

Maticový zápis (Voigtova notace):

$$\partial\{\boldsymbol{\sigma}\} + \rho\mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (1.1.11)$$

Operátor  $\partial$  má ve Voigtově notaci stejný význam jako divergenční operátor  $\nabla$  v tenzorové notaci. Uvedme jej v explicitní formě:

$$\partial = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{array} \right] \quad (1.1.12)$$

Pro lepší zapamatování upozorňujeme na symetrii levé a pravé poloviny matice a na schéma postupných derivací, které se podobá Voigtovu pravidlu:

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} & 0 & 0 & 0 & \leftarrow & \\ \text{sym.} & & 0 & & & \\ & & & \text{sym.} & & 0 \end{array} \right]$$

Operátor  $\partial$  můžeme využít i pro geometrické rovnice (míru deformace) v lineární mechanice:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \partial^T \mathbf{u} \quad (1.1.13)$$

f) Gradient

Používá se stejného operátoru  $\nabla$  (*del*) jako u divergence, ale bez tečky za operátorem  $\nabla$  pro vektor a tenzor. Gradient se také označuje grad. Gradient aplikovaný na skalár je definován výrazem

$$\nabla a \equiv \text{grad}(a) = \frac{\partial a}{\partial x_1} \mathbf{i} + \frac{\partial a}{\partial x_2} \mathbf{j} + \frac{\partial a}{\partial x_3} \mathbf{k} = \frac{\partial a}{\partial \mathbf{x}} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial a}{\partial x_1} \\ \frac{\partial a}{\partial x_2} \\ \frac{\partial a}{\partial x_3} \end{array} \right\} \quad (1.1.14)$$

a výsledkem je vektor.

$\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  jsou jednotkové vektory ve směru os  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ . V aplikaci na skalár se operátor  $\nabla$  také nazývá Hamiltonův operátor.

Aplikován na vektorové pole je nazýván „gradient vektorového pole“. Naznačuje postupné derivování vektoru podle všech souřadnic. Ukažme jeho aplikaci na vektor  $\mathbf{v}$ :

Podobně platí

$$\delta W^{\text{int}} = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} = \delta \bar{\mathbf{d}}^T \mathbf{T}_d^{-T} \mathbf{K} \mathbf{T}_d^{-1} \bar{\mathbf{d}} = \delta \bar{\mathbf{d}}^T \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{d}} \quad (1.1.107)$$

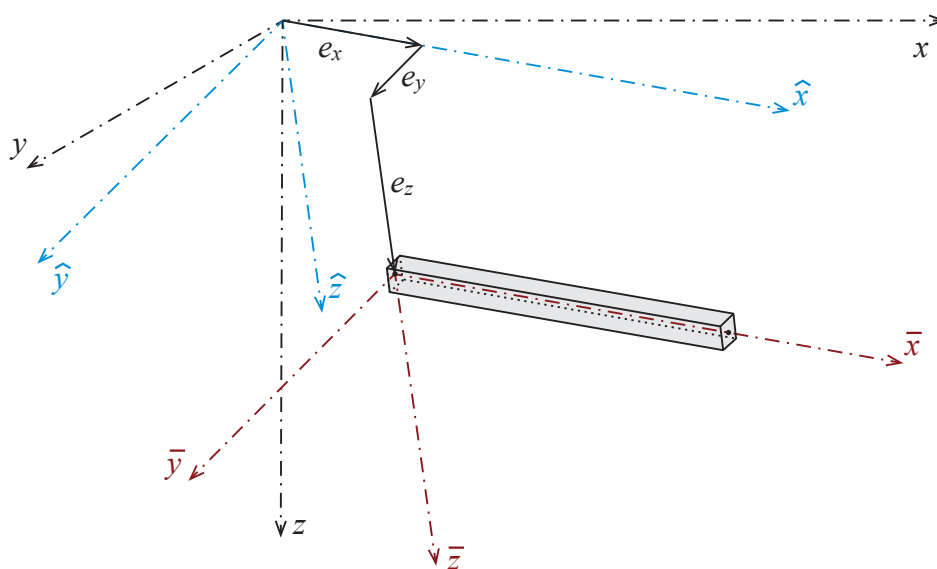
tedy

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{T}_d^{-T} \mathbf{K} \mathbf{T}_d^{-1} \quad (1.1.108)$$

Pro matici hmotnosti  $\mathbf{M}$  platí stejné transformační vztahy jako pro matici tuhosti.

Příkladem, kde transformační matice  $\mathbf{T}_d$  není ortogonální, je excentrické připojení uzlů prvku k uzlům sítě za předpokladu jejich tuhého spojení.

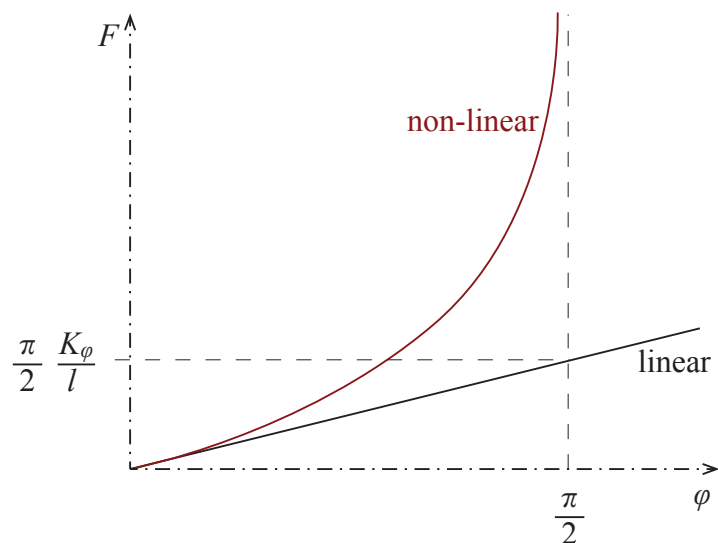
Označme globální souřadný systém s počátkem v uzlu sítě  $\mathbf{x}$  a lokální souřadný systém svázaný s daným prvkem (např. prutem)  $\bar{\mathbf{x}}$ . K odvození budeme potřebovat ještě pomocný souřadný systém  $\hat{\mathbf{x}}$ , který je rovnoběžný s  $\bar{\mathbf{x}}$ , ale má počátek v uzlu sítě.



Obr. 1.2 Excentrické připojení uzlu prvku k uzlu sítě s excentricitami v lokálních souřadnicích prvku, globální a lokální souřadný systém

Definujme v souřadných systémech  $\mathbf{x}$ ,  $\hat{\mathbf{x}}$  a  $\bar{\mathbf{x}}$  vektory parametrů deformace  $\mathbf{d}$ ,  $\hat{\mathbf{d}}$  a  $\bar{\mathbf{d}}$  a tak, že nejdříve jsou uvedeny složky vektoru posunutí uzlu a pak složky vektoru rotace. (Je třeba poznamenat, že rotace přesně vzato není vektor. Pro složky rotace neplatí totiž komutativní zákon. V linearitě však tuto vlastnost mlčky předpokládáme. Implikuje ji totiž princip superpozice. Pro dostatečně malé rotace je však možno rotaci považovat s dostatečnou přesností za vektor. Pracujeme-li s většími rotacemi, je třeba řešit úlohu v dostatečně malých přírůstcích, aby v rámci přírůstku všechny předpoklady linearity, včetně komutativního zákona pro složky rotace, platily.)

Vztah mezi parametry deformace  $\bar{\mathbf{d}}$  definované v  $\bar{\mathbf{x}}$  a parametry  $\hat{\mathbf{d}}$  definované v  $\hat{\mathbf{x}}$  můžeme potom vyjádřit následovně:



Obr. 1.5 Lineární a nelineární vztah mezi silou a pootočením u pružně vetknuté konzoly

Z obr. 1.5 je patrna nesmyslnost lineárního řešení při větším pootočení.

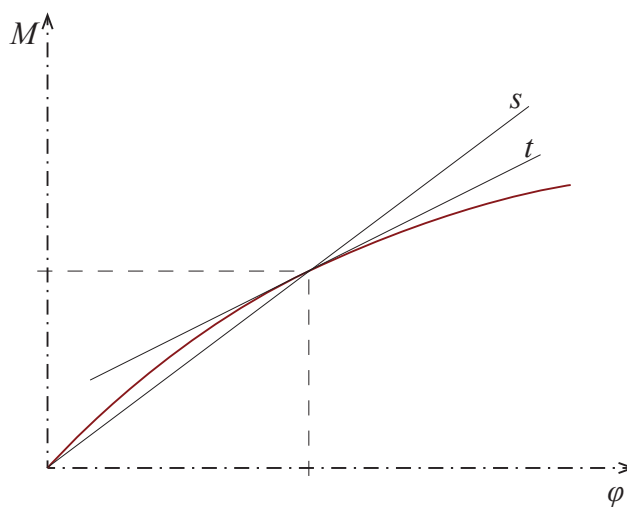
Fyzikální nelinearitu bychom do příkladu zavedli nelineárním vztahem mezi momentem a pootočením:

$$M = K_s(\varphi)\varphi$$

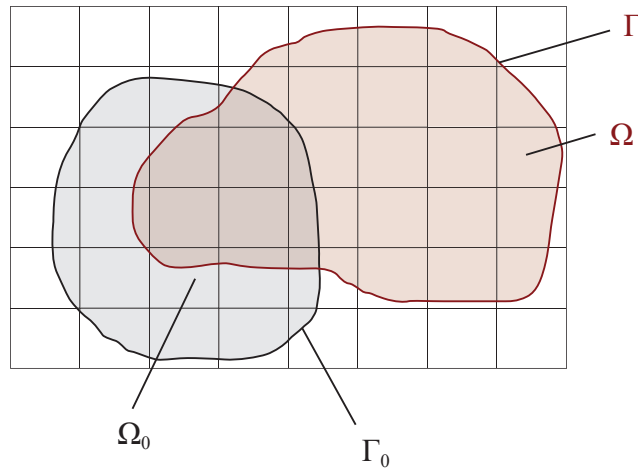
kde tuhost vetknutí  $K_s$  je funkcí pootočení  $\varphi$ . V tomto případě je  $K_s(\varphi)$  tzv. sečnová tuhost. Pokud bychom tento vztah definovali diferenciálně

$$dM = K_T(\varphi) d\varphi$$

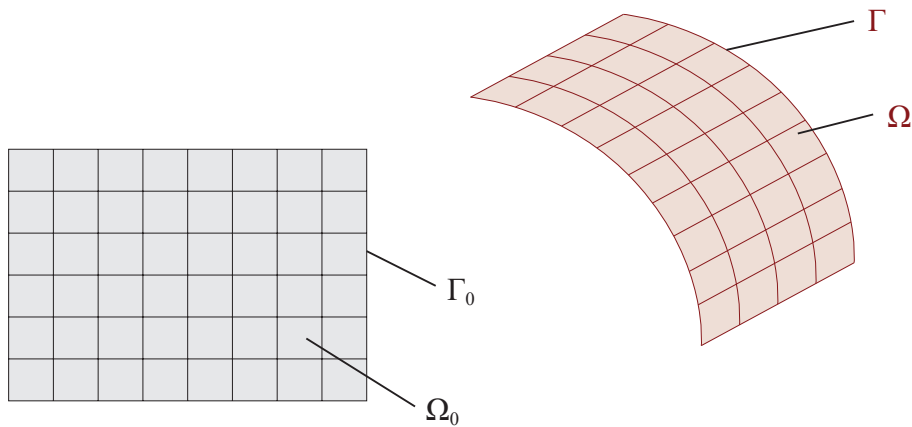
šlo by o tzv. tečnou tuhost.



Obr. 1.6 Nelineární pracovní diagram pružného vetknutí

**Eulerovská síť**

Obr. 1.7 Eulerovská síť konečných prvků

**Lagrangeovská síť**

Obr. 1.8 Lagrangeovská síť konečných prvků

**1.4 DIFERENCIÁLNÍ A VARIČNÍ FORMULACE V MECHANICE TĚLES****1.4.1 Diferenciální formulace**

Diferenciální formulace je silná formulace. Jde o formulaci úlohy pomocí diferenciálních rovnic s příslušnými okrajovými nebo počátečními podmínkami. Tato formulace je silná, protože klade větší (silnější) požadavky na hledanou neznámou funkci (např. pole posuvů) ve srovnání s integrální formulací.

**1.4.2 Variační formulace**

Variační formulace definuje úlohu jako extremizaci nějakého funkcionálu. Pokud je úloha definována diferenciální rovnicí (tedy silnou formulací), pak můžeme variační formulaci této úlohy označit

## 2 GEOMETRICKÁ NELINEARITA

### 2.1 ZÁKLADNÍ POJMY

#### 2.1.1 Souřadné systémy v nelineární mechanice

Je účelné definovat dva základní souřadné systémy používané v geometricky nelineární analýze. **Prostorové** (nebo také Eulerovské event. globální) souřadnice budeme označovat  $\mathbf{x}$ . Určí polohu bodu v prostoru. **Materiálové** (nebo také Lagrangeovské event. lokální) souřadnice, které budeme označovat  $\mathbf{X}$ , označují bod tělesa. Každý materiálový bod je definován jedním vektorem materiálových souřadnic, který se při pohybu bodu v prostoru nemění. Materiálové souřadnice jsou obvykle totožné s prostorovými souřadnicemi v počáteční (obvykle nedeformované) konfiguraci tělesa.

#### Lagrangeovský popis posunutí

Nechť  $\mathbf{E}_i$  jsou jednotkové vektory báze materiálových souřadnic  $\mathbf{X}$  a  $\mathbf{e}_i$  jsou jednotkové vektory báze prostorových souřadnic  $\mathbf{x}$ . Potom můžeme posunutí hmotného bodu v prostoru  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$  v prostorových souřadnicích definovat Lagrangeovským popisem následovně:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = u_i \mathbf{e}_i \quad (2.1.1)$$

S užitím materiálových a prostorových souřadnic hmotného bodu můžeme pro pohyb bodu psát:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{b}(t) + \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (2.1.2)$$

nebo indexově

$$u_i = \alpha_{i,j} b_j + x_i - \alpha_{i,j} X_j \quad (2.1.3)$$

$\mathbf{b}(t)$  je vektor posunutí počátku souřadné soustavy  $\mathbf{X}$  od počátku souřadné soustavy  $\mathbf{x}$ .

Definujme materiálový gradient vektoru posunutí  $\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}$ , který je tvořen parciálními derivacemi vektoru posunutí podle materiálových souřadnic:

$$\nabla_0 \mathbf{u} \equiv \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{x} - \mathbf{I} = \mathbf{F} - \mathbf{I} \quad (2.1.4)$$

nebo

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_K} = \frac{\partial x_i}{\partial X_K} - \delta_{iK} = F_{iK} - \delta_{iK} \quad (2.1.5)$$

Tenzor  $\mathbf{F}$  se nazývá deformační gradient.

potom můžeme napsat vztah

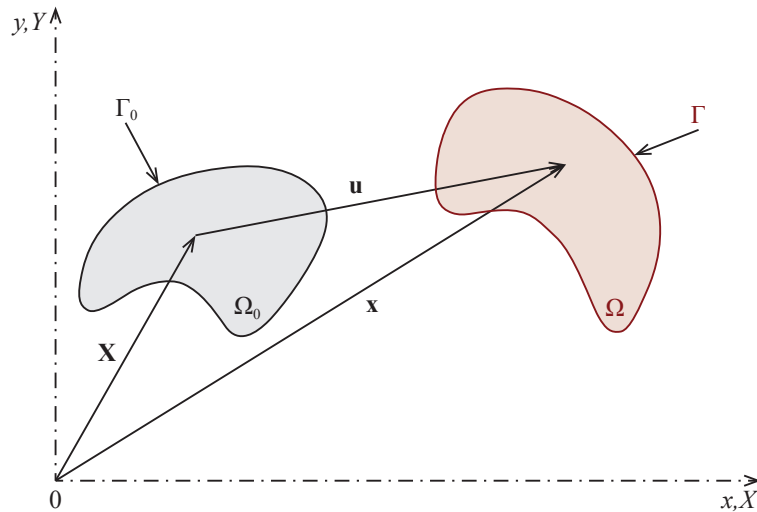
$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = u_i \mathbf{e}_i = u_i \alpha_{iJ} \mathbf{E}_J = U_J \mathbf{E}_J = \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) \quad (2.1.15)$$

V případě, že počátek materiálových a prostorových souřadnic je totožný a neuvažujeme-li časový faktor, můžeme Lagrangeovský popis posunutí hmotných bodů napsat jednodušeji. Posunutí bodu v prostoru je potom definováno vektorem

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (2.1.16)$$

Platí také

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u} \quad (2.1.17)$$



Obr. 2.1 Nedeformovaná (počáteční) a deformovaná (běžná) konfigurace tělesa

### **Pohyb, rychlost a zrychlení**

**Pohyb** tělesa je popsán

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}, t) \quad \text{nebo} \quad x_i = \phi_i(\mathbf{X}, t) \quad (2.1.18)$$

kde  $\mathbf{x}$  je poloha materiálového bodu  $\mathbf{X}$  v čase  $t$ . Souřadnice  $x_i$  popisuje polohu bodu v prostoru a jsou nazývány prostorové, nebo také Eulerovské souřadnice. Funkce  $\Phi(\mathbf{X}, t)$  mapuje počáteční, neboli referenční souřadnice na běžné souřadnice v čase  $t$ , což je nazýváno mapování z počáteční do běžné konfigurace (push forward). Pro  $t = 0$  platí

$$\mathbf{X} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, 0) \equiv \Phi(\mathbf{X}, 0) \quad \text{nebo} \quad X_i = x_i(\mathbf{X}, 0) = \phi_i(\mathbf{X}, 0) \quad (2.1.19)$$

Posunutí hmotného bodu je dáno rozdílem mezi jeho běžnou polohou a jeho počáteční polohou.

Je možno ukázat, že platí

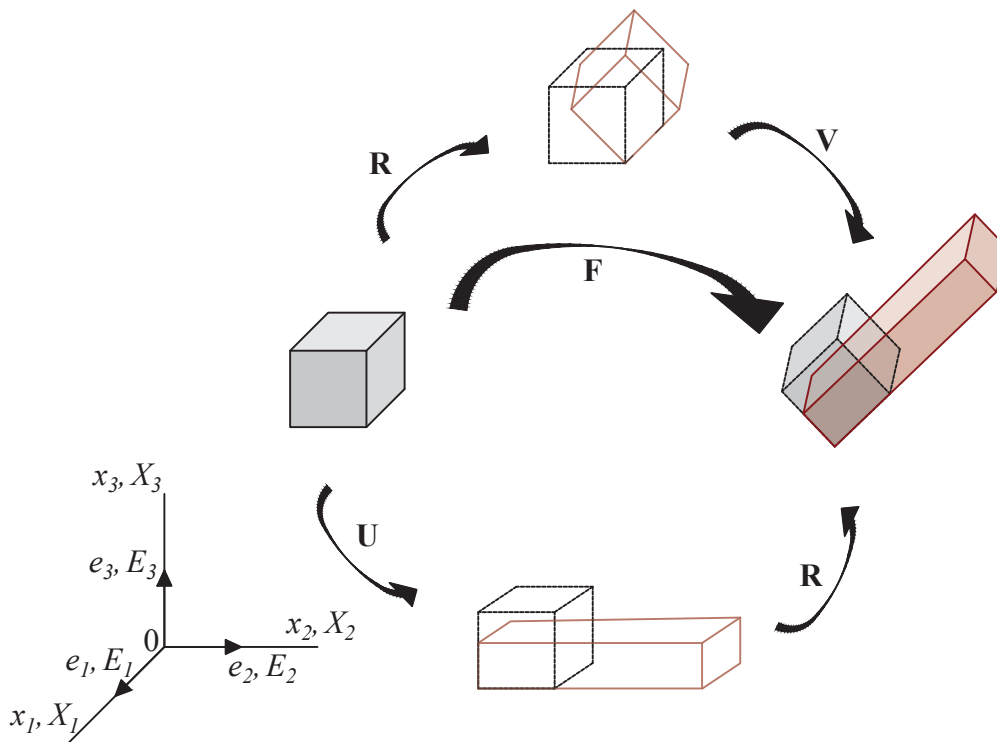
$$\nabla_0 \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{X}) \mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 6X_2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -6x_2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

### 2.1.3 Polární dekompozice deformačního gradientu

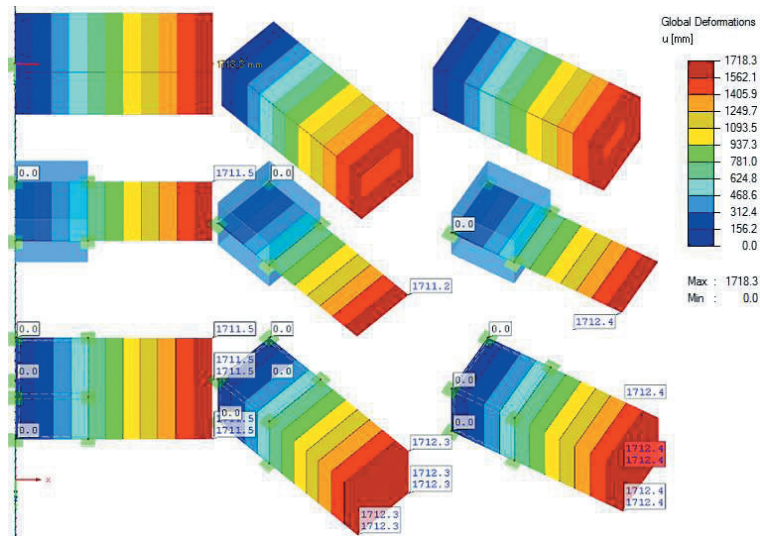
Vztah mezi původní a výslednou konfigurací, který je dán deformačním gradientem  $\mathbf{F}$ , lze rozdělit na rotaci danou tenzorem  $\mathbf{R}$  rotace a deformaci danou buď pravým stretch tenzorem  $\mathbf{U}$ , nebo levým stretch tenzorem  $\mathbf{V}$ . Záleží, jestli je v infinitezimální části tělesa myšleně provedena nejdříve rotace a potom deformace, nebo naopak. Vztahy mezi deformačním gradientem  $\mathbf{F}$  a tenzory  $\mathbf{U}$  a  $\mathbf{V}$  můžeme tedy popsat následující rovnicí:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (2.1.59)$$

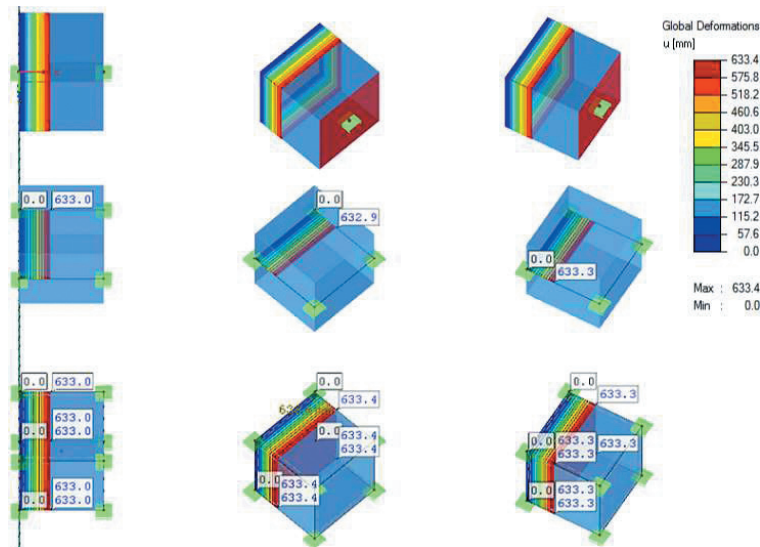
Tedy buď je provedena nejdříve deformace  $\mathbf{U}$  a potom rotace  $\mathbf{R}$ , nebo nejdříve rotace  $\mathbf{R}$  a potom deformace  $\mathbf{V}$ , jak je schematicky vyjádřeno na obr. 2.4.



Obr. 2.4. Schematické zobrazení polární dekompozice



Obr. 2.13 Velikost posunutí od zatížení napětím o hodnotě působící na dvou protějších plochách



Obr. 2.14 Velikost posunutí od zatížení napětím o hodnotě působící na dvou protějších plochách

### Srovnání konvergence standardního a nového algoritmu

Nechť posloupnost  $\{u_n\}$  konverguje k  $u_c$ . Jestliže pro kladné číslo  $p \geq 1$  a konstantu  $\lambda > 0 \wedge \lambda < \infty$  platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_n - u_c|}{|u_{n-1} - u_c|^p} = \lambda \quad (2.7.102)$$

potom  $p$  se nazývá řád konvergence posloupnosti. Konstanta  $\lambda$  se nazývá asymptotická chyba. Jestliže  $p$  je velké, posloupnost  $\{u_n\}$  konverguje rychle k  $u_c$ . Jestliže  $p = 1$ , konvergence je lineární. Jestliže  $p = 2$ , potom jde o kvadratickou konvergenci, a jestliže  $p = 3$ , jedná se o konvergenci kubickou, atd. Posloupnosti nejčastěji konvergují lineárně, nebo kvadraticky. Kvadratická konvergence je dostačující pro výpočetně efektivní numerické metody.



### 3.1 JEDNOOŠÁ NAPJATOST

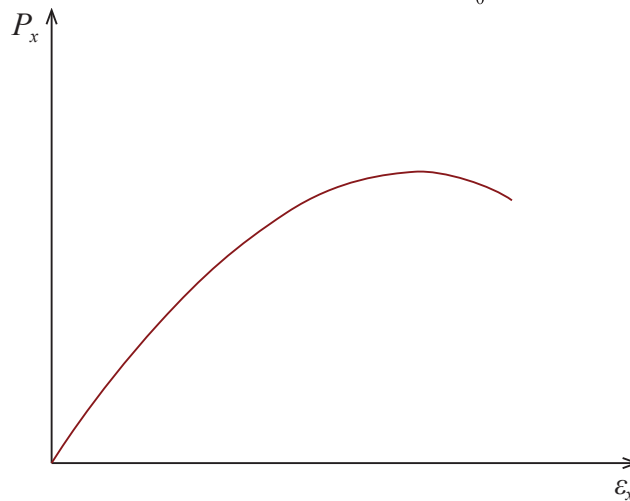
Pro uvedení do problematiky uvažme nejdříve případ jednoosé napjatosti. Mějme prut o počáteční délce  $l_0$  a počáteční průřezové ploše  $A_0$ . Zatížíme-li prut osovou silou  $F$ , dostaneme nominální (inženýrské) napětí (totožné s prvním napětím Piola-Kirchhoff pro 1D).

$$\boxed{N_x = P_x = \frac{F}{A_0}} \quad (3.1.1)$$

Inženýrská (lineární) deformace je definována vztahem

$$\varepsilon_x = \frac{\delta l}{l_0} = \lambda_x - 1 \quad (3.1.2)$$

kde  $\delta l$  je protažení prutu a  $\lambda_x$  je roztažení prutu (stretch)  $\lambda_x = \frac{l}{l_0}$ .



Obr. 3.1 Vztah mezi inženýrskou deformací a inženýrskou napjatostí

Alternativně může být odezva také vyjádřena ve vztahu ke skutečnému napětí. Skutečné (Cauchyho) napětí je dáno výrazem

$$\sigma_x = \frac{F}{A} \quad (3.1.3)$$

kde  $A$  je běžná plocha, tj. proměnná v průběhu roztahování prutu.

Alternativní míra deformace je odvozena uvážením přírůstku deformace jako změny délky na jednotku běžné délky, tj.

### 1.4.4 Příklad Mechanism2-shell

Podobná konstrukce jako v příkladu Mechanism 2, ale modelovaná skořepinovými prvky. Po deformaci musí plochy spojené nezatíženým kloubem ležet v jedné rovině.

