

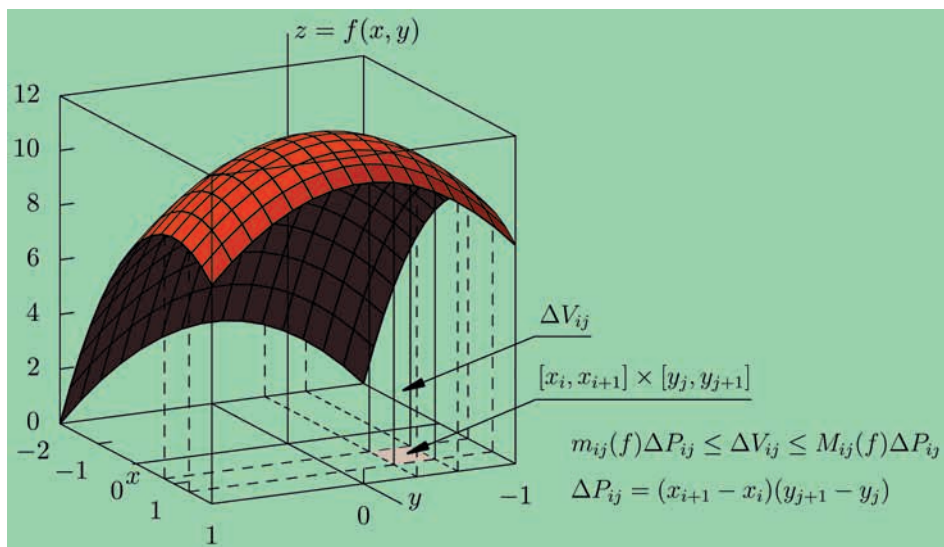
Kapitola 12

Integrace všeho druhu přinese nám ducha vzpruhu

Ještě jste integrování z druhé kapitoly v prvním dílu nezapomněli? To je dobře. Integrovat totiž potřebujeme skoro pořád nejen v matematice a fyzice, ale také v ostatních disciplínách — přírodovědných, technických, v ekonomii, a nějaký ten integrál se vyskytne i v lékařství (třeba výpočet dávky záření při vyšetření počítačovým tomografem). Základ praktického integrování s minimem teorie poskytla právě druhá kapitola. Naučili jsme se počítat neurčité integrály (primitivní funkce) a určité Riemannovy integrály ze spojitých funkcí jedné proměnné. V Dodatku K prvního dílu jsme dokonce nahlédli do kuchyně integrování „mírně“ nespojitých funkcí.

Dokážeme počítat obsahy, hmotnosti, těžiště či momenty setrvačnosti nehomogenních roviných útvarů. Jenže v praxi se takové „placaté“ útvary příliš nevyskytují. Potřebujeme umět určit obsahy, objemy, hmotnosti, těžiště, momenty setrvačnosti a další charakteristiky obecnějších a vícerozměrných útvarů, například tenzor momentu setrvačnosti prostorového tělesa, obsah plochy, která není rovinná, těžiště, momenty setrvačnosti obecného plošného útvaru, či tok intenzity třeba elektrického pole takovou plochou. Vzpomeňte, že jsme o tocích sice hovořili v druhém dílu v kapitole 9, ale nedali jsme žádný návod, jak je počítat. Možná si také vybavíte, že zmínka o dvojnásobných a trojnásobných integrálech, včetně jednoduchých ukázek, byla také v kapitole 5. Tato „okénka“ avizující budoucí problematiku však nebyla podložena solidním teoretickým základem. Jeho čas přišel nyní. I když existují různé typy integrálů, lišící se definicí a tím samozřejmě i kritérii integrability funkcí, bude základem pro náš výklad stále Riemannův integrál. Zpočátku půjde zase jen o integrál z funkcí. První zobecnění bude spočívat v tom, že to budou funkce n proměnných a jako integrační obory poslouží vhodné podmnožiny n -rozměrného euklidovského prostoru — řadu vlastností podmnožin prostoru \mathbf{R}^n jsme probrali v odstavci 9.1 (druhý díl, strany 436 až 455), pro $n = 1$ již v Dodatku F (první díl, strany 289 až 294). V takových případech mluvíme o *vícenásobném Riemannově integrálu*.

Dalším, zásadním a velmi užitečným zobecněním bude „nová“ definice Riemannova integrálu na obecnějších k -rozměrných útvarech v \mathbf{R}^n pro $1 \leq k \leq n$, v níž budou integrovanými objekty antisymetrická tenzorová pole, zvaná *diferenciální formy*. Tato definice zahrne i standardní typy křivkového integrálu, které jsme zavedli v prvních dvou dílech, a nově také plošný integrál prvního a druhého druhu, jehož integračními obory jsou plochy v \mathbf{R}^3 .

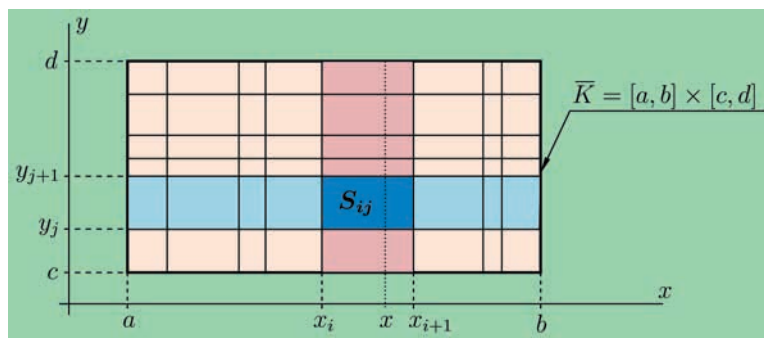


Obrázek 12.1 Výpočet objemu pomocí kvádrů.

tělesa pod grafem funkce dvou proměnných. Označme

$$D_1 = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, x_m = b\}, \quad D_2 = \{c = y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n = d\}$$

dělení intervalů $[a, b]$ a $[c, d]$. Označme $S_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, kde $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ a $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Obdélník $[a, b] \times [c, d]$ je přesně „poskládaný“ z obdélníčků S_{ij} — nic nechybí ani nepřebývá (obrázek 12.2). Vzniká tak dělení kvádrů \bar{K} , které definujeme jako dvojici $D = (D_1, D_2)$. Každý obdélník S_{ij} je kompaktní množinou. Z věty 9.3 (druhý díl,



Obrázek 12.2 Dělení obdélníka.

strana 473), víme že na něm spojitá funkce nabývá své nejmenší i největší hodnoty. Označme je $m_{ij}(f)$ a $M_{ij}(f)$. Podobně jako jsme obrazci pod grafem funkce jedné proměnné v odstavci 2.3.1 vepisovali a opisovali obdélníky, vepíšeme a opišeme nyní tělesu \bar{V} kvádry s podstavami S_{ij} o obsahích

Důkaz pro funkci $H(y)$ je zcela analogický. Dokázali jsme tedy následující větu:

Věta 12.1 (Fubiniova věta pro uzavřené dvojrozměrné kvádry a spojitě funkce dvou proměnných):

Nechť $\bar{K} = [a, b] \times [c, d]$ je dvojrozměrný uzavřený kvádr v \mathbf{R}^2 a $f(x, y)$ funkce spojitá na \bar{K} . Pak platí

$$\int_{\bar{K}} f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) \, dx \right] dy. \quad (12.5)$$

Postup, jakým jsme (matematicky korektně) dospěli k Fubiniově větě pro spojitě funkce dvou proměnných na uzavřeném obdélníku, lze v podstatě „opsat“ i pro funkce obecně n proměnných x^1, \dots, x^n spojitě na množině $\bar{K} = [a^1, b^1] \times \dots \times [a^n, b^n]$ (v dalším odstavci ji budeme nazývat *uzavřeným n -rozměrným kvádrem v \mathbf{R}^n*). Teď jste si nepochybně všimli, že na rozdíl od kapitoly 9 v druhém dílu jsme nyní očíslovali proměnné horními indexy. Má to svůj dobrý smysl, který ozřejmíme v odstavcích 12.2 a 12.3. Zatím se „logikou“ změny nezabývejme, jednoduše ji přijměme.

Věta 12.2 (Fubiniova věta pro uzavřené n -rozměrné kvádry a spojitě funkce n proměnných):

Nechť $\bar{K} = [a^1, b^1] \times \dots \times [a^n, b^n]$ je n -rozměrný uzavřený kvádr v \mathbf{R}^n a $f(x^1, \dots, x^n)$ funkce spojitá na \bar{K} . Pak platí

$$\begin{aligned} \int_{\bar{K}} f(x^1, \dots, x^n) \, dx^1 \dots dx^n &= \int_{a^1}^{b^1} \left[\dots \left[\int_{a^n}^{b^n} f(x^1, \dots, x^n) \, dx^n \right] \dots \right] dx^1 = \\ &= \int_{a^{i_1}}^{b^{i_1}} \left[\dots \left[\int_{a^{i_n}}^{b^{i_n}} f(x^1, \dots, x^n) \, dx^{i_n} \right] \dots \right] dx^{i_1}, \end{aligned} \quad (12.6)$$

kde (i_1, \dots, i_n) je libovolná permutace indexů 1 až n .

Příklad 12.2: Jedna užitečná samozřejmost

Funkce dvou či více proměnných bývá často zadána jako součin několika funkcí závislých pouze na jedné proměnné. Výpočet jejího integrálu na uzavřeném kvádru, kdy se každá z proměnných pohybuje v konstantních mezích, je pak zvlášť jednoduchý. Vyzkoušejme to na spojitě funkci dvou proměnných $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ na obdélníku $\bar{K} = [a, b] \times [c, d]$. Počítejme podle Fubiniové věty:

$k_2 = 0, \dots, N_2 - 1$. Zjemněním tohoto dělení je dělení $D' = (D'_1, D'_2)$, přičemž $D'_1 = \{a^1 = y_0^1, \dots, y_{l_1}^1, y_{l_1+1}^1 \dots, y_{N'_1}^1 = b^1\}$, $l_1 = 0, \dots, N'_1 - 1$, a $D'_2 = \{a^2 = y_0^2, \dots, y_{l_2}^2, y_{l_2+1}^2 \dots, y_{N'_2}^2 = b^2\}$, $l_2 = 0, \dots, N'_2 - 1$. Platí $N_1 \leq N'_1$, $N_2 \leq N'_2$ (dělení D'_1 , resp. D'_2 má více, nebo stejně bodů jako dělení D_1 , resp. D_2). Podstatné je, že každý bod dělení D_1 , resp. D_2 je současně prvkem množiny bodů určujících dělení D'_1 , resp. D'_2 . V našem obrázku tak splývají například body $x_{k_1}^1$ a $y_{l_1}^1$ pro jistou hodnotu k_1 a jistou hodnotu l_1 .

Příklad 12.3: Zjemňování dělení

Na obrázku 12.3 vidíme konkrétní dělení $D = (D_1, D_2)$ dvojrozměrného kvádrů $\bar{K} = [a^1, b^1] \times [a^2, b^2]$ a jeho zjemnění $D' = (D'_1, D'_2)$, kde $D_1 = \{a^1 = x_0^1, x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1, x_5^1 = b^1\}$, tj. $k_1 = 0, 1, 2, 3, 4$, a $D_2 = \{a^2 = x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2 = b^2\}$, tj. $k_2 = 0, 1, 2, 3$. Zjemnění dělení D , které jsme označili $D' = (D'_1, D'_2)$, je v obrázku dáno takto: $D'_1 = \{a^1 = y_0^1, y_1^1, y_2^1, \dots, y_9^1 = b^1\}$, tj. $l_1 = 0, 1, 2, \dots, 9$, a $D'_2 = \{a^2 = y_0^2, y_1^2, y_2^2, \dots, y_7^2 = b^2\}$, tj. $l_2 = 0, 1, 2, \dots, 7$. Platí přitom $a^1 = x_0^1 = y_0^1$, $x_1^1 = y_1^1$, $x_2^1 = y_3^1$, $x_3^1 = y_6^1$, $x_4^1 = y_8^1$, $x_5^1 = y_9^1 = b^1$, $a^2 = x_0^2 = y_0^2$, $x_1^2 = y_2^2$, $x_2^2 = y_4^2$, $x_3^2 = y_5^2$, $x_4^2 = y_7^2 = b^2$. Kvádr $S_{21} = [x_2^1, x_3^1] \times [x_1^2, x_2^2]$ původního dělení D je složen ze šesti kvádrů zjemnění D' . Tyto dílčí kvádry jsou v obrázku jen očíslovány, až na pátý, který je „identifikován“ přesně, S'_{43} .

Z příkladu vidíme, že indexování dělení obecně n -rozměrného kvádrů, či dokonce indexování zjemnění dělení, je docela složitá věc. Proto si situaci v dalším zjednodušíme. Dosud jsme o dělení kvádrů uvažovali jako o n -tici dělení jednotlivých intervalů, jejichž kartézským součinem je daný kvádr. Když jsme si však ujasnili, že dělením se uzavřený kvádr „rozporcuje“ na menší, rovněž uzavřené kvádry, které jej celý vyplní (přičemž sousední kvádry mají společné stěny), a každý kvádr zjemnění D' daného dělení D se zase přesně rozporcuje na ještě menší kvádříčky, můžeme místo dělení D uvažovat o množině všech uzavřených kvádrů, vzniklých způsobem podrobně popsáným výše, jejichž sjednocením je kvádr \bar{K} . Skutečnost, že kvádr S je prvkem takovéto množiny, zapíšeme jako $S \in D$, resp. $S' \in D'$. Tento zápis samozřejmě není úplně správný s ohledem na to, jak jsme definovali dělení D , je však zcela pochopitelný. Nebudeme proto vymýšlet žádné další značení pro tuto novou interpretaci dělení.

A ještě jednu charakteristiku kvádrů potřebujeme — jeho objem. Jistě lze považovat za přirozené, že „objemem“ uzavřeného intervalu bude jeho délka, „objemem“ uzavřeného obdélníka jeho obsah (součin délek stran), a „objemem“ uzavřeného kvádrů v trojrozměrném euklidovském prostoru, jak ho známe z elementární geometrie, jeho obvyklý objem (součin délek hran). Jistě je všem hned jasné, jak bude definován objem uzavřeného n -rozměrného kvádrů. (Pro pozdější potřebu definujeme zároveň i objem otevřeného n -rozměrného kvádrů.)

Objemem n -rozměrného uzavřeného kvádrů $\bar{K} = [a^1, b^1] \times \dots \times [a^n, b^n]$ v \mathbf{R}^n rozumíme

$$v(\bar{K}) = (b^1 - a^1)(b^2 - a^2) \dots (b^n - a^n). \quad (12.9)$$

Stejným výrazem je definován *objem n -rozměrného otevřeného kvádru*

$$K = (a^1, b^1) \times \cdots \times (a^n, b^n)$$

v \mathbf{R}^n .

Divíte se, že je objem uzavřeného kvádru definován stejně jako objem kvádru otevřeného? Možná ani ne, protože intuitivně něco takového čekáte. Uvažujme třeba o intervalech $[a, b]$ a (a, b) . Liší se pouze krajními body. Objem (délka) intervalu $[a, b]$ je $b - a$. Délka otevřeného intervalu, pokud má smysl ji definovat, určitě nebude větší. Mohla by tedy být stejná, nebo menší. Pokud bychom ji ale definovali jako menší, vyvstává otázka, o kolik. Uvědomme si, že uzavřený interval má oproti otevřenému „navíc“ jen dva body. Zvolme číslo $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak jistě $a \in [a - \frac{\varepsilon}{8}, a + \frac{\varepsilon}{8}]$, a podobně $b \in [b - \frac{\varepsilon}{8}, b + \frac{\varepsilon}{8}]$. Body a a b jsme tak „obalili“, neboli pokryli (o pokrývání množin jsme mluvili v prvním dílu v Dodatku F) uzavřenými intervaly celkové délky $\frac{\varepsilon}{2}$, tj. menší než ε . Číslo ε ovšem můžeme libovolně zmenšovat. Vidíme, že délku otevřeného intervalu buď nebude možné definovat, nebo ji bude třeba definovat stejně jako délku intervalu uzavřeného. V dalším odstavci pochopíme, proč má smysl druhá alternativa. Obdobná situace je i v prostorech vyšších dimenzí. Uzavřenému obdélníku „přebývají“ oproti otevřenému jeho strany, které lze pokrýt úzkými uzavřenými obdélníky libovolně malého obsahu, uzavřený kvádr v \mathbf{R}^3 má oproti otevřenému navíc stěny, které zase lze pokrýt placatými kvádríky libovolně malého objemu, atd.

12.1.3 Pokrývání množin a zanedbatelné množiny

Problémem pokrývání množin, konkrétně podmnožin reálné osy \mathbf{R} , jsme se tak trochu zabývali v Dodatku F prvního dílu a nyní tyto úvahy zpřesníme. Co to však znamená, že nějakou množinu lze „zanedbat“? Z praxe víme, že zanedbávat lze něco „malého“ vzhledem k něčemu „podstatně většímu“. K tomu, abychom rozhodli, co je malé a co velké, potřebujeme to nějak změřit. Jak ale měřit množiny — v našem konkrétním případě podmnožiny v \mathbf{R}^n ? Něco málo už víme z předchozího odstavce o „měření“ velikosti n -rozměrných kvádrů v \mathbf{R}^n pomocí jejich objemů. Hned vznikají otázky: první z nich je, kdy lze objem menšího kvádru „zanedbat“ proti objemu kvádru většího? Stačí k zanedbání, aby třeba menší objem byl tisícinou, milióntinou, atd. většího objemu? Tato možnost vypadá prakticky, ale v matematice takováto porovnání nejsou rozumná. Rozhodně rozumněji vypadá, když při stanovení délky intervalu (jednorozměrného kvádru) zanedbáme skutečnost, že se otevřený a uzavřený kvádr liší jen o krajní body (které jsou 0-rozměrné), otevřený a uzavřený obdélník, který je dvojrozměrným útvarům, se liší jen stranami (tj. jednorozměrnými útvary), otevřený a uzavřený kvádr v \mathbf{R}^3 zase (dvojrozměrnými) stěnami, atd. Korektní definice zanedbatelné množiny bude právě na podobné úvaze postavena. Další otázkou je, zda a jak lze „změřit“ objem množiny, která není kvádrem — takových množin je přece většina. První, co nás napadne, je „vycpat“ nějaký nepravidelný útvar co nejpřesněji malými kvádríky, jejichž objem pak bude vystihovat objem útvaru tím lépe, čím budou menší

šli jsme bázi prostoru $L(V_n, W_m)$ indukovanou bázemi zvolenými v prostorech V_n a W_m a zjistili jsme, že dimenze prostoru $L(V_n, W_m)$ je $n \cdot m$. Speciálním případem takové situace byl prostor $L(V_n, \mathbf{R})$, kde V_n je vektorový prostor nad \mathbf{R} . Těmto zobrazením jsme říkali *lineární formy* a prostoru $V_n^* = L(V_n, \mathbf{R})$ *duální prostor* prostoru V_n . Jeho dimenze je n a báze (e^1, \dots, e^n) indukovaná bází (e_1, \dots, e_n) prostoru V_n se nazývala *duální bází*. Právě prostory V_n a V_n^* jsou základem další tenzorové konstrukce. Jde o důležité pojmy, proto si je oživte na stranách 71 a 72 druhého dílu v příkladech 4.47 a 4.48. Pro každý případ nyní definice zopakujeme a ještě něco přidáme.

Nechť V_n je vektorový prostor nad polem \mathbf{R} . *Duálním prostorem* V_n^* rozumíme množinu všech lineárních zobrazení $\varphi : V_n \ni a \rightarrow \varphi(a) \in \mathbf{R}$ se standardně zavedenou strukturou vektorového prostoru. Báze duálního prostoru (e^1, \dots, e^n) indukovaná bází (e_1, \dots, e_n) vztahy (4.35), $e^i(e_j) = \delta_j^i$, se nazývá *duální báze*. Značíme také $V_n = \mathcal{T}_0^1(V_n)$, resp. $V_n^* = \mathcal{T}_1^0(V_n)$. Hovoříme o *tenzorových prostorech prvního řádu* na vektorovém prostoru V_n , v prvním případě *kontravariatních*, v druhém *kovariantních*.

Důvody alternativního značení v definici a pojem kontravariatnosti a kovariantnosti se vyjasní za chvíli. Z příkladu 4.48 si nyní připomeneme podstatu duality. Provedeme ve V_n přechod od báze (e_1, \dots, e_n) k bázi $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ s maticí přechodu $T = (T_i^j)$, $(S = T^{-1} = (S_i^j))$, $1 \leq i, j \leq n$. (Nepochybně jste si všimli, že jsme se odchýlili od symboliky čtvrté kapitoly v tom, že prvky matic přechodu budeme nyní značit T_i^j a S_i^j namísto dřívějšího značení řeckými písmeny τ_i^j a σ_i^j . To proto, že symbol τ budeme za chvíli hojně používat pro tenzory, a mohlo by docházet ke kolizi značení.) Při použití Einsteinovy symboliky píšeme transformační vztahy pro báze ve tvaru

$$\bar{e}_i = T_i^j e_j, \quad e_i = S_i^j \bar{e}_j, \quad \bar{e}^i = S_i^j e^j, \quad e^i = T_j^i \bar{e}^j. \quad (12.52)$$

Pro složky vektoru $a \in V_n$, $a = \alpha^i e_i = \bar{\alpha}^i \bar{e}_i$, resp. lineární formy $\omega \in V_n^*$, $\omega = \omega_i e^i = \bar{\omega}_i \bar{e}^i$, platí

$$\bar{\alpha}^i = \alpha^j S_j^i, \quad \alpha^i = \bar{\alpha}^j T_j^i, \quad \bar{\omega}_i = T_i^j \omega_j, \quad \omega_i = S_i^j \bar{\omega}_j, \quad (12.53)$$

nebo v maticovém zápisu při označení $(\alpha) = (\alpha^1 \ \dots \ \alpha^n)$, $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}^1 \ \dots \ \bar{\alpha}^n)$ (řádkové vektory) a $(\omega) = (\omega_1 \ \dots \ \omega_n)^T$, resp. $(\bar{\omega}) = (\bar{\omega}_1 \ \dots \ \bar{\omega}_n)^T$,

$$(\bar{\alpha}) = (\alpha)T^{-1}, \quad (\alpha) = (\bar{\alpha})T, \quad (\bar{\omega}) = T(\omega), \quad (\omega) = T^{-1}(\bar{\omega}). \quad (12.54)$$

Všechny tyto vztahy jsme poctivě odvodili v odstavci 4.1.4 (strana 32, vztah (4.13), strana 72, vztah (4.36) a příklad 4.48), proto je již pouze bez důkazu rekapitulujeme. Název „kontrava-

Divíte se, že transformační vztahy pro $\bar{\tau}_{11}$ a τ_{11} (indexy jsou dole) jsou shodné se vztahy pro $\bar{\tau}^{11}$ a τ^{11} (indexy nahore) a se vztahy pro $\bar{\tau}_1^1$ a τ_1^1 ? (A když budete pilní a propočítáte i vztahy pro ostatní složky, také zjistíte, že se pro danou dvojici indexů shodují nezávisle na typu tenzoru, tj. na umístění indexů). Bude tomu tak vždy? Bude tomu tak jen za určitých podmínek? Nebo je to dokonce úplná náhoda? Odpovědi jsou „ne“, „ano“, „ne“. Shoda se objevila proto, že v případě ortonormálních výchozích bází prostoru V_n jsou matice T a S ortogonální, a proto navzájem transponované. Složky kontravariantních, kovariantních a smíšených tenzorů se transformují stejně. Není to tedy nějaká náhoda, na druhé straně to neplatí obecně.

Prozkoumáme-li strukturu transformačních vztahů z příkladu 12.50, mohli bychom rovnou zapsat odpovídající vztahy pro tenzory libovolného typu (p, q) . Zkuste si to a porovnejte pak svůj „odhad“ s výsledkem následujícího odvození. Lineární kombinaci

$$\bar{\phi}_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = \alpha_{i_1 \dots i_p b_1 \dots b_q}^{j_1 \dots j_q a_1 \dots a_p} \phi_{a_1 \dots a_p}^{b_1 \dots b_q}$$

vyčíslíme na argumentech $(e^{k_1}, \dots, e^{k_p}, e_{l_1}, \dots, e_{l_q})$ a na pravé straně výrazu využijeme definičních vztahů (12.64) pro zobrazení $\phi_{a_1 \dots a_p}^{b_1 \dots b_q}$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} (e^{k_1}, \dots, e^{k_p}; e_{l_1}, \dots, e_{l_q}) &= \alpha_{i_1 \dots i_p b_1 \dots b_q}^{j_1 \dots j_q a_1 \dots a_p} \phi_{a_1 \dots a_p}^{b_1 \dots b_q} (e^{k_1}, \dots, e^{k_p}; e_{l_1}, \dots, e_{l_q}) = \\ &= \alpha_{i_1 \dots i_p b_1 \dots b_q}^{j_1 \dots j_q a_1 \dots a_p} \delta_{a_1}^{k_1} \dots \delta_{a_p}^{k_p} \delta_{b_1}^{l_1} \dots \delta_{b_q}^{l_q} = \alpha_{i_1 \dots i_p l_1 \dots l_q}^{j_1 \dots j_q k_1 \dots k_p}. \end{aligned}$$

Na levé straně zapíšeme vektory z báze (e_1, \dots, e_n) jako lineární kombinace báze $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ a kovektory z báze (e^1, \dots, e^n) jako lineární kombinace báze $(\bar{e}^1, \dots, \bar{e}^n)$ pomocí vztahů (12.52) a opět použijeme definiční vztahy pro prvky báze tenzorového prostoru, tentokrát $\bar{\phi}_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} (e^{k_1}, \dots, e^{k_p}; e_{l_1}, \dots, e_{l_q}) &= \bar{\phi}_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} (T_{a_1}^{k_1} \bar{e}^{a_1}, \dots, T_{a_p}^{k_p} \bar{e}^{a_p}; S_{b_1}^{l_1} \bar{e}_{b_1}, \dots, S_{b_q}^{l_q} \bar{e}_{b_q}) = \\ &= T_{a_1}^{k_1} \dots T_{a_p}^{k_p} S_{l_1}^{b_1} \dots S_{l_q}^{b_q} \delta_{i_1}^{a_1} \dots \delta_{i_p}^{a_p} \delta_{b_1}^{j_1} \dots \delta_{b_q}^{j_q} = T_{i_1}^{k_1} \dots T_{i_p}^{k_p} S_{l_1}^{j_1} \dots S_{l_q}^{j_q}. \end{aligned}$$

Porovnáním dostaneme hodnoty koeficientů lineárních kombinací

$$\alpha_{i_1 \dots i_p l_1 \dots l_q}^{j_1 \dots j_q k_1 \dots k_p} = T_{i_1}^{k_1} \dots T_{i_p}^{k_p} S_{l_1}^{j_1} \dots S_{l_q}^{j_q}$$

a převodní vztahy pro prvky báze $\{\phi_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}\} \rightarrow \{\bar{\phi}_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}\}$, $1 \leq i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \leq n$,

$$\bar{\phi}_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = (T_{i_1}^{k_1} \dots T_{i_p}^{k_p}) (S_{l_1}^{j_1} \dots S_{l_q}^{j_q}) \phi_{k_1 \dots k_p}^{l_1 \dots l_q}$$

a naopak pro $\{\bar{\phi}_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}\} \rightarrow \{\phi_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}\}$, $1 \leq i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \leq n$,

$$\phi_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = (S_{i_1}^{k_1} \dots S_{i_p}^{k_p}) (T_{l_1}^{j_1} \dots T_{l_q}^{j_q}) \bar{\phi}_{k_1 \dots k_p}^{l_1 \dots l_q}.$$

Kapitola 15

Kdy pomůže počítač aneb některé základní numerické metody

Numerické metody umožňují řešit různé typy matematických úloh, třeba algebraických či analytických, aritmetickými postupy, tj. v podstatě manipulací s čísly. V kombinaci s výpočetní technikou představují zcela samostatnou oblast matematiky. S obrovským rozvojem možností výpočetní mohutnosti osobních počítačů pronikají i tam, kde by bylo vhodnější hledat řešení přesná, resp. analytická. Jsou totiž pohodlnější. Zdá se tedy, že danou úlohu stačí pouze naprogramovat, což provede informatik, a svěřit její řešení počítači. Že by zde již matematika neměla místo? Vždyť přece existuje řada hotových programů pro řešení různých typů úloh, a ty často představují běžné softwarové vybavení dnešních počítačů. Takový názor by ovšem byl velkým omylem! „Tvůrčím prvkem“ a úlohou pro matematika zůstává volba vhodné numerické metody, která je pro řešení mnoha problémů zcela zásadní. A uživatel programů by se neměl spokojit s tím, že „hodí data do stroje a vypadnou výsledky“. Měl by podstatě výpočtů alespoň na základní úrovni porozumět, aby vůbec dokázal správný program zvolit, a aby si také dokázal s výsledky poradit, tj. správně je interpretovat.

Zkusme si uvědomit, čím se hlavně liší řešení úlohy „tužkou na papíře“ a pomocí počítače a v čem spočívají výhody či nevýhody obou přístupů.

- Tužkou na papíře můžeme provádět symbolické manipulace, zatímco počítač pracuje s čísly. I když počítačové aplikace pro symbolické manipulace existují (například MAPLE), není to vždy úplně „to pravé“. Stává se, že program neupraví výsledný výraz do nejvhodnější podoby.
- Zatímco při „ručním“ řešení úlohy často můžeme uplatnit zkušenost, nebo některé kroky přímo „vidíme“, počítači je třeba krok za krokem pomoci programem sdělit, co má dělat. Máme-li například řešit rovnici $x^2 - 3x + 2 = 0$, zkušenost nám umožní okamžitě uvidět v její levé straně kvadratický trojčlen s rozkladem $(x - 1)(x - 2)$. Počítači musíme naprogramovat celý postup řešení kvadratické rovnice: zadání koeficientů rovnice, výpočet diskriminantu (tři násobení, jedno sčítání), rozhodnutí, zda diskriminant je kladný, záporný či nulový, odmocnění diskriminantu, další sčítání a dvě dělení (různé kořeny), atd.

15.3.1 Aproximace funkcí

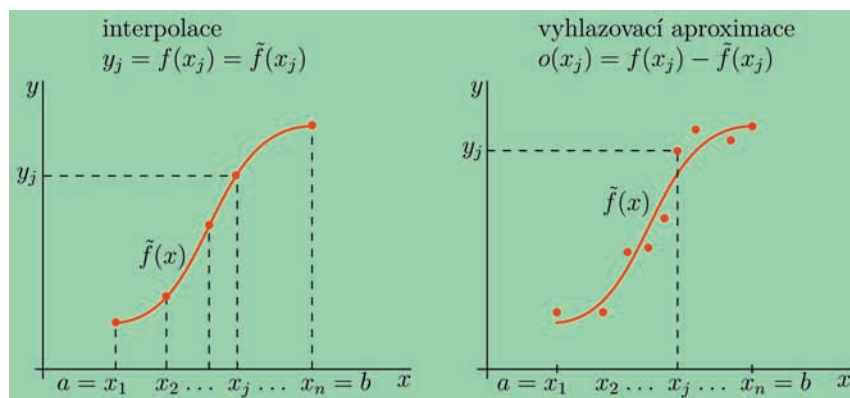
Předpokládejme, že máme k dispozici dvojice $(x_j, y_j) = (x_j, f(x_j))$, $x_j \in [a, b]$, $1 \leq j \leq n$, a hledáme hladkou funkci $\tilde{f}(x)$, například polynom, která funkci $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ aproximuje.

Konstrukce funkce $\tilde{f}(x)$ je založena na dvojm možném principu:

- shoda hodnot funkce $f(x)$ a její aproximace $\tilde{f}(x)$ ve všech bodech x_j , tj. $y_j = \tilde{f}(x_j)$, $1 \leq j \leq n$,
- přibližná shoda $y_j \doteq \tilde{f}(x_j)$, $1 \leq j \leq n$, tak, aby odchylka funkce $\tilde{f}(x)$ v bodech x_1, \dots, x_n jako celku, stanovená na základě vhodných kritérií (například jako minimum určitým způsobem definované normy funkcí) od naměřených hodnot $f(x_1), \dots, f(x_n)$ byla co nejmenší.

V prvním z obou případů se jedná o *interpolaci*, v druhém o *vyhlazovací aproximaci*. Bodům x_1, \dots, x_n v případě interpolace říkáme *uzly*.

Rozdílnost obou způsobů aproximace ukazuje schematický obrázek 15.18.



Obrázek 15.18 Interpolace versus vyhlazovací aproximace.

V případě interpolace může opět jít o situace dvojího typu:

- interpoluje se v tabulce naměřených hodnot, tj. hodnoty $(x_j, f(x_j))$ jsou získány měřením, a proto jsou zatíženy určitou chybou,
- pomocí funkce $\tilde{f}(x)$, jejíž funkční hodnoty se dobře počítají (například polynom), se interpoluje v tabulce funkčních hodnot funkce $f(x)$ napevno vypočtených v určitých bodech x_1, \dots, x_n , uložené v počítači (například již zmíněná exponenciální funkce, popřípadě funkce goniometrické, apod.).

Kapitola 16

Lineární algebra počtvrté — hrátky s operátory a maticemi

Možná si leckterý čtenář řekne, že lineární algebry už bylo dost. Jenže lineární algebry není nikdy dost, zejména pro praktické aplikace. Z předchozích algebraických kapitol, první v prvním dílu, čtvrté a šesté v druhém dílu, víme ledacos o maticích, víme ledacos o lineárních operátorech ve vektorových prostorech, ale také o jejich souvislosti. Víme, že lineární operátor je v pevně zvolené bázi vektorového prostoru V_n nad polem reálných nebo komplexních čísel, resp. v bázi vektorového prostoru se skalárním součinem (unitárního U_n nad polem komplexních čísel či euklidovského E_n nad polem reálných čísel) reprezentován čtvercovou maticí n -tého řádu osazenou komplexními, resp. reálnými čísly. Zatímco však operátor je objektem invariantním (říkáme také *geometrickým*), je reprezentující matice závislá na volbě báze. Matice A a \bar{A} reprezentující též lineární operátor v různých bázích (e_1, \dots, e_n) a $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ vektorového prostoru mají mezi sebou úzký vztah. Jsou vázány *podobnostní transformací* $\bar{A} = TAT^{-1}$, kde T je (regulární) matice přechodu od báze (e_1, \dots, e_n) k bázi $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$. (Přesvědčili jsme se o tom v odstavci 4.2.2 v druhém dílu.) V kapitolách 4 a 6 jsme se pak zabývali otázkou, za jakých podmínek lze daný lineární operátor reprezentovat nejjednodušším možným způsobem — diagonální maticí. Zjistili jsme, že tato reprezentace odpovídá bázi tvořené vlastními vektory operátoru. Také jsme zjistili, že taková báze vždy existuje pro speciální typy operátorů v unitárních, resp. euklidovských prostorech, konkrétně pro operátory unitární a samoadjungované (v U_n), resp. ortogonální (mají-li pouze reálné vlastní hodnoty) a symetrické (v E_n). Obecně však není vždy možné sestavit z vlastních vektorů bázi — někdy je prostě nezávislých vlastních vektorů málo. V této kapitole se budeme zabývat problémem reprezentace lineárního operátoru z obecnějšího hlediska než doposud. Dokonce připustíme, že vektorový prostor V_n , v němž naše operátory působí, není obecně vybaven skalárním součinem.

16.1 Co dělat, když operátor nemá diagonální reprezentaci

Pokud nelze z vlastních vektorů lineárního operátoru sestavit ve vektorovém prostoru bázi, nelze operátor reprezentovat diagonální maticí (s takovými příklady jsme se v odstavci 4.3,