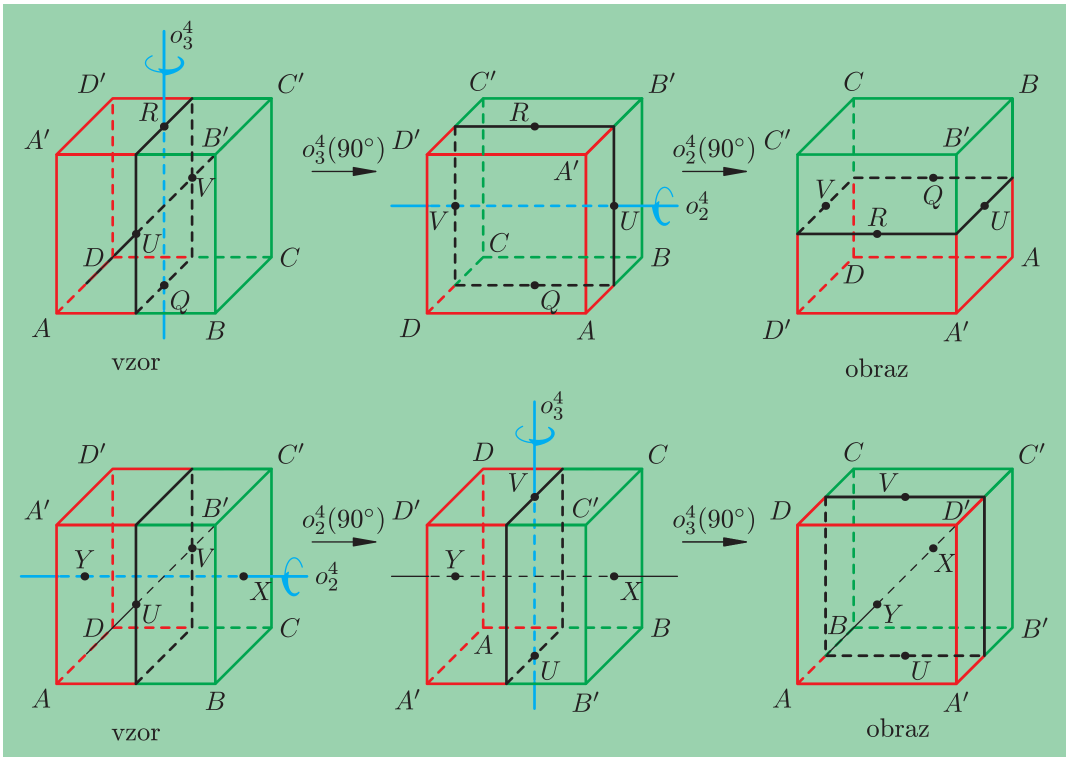
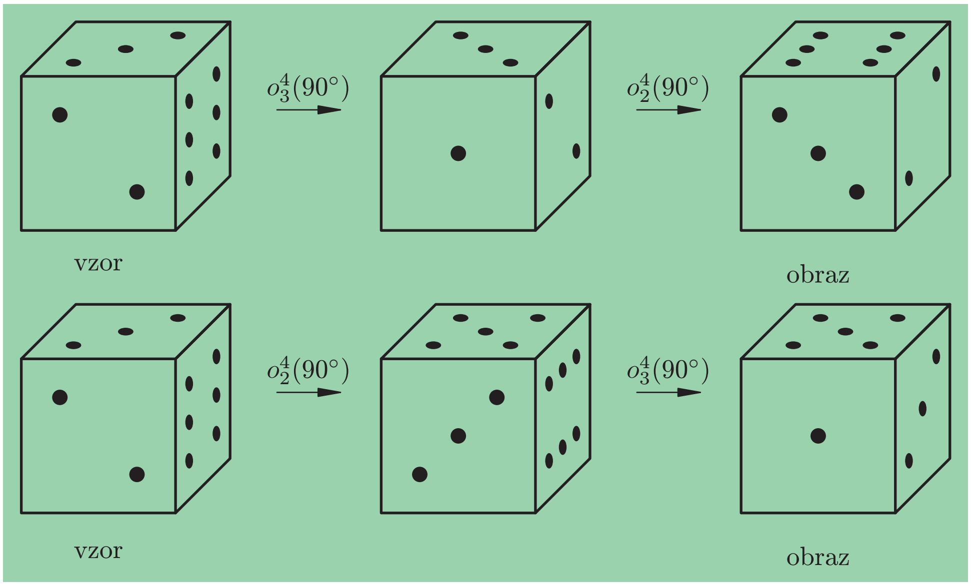
Kapitola 4

Vícerozměrná linearita aneb lineární algebra podruhé

V prvním dílu tohoto textu jsme se seznámili s elegantní dámou — lineární algebrou. Pomocí jejích pravidel jsme nejen řešili soustavy lineárních rovnic, ale také počítali s maticemi a vektory. Zatímco operace s maticemi, a koneckonců i řešení lineárních rovnic pomocí matic, bychom mohli chápat jako užitečnou ekvilibristiku s číselnými soubory, za počítáním s vektory se zdálo být přece jen něco hlubšího a závažnějšího. Vázané vektory pro nás totiž byly orientovanými úsečkami v trojrozměrném euklidovském prostoru, v němž bylo definováno měření délek a úhlů. Volné vektory pak byly množinami stejně velkých a souhlasně rovnoběžných orientovaných úseček. Jednalo se tedy o *geometrické objekty*. Každý vektor byl určen svou velikostí a směrem. Směr byl přitom zadán například pomocí úhlů mezi daným vektorem a vybranými směry, které byly předem pevně zvoleny. Mohli jsme s vektory provádět základní algebraické operace, jimiž jsou sčítání vektorů a násobení vektoru číslem, podle pravidel zavedených pro (v tomto případě řádkové) matice. S vektory v trojrozměrném prostoru jsme mohli velmi pohodlně počítat jako s trojicemi čísel. Na druhé straně jsme vektory vyjadřovali jako lineární kombinace jiných vektorů, tvořících v prostoru všech vektorů *bázi*. Koeficienty lineární kombinace, která představovala zápis daného vektoru ve zvolené bázi, byly jeho *složkami* v této bázi. Při změně báze se změnily složky vektoru, vektor sám však nikoliv. Vektor je stále sám sebou, jen se v různých bázích jinak tváří — projeví se jinou trojicí čísel. Protože se však při změně báze změní složky vektoru přesně definovaným způsobem (vzpomeňte na transformační vztahy), dokážeme jej vždy rozpoznat. Tuto vlastnost, *invarianci vůči volbě báze*, mají všechny geometrické objekty. A je to právě algebra, která nám umožňuje tyto objekty reprezentovat číselnými soubory a také tak s nimi počítat. Jde-li navíc o objekty řídící se lineárními pravidly, jakými jsou například distributivní zákony, je počítání s nimi, v rámci *lineární algebry*, zvláště jednoduché. Oceníme to zejména v prostorech vyšší dimenze, než je náš běžný euklidovský prostor. Při počítání s vektory v trojrozměrném prostoru, kde umíme měřit délky a úhly a kde platí trigonometrická pravidla, bychom se bez rutinních algebraických procedur ještě třeba obešli. Už ale například ve čtyřrozměrném časoprostoru, v němž se odehrávají všechny přírodní jevy a v němž je třeba formulovat fyzikální zákony, však pro měření délek a úhlů platí jiná pravidla, než jsou obvyklá v běžném, tj. trojrozměrném euklidovském, prostoru. Například tam neplatí



Obr. 4.17 Pořadí přemístění krychle nelze zaměňovat — k příkladu 4.6.



Obr. 4.18 Pořadí přemístění krychle nelze zaměňovat — k příkladu 4.6.

jak takový předpis může vypadat. Ukážeme, že dokonce bude stačit, abychom předepsali, jak se zobrazují vektory alespoň jedné (libovolně zvolené) báze. A pak už dokážeme najít obraz jakéhokoli vektoru. Vyřešíme současně i praktickou otázku: Jak vypočítat složky obrazu ve zvolené bázi vektorového prostoru W_m, známe-li složky vzoru v jisté bázi vektorového prostoru V_n.

Zvolme ve vektorovém prostoru vzorů V_n bázi $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ a v prostoru obrazů W_m bázi $(f_1, f_2, \dots, f_m)$. Předpokládejme, že $\varphi : V_n \to W_m$ je lineární zobrazení. Zobrazme vektor

$$a = \alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2 + \cdots + \alpha^n e_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i e_i, \quad a \sim (\alpha^1 \dots \alpha^n) = (\alpha)\,.$$

$$\varphi(a) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha^i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \varphi(e_i)\,.$$

Při poslední úpravě jsme využili předpokládané linearity zobrazení φ. Označme $c_i = \varphi(e_i)$ obrazy vektorů báze. Okamžitě vidíme, že pokud předem řekneme, jak se zobrazením φ zobrazí vektory báze, můžeme zapsat obraz kteréhokoli vektoru $a \in V_n$,

$$\varphi(a) = \alpha^1 c_1 + \alpha^2 c_2 + \cdots + \alpha^n c_n\,. \tag{4.23}$$

Pozor! Vektory $c_1, c_2, \dots, c_n$ jsou sice prvky prostoru obrazů W_m, ale nemusí v něm tvořit bázi. Každý z nich je však zcela určitě lineární kombinací vektorů báze $(f_1, f_2, \dots, f_m)$, tj.

$$\begin{aligned}
c_1 &= \gamma_1^1 f_1 + \gamma_1^2 f_2 + \cdots + \gamma_1^m f_m = \sum_{\beta=1}^{m} \gamma_1^\beta f_\beta, \quad c_1 \sim (\gamma_1^1 \dots \gamma_1^m) = (\gamma_1)\,,\\
c_2 &= \gamma_2^1 f_1 + \gamma_2^2 f_2 + \cdots + \gamma_2^m f_m = \sum_{\beta=1}^{m} \gamma_2^\beta f_\beta, \quad c_2 \sim (\gamma_2^1 \dots \gamma_2^m) = (\gamma_2)\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\,,\\
c_n &= \gamma_n^1 f_1 + \gamma_n^2 f_2 + \cdots + \gamma_n^m f_m = \sum_{\beta=1}^{m} \gamma_n^\beta f_\beta, \quad c_n \sim (\gamma_n^1 \dots \gamma_n^m) = (\gamma_n)\,.
\end{aligned}$$

Symbolem $c \sim (\gamma^1 \dots \gamma^m) = (\gamma)$ opět vyznačujeme skutečnost, že vektor c je ve zvolené bázi reprezentován m-ticí (γ). Abychom mohli počítat s vektory, které představují obrazy vektorů báze prostoru V_n, musíme zadat jejich složky v bázi prostoru W_m. Ty vytvoří matici

$$\varphi \sim A = \begin{pmatrix} \gamma_1^1 & \gamma_1^2 & \dots & \gamma_1^m \\ \gamma_2^1 & \gamma_2^2 & \dots & \gamma_2^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_n^1 & \gamma_n^2 & \dots & \gamma_n^m \end{pmatrix}.$$

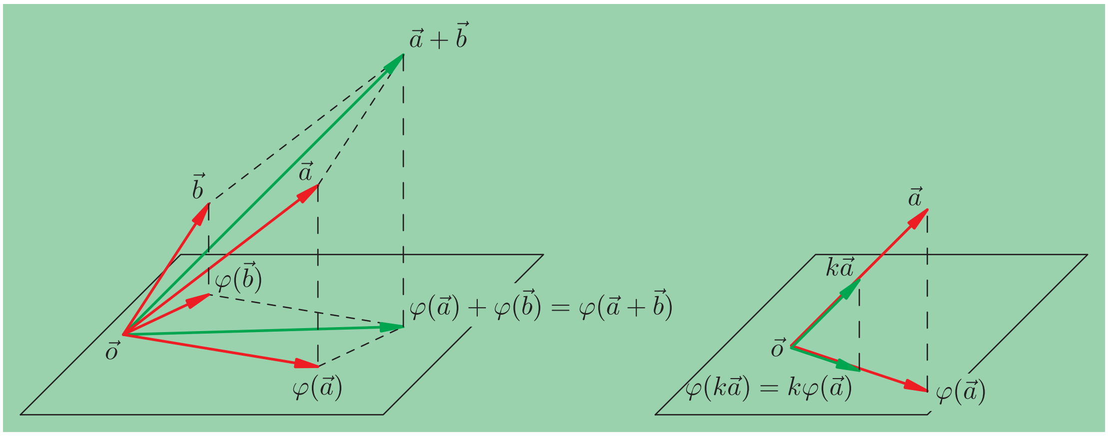
Je vidět, že $\varphi(a) = \psi(a)$ pro libovolný vektor a, tedy $\varphi = \psi$.

Výsledky, ke kterým jsme právě dospěli, jsou pro zadávání lineárních zobrazení natolik důležité, že je vyjádříme formou matematické věty:

> **Věta 4.2:** *Každé lineární zobrazení $\varphi : V_n \to W_m$ je jednoznačně určeno obrazy libovolné báze prostoru V_n.*

Příklad 4.41: Geometrická představivost a algebraický zápis

Abychom si zvykli na algebraický popis geometrických objektů, jimiž vektorové prostory a lineární zobrazení mezi nimi jsou, porovnáme algebraické řešení úlohy s geometrickým pro případy, kdy ještě můžeme uplatnit představivost. To je dobře možné v prostorech jedno-, dvou- a trojrozměrných, jak dokumentuje například ilustrativní obrázek 4.27, znázorňující promítání. Pro konkrétní výpočet zvolíme jako zobrazení φ promítání



Obr. 4.27 Promítání názorně.

vektorů prostoru $V_3 = \big[|\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3|\big]$ nad $\mathbf{R}$ do podprostoru $L = \big[|\vec f_1, \vec f_2|\big]$, kde $\vec f_1 = \vec e_1 + \vec e_2$, $\vec f_2 = \vec e_3$. Abychom mohli dobře uplatnit představivost, předpokládejme, že vektory $\vec e_1$, $\vec e_2$, $\vec e_3$ jsou jednotkové a navzájem kolmé. Abychom věděli, jak máme promítat, musíme zadat doplněk L' vektorového podprostoru L (viz příklad 4.39). Zvolíme-li $L' = \big[|\vec e_1 - \vec e_2|\big]$, představíme si situaci velmi dobře, neboť půjde o kolmé promítání, které dobře známe z „obyčejné“ geometrie (viz obrázek 4.28).

Pozn.: Kolmostí a délkou vektorů z algebraického hlediska se sice budeme zabývat až později, v odstavci o skalárním součinu vektorů, zatím však můžeme využít znalostí geometrických.

Konkrétně promítneme vektor $\vec a \in V_3$ znázorněný na obrázku. Ihned vidíme, že

$$\vec a = \vec e_2 + \vec e_3, \quad \varphi(\vec a) = \frac{1}{2}\vec f_1 + \vec f_2 = \frac{1}{2}\vec e_1 + \frac{1}{2}\vec e_2 + \vec e_3\,.$$

Vektor $\vec a \in V_3$ má tedy v bázi $(\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3)$ prostoru V_3 složky $(\alpha) = (0\ \ 1\ \ 1)$, jeho obraz má v téže bázi složky $(\bar\alpha) = (\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\ \ 1)$.

Nyní ověříme tento výsledek, který jsme na základě geometrické představy získali okamžitě, algebraickým postupem pomocí věty 4.2. Podle obrázku určíme obrazy báze $(\vec e_1, \vec e_1, \vec e_3)$ a matici zobrazení.

Kapitola 6

Linearita v aplikacích aneb lineární algebra do třetice

Potřetí, a v tomto dílu naposledy, se vracíme k lineární algebře. Spojíme-li následující poznatky se znalostmi z předchozích dvou kapitol o lineární algebře, budeme moci říci, že jsme se seznámili se základy této matematické disciplíny. Naše setkávání s ní tím však zdaleka nekončí. Každý, kdo se bude zabývat fyzikou, ať již teoretickou nebo experimentální, a zejména pak jejími praktickými aplikacemi v inženýrství, přístrojové technice, medicínských oborech vyžadujících znalost fyziky, apod., bude potřebovat lineární algebru neustále. V této kapitole obohatíme náš dosavadní vektorový prostor o další výbavu — skalární součin, se kterou se ještě jednou vrátíme k problému projekcí, tentokrát v geometricky názornější podobě. A nakonec si všimneme lineárních operátorů, které vůči skalárnímu součinu splňují jisté „zákony zachování“. Tyto speciální vlastnosti, kterými většinou oplývají fyzikální „operátorové“ veličiny, zajistí existenci báze tvořené vlastními vektory každého takového operátoru.

6.1 Skalární součin — nadstandardní výbava vektorového prostoru

Se skalárním součinem vektorů jsme se již setkali, vzpomínáte? V každém případě se o tom můžete přesvědčit nalistováním odstavce 1.4.3. Situace, jíž jsme se tehdy zabývali, byla však velmi speciální. Pracovali jsme s vázanými vektory definovanými jako orientované úsečky v trojrozměrném euklidovském prostoru, které jsme sčítali a násobili skalárem pomocí jednoduchých geometrických definic — grafického sčítání orientovaných úseček a jejich násobení číslem, také v podstatě grafického. Volné vektory pak byly množinami ekvivalentních (tj. stejně dlouhých a stejně orientovaných) úseček, operace sčítání a násobení skalárem byly přirozeným způsobem zobecněny i na volné vektory. Prostor takových vektorů samozřejmě splňoval všechny požadavky obecné algebraické definice vektorového prostoru. Obsahoval však i něco navíc — možnost měření délek vektorů a úhlů mezi nimi, vyplývající z použití euklidovského prostoru pro vytvoření konkrétní geometrické představy o vektorech. Pomocí délek vektorů a úhlu mezi nimi jsme pak definovali skalární součin vektorů a zjistili jsme, jaké má tato operace vlastnosti.

T^{-1}, kterou se v tuto chvíli nikomu nechce počítat. V dalším odstavci však uvidíme efektivní způsob, jak její prvky zjistit, aniž bychom museli přímo použít procedury inverze.

6.1.3 Ortogonální projekce

Projekcemi na podprostory jsme se obecně zabývali v odstavci 4.2. To jsme ale neměli k dispozici skalární součin. Proto při každém promítání na podprostor $L \subset V_n$ bylo nutné také zadávat jeho konkrétní doplněk, jehož volba nebyla a priori jednoznačná. Při různé volbě doplňků jsme pak dostávali různé průměty jednoho a téhož vektoru do podprostoru L. Podstatou této nejednoznačnosti byla skutečnost, že šlo o lineární zobrazení, které by se z geometrického hlediska dalo nazvat *rovnoběžným promítáním*, přičemž se do podprostoru L promítalo „rovnoběžně“ právě s jeho předem zvoleným konkrétním doplňkem. Při jiné volbě doplňku dopadlo „rovnoběžné“ promítání jinak. Situaci si znovu můžeme připomenout návratem k obrázku 4.21 nebo 4.25. V unitárním prostoru však mezi všemi doplňky vektorového podprostoru vždy existuje právě jeden, který má význačné postavení:

Podprostor $L_\perp$ vektorového prostoru U_n definovaný jako soubor všech vektorů ortogonálních ke každému prvku podprostoru L, tj.

$$L_\perp = \{b \in U_n | (a, b) = 0 \quad \text{pro libovolné} \quad a \in L\},$$

nazýváme *ortogonálním doplňkem vektorového podprostoru* L.

Konstrukce tohoto doplňku je jednoduchá. Zvolme ortonormální bázi $(u_1, u_2, \dots, u_k)$ k-rozměrného vektorového podprostoru L, $1 \le k \le n$, a libovolně ji doplňme tak, aby vznikla báze $(u_1, u_2, \dots, u_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$ celého prostoru. Ortogonalizačním procesem získáme ortonormální bázi $\mathcal{U} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ v prostoru U_n. Položíme $L_\perp = \big[|u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_n|\big]$. Vznikne $(n-k)$-rozměrný doplněk podprostoru L, splňující předchozí definici. Co kdybychom však v U_n zvolili ortonormální bázi $(u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$, která by se od báze $(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n)$ lišila vektory na posledních $n-k$ pozicích? Nic by se nestalo. Vektory v_{k+1} až v_n by generovaly týž podprostor jako vektory u_{k+1} až u_n. Skutečně, označíme-li $L'_\perp = \big[|v_{k+1}, \dots, v_n|\big]$, kde $\dim L'_\perp = n-k$, hned vidíme, že každý z vektorů v_{k+1} až v_n je prvkem prostoru $L_\perp$ a naopak, každý z vektorů u_{k+1} až u_n je prvkem prostoru $L'_\perp$. Proto je $L_\perp = L'_\perp$. Z těchto úvah vyplývá:

Ortogonální doplněk $L_\perp$ k podprostoru L je určen jednoznačně.

Pro libovolný vektor $a \in U_n$ existuje jednoznačný rozklad

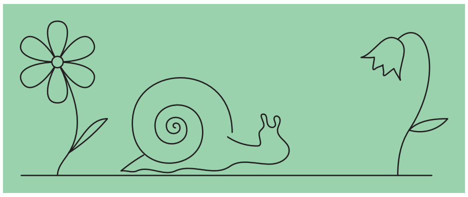
$$a = a_L + a_{L_\perp}, \quad a_L \in L, \quad a_{L_\perp} \in L_\perp\,.$$

Kapitola 7

Obyčejné diferenciální rovnice

V kapitole 2 jsme se seznámili s funkcemi. O jejich užitečnosti nepochybujeme, neboť jsme se již přesvědčili, že se s nimi setkáváme takřka na každém kroku. Vyjadřují totiž jednoduchým způsobem vzájemnou souvislost veličin, a nejen fyzikálních. Známe-li například funkci vyjadřující závislost polohy tělesa na čase, můžeme zjistit, kde těleso v daném okamžiku bylo, je, nebo bude. Známe-li funkce, které popisují časový vývoj cen a platů, můžeme si snadno zjistit, zda si za stejný peníz, za který dnes dostaneme deset housek, koupíme za rok dvacet, nebo jen dvě. Příroda, a ani ekonomika či politika, však nejsou natolik průhledné, aby nám takové závislosti předestřely přímo. Poskytují pouze informace o jejich změnách, a to ještě ukryté ve speciálních rovnicích, zvaných diferenciální. Jde-li o neznámou reálnou funkci nebo soubor funkcí závislých na jedné reálné proměnné, třeba již vzpomínaném čase, hovoříme o *obyčejných diferenciálních rovnicích*. Přesněji řečeno, diferenciální rovnice vyjadřuje matematickou formou zákon platný pro hledanou funkci a její derivace prvního nebo i vyšších řádů. Takovou funkcí času může být například i množství látky při chemických reakcích, mohutnost populace živočichů, kurz eura, cena akcií na burze, rychlost pohybu těles, teplota, atd. Ve fyzice a chemii jsou diferenciální rovnice dány fyzikálními či chemickými zákony, v ekonomii nebo biologii se objevují v různých modelech, odpovídajících více či méně (to častěji) skutečnosti. Uveďme si několik příkladů, na nichž si vysvětlíme i základní terminologii, která je s problematikou diferenciálních rovnic spojena.

Příklad s hlemýžděm: Hlemýžď se pohybuje po přímce od kopretiny k pampelišce stálou rychlostí $v_0 = 2\,\mathrm{mm\,s^{-1}}$. V počátečním okamžiku $t = 0$ byl ve vzdálenosti $s_0 =$



$= 10\,\mathrm{mm}$ od kopretiny. Jaká bude jeho vzdálenost od kopretiny v libovolném okamžiku $t \geq 0$? Na tuto otázku by jistě snadno odpověděl i žák první třídy. Ukažme si však, že úlohu lze také vyjádřit pomocí diferenciální rovnice. Vzdálenost $s(t)$ je hledanou funkcí

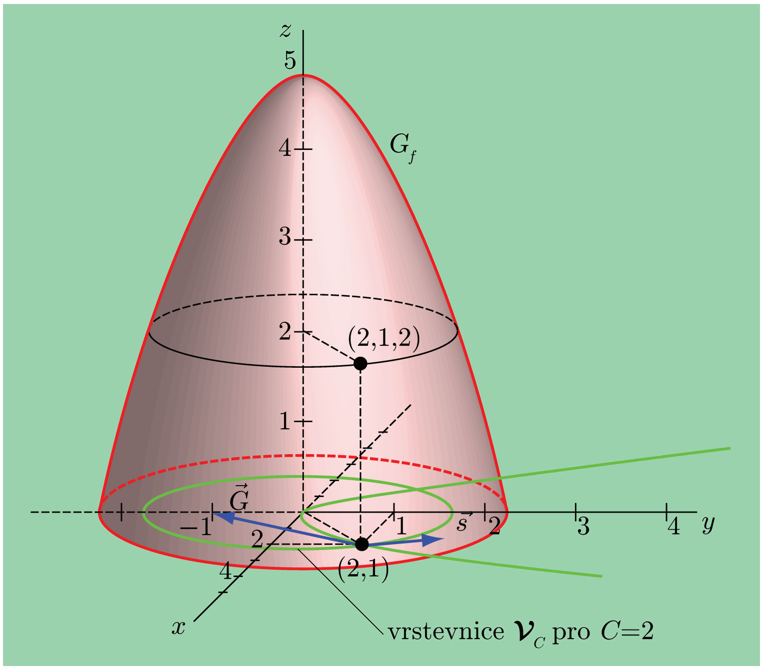
Kapitola 9

Závislosti na více parametrech aneb funkce více proměnných

Skalárními funkcemi jedné reálné proměnné jsme se zabývali velmi podrobně v prvním dílu. Umíme počítat jejich limity v bodech vlastních i nevlastních, umíme je derivovat i integrovat. Totéž dokážeme provádět i s vektorovými funkcemi jedné proměnné. Každý vektor je totiž dán svými složkami, takže každá vektorová funkce je zadána tolika „obyčejnými“ skalárními funkcemi, kolik má daný vektor složek. S vektorovými funkcemi jedné proměnné jsme pracovali při zadávání trajektorií hmotných bodů a výpočtech jejich dalších charakteristik (rychlost, zrychlení, křivost trajektorie, apod.). Tou jedinou proměnnou byl obvykle čas. Veličiny popisující objekty a děje v přírodě, ať již jsou tyto veličiny skaláry či vektory, však většinou závisí na více proměnných než jedné. Kromě času bývají typicky závislé na poloze. Vezměme třeba takové gravitační pole Země. Na čase sice nezávisí, zato však klesá s druhou mocninou vzdálenosti od středu Země. Veličina, která je charakterizuje, je buď vektorová, nebo skalární. Tou vektorovou je *gravitační zrychlení* neboli *intenzita* gravitačního pole Země, tou skalární je *potenciál*,

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\kappa \frac{M_Z}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right), \quad V(\vec{r}) = -\kappa \frac{M_Z}{r}, \quad r \geq R_Z \,.$$

V předchozích vztazích jsou M_Z a R_Z hmotnost a poloměr Země, $\vec{r}$ je polohový vektor místa, v němž pole zjišťujeme, vzhledem ke středu Země. Skalární i vektorové veličiny popisující elektrické a magnetické pole nábojů a proudů, rychlosti elementů proudící kapaliny nebo plynu a řada dalších fyzikálních veličin jsou nejen funkcemi času, ale také polohy bodu, v němž je počítáme nebo měříme. A stejně jako byly změny funkcí jedné proměnné vyjádřeny pomocí derivací, změny změn pomocí druhých derivací, atd., je třeba umět počítat i změny veličin závisejících na více proměnných. Mohou samozřejmě nastat situace, kdy se mění jen jedna z proměnných, zatímco ostatní zůstávají konstantní. Nejsnáze si takovou situaci představíme například tak, že měříme třeba elektrické pole stále ve stejném bodě prostoru, ale běží při tom čas. Pole se v daném bodě s časem mění. Nebo naopak v daném okamžiku sledujeme rozdílnost pole v bodech velmi blízkých danému bodu. Obecně se samozřejmě mění všechny proměnné a s nimi i hodnoty skalární funkce nebo složky vektorové funkce. Jak takové obecné změny co nejvýstižněji popsat, uvidíme právě v této kapitole. Setkáme se v ní s parciální derivací,



Obr. 9.28 Vrstevnice a spádnice.

tvaru $x = x(t)$, $y = y(t)$, pak vycházíme právě z tohoto požadavku, tj. $(\dot{x}, \dot{y}) = \operatorname{grad} f(x, y)$. V našem konkrétním případě je situace velmi jednoduchá. Dostaneme soustavu dvou diferenciálních rovnic, která se dokonce rozpadne na dvě samostatné rovnice pro neznámé funkce $x(t)$, $y(t)$. Ty snadno zintegrujeme:

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = -2y \implies x(t) = A\,\mathrm{e}^{-t}, \quad y(t) = B\,\mathrm{e}^{-2t},$$

A a B jsou integrační konstanty. Z parametrických rovnic spádnice snadno vyloučíme parametr umocněním $x(t)$ na druhou a vydělením.

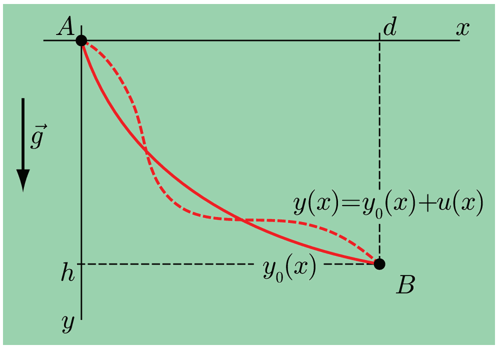
$$\frac{y}{x^2} = \frac{B}{A^2} \implies y = Kx^2, \quad K = \frac{B}{A^2}\,.$$

Spádnice jsou tedy paraboly. Konstantu K určíme, známe-li alespoň jeden bod spádnice, například (a, b). Pak $K = b/a^2$. Pro konkrétnost zvolme bod $(a, b) = (2, 1)$, který leží na vrstevnici $\mathcal{V}_C$ pro $C = 2$. Její poloosy jsou $\sqrt{6}$ a $\sqrt{3}$. Gradient funkce v daném bodě je $\vec{G}(2, 1) = (-2, -2)$, tečným vektorem k vrstevnici $\mathcal{V}_C$ je $\vec{u}(2, 1) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, jednotkový tečný vektor $\vec{s} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Doplníme ještě rovnici vrstevnice a spádnice procházející bodem $(2, 1)$:

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1, \quad y = \frac{1}{4}\,x^2\,.$$

Vše je zaznamenáno také v obrázku 9.28. A ještě jedna otázka. V mapě jsou obvykle zakresleny vrstevnice s konstantním krokem nadmořské výšky. Někde jsou vrstevnice hustší, jinde řidší. Dokážete najít souvislost mezi gradientem a hustotou vrstevnic?

Položme si ještě otázku, zda je nějaká souvislost gradientu a diferenciálu. Na první pohled se může zdát, že žádná není. Druhý, pozornější pohled však naznačuje, že se přece jen o ně-



Obr. 10.2 Úloha o brachistochroně.

tělísko potřebuje, aby po skluzavce sjelo z bodu A do bodu B, máme již k dispozici ve vztahu (7.39). Hledaný funkcionál je zobrazení, které přiřazuje funkcím z D_J odpovídající čas. Má tvar

$$J:\, D_J \ni y(x) \;\longrightarrow\; J\big[y(x)\big] = t_{AB} = \int\limits_0^d \frac{\sqrt{1+\big(y'(x)\big)^2}}{\sqrt{2gy(x)}}\,\mathrm{d}x \in \mathbf{R}\,. \tag{10.1}$$

Jak ale formulujeme *nutnou podmínku* minima, resp. obecně stacionárního bodu funkcionálu, abychom z ní dostali diferenciální rovnici, jejímž řešením získáme brachistochronu? V příkladu 7.33 jsme se tomuto problému vyhnuli použitím analogie se Snellovým zákonem. Vrátíme-li se k velmi názorné definici stacionárního bodu a funkce jedné proměnné, například $f(x)$, vidíme, že podmínka $f'(a)=0$ je ekvivalentní anulování diferenciálu funkce $f(x)$ v bodě a, tj. $\mathrm{d}f(a)(h) = 0$ pro libovolný přírůstek h proměnné x. Nutnou podmínkou stacionárního bodu a funkce $f(x)$ je tedy nulovost jejího přírůstku v lineární aproximaci pro body v okolí bodu a. Rozšíříme tuto úvahu na náš speciální případ funkcionálu (10.1).

Integrand v tomto vztahu můžeme chápat jako funkci dvou proměnných, y a y', které pro zjednodušení označme ξ a η, tj.

$$L(y,y') = \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2gy}}, \quad \longrightarrow \quad L(\xi,\eta) = \sqrt{\frac{1+\eta^2}{2g\xi}}\,.$$

Variace (změna) funkce $y(x)$ odpovídá záměně

$$y(x) \longrightarrow y(x)+\delta y(x) = y(x)+u(x)\,,\;\; y'(x) \longrightarrow y'(x)+\delta y'(x) = y'(x)+u'(x)\,,$$

nebo

$$\xi(x) \longrightarrow \xi(x)+\delta\xi(x)\,,\;\; \eta(x) \longrightarrow \eta(x)+\delta\eta(x)\,.$$

Symbol δ používáme proto, že se fakticky nejedná o změny proměnných, ale změny funkcí proměnné x. Zajímáme se o odpovídající variaci (změnu) funkcionálu $J\big[y(x)+u(x)\big]$,

$$\delta J\big[y(x)\big] = J\big[y(x)+u(x)\big] - J\big[y(x)\big] = \int\limits_0^d \Big[L\big(y(x)+u(x), y'(x)+u'(x)\big) - L\big(y(x),y'(x)\big)\Big]\,\mathrm{d}x\,.$$