

ERNEST NAGEL
JAMES R. NEWMAN

Gödelův důkaz

Odborná redakce a předmluva
Douglas R. Hofstadter

kwantum

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
NAKLADATELSTVÍ VUTIMUM



ERNEST NAGEL
JAMES R. NEWMAN
GÖDELŮV DŮKAZ

V edici QUANTUM dosud vyšlo:

- E. Nagel, J. R. Newman: *Gödelův důkaz* (2003, 2006, 2024)
E. Schrödinger: *Co je život? Duch a hmota. K mému životu* (2004, 2018)
A. Einstein: *Teorie relativity* (2005, 2007, 2022)

Edici řídí Petr Dub

Věnováno Bertrandu Russellovi

ERNEST NAGEL
JAMES R. NEWMAN
GÖDELŮV DŮKAZ

PŘEPRACOVANÉ VYDÁNÍ

S PŘEDMLUVOU A ODBORNOU REDAKCÍ
DOUGLASE R. HOFSTADTERA

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
NAKLADATELSTVÍ VUTIMUM
2024

Přeloženo z anglického originálu *Gödel's Proof. Revised Edition* vydaného nakladatelstvím New York University Press v roce 2001.

Všechna práva vyhrazena. Autorizovaný překlad anglického vydání publikovaného nakladatelstvím New York University Press.

Translated from the English original *Gödel's Proof. Revised Edition* published by New York University Press in 2001.

All rights reserved. Authorized translation from the English language edition published by New York University Press.

Jan Novotný. Úvodní slovo k českému vydání ix

D. R. Hofstadter. Předmluva xvii

Poděkování xxviii

I Úvod 3

II Problém bezspornosti 7

III Absolutní důkazy bezspornosti 22

IV Systematická kodifikace formální logiky 31

V Příklad vydařeného absolutního důkazu
bezspornosti 38

VI Idea zobrazení a její využití v matematice ... 48

VII Gödelovy důkazy 57

A Gödelovo číslování 57

B Aritmetizace metamatematiky 68

C Jádro Gödelova argumentu 77

VIII Závěrečné úvahy 91

Dodatky 95

Literatura 105

*Alexander Meduna. Brněnský rodák Kurt Gödel
a jeho odkaz* 109

Rejstřík 124

Copyright © New York University 2001

Czech edition © Vysoké učení technické v Brně 2003, 2006, 2024

Czech translation © Rostislav Niederle 2003, 2006, 2024

© Petr Dub 2003, 2006, 2024

© Alexander Meduna 2024

© Jan Novotný 2003, 2006, 2024

Cover picture © Jan Janák 2024

Graphic design © Nikola Kalinová 2018

ISBN 978-80-214-6225-0

Úvodní slovo k českému vydání

Roku 1931 publikoval 25letý a vědeckému světu ještě téměř neznámý Kurt Gödel článek¹, který dnes řadíme mezi nejpřevratnější výsledky světové vědy. Nabízí se ihned srovnání s Albertem Einsteinem, jenž byl v roce 1905, kdy položil základy speciální relativity, jen o málo starší. Pak neujde naší pozornosti rozdíl mezi přijetím obou prací. Význam Einsteinova díla byl nepochybně rozpoznán mnohem rychleji, a ve dvacátých letech se již těšilo nejen zájmu fyziků, ale i filosofů, novinářů a široké veřejnosti. Gödel byl až do padesátých let oceňován jen úzkým, byť vybraným okruhem specialistů. Jeho článek (s českým překladem se dnes může čtenář seznámit v monografii²) je mimořádně obtížným čtením, jeho tematika je obzvláště výlučná, a sám Gödel – na rozdíl od Einsteina – nejevil o popularizaci svých výsledků žádný zájem. Významnou roli ve zprostředkování jejich podstaty a významu sehrála proto kniha³, kterou roku 1958 vydali Ernest Nagel a James R. Newman. Šťastně se tu spojily erudice filosofa s hlubokým zájmem o exaktní a přírodní vědy a prvotřídního znalce matematiky a její historie. (Stojí snad za zmínku, že stejně jako Gödel, který spatřil světlo světa 28. 4. 1906 v Brně, se i Nagel narodil v rakousko-uherské monarchii, a to 16. 11. 1901 v Novém Městě nad Váhom.)

V roce 2001 vyšla kniha v revidované podobě, o níž se zasloužil odborník v oblasti kognitivních věd Douglas R. Hofstadter. Také on již dříve přispěl k rozšíření znalostí o Gödelově práci knihou⁴, dílem na pomezí populárně vědecké a umělecké literatury, která si všímá dalekosáhlých souvislostí mezi Gödelovými závěry, podstatou lidského myšlení a světem filosofie a umění.

Důvody pro svou úpravu vysvětluje Hofstadter v předmluvě. Pro vydavatele Nagelovy a Newmanovy knihy v Gödelově rodném městě tak vyvstala otázka, zda sáhnout k historicky cennému původnímu textu, anebo k jeho podobě⁵ upravené předním propagátorem Gödelova díla. Protože srovnání obou textů může být svědectvím o posunu v chápání tohoto díla během druhé půle 20. století, uvažovali jsme i o paralelní publikaci obou překladů. Jejich srovnání však ukázalo, že s výjimkou VII. kapitoly jde o úpravy, které by se daly označit za kosmetické. Někdy vskutku šlo jen o upřesnění: v kapitole II zmíněná *geometrie Bernharda Riemanna* byla nahrazena terminologicky jednoznačnější *geometrií eliptické roviny*, místo o *krátkých a dlouhých* slovech se v kapitole VI mluví o slovech *jednoslabičných a víceslabičných*. Častěji však šlo upravovateli o to, aby volnější formulace textu nahradil určitějším vyjádřením, které ohraničuje okruh jejich platnosti tak, že se stávají nezpochybnitelnými, ale zároveň se jejich dosah poněkud úží. Proto místo o aritmetice mluví ve více případech o *formálním systému X* či o *zmíněném specifickém formálním kalkulu*, popř. o *formalizované teorii čísel*, jinde místo o axiomech aritmetiky či matematiky píše shodně s Gödelem o axiomech *Principia Mathematica* (nebo podobných systémů) či nahrazuje výraz bezesporná množina aritmetických tvrzení výrazem bezesporná formalizace teorie čísel. Vyjádření tato formule není uvnitř počtu dokazatelná mění Hofstadter na rigoróznější *překlad tohoto tvrzení do notace formálního kalkulu není uvnitř počtu dokazatelný*. Nejvýraznější ukázka tohoto přístupu je v kapitole III, kde původně stálo: *Lze říci, že „řetězec“ je pěkný nebo že se podobá jinému „řetězci“ nebo že jeden „řetězec“*

vypadá, jako by byl sestaven ze tří jiných atd. U Hofstadtera čteme: *Lze říci, že, řetězec „je palindromický“ (tj. že je, čten zleva nebo zprava, stejný) nebo že má dva symboly společné s jiným „řetězcem“ nebo že jeden „řetězec“ je vytvořen ze tří jiných atd.* Vágní výroky o řetězcích jsou tak nahrazeny výroky zcela určitými, o nichž lze bez pochyby říci: *Taková tvrzení význam mají a mohou o tom formálním systému přinést důležité informace.* Na druhé straně autoři mohli mít původně na mysli, že ani vágně formulované postřehy o řetězcích nejsou vždy bezcenné, a že to mohou být dokonce i subjektivní postřehy estetické povahy (s čímž jistě nemusí každý souhlasit).

Do VII. kapitoly, která je jakožto nástin Gödelova důkazu technicky nejnáročnější, zasáhl Hofstadter daleko výrazněji. Zvětšil počet používaných symbolů z 10 na 12, když přidal znaky pro sčítání a násobení, v souvislosti s tím vložil řadu dalších výkladů a rozšířil o polovinu počet vysvětlujících poznámek. Domníváme se, že pro čtenáře s detailním zájmem o problematiku Gödelova důkazu bude nejlepší možností jeho co nejprostšího, a přesto plnohodnotného zpřístupnění, když si samostatně porovná obě verze. Podobu VII. kapitoly, jakou měla v původním textu Nagela a Newmana z roku 1958, nalezneme čtenář v prvním českém vydání této knihy⁶.

prof. RNDr. Jan Novotný, CSc.
Společnost Kurta Gödela

Literatura

- 1 GÖDEL, K.: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I., *Monatshefte für Mathematik und Physik*, Vol. 38 (1931), s. 173–198. [Článek včetně anglického překladu viz také FEFERMAN, S. (ed.): *Kurt Gödel Collected Works*, Vol. I., Oxford University Press, Oxford 1986].
- 2 MALINA, J., NOVOTNÝ, J. (eds.): *Kurt Gödel*, Nadace Universitas Masarykiana, Brno 1996.
- 3 NAGEL, E., NEWMAN, J. R.: *Gödel's Proof*, Routledge & Kegan Paul Ltd., New York 1958.
- 4 HOFSTADTER, D. R.: *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*, Basic Books, New York 1979.
- 5 NAGEL, E., NEWMAN, J. R.: *Gödel's Proof. Revised Edition by Douglas R. Hofstadter*, New York University Press, New York 2001.
- 6 NAGEL, E., NEWMAN, J. R.: *Gödelův důkaz*, Nakladatelství VUTIUM, Brno 2003.

DOUGLAS R. HOFSTADTER

PŘEDMLUVA

Douglas R. Hofstadter (*1945) je americký vědec. Původní profesí fyzik (jeho otec byl nositelem Nobelovy ceny za fyziku), jeho zájmy se však dlouhodobě vyvíjejí přes logiku, metamatematiku, informatiku a kognitivní vědy až k mezioborovému zkoumání podstaty vědomí a inteligence. Mimoto se živě zajímá o problémy překladu mezi přirozenými jazyky.

Mezi jeho další knihy patří například *Le Ton beau de Marot*. *In Praise of the Music of Language* (1997) věnovaná překladům a *I Am a Strange Loop* (2007) na téma vědomí a inteligence, žádná však nedosáhla věhlasu jeho první knihy *Gödel, Escher, Bach: Existenciální gordická balada* (1979), za níž obdržel v roce 1980 Pulitzerovu cenu. Za zmínku stojí ještě jeho oceňovaný překlad Puškinova díla *Evžen Oněgin* do angličtiny (1999). V současnosti působí jako profesor informatiky a kognitivních věd na Indiana University.

Předmluva

V srpnu roku 1959 se moje rodina po roce stráveném v Ženevě vrátila do Stanfordu v Kalifornii. Bylo mi čtrnáct, mluvil jsem plynule francouzsky, miloval jazyky, nadchlo mě psaní systémů, symbolů a tajemství významu, překypoval jsem zvědavostí stran matematiky a fungování mysli.

Jednoho večera jsem s otcem navštívil knihkupectví, kde jsem narazil na knížku s tajemným názvem *Gödelův důkaz*. Hbitě jsem ji prolistoval a zaznamenal mnoho úchvatných schémat a formulí, a obzvláště na mě učinila dojem poznámka pod čarou o uvozovkách, symbolech a symbolech zastupujících jiné symboly. Intuitivně jsem cítil, že *Gödelův důkaz* a já jsme si byli souzeni, a věděl jsem, že tu knihu si musím koupit.

Když jsme vycházeli, poznamenal můj otec, že na City College v New Yorku navštěvoval kurs filosofie jednoho z autorů knihy Ernesta Nagela, a že se poté stali dobrými přáteli. Tato shoda okolností dodala knize na tajuplnosti, a doma jsem pak hltal každé její slovo. Od začátku až do konce; *Gödelův důkaz* vyhovoval mým vášním; zničehonic jsem byl posedlý pravdou a nepravdou, paradoxy a důkazy, zobrazeními a reprezentacemi, manipulacemi se symboly a symbolickou logikou, matematikou a metamatematikou, tajemstvím tvůrčích skoků v lidském myšlení a mechanizací myšlení.

Nedlouho po tom mi otec sdělil, že Ernesta Nagela náhodou potkal na univerzitě. Profesor Nagel trávil rok na Stanfordu, i když normálně učil na Kolumbijské univerzitě. Během několika dní se naše rodiny setkaly a já byl

okouzlen celou čtyřčlennou rodinou Nagelů – Ernestem a Edith i jejich dvěma syny přibližně mého věku, Sandym a Bobbym. Ze setkání s autorem knihy, kterou jsem tolik miloval, jsem byl rozrušený, a Ernesta a Edith jsem ve svém mladistvém zápalu pro vědu, filosofii, hudbu a umění shledal nesmírně přívětivými.

Netrvalo dlouho a roční volno Nagelů se chýlilo ke konci. Před odjezdem mě však srdečně pozvali na týden na jejich chatu ve Vermontu. Během tohoto idylického pobytu se stalo, že Ernest a Edith pro mě začali představovat vrchol laskavosti, šlechtnosti a skromnosti; a tak jsou až dosud uchováni v mé paměti. Působivá byla i dvě slunná odpoledne, kdy jsme se Sandym seděli venku na zelené louce a já mu nahlas četl celý *Gödelův důkaz*. Jaký požitek z převrácení věci – číst knihu synovi jednoho z autorů!

Během několika následujících let jsme Sandy a já prostřednictvím korespondence po svém prozkoumali mnoho vzorů, které měly hluboký vliv na můj pozdější život, a myslím, že na jeho též. Později se stal – známý jako Alex – profesorem matematiky na University of Wisconsin. S Bobbym – který je, už jako Sidney, profesorem fyziky na University of Chicago – jsme také zůstali přátelé a čas od času se s potěšením vídáme.

Přál bych si, abych mohl říci, že jsem se seznámil též s Jamesem Newmanem. Jako dárek k maturitě jsem dostal jeho velkolepé čtyřsvazkové dílo *The World of Mathematics*. Vždy jsem se obdivoval jeho stylu a jeho lásce k matematice, ale jakkoli je to skličující, naše cesty se nikdy nezkřížily.

Na Stanfordu jsem studoval matematiku jako hlavní předmět a moje záliba v myšlenkách obsažených v knize Nagela a Newmana mě inspirovala, abych si zapsal též

několik kurzů logiky a metamatematiky. Byl jsem však nesmírně zklamán jejich suchopárností. Krátce na to jsem začal studovat matematiku na vyšším stupni, a táž deziluze se opakovala. Zanechal jsem matematiky a pustil jsem se do fyziky, ale po několika letech jsem se ocitl znovu v bažině odtažitosti a zmatku.

Když jsem jednoho dne roku 1972 hledal nějakou útechu, probíral jsem se tisky v univerzitním knihkupectví a narazil na *A Profile of Mathematical Logic* od Howarda DeLonga. Byla to kniha, která na mě zapůsobila téměř stejně elektrizujícím způsobem jako *Gödelův důkaz* v roce 1959. Tato snadno srozumitelná monografie znovu vznikla dlouho doutnající uhlíky mé lásky k logice, metamatematice i tu podivuhodnou spleť problémů, které jsem s Gödelovým teorémem a jeho důkazem spojoval. Protože jsem byl tehdy bez svého původního výtisku Nagelovy a Newmanovy kouzelné knížečky, který jsem ztratil, zakoupil jsem si jiný – naštěstí byl stále v tisku! – a znovu jsem tu knížku přečetl a znovu jsem byl fascinován.

To léto jsem přerušil studium a cestoval napříč kontinentem, tábořil a zbožně četl o Gödelově díle, o povaze logického myšlení a o ideálu mechanizovaného myšlení a vědomí. Aniz bych to plánoval, skončil jsem cestu v New Yorku. První lidé, s nimiž jsem se tam spojil, byli moji staří přátelé Ernest a Edith Nagelovi, kteří mi byli intelektuálními a citovými rádci. Po několika dalších měsících jsem strávil nesčetně večerů v jejich bytě, nadšeně diskutuje mnohá témata, Gödelův důkaz a jeho rozvětvení samozřejmě také.

Rok 1972 znamenal začátek mé vlastní intenzivní práce na Gödelově teorému a bohaté sféře myšlenek, které ho obklopují. Po několika následujících let jsem se věnoval

řadě charakteristických zkoumání o tomto řetězci myšlenek, a výsledek takových zkoumání jsem shrnul do knihy *Gödel, Escher, Bach: Existenciální gordická balada*. Není pochyb o tom, že rodiči mého objemného svazku byly Nagelova a Newmanova knížka na jedné straně, a knížka Howarda DeLonga na straně druhé.

O čem je Gödelova práce? Kurt Gödel, rakouský logik narozený v roce 1906, byl nasycený matematickou atmosférou své doby vyznačující se vytrvalou snahou o formalizaci. Lidé byli přesvědčeni, že matematické myšlení lze zachytit pomocí zákonů, jež jsou pouhou manipulací se symboly. Z dané množiny axiomů a dané množiny typografických pravidel bychom tak mohli přesunovat symboly a tvořit nové řetězce symbolů zvané „teorémy“. Vrcholem této tendence bylo monumentální třísvazkové dílo Bertranda Russella a Alfreda North Whiteheada *Principia Mathematica*, které vyšlo v letech 1910–1913. Russell a Whitehead se domnívali, že celou matematiku založili na čisté logice a že jejich dílo je jednou provždy pevným základem celé matematiky.

O dvě desetiletí později začal Gödel o této vznešené vizi pochybovat. Jednoho dne, když v oněch svazcích studoval neobyčejně strohé řetězce symbolů, blesklo mu hlavou, že tyto řetězce se velice podobají řetězcům čísel, že by ve skutečnosti mohl každý symbol nahradit číslem a celou *Principia Mathematica* znovu pochopit nikoli tak, že se zde přesunují symboly, nýbrž tak, že se zde zpracovávají čísla† (abych si vypůjčil moderní termín).

Tento nový způsob náhledu měl ohromující efekt zámotku: protože byly předmětem *Principia Mathematica* čísla, a protože Gödel přeložil prostředek oněch svazků do čísel, ukázalo se tím, že *Principia Mathematica* je svým vlastním předmětem, nebo jinak, že zřetěžené formule Russellova a Whiteheadova systému je možné nahlédnout tak, že mluví o sobě navzájem, nebo možná mluví jen samy o sobě.

Tento zámotek představoval vsutku nečekaný obrat událostí, neboť Gödela nevyhnutelně dovedl k antickým sebevztažným paradoxům – zejména k tvrzení „Toto tvrzení je nepravdivé“. Gödel si uvědomil, že když použije tento typ paradoxu jako vodítko, může v zásadě zapsat nějakou formuli z *Principia Mathematica* tak, že bude perverzně říkat sama o sobě „Tato formule je pomocí pravidel z *Principia Mathematica* nedokazatelná“. Právě existence takových zamotaných formulí byla pro stavbu Russella a Whiteheada obrovskou hrozbou, neboť si jako posvátný cíl stanovili eliminaci „bludného kruhu“, a byli přesvědčeni, že tu bitvu vyhráli. Nyní se však zdálo, že bludné kruhy vtrhly do jejich ráje zadními dveřmi, že se Pandořina skříňka dokořán otevřela.

S gödelovskou formulí podkopávající sebe samu bylo třeba se vypořádat, což Gödel provedl veskrze rafinovaně tak, že ukázal, že i když se tato formule paradoxu podobá, jemně se od něj odlišuje. Především se ukazuje být pravdivým tvrzením, které nelze dokázat pomocí pravidel toho systému – ve skutečnosti je to pravdivé tvrzení, jehož nedokazatelnost plyne právě z jeho pravdivosti.

Takovým skandálně smělym způsobem tedy Gödel zaútočil na pevnost *Principia Mathematica* a proměnil

† Hofstadter zde použil výraz „number crunching“. Pozn. překl.

ji v trosky. Rovněž ukázal, že jeho metoda platí o jakémkoliv systému, který se pokouší dosáhnout týchž cílů jako *Principia Mathematica*. Gödel zničil naděje těch, kteří se domnívali, že matematické myšlení lze pevně zachytit pomocí axiomatických systémů, a tak přiměl matematiky, logiky a filosofy ke zkoumání právě objevené propasti, která nezvratně odděluje dokazatelnost od pravdy.

Od času Gödelova objevu si uvědomujeme, jak jemné a hluboké je matematické myšlení, jak se druhdy zářící naděje na jeho mechanizaci najednou jeví jako vratká, neli jako zcela donkichotská. Čím pro nás má být matematické myšlení po Gödelovi? Co je po Gödelovi matematická pravda? Vskutku – co je vůbec pravda? To jsou ústřední problémy, které jsou stále nevyřešeny ještě sedmdesát let poté, co se objevil Gödelův epochální článek.

I když je moje kniha v mnohém Nagelovi a Newmannovi dlužná, nesouhlasí se všemi jejich filosofickými závěry. V této souvislosti bych rád poukázal na jeden klíčový rozdíl. V kapitole Závěrečné úvahy Nagel a Newman tvrdí, že z Gödelových objevů vyplývá, že počítače – „počítací stroje“, jak jim říkají – jsou v principu nezpůsobilé k tomu, aby usuzovaly stejně pružně jako lidský rozum. To je závěr, který má vyplývat z toho, že počítače sledují „fixovanou množinu příkazů“ (tj. program). Podle Nagela a Newmana tento pojem odpovídá fixované množině axiomů a pravidel odvozování – a chování počítače, když vykonává svůj program, je stejné jako chování stroje, který ve formálním systému systematicky vytlouká z axiomů teorémy. Takové zobrazení počítače na formální systém chápe termín „počítací stroj“ příliš doslovně – totiž tak, jako by měl stroj zacházet se samotnými čísly a aritmetickými

fakty. Myšlenka, že takové stroje by měly samy, tak jak jsou, vytloukat množiny pravdivých tvrzení o matematice, je svůdná a nejspíš skrývá zrnko pravdy. Je však daleka úplně představě o síle a všestrannosti počítačů.

I když jsou počítače, jak už naznačuje jejich jméno, postaveny z hardwaru přísně respektujícího aritmetiku, není v jejich konstrukci nic, co by je neodlučně spojovalo s matematickými pravdami. Není o nic obtížnější zadat počítači, aby vytiskl myriády nepravdivých výpočtů („ $2 + 2 = 5$; $0/0 = 43$ “ atd.), než ve formálním systému vytisknout teorémy. Mnohem jemnější výzvou by bylo navrhnout „fixovanou množinu příkazů“, na základě které by mohl počítač prozkoumat svět matematických idejí (tedy ne pouze řetězce matematických symbolů), veden vizuální představivostí, asociativními vzory spojujícími pojmy a intuitivními procesy dohadu, analoie a estetické volby, které používá každý matematik.

Když Nagel a Newman *Gödelův důkaz* psali, byl cíl pokročit v počítačích tak, aby myslely jako lidé – jinými slovy umělá inteligence – úplně nový, a jeho možnosti nebyly jasné. Počítače se tehdy používaly hlavně jako mechanické konkretizace axiomatických systémů, a jako takové neprováděly nic jiného než vytloukání důkazů z teorémů. Nesporně – kdyby tento přístup reprezentoval celé spektrum možností, jak v principu počítače využít pro modelování poznání, pak by Nagel a Newman měli skutečně pravdu, když na pozadí Gödelových objevů tvrdí, že počítače jsou, bez ohledu na rychlost jejich výpočtů a kapacitu paměti, nutně méně pružné a méně rozumějící, než je lidská mysl.

Dokazování teorémů však nepatří mezi nejpřesnější způsoby, jejichž pomocí se lze pokusit přimět počítače, aby myslely. Připomeňme si program AM, který v polovině