

Nahrazení dané soustavy sil F_1, F_2, \dots, F_n výslednicí – rezultantou R

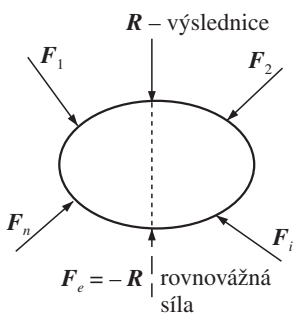
Danou soustavu sil F_1, F_2, \dots, F_n nahrazujeme výsledným účinkem, tj. výslednicí R (silou nebo dvojicí sil – momentem, příp. silou a momentem), která má na těleso stejný účinek jako daná soustava sil. Lze to vyjádřit rovnicí

$$\mathbf{R} \cong (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n), \quad (1.4)$$

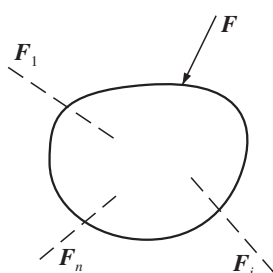
nebo ve vektorovém zápisu

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n \quad (1.5)$$

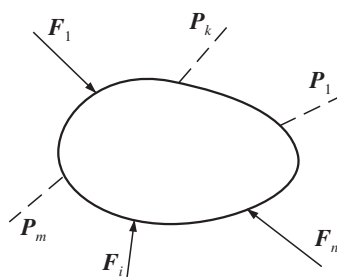
a pravíme, že výslednice R je ekvivalentní s danou soustavou sil F_1, F_2, \dots, F_n (obr. 1.7). Proces nahrazení soustavy sil její výslednicí je tzv. *skládání sil* a podmínky – vztahy mezi silovou soustavou a její výslednicí nazýváme **podmínky ekvivalence**.



Obr. 1.7. Výslednice R a rovnovážná síla F_e dané soustavy sil



Obr. 1.8. Nahrazení a zrušení dané síly F soustavou sil



Obr. 1.9. Nahrazení a zrušení jedné soustavy sil jinou soustavou sil

S použitím podmínek ekvivalence lze také řešit úlohy:

- nahrazení (rozklad) dané síly F soustavou sil F_i ($i = 1, 2, \dots, n$) zadaných paprsky (obr. 1.8) podle vztahu

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n, \quad (1.6)$$

- nahrazení dané soustavy sil F_i ($i = 1, 2, \dots, n$) jinou soustavou sil P_k ($k = 1, 2, \dots, m$) se zadanými paprsky podle obr. 1.9; platí

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \sum_{k=1}^m \mathbf{P}_k. \quad (1.7)$$

Zrušení dané soustavy sil F_1, F_2, \dots, F_n rovnovážnou silou F_e

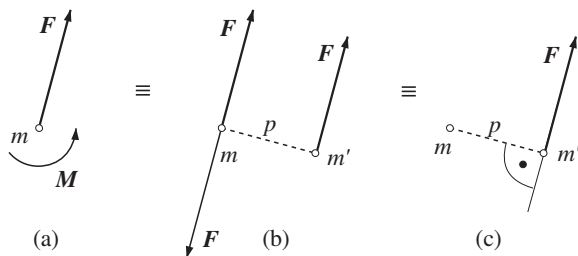
Rovnovážná síla F_e (obr. 1.7) uvádí danou soustavu sil F_1, F_2, \dots, F_n do rovnováhy, tj. do nulového výsledného účinku, což lze vyjádřit rovnicí

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n, \mathbf{F}_e) \cong \mathbf{0}, \quad (1.8)$$

nebo ve vektorovém zápisu

$$(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n) + \mathbf{F}_e = \mathbf{0}. \quad (1.9)$$

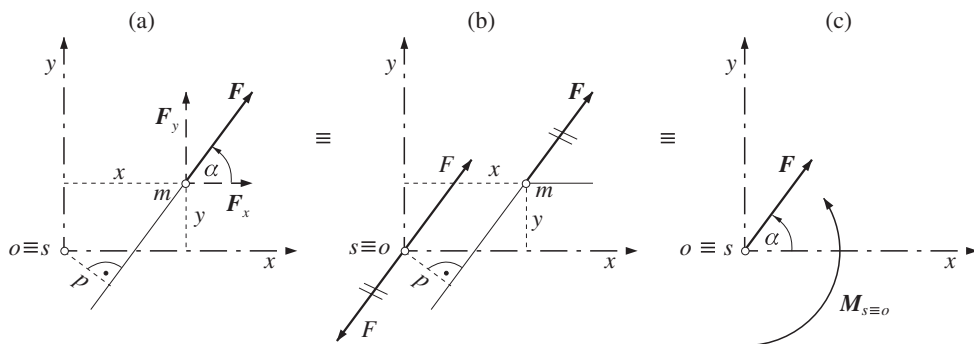
Rovnovážná síla F_e ruší účinek soustavy sil F_i ($i = 1, 2, \dots, n$) a je rovna záporně vzaté výslednici R dané soustavy sil



Obr. 2.14. Síla a dvojice sil

Redukce síly k bodu

Každou sílu F s působištěm m (obr. 2.15a) lze v rovině nahradit silou F stejné velikosti, směru a smyslu působící v libovolném bodu $s \equiv o$ (obr. 2.15c) a dvojicí sil, jejíž moment M_s je roven statickému momentu původní dané síly F k bodu s , tj. $M_s = Fp$.

Obr. 2.15. Rovnoběžné posunutí síly F do libovolného bodu s

Nahradíme-li sílu F pravoúhlými složkami $F_x = F \cos \alpha$, $F_y = F \sin \alpha$ rovnoběžnými se souřadnicovými osami x , y (obr. 2.15a) a přeložíme-li je rovnoběžně do počátku $o \equiv s$ souřadnicového systému, nutno přidat dvě dvojice sil o výsledném momentu $M_{o \equiv s}$ rovném algebraickému součtu statických momentů složek F_x , F_y k počátku $o \equiv s$

$$M_{o \equiv s} = F_y x - F_x y = F (x \sin \alpha - y \cos \alpha). \quad (2.25)$$

Příklad 2.11

Přeložte sílu $F = 5$ kN o směrovém úhlu $\alpha = 60^\circ$ z působiště m o souřadnicích $x = 5$ m, $y = 3$ m do počátku souřadnic o (obr. 2.15a).

Řešení

Po přeložení pravoúhlých složek F_x , F_y síly F do souřadnicových os x , y a počátku o nutno přidat podle (2.25) statický moment

$$M_{o \equiv s} = 5 (5 \sin 60^\circ - 3 \cos 60^\circ) = 14,15 \text{ kNm}.$$

Varignonova věta

Statický moment síly F (výslednice R libovolné prostorové soustavy sil) k momentové ose O je roven *algebraickému součtu* statických momentů jejích složek (jednotlivých sil soustavy) k téže ose.

Statický moment síly F k souřadnicovým osám x, y, z a k počátku souřadnic o

Nahradíme-li sílu F v působišti $m(x, y, z)$ ekvivalentně třemi pravouhlými složkami

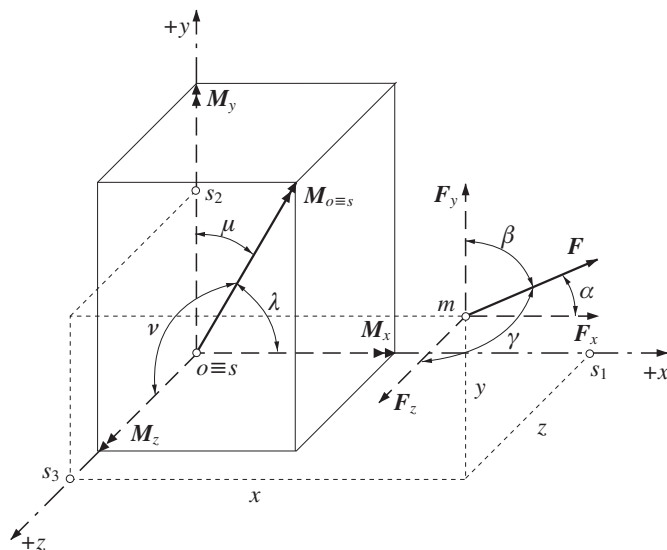
$$F_x = F \cos \alpha, \quad F_y = F \cos \beta, \quad F_z = F \cos \gamma \quad (3.15)$$

rovnoběžnými se souřadnicovými osami x, y, z (obr. 3.6), budou velikosti statických momentů M_x, M_y, M_z síly F k osám x, y, z představovány výrazy

$$\begin{aligned} M_x &= M_{s_1} = F_z y - F_y z = F(y \cos \gamma - z \cos \beta), \\ M_y &= M_{s_2} = F_x z - F_z x = F(z \cos \alpha - x \cos \gamma), \\ M_z &= M_{s_3} = F_y x - F_x y = F(x \cos \beta - y \cos \alpha). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Na smysly otáčení pravouhlých složek F_x, F_y, F_z síly F kolem momentových os x, y, z se díváme proti hrotům kladných souřadnicových os $+x, +y, +z$.

Vektory M_x, M_y, M_z statických momentů síly F k souřadnicovým osám x, y, z jsou nakresleny na obr. 3.6 přerušovanými čarami. Jejich počáteční body (působiště) mohou ležet v kterémkoliv bodu souřadnicových os x, y, z a na obr. 3.6 jsou vztyčeny v počátku souřadnic o . Vektorovým součtem statických momentů M_x, M_y, M_z síly F k souřadnicovým osám x, y, z dostáváme vektor statického momentu $M_{o \equiv s}$ síly F k bodu $o \equiv s$. Vektor momentu $M_{o \equiv s}$ je co do velikosti a směru určen tělesovou úhlopříčkou hranolu o hranách M_x, M_y, M_z (obr. 3.6). Má velikost



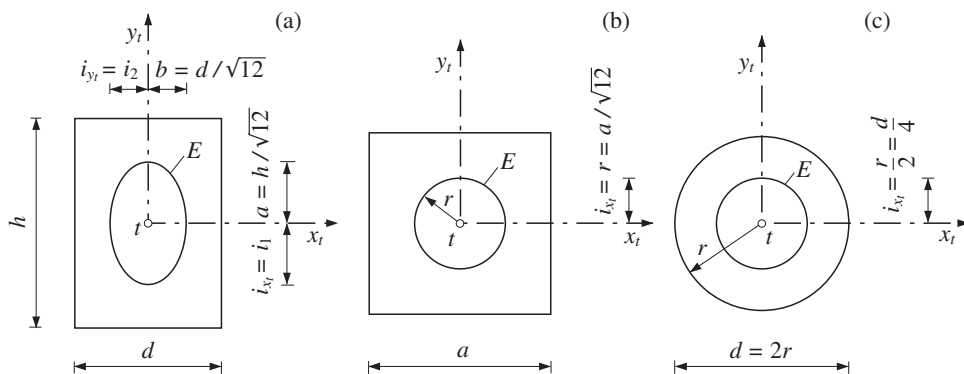
Obr. 3.6. Statický moment síly k osám x, y, z a k počátku o

Hlavní osy elipsy jsou hlavními osami setrvačnosti obrazce x_0, y_0 a příslušné hlavní poloosy elipsy jsou představovány hlavními poloměry setrvačnosti i_{x_0}, i_{y_0} (obr. 5.14). Elipsa setrvačnosti sestrojená pro těžiště obrazce se nazývá **centrální elipsa setrvačnosti** a její poloosy tvoří hlavní centrální poloměry setrvačnosti.

Příklad 5.12

S použitím výsledků z příkladů 5.10 a 5.11 stanovte tvary centrálních elips setrvačnosti:

- obdélníku o stranách d, h (obr. 5.15a),
- čtverce o straně a (obr. 5.15b),
- kruhu o poloměru r (obr. 5.15c).



Obr. 5.15. Centrální elipsy setrvačnosti jednoduchých obrazců

Řešení

dané úlohy je nakresleno na obr. 5.15. *Centrální elipsou* setrvačnosti obrazců s více než dvěma osami symetrie (čtverec, kruh, pravidelný mnohoúhelník) je *kružnice*, viz obr. 5.15b, c.

Příklad 5.13

Stanovte elipsu setrvačnosti pro bod o obdélníkového průřezu z příkladu 5.9.

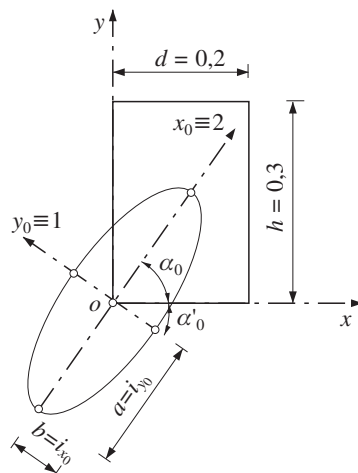
Řešení

Z hlavních momentů setrvačnosti I_{x_0}, I_{y_0} získáme pomocí vztahu (5.39) hlavní poloměry setrvačnosti

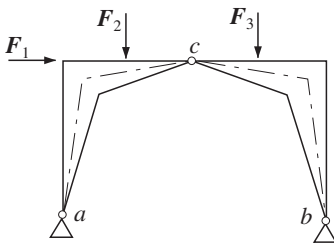
$$a = i_{\max} = i_{y_0} = \sqrt{\frac{23,296 \cdot 10^{-4}}{0,2 \cdot 0,3}} = 0,197 \text{ m,}$$

$$b = i_{\min} = i_{x_0} = \sqrt{\frac{2,704 \cdot 10^{-4}}{0,2 \cdot 0,3}} = 0,067 \text{ m,}$$

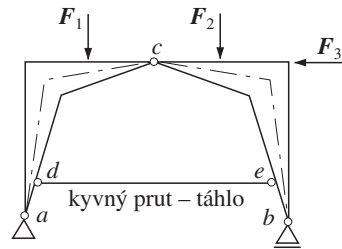
které jsou poloosami elipsy (obr. 5.16).



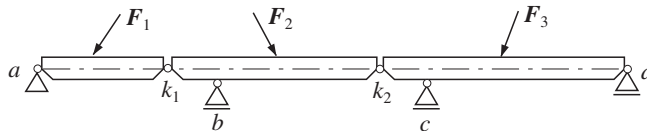
Obr. 5.16. Elipsa setrvačnosti pro bod o



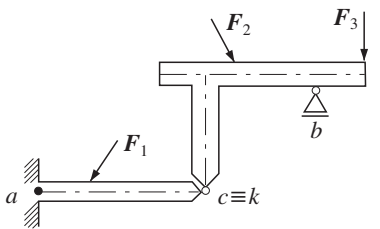
Obr. 6.32.



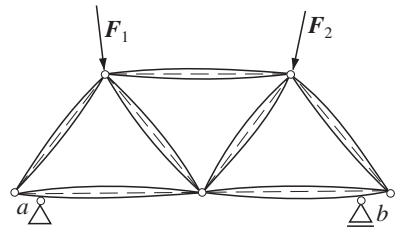
Obr. 6.33.



Obr. 6.34.



Obr. 6.35.



Obr. 6.36.

Nahradíme-li u složených rovinných deskových soustav na obr. 6.32 až 6.36 jednotlivé desky pruty či nosníky, dostáváme složené rovinné prutové (nosníkové) soustavy, které jsou detailně vyšetřovány v kapitolách 12 a 13.

Příklad 6.7

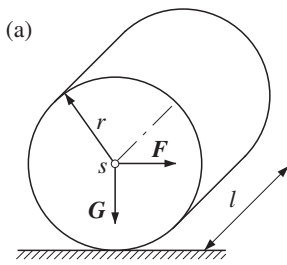
Stanovte složky reakcí R_{ax} , R_{ay} , R_{bx} , R_{by} vnějších pevných kloubů a , b a interakcí R_{cx} , R_{cy} vnitřního kloubu c trojkloubové deskové soustavy bez táhla na obr. 6.32 pro zatížení $F_1 = 2 \text{ kN}$, $F_2 = 3 \text{ kN}$, $F_3 = 4 \text{ kN}$ a geometrii soustavy podle obr. 6.37.

Řešení

Pro uvolněné části složené deskové soustavy na obr. 6.37 lze napsat po třech statických podmínkách rovnováhy (2.33).

Levá část:

- 1) $\sum {}^I F_{ix} = 0$: $R_{ax} - R_{cx} + F_1 = 0$,
- 2) $\sum {}^I F_{iy} = 0$: $R_{ay} + R_{cy} - F_2 = 0$,
- 3) $\sum {}^I M_{ic} = 0$: $R_{ax} \cdot 4 - R_{ay} \cdot 4 + F_2 \cdot 2 = 0$.



$$\begin{aligned} 1) \quad \sum F_{ix} &= 0 & : & \quad F - R_t = 0, \\ 2) \quad \sum F_{iy} &= 0 & : & \quad -G + R_n = 0, \\ 3) \quad \sum M_{is} &= 0 & : & \quad -R_t r + R_n a' = 0. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Z prvních dvou podmínek plynou velikosti složek reakcí

$$R_t = F, \quad R_n = G \quad (8.10)$$

a z třetí pak vztah, který musí splňovat síla F , aby zůstal váleček v klidu

$$R_t = F = \frac{a'}{r} R_n. \quad (8.11)$$

Maximální hodnotu parametru

$$a' = r \frac{F}{R_n} = r \frac{F}{G}, \quad (8.12)$$

za kterého zůstane váleček zatížený vodorovnou silou F v klidu, nazýváme *parametrem valivého tření* – odporu

$$a = \max a'. \quad (8.13)$$

Obr. 8.4. Kruhový váleček na vodorovné podložce

Podle Coulomba je parametr a nezávislý na délce l , poloměru r a tíze G válce, ale závisí především na materiálu podložky i válce, na stavu jejich povrchu a na zatížení válce.

Čím je materiál válce a podložky tvrdší, tím je velikost parametru a menší. *Coulombův zákon o valivém tření* lze formulovat takto:

„Třecí síla T při valivém pohybu válce může dosáhnout, s přihlédnutím ke vztahům (8.11), (8.13), maximální hodnoty

$$T = \frac{a}{r} N = f' N, \quad (8.14)$$

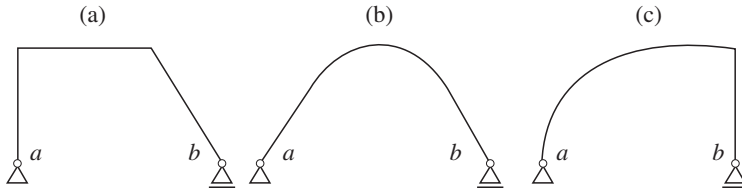
kde a je parametr valivého tření, r je poloměr válce, N je síla přitlačující váleček k podložce a $f' = a/r$ je součinitel smykového tření při valivém pohybu“.

Coulombův zákon (8.14) platí jen přibližně, neboť odpor tření valivého je závislý na velmi mnoha faktorech. Uvedme hodnoty parametru valivého tření a pro některé kombinace materiálů:

	a (mm)
měkká ocel na měkké oceli	0,5
tvrdá ocel na tvrdé oceli	0,05
tvrdé dřevo na tvrdém dřevu	0,5 až 0,8
pneumatika na dlažbě	10
pneumatika na asfaltu	10 až 15

Odpor tření valivého je značně menší než u tření smykového.

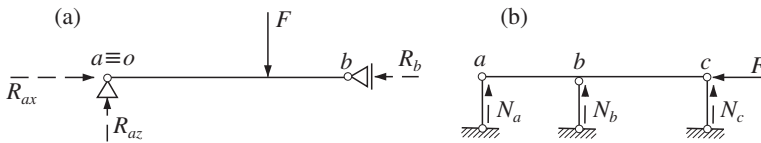
V případě, že síla $F > aGr$, vyvodí se třecí síla $T = f'G$ a váleček se po podložce současně valí i smýká.



Obr. 11.3. Prostý nosník s různými tvary střednice

Pro statickou a kinematickou určitost, neurčitost a přeúčitost podepření rovinného nosníku platí totéž co pro podepření tuhé desky v rovině (viz odstavce 6.1 a 6.3).

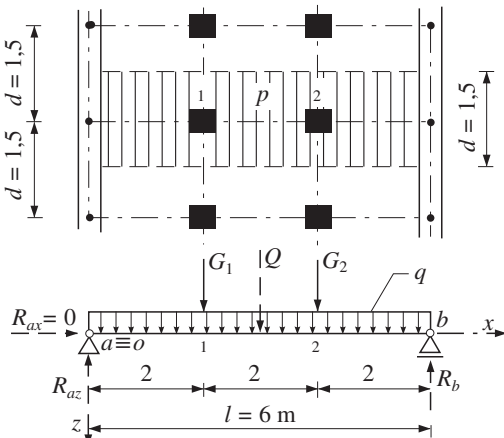
Při **výjimečném případě podepření** rovinného nosníku je determinant D soustavy tří lineárních rovnic – statických podmínek rovnováhy (11.2) nebo (11.3) pro určení složek reakcí vazeb – roven nule (obr. 11.4).



Obr. 11.4. Výjimečné případy podepření nosníku

Nosník na obr. 11.4a se může potočit kolem pevného kloubu a a u nosníku na obr. 11.4b dochází k vodorovnému posunutí všech tří podporových průřezů a, b, c .

11.3. Numerické příklady na výpočet reakcí vazeb nosníků



Obr. 11.5. Vodorovný stropní prostý nosník

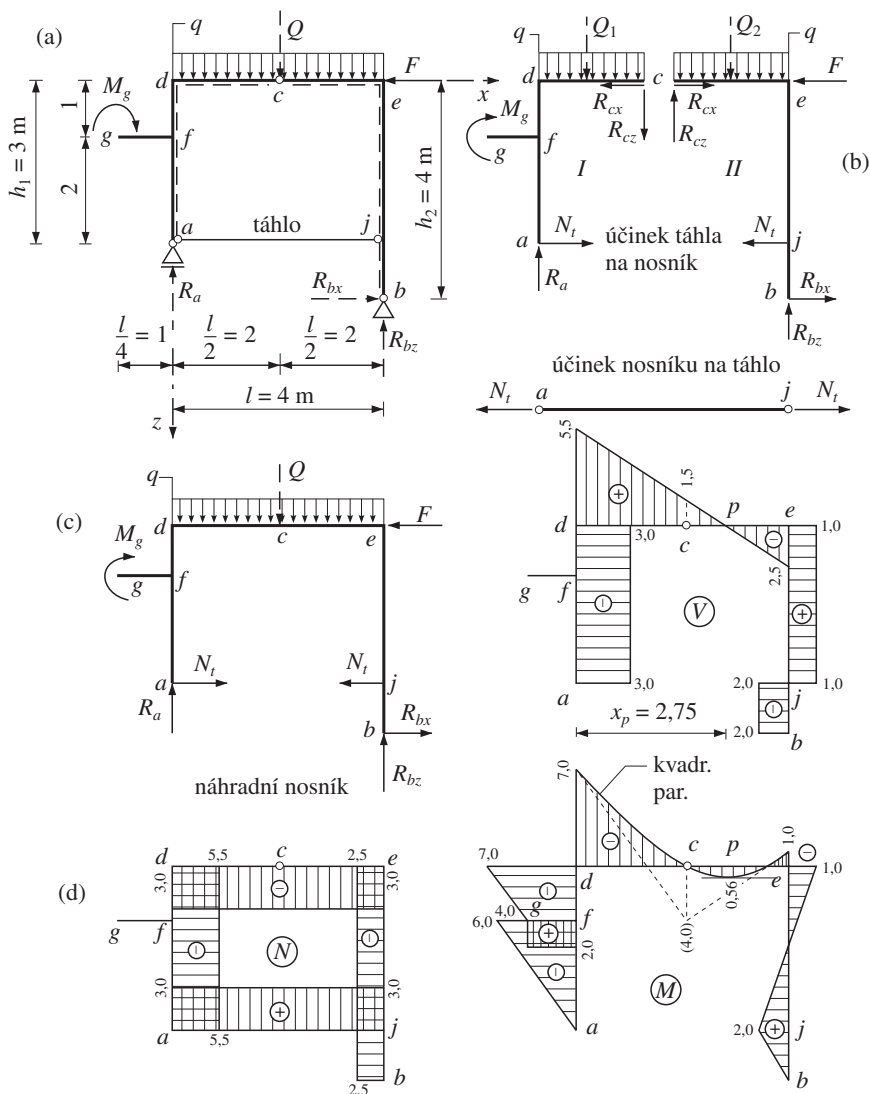
Příklad 11.1

Stanovte reakce podporových vazeb *vodorovného prostého nosníku* (obr. 11.5), nesoucího strop s rovnoměrným zatížením $p = 6,6 \text{ kNm}^{-2}$ a dva sloupy o tíhových silách $G_1 = 40 \text{ kN}$, $G_2 = 20 \text{ kN}$.

Řešení

Na jeden běžný metr stropního nosníku připadá zatížení $q = pd = 6,6 \cdot 1,5 = 10 \text{ kNm}^{-1}$.

Každý nosník je zatížen spojitým rovnoměrným příčným zatížením q a osamělými břemeny G_1, G_2 v místech sloupů (obr. 11.5). Pro výpočet složek reakcí vazeb R_{ax}, R_{az}, R_b lze spojitě rovnoměrné zatížení q nahradit



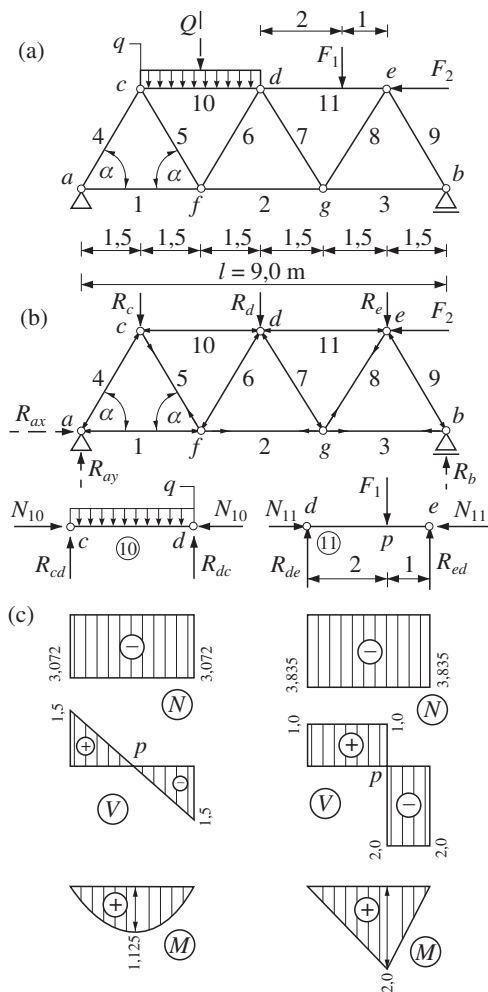
Obr. 12.2. Trojkloubový lomený nosník s táhlem

Složky reakcí vnějších vazeb R_a, R_{bx}, R_{bz} nosníku (obr. 12.2a) z podmínek rovnováhy (12.6)

$$\sum F_{ix} = 0: \quad R_{bx} - F = 0 \Rightarrow R_{bx} = F = 2 \text{ kN} (\rightarrow),$$

$$\sum M_{ia} = 0: \quad R_{bx} \cdot 1 + R_{bz} \cdot 4 - Q \cdot 2 + F \cdot 3 - M_g = 0 \Rightarrow R_{bz} = 2,5 \text{ kN} (\uparrow),$$

$$\sum M_{ib} = 0: \quad -R_a \cdot 4 + Q \cdot 2 + F \cdot 4 - M_g = 0 \Rightarrow R_a = 5,5 \text{ kN} (\uparrow).$$



Obr. 13.19. Prutová soustava s mimostyčným zatížením

Řešení

Výslednice spojitého rovnoměrného příčného zatížení na prutu 10

$$R = Q = ql_{10} = 1 \cdot 3 = 3 \text{ kN}.$$

Nahrazení mimostyčného břemene Q a F_1 na prutu 10 a 11 náhradními styčnickovými břemeny

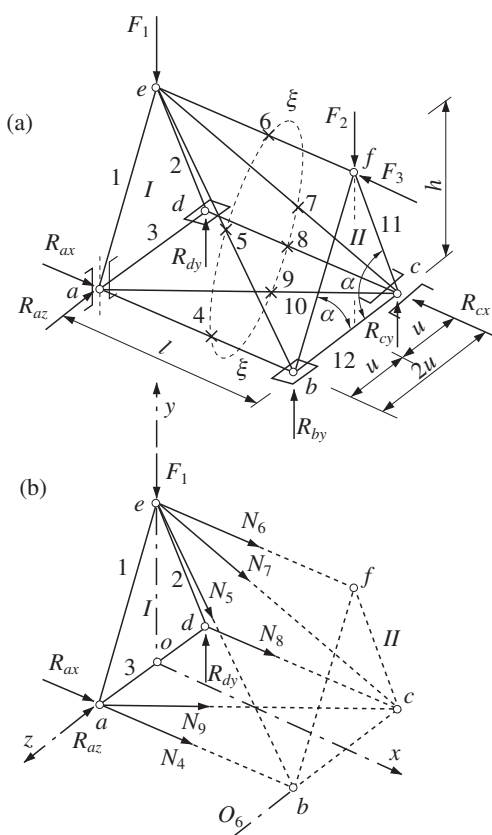
$$R_{cd} = R_{dc} = 0,5Q = 1,5 \text{ kN},$$

$$R_{de} = \frac{1}{3}F_1 = 1 \text{ kN}, \quad R_{ed} = \frac{2}{3}F_1 = 2 \text{ kN}.$$

Výsledná svislá náhradní styčnicková břemena od mimostyčného zatížení prutů 10 a 11

16.3. Průsečná metoda

16.3.1. Podstata klasické průsečné metody



Obr. 16.4. Řešení prutové soustavy průsečnou metodou

Uvažujme prostorovou kloubovou prutovou soustavu na obr. 16.4a, která je zevně i jako celek staticky a kinematicky určitá. Složky reakcí vnějších vazeb R_{ax} , R_{az} , R_{by} , R_{cx} , R_{cy} , R_{dy} stanovíme že šesti statických podmínek rovnováhy celku (3.58). Řezem (rovinou) $\xi-\xi$ protněme šest prutů 4, 5, 6, 7, 8, 9, jejichž osy se neprotínají na jedné přímce, který nám rozdělí prutovou soustavu na dvě části I a II. Uvolněme nyní jednu, např. levou část I prutové soustavy od řezu $\xi-\xi$ a působení pravé části II na část I nahradme neznámými osovými silami N_k protnutých prutů $k = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ (obr. 16.4b), o nichž předpokládáme, že jsou tahové. Tyto osové síly spolu s vypočtenými složkami podporových reakcí a daným styčnickovým zatížením, působícím na uvolněnou část I, tvoří *obecnou rovnovážnou prostorovou soustavu sil* (viz odstavec 3.7). Pro takovou soustavu můžeme napsat šest statických podmínek rovnováhy a z nich stanovit velikosti osových sil N_k ($k = 4, 5, 6, 7, 8, 9$).

Při obecném geometrickém tvaru a zatížení prutové konstrukce je řešení neznámých osových sil N_k ze šesti všeobecných statických podmínek rovnováhy (3.58) pracné a zdlouhavé. Tuto nevýhodu odstraňuje *Ritterova úprava průsečné metody*.

16.3.2. Průsečná metoda v Ritterově úpravě

V Ritterově úpravě průsečné metody řešíme neznámé osové síly prutů protatých řezem $\xi-\xi$ z momentových podmínek rovnováhy k tzv. *přidruženým momentovým osám*. V momentových podmínkách k těmto osám se vyskytují z neznámých pouze osové síly těch prutů, které osy neprotínají nebo nejsou s nimi rovnoběžné. Tak např. u prutové soustavy na obr. 16.4 je přímka \overline{de} přidruženou momentovou osou dvou sil N_4 a N_9 , neboť paprsky osových sil N_5 , N_6 , N_7 , N_8 prutů 5, 6, 7, 8 osu \overline{de} protínají. V nejuvhodnějším případě lze nalézt