-2023].
- [4] BACKHAUS, G. Fj lockett, nonlinear viscoelastic solids. xi+ 195. s. m. fig. london/new york 1972. academic press. preis geb.£ 4.4. *Zeitschrift Angewandte Mathematik und Mechanik* 54, 4 (1974), 288–288.
- [5] BARRERA, J., AND COELLO, C. A. C. A review of particle swarm optimization methods used for multimodal optimization. *Innovations in swarm intelligence* (2009), 9–37.
- [6] BAZANT, ZDENEK P ANDÁSEK, M. Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: survey of progress. *Journal of engineering mechanics* 128, 11 (2002), 1119–1149.
- [7] BAŽANT, Z. Constitutive equation of wood at variable humidity and temperature. *Wood science and Technology* 19, 2 (1985), 159–177.
- [8] BAŽANT, Z., WENDNER, R., HUBLER, M., AND YU, Q. Pervasive lifetime inadequacy of long-span box girder bridges and lessons for multi-decade creep prediction. In *Life-Cycle and Sustainability of Civil Infrastructure Systems: Proceedings of the Third International Symposium on Life-Cycle Civil Engineering (IALCCE'12), Vienna, Austria, October 3-6, 2012* (2012), CRC Press, p. 27.
- [9] BAZANT, Z. P., AND GETTU, R. Rate effects and load relaxation in static fracture of concrete. *ACI Materials Journal* 89, 5 (1992), 456–468.
- [10] BAŽANT, Z. P., AND JIRÁSEK, M. *Creep and hygrothermal effects in concrete structures*, vol. 225. Springer, 2018.
- [11] BAŽANT, Z. P., JIRÁSEK, M., BAŽANT, Z. P., AND JIRÁSEK, M. Fundamentals of linear viscoelasticity. *Creep and Hygrothermal Effects in Concrete Structures* (2018), 9–28.
- [12] BAZANT, Z. P., AND L'HERMITE, R. Mathematical modeling of creep and shrinkage of concrete.
- [13] BAŽANT, Z. P., AND WU, S. T. Dirichlet series creep function for aging concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division* 99, 2 (1973), 367–387.
- [14] BEHBAHANI, A. E., BARROS, J. A., AND VENTURA-GOUVEIA, A. Plastic-damage smeared crack model to simulate the behaviour of structures made by cement based materials. *International Journal of Solids and Structures* 73 (2015), 20–40.
- [15] BENGTTSSON, C., AND KLIGER, R. Bending creep of high-temperature dried spruce timber.
- [16] BENGTTSSON, R., AFSHAR, R., AND GAMSTEDT, E. K. An applicable orthotropic creep model for wood materials and composites. *Wood Science and Technology* 56, 6 (2022), 1585–1604.
- [17] BENVENUTI, E., ORLANDO, N., GEBHARDT, C., AND KALISKE, M. An orthotropic multi-surface damage-plasticity fe-formulation for wood: Part i–constitutive model. *Computers & Structures* 240 (2020), 106350.
- [18] BENVENUTI, E., ORLANDO, N., GEBHARDT, C., AND KALISKE, M. An orthotropic multi-surface damage-plasticity fe-formulation for wood: Part ii–numerical applications. *Computers & Structures* 240 (2020), 106351.
- [19] BOLTZMANN, L. Zur theorie der elastischen nachwirkung. *Annalen der Physik* 241, 11 (1878), 430–432.
- [20] CAROL, I., RIZZI, E., AND WILLAM, K. On the formulation of anisotropic elastic degradation.

- i. theory based on a pseudo-logarithmic damage tensor rate. *International Journal of Solids and Structures* 38, 4 (2001), 491–518.
- [21] CAROL, I., RIZZI, E., AND WILLAM, K. On the formulation of anisotropic elastic degradation.: ii. generalized pseudo-rankine model for tensile damage. *International Journal of Solids and Structures* 38, 4 (2001), 519–546.
- [22] CERVERA, M., OLIVER, J., AND PRATO, T. Thermo-chemo-mechanical model for concrete. ii: Damage and creep. *Journal of engineering mechanics* 125, 9 (1999), 1028–1039.
- [23] CERVERA, M., TESEI, C., AND VENTURA, G. Cracking of quasi-brittle structures under monotonic and cyclic loadings: A d+/d- damage model with stiffness recovery in shear. *International Journal of Solids and Structures* 135 (2018), 148–171.
- [24] CHEN, H., TRIVEDI, A., AND SIVIOUR, C. Application of linear viscoelastic continuum damage theory to the low and high strain rate response of thermoplastic polyurethane. *Experimental Mechanics* 60 (2020), 925–936.
- [25] DAOU, H., ABOU SALHA, W., RAPHAEL, W., AND CHATEAUNEUF, A. Explanation of the collapse of terminal 2e at roissy–cdg airport by nonlinear deterministic and reliability analyses. *Case Studies in Construction Materials* 10 (2019), e00222.
- [26] DAOU, H., AND RAPHAEL, W. Comparison between various creep calculation methods for the time-dependent analysis of terminal 2e at roissy. *Jordan Journal of Civil Engineering* 15, 1 (2021).
- [27] DE HAAN, Y., AND SLUIMERS, G. Standard linear solid model for dynamic and time dependent behaviour of building materials. *HERON, vol. 46 (1), 2001* (2001).
- [28] DE SOUZA NETO, E. A., PERIC, D., AND OWEN, D. R. *Computational methods for plasticity: theory and applications*. John Wiley & Sons, 2011.
- [29] DENG, J., LIU, Y., YANG, Q., CUI, W., ZHU, Y., LIU, Y., AND LI, B. A viscoelastic, viscoplastic, and viscodamage constitutive model of salt rock for underground energy storage cavern. *Computers and Geotechnics* 119 (2020), 103288.
- [30] DESMORAT, R. Anisotropic damage modeling of concrete materials. *International Journal of Damage Mechanics* 25, 6 (2016), 818–852.
- [31] DESMORAT, R., CHAMBART, M., GATUINGT, F., AND GUILBAUD, D. Delay-active damage versus non-local enhancement for anisotropic damage dynamics computations with alternated loading. *Engineering Fracture Mechanics* 77, 12 (2010), 2294–2315.
- [32] DISTEFANO, N. On the identification problem in linear viscoelasticity. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 50, 11 (1970), 683–690.
- [33] DLUBAL SOFTWARE GMBH. Rfem 6. 2023.
- [34] DUFOUR, F., PIJAUDIER-CABOT, G., BAXEVANIS, T., DESIASSYIFAYANTY, R., AND OMAR, M. Creep-damage coupling. In *15th US National Congress on Theoretical and Applied Mechanics* (2006).
- [35] EN, C. 1-1. eurocode 5: Design of timber structures-part 1-1: General-common rules and rules for buildings. *CEN, Brussels, Belgium* (2004).
- [36] FOR STANDARDIZATION (CEN), E. C. En 1995-1-1: Eurocode 5: Design of timber structures—part 1-1: General—common rules and rules for buildings, 2004.
- [37] FORTINO, S., MIRIANON, F., AND TORATTI, T. A 3d moisture-stress fem analysis for time dependent problems in timber structures. *Mechanics of time-dependent materials* 13 (2009), 333–356.
- [38] GRASSL, P., AND JIRÁSEK, M. Damage-plastic model for concrete failure. *International journal of solids and structures* 43, 22-23 (2006), 7166–7196.
- [39] GRASSL, P., XENOS, D., NYSTRÖM, U., REMPLING, R., AND GYLLTOFT, K. Cdpm2: A damage-plasticity approach to modelling the failure of concrete. *International Journal of Solids and Structures* 50, 24 (2013), 3805–3816.
- [40] HANHIJÄRVI, A., AND HUNT, D. Experimental indication of interaction between viscoelastic and mechano-sorptive creep. *Wood science and technology* 32, 1 (1998), 57–70.
- [41] HANHIJÄRVI, A., AND MACKENZIE-HELNWEIN, P. Computational analysis of quality reduction during drying of lumber due to irrecoverable deformation. i: Orthotropic viscoelastic-

- mechanosorptive-plastic material model for the transverse plane of wood. *Journal of Engineering Mechanics* 129, 9 (2003), 996–1005.
- [42] HOLZER, S. M., LOFERSKI, J. R., AND DILLARD, D. A. A review of creep in wood: concepts relevant to develop long-term behavior predictions for wood structures. *Wood and Fiber Science* (1989), 376–392.
- [43] HUČ, S., AND SVENSSON, S. Coupled two-dimensional modeling of viscoelastic creep of wood. *Wood science and technology* 52 (2018), 29–43.
- [44] HUNT, D. G., AND SHELTON, C. F. Progress in the analysis of creep in wood during concurrent moisture changes. *Journal of materials science* 22 (1987), 313–320.
- [45] JIRÁSEK, MILAN AND ZEMAN, JAN. *Přetváření a porušování materiálu: dotvarování, plasticita, lom a poškození*, 1. ed. Nakladatelství ČVUT, Praha, 2006.
- [46] JONES, N., AND XIROUCHAKIS, P. The creep buckling of shells. In *Creep in Structures: 3rd Symposium, Leicester, UK, September 8–12, 1980* (1981), Springer, pp. 308–330.
- [47] KALISKE, M. A formulation of elasticity and viscoelasticity for fibre reinforced material at small and finite strains. *Computer methods in applied mechanics and engineering* 185, 2-4 (2000), 225–243.
- [48] KALISKE, M., AND ROTHERT, H. Formulation and implementation of three-dimensional viscoelasticity at small and finite strains. *Computational Mechanics* 19, 3 (1997), 228–239.
- [49] KENNEDY, J., AND EBERHART, R. Particle swarm optimization. In *Proceedings of ICNN'95-international conference on neural networks* (1995), vol. 4, IEEE, pp. 1942–1948.
- [50] LIU, T. Creep of wood under a large span of loads in constant and varying environments. ii: Theoretical investigations. *Holz als Roh-und Werkstoff* 52, 1 (1994), 63–70.
- [51] LONG, Y., AND HE, Y. An anisotropic damage model for concrete structures under cyclic loading-uniaxial modeling. In *Journal of Physics: Conference Series* (2017), vol. 842, IOP Publishing, p. 012040.
- [52] LOURÉNÇO, P. B., DE BORST, R., AND ROTS, J. G. A plane stress softening plasticity model for orthotropic materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40, 21 (1997), 4033–4057.
- [53] LUNDQVIST, O. G. S., AND CHAUHAN, M. A plane-stress plasticity model for masonry for the explicit finite element time integration scheme. *Rakenteiden Mekaniikka* 53, 3 (2020), 240–258.
- [54] MAIMÍ, P., CAMANHO, P. P., MAYUGO, J., AND DÁVILA, C. A continuum damage model for composite laminates: Part i—constitutive model. *Mechanics of materials* 39, 10 (2007), 897–908.
- [55] MAIMÍ, P., CAMANHO, P. P., MAYUGO, J.-A., AND DÁVILA, C. G. A thermodynamically consistent damage model for advanced composites. Tech. rep., 2006.
- [56] MATZENMILLER, A., LUBLINER, J., AND TAYLOR, R. L. A constitutive model for anisotropic damage in fiber-composites. *Mechanics of materials* 20, 2 (1995), 125–152.
- [57] MAZARS, J., HAMON, F., AND GRANGE, S. A new 3d damage model for concrete under monotonic, cyclic and dynamic loadings. *Materials and structures* 48 (2015), 3779–3793.
- [58] MAZARS, J., AND LEMAITRE, J. Application of continuous damage mechanics to strain and fracture behavior of concrete. In *Application of fracture mechanics to cementitious composites*. Springer, 1984, pp. 507–520.
- [59] MAZARS, J., AND PIJAUDIER-CABOT, G. Continuum damage theory—application to concrete. *Journal of engineering mechanics* 115, 2 (1989), 345–365.
- [60] MESQUITA, A. D., AND CODA, H. B. Alternative kelvin viscoelastic procedure for finite elements. *Applied Mathematical Modelling* 26, 4 (2002), 501–516.
- [61] MURRAY, Y. D., ET AL. Users manual for ls-dyna concrete material model 159. Tech. rep., United States. Federal Highway Administration. Office of Research & Development, 2007.
- [62] NĚMEC, I., ŠTEKBAUER, H., VANĚČKOVÁ, A., AND VLK, Z. Explicit and implicit method in nonlinear seismic analysis. In *MATEC Web of Conferences* (2017), vol. 107, EDP Sciences, p. 00066.
- [63] NĚMEC, I., TRCALA, M., AND REK, V. *Nelineární mechanika*. Vysoké učení technické v Brně, nakladatelství VUTIUM, 2018.
- [64] NOWACKI, W. Theorie des kriechens lineare viskoelastizität. (*No Title*) (1965).
- [65] OMAR, M., HAIDAR, K., LOUKILI, A., AND PIJAUDIER-CABOT, G. Creep loading influence on the



- residual capacity of concrete structure: Experimental investigation. In *Fifth International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures* (2004).
- [66] OMAR, M., LOUKILI, A., PIJAUDIER-CABOT, G., AND LE PAPE, Y. Creep-damage coupled effects: experimental investigation on bending beams with various sizes. *Journal of materials in civil engineering* 21, 2 (2009), 65–72.
- [67] OZYHAR, T., HERING, S., AND NIEMZ, P. Viscoelastic characterization of wood: Time dependence of the orthotropic compliance in tension and compression. *Journal of Rheology* 57, 2 (2013), 699–717.
- [68] PALIWAL, B., HAMMI, Y., MOSER, R. D., AND HORSTEMEYER, M. F. A three-invariant cap-plasticity damage model for cementitious materials. *International Journal of Solids and Structures* 108 (2017), 186–202.
- [69] PEDERSEN, R., SIMONE, A., AND SLUYS, L. An analysis of dynamic fracture in concrete with a continuum visco-elastic visco-plastic damage model. *Engineering fracture mechanics* 75, 13 (2008), 3782–3805.
- [70] PIJAUDIER-CABOT, G., OMAR, M., LOUKILI, A., AND LE PAPE, Y. Creep-damage interaction in concrete structures. In *11th International conference on fracture* (2005).
- [71] PISTER, K. S. Mathematical modeling for structural analysis and design. *Nuclear Engineering and Design* 18, 3 (1972), 353–375.
- [72] RANTA-MAUNUS, A. The viscoelasticity of wood at varying moisture content. *Wood science and technology* 9, 3 (1975), 189–205.
- [73] REN, X., WANG, Q., BALLARINI, R., AND GAO, X. Coupled creep-damage-plasticity model for concrete under long-term loading. *Journal of Engineering Mechanics* 146, 5 (2020), 04020027.
- [74] SALIBA, J., GRONDIN, F., MATALLAH, M., LOUKILI, A., AND BOUSSA, H. Relevance of a mesoscopic modeling for the coupling between creep and damage in concrete. *Mechanics of time-dependent materials* 17 (2013), 481–499.
- [75] SANDHAAS, C., SARNAGHI, A. K., AND VAN DE KUILEN, J.-W. Numerical modelling of timber and timber joints: computational aspects. *Wood science and technology* 54 (2020), 31–61.
- [76] SHI, Y., AND EBERHART, R. C. Parameter selection in particle swarm optimization. In *Evolutionary Programming VII: 7th International Conference, EP98 San Diego, California, USA, March 25–27, 1998 Proceedings* 7 (1998), Springer, pp. 591–600.
- [77] SIMO, J. C., AND HUGHES, T. J. *Computational inelasticity*, vol. 7. Springer Science & Business Media, 2006.
- [78] SONDIPON, A. Damping models for structural vibration. *PhD thesis University of Cambridge* 2001 (2000).
- [79] STANDARD, B. Eurocode 2: Design of concrete structures. *Part 1*, 1 (2004), 230.
- [80] SVENSSON, S., AND TORATTI, T. Mechanical response of wood perpendicular to grain when subjected to changes of humidity. *Wood Science and Technology* 36, 2 (2002), 145–156.
- [81] TIMOSHENKO, S. D. h. young, and w. weaver jr. *Vibration Problems in Engineering. Fourth* (1974).
- [82] TORATTI, T. Creep of timber beams in a variable environment.
- [83] TORATTI, T., AND SVENSSON, S. Mechano-sorptive experiments perpendicular to grain under tensile and compressive loads. *Wood Science and Technology* 34, 4 (2000), 317–326.
- [84] TRCALA, M., NĚMEC, I., AND GÁLOVÁ, A. On the nonlinear transient analysis of structures. In *Earthquakes-Recent Advances, New Perspectives and Applications*. IntechOpen, 2022.
- [85] VAN DER MEER, L. J. Unbonded post-tensioned shear walls of calcium silicate element masonry.
- [86] VIDAL-SALLÉ, E., AND CHASSAGNE, P. Constitutive equations for orthotropic nonlinear visco-elastic behaviour using a generalized maxwell model application to wood material. *Mechanics of Time-Dependent Materials* 11 (2007), 127–142.
- [87] VILPPO, J., KOUHIA, R., HARTIKAINEN, J., KOLARI, K., FEDOROFF, A., AND CALONIUS, K. Anisotropic damage model for concrete and other quasi-brittle materials. *International Journal of Solids and Structures* 225 (2021), 111048.
- [88] VOLTERRA, V. Sulle equazioni integro-differenziali della theoria dell'elasticita. *Atti Reale Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur.* 18 (1909), 295–300.

- 
- [89] VOYIADJIS, G. Z., TAQIEDDIN, Z. N., AND KATTAN, P. I. Anisotropic damage–plasticity model for concrete. *International journal of plasticity* 24, 10 (2008), 1946–1965.
- [90] WIKIPEDIA CONTRIBUTORS. Standard linear solid model — Wikipedia, the free encyclopedia, 2021. [Online; accessed 16-October-2023].
- [91] WIKIPEDIA CONTRIBUTORS. Burgers material — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. [Online; accessed 17-October-2023].
- [92] WIKIPEDIA CONTRIBUTORS. Generalized maxwell model — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. [Online; accessed 16-October-2023].
- [93] WIKIPEDIA CONTRIBUTORS. Kelvin–voigt material — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. [Online; accessed 16-October-2023].
- [94] WIKIPEDIA CONTRIBUTORS. Maxwell material — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. [Online; accessed 16-October-2023].
- [95] WOSATKO, A., GENIKOMSOU, A., PAMIN, J., POLAK, M. A., AND WINNICKI, A. Examination of two regularized damage-plasticity models for concrete with regard to crack closing. *Engineering Fracture Mechanics* 194 (2018), 190–211.
- [96] WU, J.-Y., AND CERVERA, M. A novel positive/negative projection in energy norm for the damage modeling of quasi-brittle solids. *International Journal of Solids and Structures* 139 (2018), 250–269.
- [97] WU, J. Y., LI, J., AND FARIA, R. An energy release rate-based plastic-damage model for concrete. *International journal of Solids and Structures* 43, 3-4 (2006), 583–612.
- [98] YANG, K.-H. *Basic finite element method as applied to injury biomechanics*. Academic Press, 2017.
- [99] YU, Q., BAZANT, Z. P., AND WENDNER, R. Improved algorithm for efficient and realistic creep analysis of large creep-sensitive concrete structures. *ACI Structural Journal* 109, 5 (2012), 665.
- [100] ZHANG, J. *A Unified Viscoelasto-Plastic Damage Model for Long-Term Performance of Prestressed Concrete Box Girders*. PhD thesis, University of Pittsburgh, 2015.
- [101] ZHANG, L., XIE, Q., ZHANG, B., WANG, L., AND YAO, J. Three-dimensional elastic-plastic damage constitutive model of wood. *Holzforschung* 75, 6 (2021), 526–544.
- [102] ZHOU, Y., FUSHITANI, M., KUBO, T., AND OZAWA, M. Bending creep behavior of wood under cyclic moisture changes. *Journal of Wood Science* 45 (1999), 113–119.