Kapitola 1

Všemocná úměra aneb lineární algebra poprvé

Tuto kapitolu bychom mohli opatřit podtitulem „To nejnutnější z lineární algebry“. Dovíme se v ní, co je třeba si představit pod pojmem „linearita“, najdeme příklady linearity v geometrii i v přírodovědě (fyzice, chemii, biologii) a formulujeme základní poznatky týkající se řešení soustav lineárních rovnic. Do této oblasti patří i počítání s vektory a maticemi — objekty, které jsou velmi vhodné k vyjádření fyzikálních veličin.

1.1 Lineární rovnice

Co tedy znamená slovo *linearita*? Pochází z latiny, *linea recta* = *přímka*, česky bychom řekli *přímá úměrnost* nebo jen jednoduše *úměra*.

1.1.1 Kde všude se setkáme s úměrou — příklady linearity

Nejjednodušší příklady linearity patří do oblasti geometrie — vyjádření přímek a rovin. Jistě si ze střední školy vzpomínáte, že body těchto útvarů popisujeme jejich souřadnicemi na přímce $\mathbf{R}$, v rovině $\mathbf{R}^2$, v prostoru $\mathbf{R}^3$. Souřadnice bodu v rovině tedy tvoří uspořádanou dvojici reálných čísel, v prostoru pak uspořádanou trojici reálných čísel. (Pozor, dvojice $[a, b]$ a $[b, a]$ představují různé body.)

Příklad 1.1: Parametrické vyjádření přímky

Přímka — jednorozměrný lineární útvar v jednorozměrném prostoru $\mathbf{R}^1$, dvojrozměrném prostoru $\mathbf{R}^2$, trojrozměrném prostoru $\mathbf{R}^3$ (nebo i n-rozměrném prostoru $\mathbf{R}^n$), je určena dvěma body, třeba A a B, nebo ekvivalentně, bodem A a *směrovým* vektorem $\vec{u}$ (obr. 1.1). Je-li X obecným bodem na této přímce, je vektor $\overrightarrow{AX}$ rovnoběžný, tj. *kolineární*, se směrovým vektorem $\vec{u}$. (Jako směrový můžeme samozřejmě použít i vektor $\overrightarrow{AB}$.) Vektor $\overrightarrow{AX}$ má tedy s vektorem $\vec{u}$ stejný směr, lišit se může velikostí nebo orientací. Tuto skutečnost zapíšeme tak, že $\overrightarrow{AX}$ je t-násobkem vektoru $\vec{u}$,

$$\overrightarrow{AX} = t \cdot \vec{u}.$$

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$a_{ij} \in \mathbf{R}$, popřípadě $a_{ij} \in \mathbf{C}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ (*řádkový index* — určuje, ve kterém řádku se nachází prvek a_{ij}), $j = 1, 2, \ldots, n$ (*sloupcový index* — určuje, ve kterém sloupci stojí prvek a_{ij}). Pro $m = n$ se matice nazývá *čtvercová n-tého řádu*. Některé čtvercové matice mají speciální tvar:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

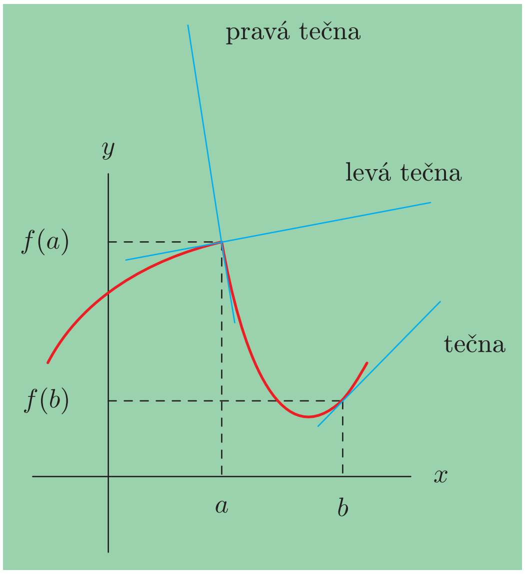
$$T_d = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad T_h = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

D je matice *diagonální* (má nenulové prvky pouze na úhlopříčce — diagonále — čtvercového zápisu), matice T_d *dolní trojúhelníková* (její nenulové prvky tvoří trojúhelníkové uspořádání zahrnující diagonálu a oblast pod diagonálou) a obdobně matice T_h je *horní trojúhelníková*. Označme nyní $\mathcal{M}(m/n)$ množinu všech matic typu m/n. Jestliže $A, B \in \mathcal{M}(m/n)$,

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

definujeme jako *součet matic A a B* matici $C \in \mathcal{M}(m/n)$ takto:

$$C = A + B = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.21}$$



Obr. 2.32 Tečna, pravá a levá tečna.

tj. definiční limita (2.19) je vlastní. Geometricky to znamená, že v bodě $\big[a, f(a)\big]$ lze ke grafu funkce sestrojit tečnu. Představa nám napovídá, že konstrukce tečny by nebyla možná, kdyby graf nebyl „hladký", nebo dokonce kdyby nebyl spojitý (křivka grafu by byla v bodě a přerušená). Pak by jistě nešlo provést limitní přechod sečny v tečnu. Zkusíme se o správnosti této představy přesvědčit. Nechť tedy má funkce $f(x)$ v bodě a vlastní derivaci $f'(a)$. Platí

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,(x - a), \quad \text{pro} \quad x \neq a.$$

Funkce $f(x) - f(a)$ je součinem dvou funkcí, které mají v bodě a vlastní limitu. Konkrétně

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a), \quad \lim_{x \to a} (x - a) = 0.$$

Použitím pravidla pro limitu součinu funkcí z věty 2.1 dostáváme

$$\lim_{x \to a} \big[f(x) - f(a)\big] = 0 \implies \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Funkce $f(x)$ je tedy v bodě a skutečně spojitá. Toto tvrzení je natolik důležité, že je vyslovíme ve tvaru matematické věty.

Věta 2.3 (Derivace a spojitost): *Má-li funkce $f(x)$ v bodě $a \in D_f$ konečnou derivaci $f'(a)$, pak je v tomto bodě spojitá.*

Samozřejmě, z existence vlastních derivací $f'_+(a)$, resp. $f'_-(a)$ plyne spojitost funkce $f(x)$ v bodě a zprava, resp. zleva.

2.2.2 Graf funkce snadno a rychle

Učeně se tomu říká *vyšetřování průběhu funkce*, ve skutečnosti však jde opravdu o návod, jak na základě několika málo výpočtů derivací získat velmi rychlou a dost dobrou představu o tom, jak vypadá graf funkce v celém definičním oboru. Velmi stručně, ne dost korektně, ale zato docela názorně lze říci, že derivace funkce v daném bodě určuje rychlost změny funkční hodnoty. Znaménko derivace dává představu o sklonu grafu v daném bodě, tj. o tendenci grafu v okolí daného bodu stoupat nebo klesat.

Druhá derivace v tomto bodě již určuje, „jak rychle se mění změna“, a nese tak informaci o tom, zda se vzestup či pokles grafu urychluje nebo zpomaluje.

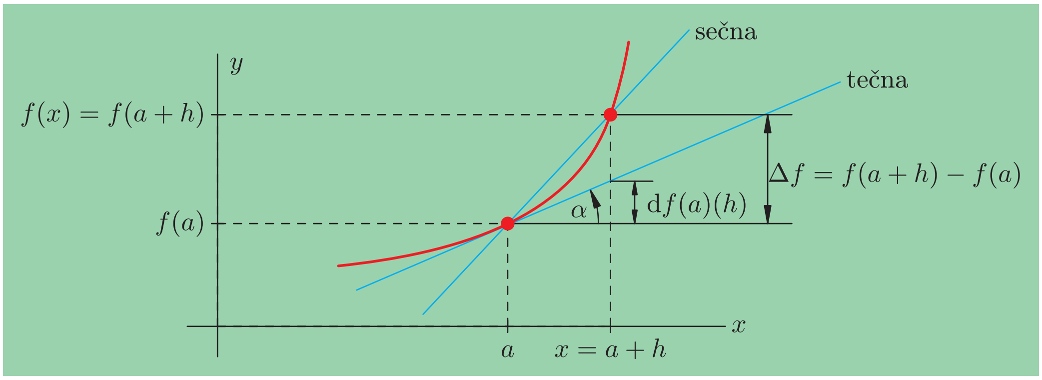
Představu o těchto pojmech můžeme získat pomocí ryze praktických věcí. Třeba na příkladě inflace a míry inflace. Posuzovanou funkcí nechť je nějaká veličina představující hodnotu přesně definované částky peněz, například koruny, v závislosti na čase. Její záporně vzatou derivací je veličina představující znehodnocení peněz, tedy míru inflace. Řekněme, že v jistém státě vydají oficiální zprávu o inflaci a v televizi řeknou, že *míra inflace* se snížila. Mohou se občané radovat, že jejich úspory nyní nabývají na hodnotě? Bohužel, nikoliv. Zpráva o snížení míry inflace znamená pouze to, že znehodnocování peněz pokračuje pomalejším tempem než dříve. Mazaní ekonomové využívají toho, že lidé nejsou zvyklí myslet v matematických pojmech, neuvědomí si, že míra inflace představuje derivaci veličiny, která je ve skutečnosti zajímá, a nechají se prohlášeními o poklesu míry inflace přesvědčit o tom, že se mají stále lépe.

Jiným příkladem je jízda automobilu. Posuzovanou funkcí je dráha automobilu v závislosti na čase $s = s(t)$, která stále narůstá. Jak jinak, když její derivace $v(t) = s'(t)$, udávající velikost rychlosti, je vždy kladná. Je-li kladné i zrychlení, určené derivací velikosti rychlosti $a(t) = v'(t)$, znamená to, že se automobil pohybuje rychleji a rychleji a uražená dráha roste s časem rychleji než lineárně. Automobil urazí za každou další sekundu více metrů než za sekundu předchozí. Naopak, je-li zrychlení záporné, velikost rychlosti klesá (rychlost sama je ovšem stále kladná) a uražená dráha sice stále narůstá, ale pomaleji. Automobil za každou další sekundu urazí menší vzdálenost než v sekundě předchozí.

Zabývejme se nyní již chováním grafu funkce. Pojmy funkce rostoucí a klesající jsme v odstavci 2.1.4 definovali pro intervaly. Pojem funkce rostoucí nebo klesající v bodě je definován pomocí okolí. Řekneme, že funkce $y = f(x)$ *v bodě* a *roste*, resp. *klesá*, jestliže existuje interval $J(\delta) = (a - \delta, a + \delta)$ takový, že v něm funkce roste, resp. klesá. Číslo δ může být i hodně malinkaté, podstatné však je, že *existuje*. Předpokládejme, že funkce má v bodě a derivaci $f'(a)$. Z definice těchto pojmů a z definice derivace funkce v bodě vyplývá, že při kladné derivaci funkce v bodě a roste, při záporné klesá. Je to také názorné i geometricky: Tečna ke grafu rostoucí funkce svírá s osou x ostrý úhel, tj. $\operatorname{tg} \alpha = f'(a) > 0$, tečna ke grafu funkce klesající pak úhel tupý, tj. $\operatorname{tg} \alpha = f'(a) < 0$. A co když je derivace $f'(a)$ nulová? Pak se bod a nazývá *stacionárním bodem*. Rozlišujeme tři typy stacionárních bodů: *lokální maximum*, *lokální minimum* a *inflexní bod typu a)*. Ve všech je ovšem derivace $f'(a) = 0$. Obr. 2.35 ukazuje všechny možné situace. Jejich souhrn bude za chvíli uveden v tabulce. (K té je koneckonců možné

2.2.3 Spokojíme se i s přibližnou hodnotou — diferenciál funkce

Pojem diferenciálu funkce $y = f(x)$ v bodě a názorně ukazuje obrázek 2.38. Předpokládejme, že ke grafu funkce lze v jeho bodě $\big[a,\ f(a)\big]$ sestrojit tečnu. Uvažujeme o grafu funkce $f(x)$ v intervalu $[a,\ a+h]$, kde h je *přírůstek* proměnné x. *Přírůstek funkční hodnoty* neboli *diference* funkce $f(x)$ mezi body $x = a$ a $x = a+h$ je $\Delta f = f(a+h) - f(a)$. Diferenci lze „složit" sečtením přírůstku na tečně, který je v obrázku vyznačen symbolem $\mathrm{d}f(a)(h)$, a hodnoty $\chi_a(h)$, kterou lze považovat za funkční hodnotu jisté funkce χ_a v bodě h. Platí



Obr. 2.38 Diferenciál funkce v daném bodě.

$$\Delta f = f(a+h) - f(a) = \mathrm{d}f(a)(h) + \chi_a(h) = h \operatorname{tg} \alpha + \chi_a(h) = f'(a)\, h + \chi_a(h). \qquad (2.25)$$

Přírůstek na tečně, který můžeme také psát ve tvaru

$$\mathrm{d}f(a)(x-a) = f'(a)(x-a), \qquad (2.26)$$

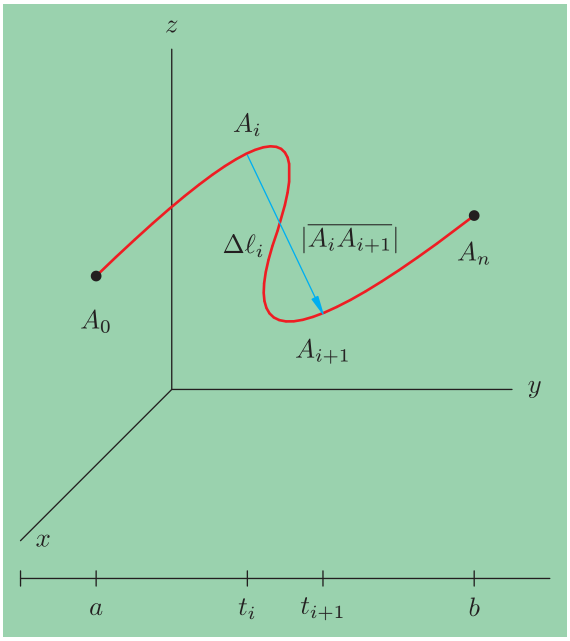
je lineární funkcí proměnné $h = x - a$ a nazývá se *diferenciálem funkce* $f(x)$ *v bodě* a. Pokud existuje v bodě a derivace $f'(a)$, lze diferenciál definovat. Jaký je jeho význam poznáme, když prošetříme chování funkce $\chi_a(h)$ v okolí hodnoty $h = 0$. Platí

$$\chi_a(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)\, h \quad \Longrightarrow \quad \frac{\chi_a(h)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)\,.$$

Limita pravé strany této rovnosti pro $h \to 0$ zjevně existuje a je rovna nule. Proto také

$$\lim_{h \to 0} \frac{\chi_a(h)}{h} = 0\,.$$

Co znamená tento výsledek? Budeme-li snižnovat hodnotu h, budou se k nule blížit nejen funkční hodnoty funkce $\chi_a(h)$ samotné, ale dokonce i hodnoty získané jejich podělením malým číslem h! S klesající hodnotou h jde tedy funkce χ_a k nule rychleji než úměrně h. Protože



Obr. 2.56 Ke křivkovému integrálu.

Celková délka lomené čáry složené z úseků $\overline{A_0A_1}$, $\overline{A_1A_2}$, …, $\overline{A_{n-1}A_n}$ je

$$\mathcal{L}(D) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\Big(x(t_{i+1}) - x(t_i)\Big)^2 + \Big(y(t_{i+1}) - y(t_i)\Big)^2 + \Big(z(t_{i+1}) - z(t_i)\Big)^2}\,.$$

Kdo očekává, že pro normu dělení D jdoucí k nule bude limita této veličiny představovat délku oblouku $\mathcal{C}$, nemýlí se. Jistě nakonec půjde o nějaký integrál. Měli bychom tedy umět představit si délku $\mathcal{L}(D)$ jako součet určitého typu pro vhodnou funkci $f(t)$ a dělení D.

Protože jsme předpokládali, že funkce $x(t)$, $y(t)$ a $z(t)$ jsou na intervalu $[a,\, b]$ nejen spojité, ale dokonce mají i derivaci (zatím ještě nepotřebujeme předpoklad, že i derivace jsou spojité), můžeme pro ně použít Lagrangeovu větu o střední hodnotě z odstavce 2.1.7 (věta 2.2). V každém z intervalů $(t_i,\, t_{i+1})$ existuje alespoň jedna trojice čísel ξ_i, η_i a ζ_i takových, že platí

$$\begin{aligned} x(t_{i+1}) - x(t_i) &= x'(\xi_i)(t_{i+1} - t_i), \\ y(t_{i+1}) - y(t_i) &= y'(\eta_i)(t_{i+1} - t_i), \\ z(t_{i+1}) - z(t_i) &= z'(\zeta_i)(t_{i+1} - t_i). \end{aligned}$$

Délku úsečky mezi body A_i a A_{i+1} můžeme proto zapsat ve tvaru

$$\sqrt{\Big(x'(\xi_i)\Big)^2 + \Big(y'(\eta_i)\Big)^2 + \Big(z'(\zeta_i)\Big)^2}\,(t_{i+1} - t_i)\,.$$

Všimněme si, že pro každou z funkcí $x(t)$, $y(t)$ a $z(t)$ je bod v intervalu $(t_i,\, t_{i+1})$, pro který je tečna ke grafu funkce rovnoběžná se sečnou spojující krajní body grafu v tomto intervalu, obecně

Kapitola 3

I náhoda má své zákonitosti aneb počet pravděpodobnosti

Slovo pravděpodobnost používáme velmi často. Jaký však je jeho přesný význam? Jsme přesvědčeni, že pravděpodobnost výhry ve sportce je velmi malá. Ani pravděpodobnost, že se vyplní předpověď počasí, nepovažujeme mnohdy za výraznou. Přesto je mezi oběma příklady obrovský kvantitativní rozdíl. Zkusme význam pojmu pravděpodobnost ukázat pomocí konkrétních číselných příkladů.

Příklad se střelcem: Sportovní střelec střílí na terč série 100 ran. Předpokládejme, že podmínky při střelbě jsou stále stejné. Stejná je zbraň, terč, vzdálenost, povětrnostní podmínky i momentální zdravotní stav střelce. Při hodnocení střelcova „mistrovství" někdo řekne, že střelec zasáhne terč *s pravděpodobností* 92%. Jak tomu rozumět? Znamená to, že v souboru sérií výstřelů jsou velmi časté ty, v nichž zasáhl střelec terč 92-krát. Samozřejmě, není řídké, že se objeví i série s 93 nebo 94 zásahy, ale také s 91 nebo 90. Vyloučen není ani případ s úspěšností 96 či 88, a dokonce i stovku bychom mohli zaznamenat. Situace výrazně odlišné od 92 zásahů však budou řídké, a to tím více, čím více se úspěšnost série liší od 92 oběma směry.

Příklad se zmetky: Koupíte si výrobek u firmy, o které je známo, že vyrábí zmetky s pravděpodobností 0,16%? Situaci lze posuzovat obdobně jako úspěšnost střelce. Budeme-li například zkoumat série obsahující 1 000 výrobků, bude každá z nich obsahovat „v průměru" 16 zmetků. Z příkladu se střelcem již zhruba víme, jak posuzovat slovo *v průměru*.

V této kapitole se budeme pravděpodobnostmi zabývat podrobněji. Zjistíme, že i když se týkají náhodných jevů, platí i pro ně jisté zákonitosti.

3.1 Pravděpodobnost

V úvodních příkladech jsme si vyložili, jak intuitivně chápat pojem pravděpodobnost. Jednalo se v nich o posouzení průměrné úspěšnosti ve velkém souboru operací či úkonů prováděných za

Dodatek K

Ještě něco o integrálech

Pečliví čtenáři si všimli, že v odstavci 3.2.2 figurují objekty, které nebyly podrobně zavedeny. Při jejich použití se postupovalo poněkud intuitivně. Jedná se o integrály typu

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Na str. 240 se to jimi doslova hemží. Jsou to takzvané *nevlastní integrály.* (Jde o obdobnou terminologii, jakou jsme používali u nevlastních limit funkcí nebo limit v nevlastních bodech.) Nejde, přesně řečeno, o určité integrály, jak jsme je zavedli v odstavci 2.3.1 — tam jsme definovali určitý integrál pro spojitou funkci zadanou na uzavřeném intervalu $[a, b]$, jímž žádný z intervalů $(-\infty,\, a]$, $[b,\, \infty)$ a $(-\infty,\, \infty)$ bezesporu není. Plně korektní rozšíření definice integrálu i na tyto intervaly (ale i na intervaly otevřené, popřípadě na funkce „do jisté míry“ nespojité) způsobem použitým v odstavci 2.3.1 by vyžadovalo zavedení nových pojmů, které nemohou být předmětem pouhého dodatku. Přesto je třeba, abychom s nevlastními integrály uměli počítat — vždyť mají značné uplatnění v aplikacích.

Nevlastní integrály jsou dvojího typu — zavádí se jednak pro nevlastní definiční intervaly $(-\infty,\, a]$, $[b,\, \infty)$ a $(-\infty,\, \infty)$, jednak pro funkce definované na uzavřených intervalech $[a,\, b\,]$, které však mohou v některých bodech porušovat podmínku spojitosti s tím, že v okolí bodů nespojitosti mohou být dokonce i neomezené. Obojí typ integrálu lze pak samozřejmě kombinovat.

Rozšíření definice integrálu

Než přistoupíme k definování nevlastních integrálů, rozšíříme definici určitého integrálu na intervalu $[a,\, b\,]$ i na funkce, které nutně nemusejí být spojité. (Poznamenejme, že historicky vybudoval pojem určitého integrálu ze spojité funkce na uzavřeném intervalu Cauchy. V odstavci 2.3.1 jsme však použili v praxi běžnějšího názvu „Riemannův integrál“. To proto, že integrál, který zavedl Riemann obecněji, aniž požadoval spojitost funkce, splývá pro spojité funkce s integrálem Cauchyovým.)

Nyní zavedeme určitý integrál pro funkce, o nichž předpokládáme prozatím jen to, že jsou na intervalu $[a,\, b\,]$ ohraničené. Spojitost nebudeme předem vyžadovat — uvidíme později, nakolik z ní opravdu lze „slevit“. Zvolme dělení D intervalu $[a,\, b\,]$, jak bylo definováno v odstavci 2.3.1. Protože funkce $f(x)$ není na intervalech $[x_i,\, x_{i+1}]$ nutně spojitá, není zaručeno, že na nich nabývá svého minima a maxima. Je však jisté, že množina funkčních hodnot je na každém z uvedených intervalů ohraničená, existuje tedy její infimum m_i a supremum M_i. Horní a dolní součty pro funkci $f(x)$ a dělení D zavedeme formálně stejně jako ve vztahu (2.49), pouze

Harmonický průměr hodnot x_1, x_2, …, x_N počítáme podle vztahu

$$\langle x\rangle = \frac{N}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_N}}.$$

Příklad N.4: Úlohy o společné práci

Pro typickou školskou až školometskou úlohu ze základní nebo střední školy se vžil nesympatický název „úloha o společné práci“. Nemusí jít vždy o práci, podstatu úlohy lze opatřit i jiným slovním obalem, například tímto: Koza, zajíc a ovce se rozhodli, že sežerou všechny hlávky na zelném poli. Koza sama by vyplenila pole za $t_1 = 3$ dny, ovce za $t_2 = 4$ dny a zajíc za $t_3 = 6$ dní. Většinou se ptáme, ze jak dlouho bude pole hlávek prosté, pustí-li se do nich tato povedená trojice současně. My však otázku poněkud modifikujeme a zeptáme se, jak dlouho by trvalo sežrání všech hlávek pomyslnému „průměrnému“ býložravci — rozumí se, že tři takoví průměrní býložravci by zelí snědli za stejnou dobu, jako koza s ovcí a zajícem.

Řešení je zřejmé. Koza sežere za 1 den třetinu hlávek, ovce čtvrtinu a zajíc šestinu. Dohromady tedy za den snědí tři čtvrtiny počtu všech hlávek, neboť

$$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{18}{24}=\frac{3}{4}.$$

Označíme-li $\langle t\rangle$ dobu, za kterou by pole vyprázdnil průměrný býložravec, dostaneme harmonický průměr jednotlivých dob.

$$\langle t\rangle = \frac{3}{\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}} = \frac{12}{3} = 4\ \text{dny}.$$

Příklad N.5: Průměrná rychlost obecně

Pokusme se úlohu o průměrné rychlosti formulovat obecně tak, abychom z ní předchozí situace dostali jako speciální případy — vždyť přece jde stále o střední hodnotu nějaké veličiny, jednou jsou však zadány časové úseky, jindy dráhové. V příkladu N.3 jsme viděli, že při zadání časových úseků t_1, t_2, …, t_N, v nichž se těleso pohybovalo stálými rychlostmi v_1, v_2, …, v_N, byla průměrná rychlost dána váženým aritmetickým průměrem, váhy jednotlivých hodnot rychlosti byly úměrné délkám příslušných časových úseků. Při stejných časových úsecích přešel vážený aritmetický průměr v obyčejný. V případě spojitě proměnné rychlosti s časem jsme dostali integrální vyjádření, které není ničím jiným než také váženým průměrem, avšak pro veličinu se spojitým rozdělením.

Předpokládejme nyní, že místo časových úseků jsou zadány obecně různé úseky dráhové, s_1, s_2, …, s_N, a odpovídající rychlosti v_1, v_2, …, v_N. Doba trvání i-tého úseku je tedy $t_i = s_i/v_i$. Průměrná rychlost je

$$\langle v\rangle = \frac{s_1+s_2+\dots+s_N}{\frac{s_1}{v_1}+\frac{s_2}{v_2}+\dots+\frac{s_N}{v_N}} = \frac{1}{\frac{w_1}{v_1}+\frac{w_2}{v_2}+\dots+\frac{w_N}{v_N}},\quad \text{kde}\quad w_i = \frac{s_i}{s_1+s_1+\dots+s_N}$$

opět hraje roli váhy i-té rychlosti, součet vah je přitom roven jedné. (Tato úloha má omezení — žádná rychlost nesmí být nulová. Zvažte, jak by bylo třeba vztah upravit, abychom dostali správnou hodnotu průměrné rychlosti, kdyby těleso po nějakou dobu někde stálo.)

Jestliže se rychlost mění spojitě, můžeme ji chápat jako funkci času $v = v(t)$, nebo jako funkci dráhy $v = v(s)$. V případě, že se těleso nikde na nějakou dobu nezastaví (v takovém případě by mělo v nenulovém časovém úseku nulovou rychlost), je závislost dráhy na čase $s = s(t)$ prostá funkce a můžeme k ní najít funkci inverzní $t = t(s)$. Celková doba pohybu a průměrná rychlost pak jsou, označíme-li jako σ celkovou dráhu,

$$\tau = \int_{s_0}^{s_0+\sigma} \frac{\mathrm{d}s}{v[t(s)]} \implies \langle v \rangle = \frac{\sigma}{\tau} = \frac{1}{\dfrac{1}{\sigma}\displaystyle\int_{s_0}^{s_0+\sigma} \frac{1}{v[t(s)]}\,\mathrm{d}s}.$$

V případě rychlosti jako spojité funkce času nebo dráhy tedy dostáváme dva ekvivalentní vztahy pro průměrnou rychlost

$$\langle v \rangle = \frac{1}{\tau}\int_{t_0}^{t_0+\tau} v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\dfrac{1}{\sigma}\displaystyle\int_{s_0}^{s_0+\sigma} \frac{1}{v[t(s)]}\,\mathrm{d}s}.$$

První variantu výpočtu průměrné rychlosti lze použít vždy, druhou pouze v případě, že závislost dráhy na čase je prostá funkce, těleso se nikde na určitou dobu nezastaví (okamžitá rychlost však v jednotlivém okamžiku nulová být může).

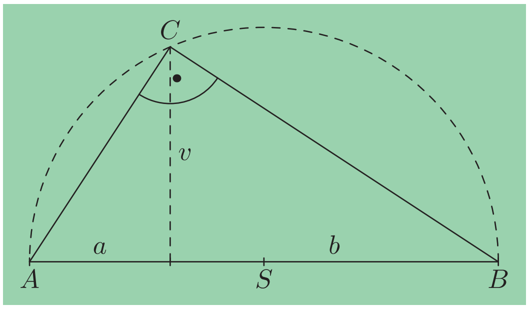
Všimněte si, že první výraz je „spojitou“ obdobou aritmetického průměru, zatímco druhý vypadá jako průměr harmonický. Dokážete vysvětlit, proč v případě spojitě proměnné rychlosti dávají tyto vztahy stejný výsledek, když pro případy diskrétní (pohyb v jednotlivých časových nebo dráhových úsecích danými rychlostmi) byly výsledky jasně odlišné?

Příklad N.6: Průměrný obdélník je čtverec

Název příkladu vypadá jako vtip. On to také trochu vtip je, i když nikoli bez věcné oprávněnosti. Jistě jste na základní škole dostali někdy za úkol zkonstruovat na základě zadaných stran a a b obdélníka čtverec se stejným obsahem. (Konstrukce na obrázku N.2 využívá Thaletovy kružnice, podle Euklidovy věty je strana hledaného čtverce výškou v pravoúhlém trojúhelníku, která, spuštěna z vrcholu C u pravého úhlu na protější stranu AB, rozdělí tuto stranu na úseky a a b.) Platí $v^2 = a \cdot b$. Čtverec, který může z hlediska obsahu „zastoupit“ zadaný obdélník, má stranu v. Úlohu lze zobecnit na N-rozměrný případ. Hledáme N-rozměrnou krychli, která má stejný objem jako N-rozměrný kvádr o stranách $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Její strana je zřejmě

$$v = \sqrt[N]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_N}.$$

Opět tu máme další druh průměru, tentokráte nazývaný *geometrickým průměrem.*



Obr. N.2 Euklidova věta a geometrický průměr.