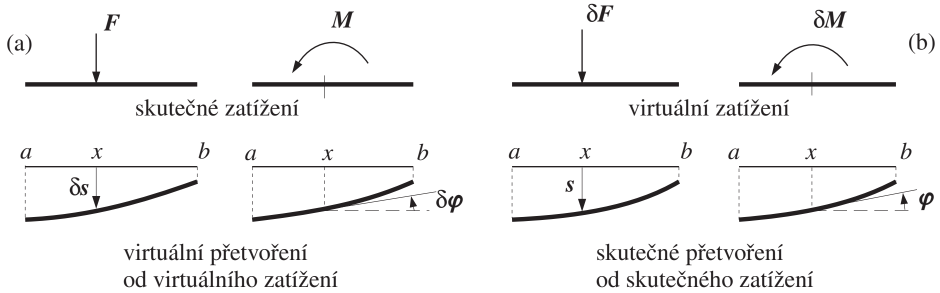
metodou (v odstavci 1.3) a odvodíme diferenciální rovnici ohybové čáry rovinného nosníku (v odstavci 1.2).

1.1.1. Pojem virtuálního přetvoření, zatížení a virtuální práce

Virtuálním přetvořením tělesa rozumíme přetvoření velmi malé, fiktivní, myšlené avšak možné, které nastává vždy v souladu s vnějšími a vnitřními vazbami tělesa (obr. 1.2).

V praktických aplikacích pokládáme za virtuální přetvoření např. pružnou deformaci nosníku (posunutí $\delta \boldsymbol{s}$ a pootočení $\delta \boldsymbol{\varphi}$ průřezu) vyvolanou virtuálním zatížením.

Virtuální zatížení (síla $\delta \boldsymbol{F}$, moment $\delta \boldsymbol{M}$, ...) je zatížení fiktivní, myšlené avšak možné a mohlo by skutečně na pružném tělese působit. Jeho velikost není na rozdíl od virtuálního přetvoření omezena a v praktických aplikacích ho pro jednoduchost a snadnost řešení volíme $\delta F = 1$ nebo $\delta M = 1$ (viz odstavec 1.1.7).



Obr. 1.2. Virtuální práce síly a momentu

Přetvoření tělesa, vyvolané virtuálním zatížením, nazýváme virtuální přetvoření tělesa (obr. 1.2).

Virtuální práce síly je práce virtuální síly $\delta \boldsymbol{F}$ na reálném (skutečném) posunutí $\boldsymbol{s}$ tělesa (obr. 1.2b)

$$\delta L = \delta \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s} = \delta F s \,. \tag{1.1}$$

Virtuální práce momentu (dvojice sil) je pak práce virtuálního momentu $\delta \boldsymbol{M}$ na skutečném pootočení $\boldsymbol{\varphi}$ (obr. 1.2b)

$$\delta L = \delta \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\varphi} = \delta M \varphi \,. \tag{1.2}$$

U **virtuální práce tuhých**, tj. nedeformovatelných, **těles** (viz kapitola 7 prvního dílu učebnice) volíme za virtuální veličiny posunutí tělesa $\delta \boldsymbol{s}$ a pootočení – rotaci – tělesa $\delta \boldsymbol{\varphi}$.

Virtuální práce síly je pak práce reálné (skutečné) síly $\boldsymbol{F}$ na virtuálním posunutí tělesa $\delta \boldsymbol{s}$ (obr. 1.2a)

$$\delta L = \boldsymbol{F} \cdot \delta \boldsymbol{s} = F \delta s \tag{1.3}$$

Ze statických tabulek [10] získáme $I = 9{,}79 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^4$ a potom

$$w_f = \frac{260}{2{,}1 \cdot 10^8 \cdot 9{,}79 \cdot 10^{-5}} = 0{,}0126\ \mathrm{m}\ (\downarrow)\ .$$

Příklad 1.7

Stanovte vodorovné posunutí u_a průřezu a prostého lomeného nosníku (obr. 1.18a) s pruty konstantního průřezu $b/h = 0{,}3/0{,}4$ m o délkách $l_1 = 5$ m, $l_2 = 4$ m pro *nerovnoměrnou změnu teploty* prutů. Horní vlákna všech prutů se oteplí o $\Delta t_h = 10$ °C a spodní o $\Delta t_d = 20$ °C.

Řešení

Na vyšetřovaném nosníku necháme působit postupně dva zatěžovací stavy:

1) skutečný, tj. daná nerovnoměrná změna teploty,
2) virtuální, představovaný silou $\overline{F}_a = 1$ působící v průřezu a ve směru hledaného posunutí.

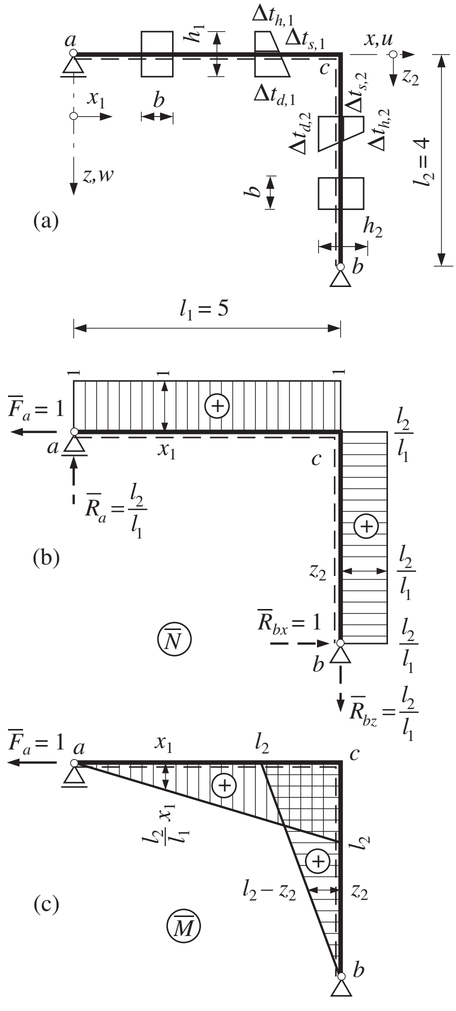
Virtuální síla $\overline{F}_a = 1$ vyvolává složky reakcí vnějších vazeb $\overline{R}_a$, $\overline{R}_{bx}$, $\overline{R}_{bz}$, pomocí nichž nakreslíme obrazce normálových sil $\overline{N}$ (obr. 1.18b) a ohybových momentů $\overline{M}$ (obr. 1.18c).

Vztah pro vodorovné posunutí u_a průřezu a odvodíme ze čtvrtého a pátého členu Maxwellova-Mohrova vzorce (1.36). Platí obecně

$$u_a = \int_0^s \overline{N}\alpha_t \Delta t_0\,\mathrm{d}s + \int_0^s \overline{M}\alpha_t \frac{\Delta t_1}{h}\,\mathrm{d}s =$$

$$= \alpha_t \left[\Delta t_{0,1} \int_0^{l_1} \overline{N}(x_1)\mathrm{d}x_1 + \Delta t_{0,2} \int_0^{l_2} \overline{N}(z_2)\mathrm{d}z_2 \right] +$$

$$+ \alpha_t \left[\frac{\Delta t_{1,1}}{h_1} \int_0^{l_1} \overline{M}(x_1)\mathrm{d}x_1 + \frac{\Delta t_{1,2}}{h_2} \int_0^{l_2} \overline{M}(z_2)\mathrm{d}z_2 \right].$$



Obr. 1.18. Nerovnoměrná změna teploty na prostém nosníku

Uvážíme-li, že

$$\Delta t_{h,1} = \Delta t_{h,2} = \Delta t_h = 10\ °\mathrm{C},$$
$$\Delta t_{d,1} = \Delta t_{d,2} = \Delta t_d = 20\ °\mathrm{C},$$
$$h_1 = h_2 = h, \quad \alpha_t = 1{,}0 \cdot 10^{-5}\,(°\mathrm{C})^{-1},$$
$$\Delta t_{0,1} = \Delta t_{0,2} = \Delta t_s = \frac{1}{2}(\Delta t_d + \Delta t_h) = 15\ °\mathrm{C},$$
$$\Delta t_{1,1} = \Delta t_{1,2} = \Delta t_1 = \Delta t_d - \Delta t_h = 10\ °\mathrm{C},$$

Příklad 1.17

Stanovte deformační veličiny φ_a, φ_b, φ_c, w_c na prostém nosníku stálého průřezu s převislým koncem pro spojité rovnoměrné příčné zatížení q na obr. 1.29a.

Řešení

Momentový obrazec M od daného zatížení q má v části $\overline{ab}$ tvar kvadratické paraboly s maximální pořadnicí

$$M_{\max} = M_d = \frac{1}{8} q l^2 .$$

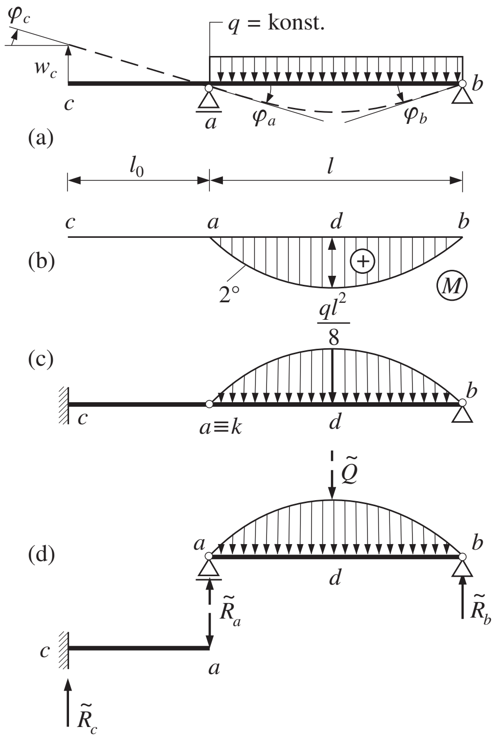
Fiktivní nosník je představován Gerberovým nosníkem, který je i se zatížením uveden na obr. 1.29c. Pro výpočet jeho reakcí $\tilde{R}_a$, $\tilde{R}_b$, $\tilde{R}_c$ je nosník rozdělen na základní část $\overline{ca}$ a vedlejší část $\overline{ab}$ (obr. 1.29d). Reakce fiktivního nosníku mají velikosti

$$\tilde{R}_a = \hat{R}_b = \frac{1}{2}\tilde{Q} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{ql^2}{8}\cdot l = \frac{ql^3}{24},$$

$$\tilde{R}_c = \tilde{R}_a = \frac{ql^3}{24}.$$

Ohybový moment $\tilde{M}_c$ v průřezu c fiktivního nosníku je

$$\tilde{M}_c = -\tilde{R}_a \cdot l_0 = -\frac{ql^3 l_0}{24}.$$



Obr. 1.29. Deformace prostého nosníku s převislým koncem

Pootočení průřezů a, b, c a průhyb volného konce c prostého nosníku (obr. 1.29a):

$$\varphi_a = \frac{\tilde{V}_a}{EI} = \frac{\tilde{R}_a}{EI} = \frac{ql^3}{24EI}\,(\circlearrowleft), \quad \varphi_b = -\varphi_a = -\frac{ql^3}{24EI}\,(\circlearrowright),$$

$$\varphi_c = \frac{\tilde{V}_c}{EI} = \frac{\tilde{R}_a}{EI} = \varphi_a, \quad w_c = \frac{\tilde{M}_c}{EI} = -\frac{ql^3 l_0}{24EI}\,(\uparrow).$$

1.4. Příčinkové čáry deformačních veličin plnostěnného nosníku

1.4.1. Příčinková čára posunutí průřezu

„Příčinková čára průhybu w_m průřezu m plnostěnného nosníku (obr. 1.30a) je ohybová čára nosníku vyvozená silou $F = 1$ působící v průřezu m (obr. 1.30b)“.

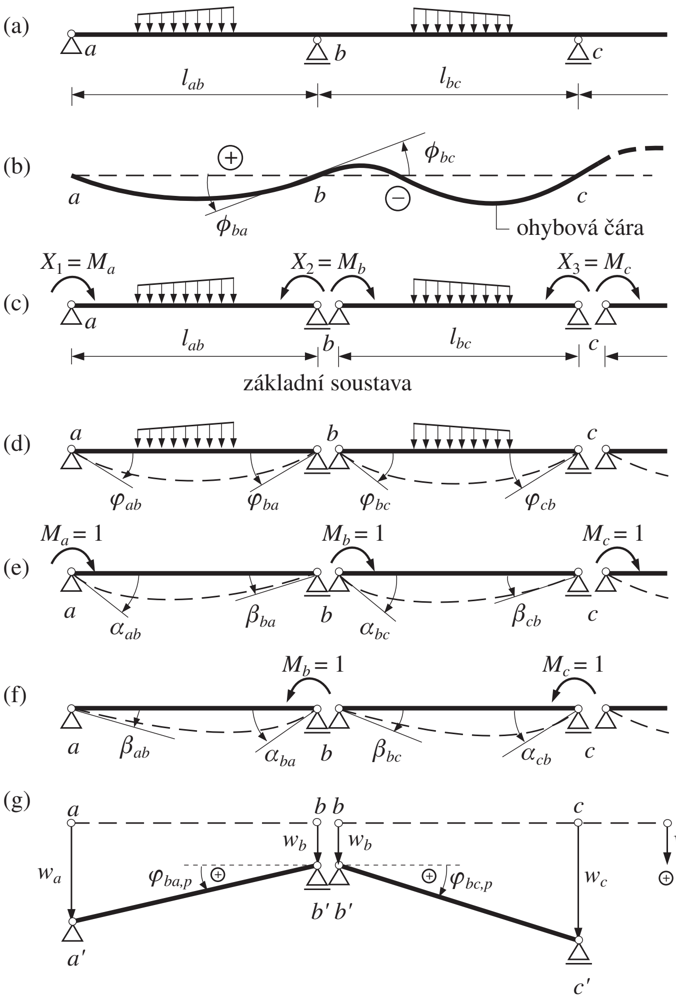
Podle Bettiho věty o vzájemnosti virtuálních prací platí

$$F\eta = F w_m .$$

5.2. Řešení spojitého nosníku metodou třímomentových rovnic

5.2.1. Odvození třímomentové rovnice

Metoda třímomentových rovnic je *metoda silová*, která volí za staticky neurčité veličiny X_i ($i = 1, 2, ... , n_s$) spojitého nosníku (obr. 5.2a) podporové momenty M_a, M_b, M_c, ... ve vetknutí a nad vnitřními podporami. Základní staticky určitá soustava (obr. 5.2c) je tvořena soustavou prostých nosníků v počtu rovném počtu polí spojitého nosníku a o rozpětích rovných rozpětím polí spojitého nosníku.

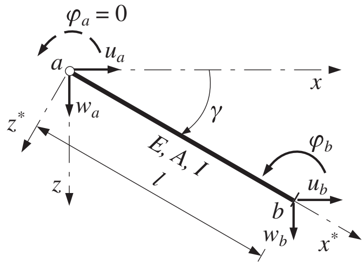


Obr. 5.2. Základní staticky určitá soustava spojitého nosníku

Tabulka 11.4. Globální matice tuhosti prutu konstantního průřezu (pokračování)

(c) Prut levostranně kloubově připojený

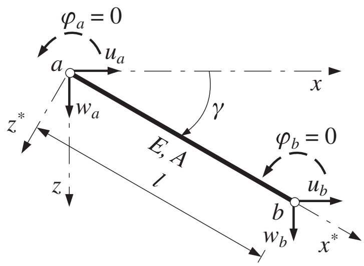
$c = \cos\gamma$
$s = \sin\gamma$



$$\mathbf{k}_{ab} = \left[\begin{array}{ccc|ccc}
\frac{EA}{l}c^2 + \frac{3EI}{l^3}s^2 & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & 0 & -\left(\frac{EA}{l}c^2 + \frac{3EI}{l^3}s^2\right) & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & \frac{3EI}{l^2}s \\
\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & \frac{EA}{l}s^2 + \frac{3EI}{l^3}c^2 & 0 & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & -\left(\frac{EA}{l}s^2 + \frac{3EI}{l^3}c^2\right) & -\frac{3EI}{l^2}c \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
-\left(\frac{EA}{l}c^2 + \frac{3EI}{l^3}s^2\right) & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & 0 & \frac{EA}{l}c^2 + \frac{3EI}{l^3}s^2 & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & -\frac{3EI}{l^2}s \\
-\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & -\left(\frac{EA}{l}s^2 + \frac{3EI}{l^3}c^2\right) & 0 & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & \frac{EA}{l}s^2 + \frac{3EI}{l^3}c^2 & \frac{3EI}{l^2}c \\
\frac{3EI}{l^2}s & -\frac{3EI}{l^2}c & 0 & -\frac{3EI}{l^2}s & \frac{3EI}{l^2}c & \frac{3EI}{l}
\end{array}\right]$$

(d) Prut oboustranně kloubově připojený

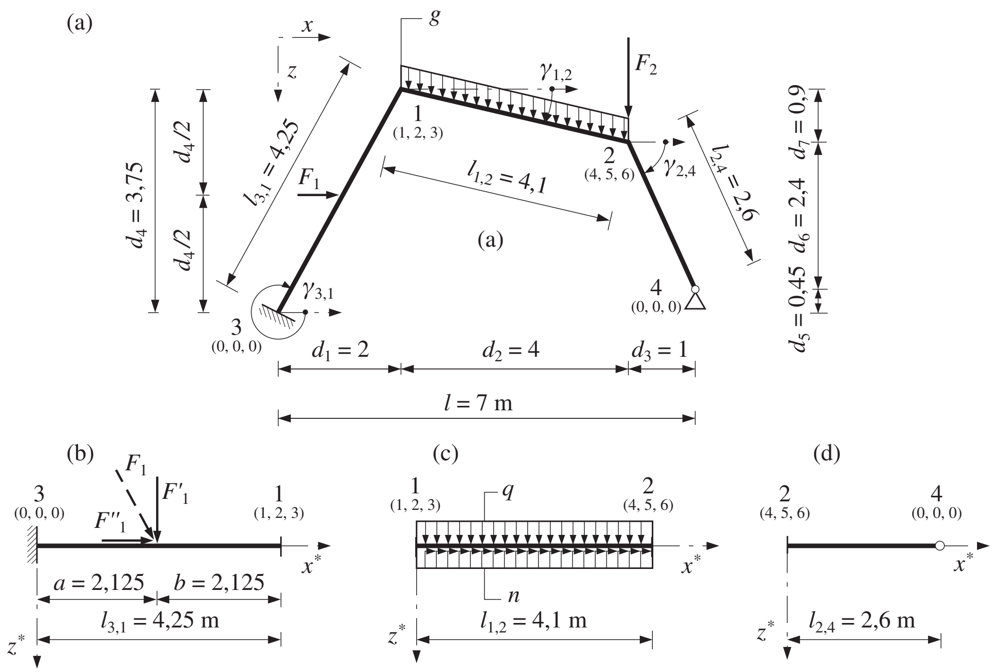
$c = \cos\gamma$
$s = \sin\gamma$



$$\mathbf{k}_{ab} = \frac{EA}{l}\left[\begin{array}{ccc|ccc}
c^2 & cs & 0 & -c^2 & -cs & 0 \\
cs & s^2 & 0 & -cs & -s^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
-c^2 & -cs & 0 & c^2 & cs & 0 \\
-cs & -s^2 & 0 & cs & s^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

K výpočtu lokálních koncových sil z globálních parametrů deformace:

$$\hat{\mathbf{R}}^*_{ab} = \mathbf{k}^*_{ab}\mathbf{r}^*_{ab} = \mathbf{k}^*_{ab}\mathbf{T}_{ab}\mathbf{r}_{ab} = \frac{EA}{l}\left[\begin{array}{ccc|ccc}
c & s & 0 & -c & -s & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
-c & -s & 0 & c & s & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]\mathbf{r}_{ab}$$



Obr. 11.31. Jednoduchý kosoúhlý rám

$\mathbf{r} = \left\{ u_1, w_1, \varphi_1, u_2, w_2, \varphi_2 \right\}^{\mathrm{T}}$.

Uzlové zatížení představuje pouze síla F_2 v uzlu 2, působící v kladném smyslu parametru w_2, takže pro vektor uzlového zatížení **S** řešeného rámu platí (11.15).

Prut 3–1 (obr. 11.31b):

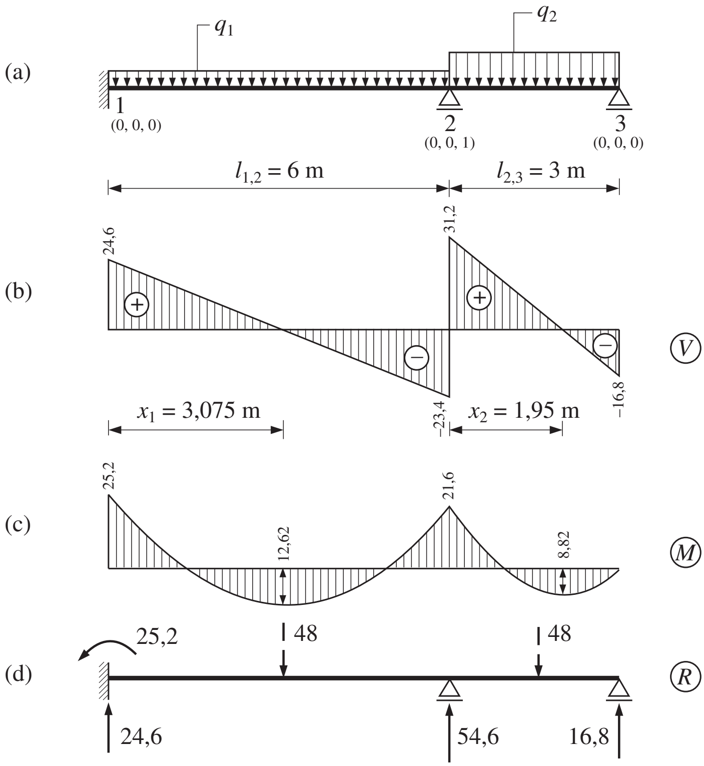
$\mathbf{r}_{3,1} = \left\{ 0, 0, 0, u_1, w_1, \varphi_1 \right\}^{\mathrm{T}}$, kódové číslo (0, 0, 0, 1, 2, 3),

$$l_{3,1} \sqrt{2^2 + 3{,}75^2} = 4{,}25 \text{ m}; \quad c_{3,1} = \frac{2}{4{,}25} = 0{,}4706; \quad s_{3,1} = \frac{-3{,}75}{4{,}25} = -0{,}8824;$$

$$F'_1 = 10 \frac{3{,}75}{4{,}25} = 8{,}8235 \text{ kN}; \quad F''_1 = 10 \frac{2}{4{,}25} = 4{,}7059 \text{ kN}.$$

Podle tabulky 11.2(c) a s použitím vztahu (11.106) získáme

$$\overline{\mathbf{R}}^*_{3,1} = \begin{Bmatrix} -2{,}3529 \\ -4{,}4118 \\ 4{,}6875 \\ -2{,}3529 \\ -4{,}4118 \\ -4{,}6875 \end{Bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{R}}_{3,1} = \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{Bmatrix} -5 \\ 0 \\ 4{,}6875 \\ -5 \\ 0 \\ -4{,}6875 \end{Bmatrix}.$$



Obr. 11.36. Spojitý nosník řešený obecnou deformační metodou

a podle tabulky 11.3(a) je

$$\mathbf{k}^*_{1,2} = \mathbf{k}_{1,2} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & -1{,}5 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 3 \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1{,}5 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 6 \end{array}\right] \end{array} \cdot 10^3 .$$

Prut 2–3 (pravostranně kloubově připojený):

$\mathbf{r}_{2,3} = \{0, 0, \varphi_2, 0, 0, 0\}^{\mathrm{T}}$, kódové číslo (0, 0, 1, 0, 0, 0),

$l_{2,3} = 3$ m, $A_{2,3} = 0{,}06$ m^2; $I_{2,3} = 4{,}5 \cdot 10^{-4}$ m^4.

Podle tabulky 11.2(a) pro $q = 16$ kNm^{-1} a $n = 0$ je

$$2\left(k_{ab}+\frac{3}{4}k_{ac}+k_{ad}\right)\varphi_a+k_{ab}\varphi_b+k_{ad}\varphi_d-3k_{ab}\psi_{ab}-\frac{3}{2}k_{ac}\psi_{ac}-3k_{ad}\psi_{ad}=$$

$$=M_a-(\overline{M}_{ab}+\overline{M}_{ac}+\overline{M}_{ad}), \qquad (12.49)$$

kde podle (12.26) je $k'_{ac}=\frac{3}{4}k_{ac}$.

Různé tvary styčníkových rovnic rovinných rámů jsou uvedeny v numerických příkladech 12.5 až 12.9.

12.8. Patrová rovnice

12.8.1. Základní tvary patrových rovnic

U rovinných rámů s posuvnými styčníky je nutno ke každému nezávislému posunu Δ, resp. nezávislému prutovému pootočení ψ, sestavit odpovídající patrovou rovnici. *Patrová rovnice* představuje silovou podmínku rovnováhy ve směru příslušného nezávislého posunu, napsanou na uvolněné části rámu, oddělené patrovým řezem, která obsahuje všechny styčníky mající společný posun Δ. Podstatu sestavení patrových rovnic ukážeme na rámu s pruty konstantního průřezu a neprůběžným sloupem (obr. 12.14a).

Pro vytvoření základní deformačně určité soustavy na obr. 12.14b podle odstavce 12.1 musíme do rámu vložit pět fiktivních momentových vazeb ve styčnících *a*, *b*, *c*, *d*, *e* a tři fiktivní silové vazby. Dvě z těchto silových vazeb jsou vodorovné, umístěné v úrovni hlav sloupů patra prvního a druhého, třetí vazba je svislá v místě neprůběžného sloupu *be*. Vyšetřovaný rám má pět nezávislých styčníkových pootočení φ_a, φ_b, φ_c, φ_d, φ_e, tři nezávislé posuny Δ_I, Δ_{II}, Δ_{III}, resp. tři nezávislá prutová pootočení ψ_I, ψ_{II}, ψ_{III}, a stupeň přetvárné neurčitosti $n_{p,z}=5+3=8$.

Osová deformace rámu je nakreslena na obr. 12.14c přerušovanou čarou. Vzhledem k tomu, že zanedbáváme vliv normálových sil na deformace prutů (dilatace $\Delta l=0$), musí být posunutí styčníků ležících na jedné vodorovné příčli, resp. na jednom svislém sloupu, stejné. Platí tedy pro nezávislé posuny

$$\Delta_I=u_a=u_b=u_c,$$
$$\Delta_{II}=u_d=u_e,$$
$$\Delta_{III}=w_b=w_e \qquad (12.50)$$

a nezávislá prutová pootočení

$$\psi_I=\psi_{af}=\frac{\Delta_I}{l_{af}},$$

$$\psi_{II}=\psi_{be}=\frac{\Delta_{II}-\Delta_I}{l_{be}},$$

$$\psi_{III}=\psi_{ab}=\frac{\Delta_{III}}{l_{ab}}. \qquad (12.51)$$

Stále naříkáme,
že máme málo času,
ale žijeme tak,
jako bychom ho měli nazbyt.

Seneca

14. Tabulky

V závěru učebnice je uvedeno 11 tabulek, které mají obecnou platnost a jsou využívány v numerických výpočtech staticky určitých i neurčitých rovinných prutových konstrukcí. S jejich použitím se statické řešení rovinných plnostěnných nosníků, rámů a oblouků velmi usnadní a urychlí.

Tabulka 14.1

Deformace konzoly konstantního průřezu

V tabulce jsou uvedeny obecné vztahy pro průhyb w a pootočení φ volného konce konzoly délky l, vyvolané třinácti zatěžovacími stavy, s kladnými smysly podle obrázku u zatěžovacího případu 2.

Tabulka 14.2

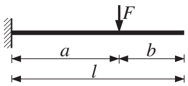
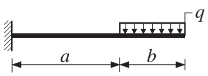
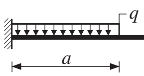
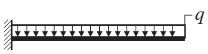
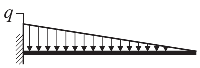
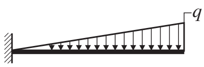
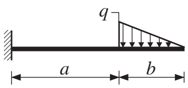
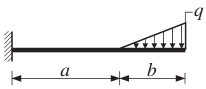
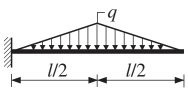
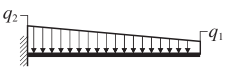
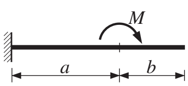
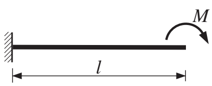
Deformace prostého nosníku konstantního průřezu

Pro 26 zatěžovacích případů vodorovného prostého nosníku ab o rozpětí l jsou uvedeny vztahy pro maximální průhyb $w_{\max}$ nebo průhyb w v charakteristickém průřezu x nosníku a výrazy pro pootočení φ_a, φ_b koncových průřezů a, b s kladnými smysly podle obrázku u zatěžovacího případu 1. Pouze u zatěžovacího případu 25 je jiný tvar ohybové čáry nosníku, jak je patrné z nákresu.

Při řešení přetvoření rovinného plnostěnného prostého nosníku (podle obr. 1.19 v odstavci 1.2) se uvažuje průhyb nosníku kladný, směřuje-li dolů. Pootočení φ průřezu nosníku, tj. sklon tečny k ohybové čáře s původní osou nosníku, se měří kladně po smyslu chodu hodinových ručiček. Při zatížení prostého nosníku ve směru tíže je tedy srovnání s tabulkovými výrazy pootočení φ_a levého konce a kladné, zatímco pootočení φ_b pravého konce b je záporné.

Ve statické analýze jednoduchého vetknutého nosníku (odstavec 4.1) a spojitého nosníku (odstavec 5.2) silovou metodou se považují pootočení φ_a, φ_b koncových průřezů a, b prostého nosníku za kladná, když se nosník v blízkosti podpor prohýbá směrem dolů. Tato konvence se přesně shoduje se vztahy uvedenými v tabulce 14.2.

Tabulka 14.1. Deformace konzoly konstantního průřezu

Zatěž. případ	Schéma zatížení	Průhyb volného konce w	Pootočení volného konce φ
1		$\dfrac{Fa^2}{6EI}(3l-a)$	$\dfrac{Fa^2}{2EI}$
2		$\dfrac{Fl^3}{3EI}$	$\dfrac{Fl^2}{2EI}$
3		$\dfrac{q}{24EI}\left(3l^4-4a^3l+a^4\right)$	$\dfrac{q}{6EI}\left(l^3-a^3\right)$
4		$\dfrac{qa^3}{24EI}(4l-a)$	$\dfrac{qa^3}{6EI}$
5		$\dfrac{ql^4}{8EI}$	$\dfrac{ql^3}{6EI}$
6		$\dfrac{ql^4}{30EI}$	$\dfrac{ql^3}{24EI}$
7		$\dfrac{11}{120}\cdot\dfrac{ql^4}{EI}$	$\dfrac{ql^3}{8EI}$
8		$\dfrac{qb}{30EI}\left[5(l-b)l^2+b^3\right]$	$\dfrac{qb}{24EI}\left(6l^2-8lb+3b^2\right)$
9		$\dfrac{qb}{120EI}\left[10(2l-b)l^2+b^3\right]$	$\dfrac{qb}{24EI}\left(6l^2-4lb+b^2\right)$
10		$\dfrac{11}{192}\cdot\dfrac{ql^4}{EI}$	$\dfrac{7}{96}\cdot\dfrac{ql^3}{EI}$
11		$\dfrac{l^4}{120EI}(11q_1+4q_2)$	$\dfrac{l^3}{24EI}(3q_1+q_2)$
12		$\dfrac{Ma}{2EI}(l+b)$	$\dfrac{Ma}{EI}$
13		$\dfrac{Ml^2}{2EI}$	$\dfrac{Ml}{EI}$