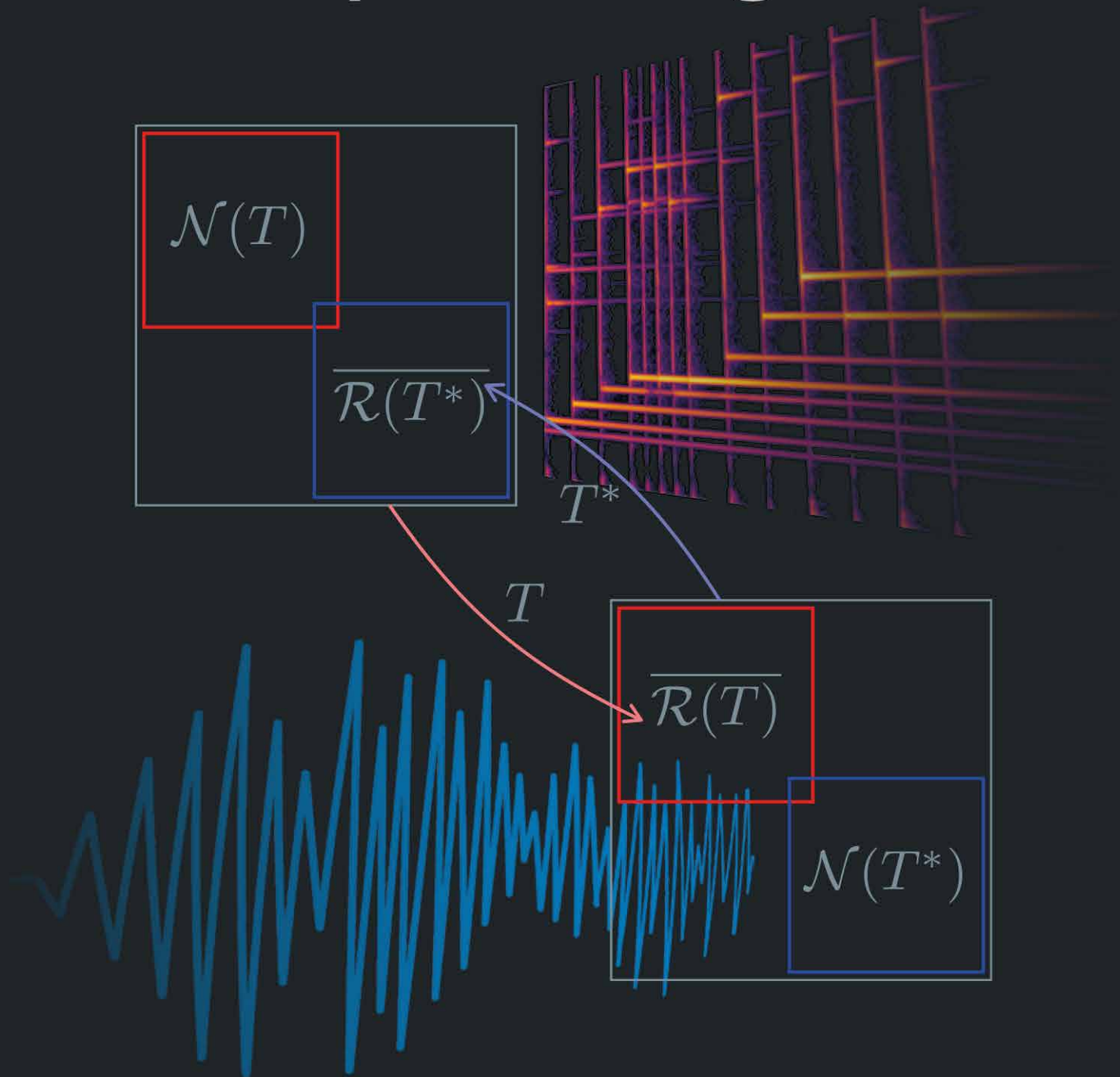


# Moderní funkcionální analýza s aplikacemi ve zpracování signálů



Vítězslav Veselý, Pavel Rajmic, Ondřej Mokrý

## Moderní funkcionální analýza s aplikacemi ve zpracování signálů

Odborná recenze: doc. RNDr. Jan Vybíral, Ph.D.

## Poděkování

Autoři děkují studentům z Vysokého učení technického v Brně, kteří v období mezi roky 2012 a 2019 nějakou formou napomohli napsání této knihy. Někteří v rané fázi vzniku textu přepsali určité pasáže do  $\LaTeX$ u, někteří upozornili na překlepy a chyby, jiní nakreslili první podobu obrázků. Konkrétně autoři děkují (v abecedním pořadí) Marii Daňkové (Mangové), Alici Doktorové, Mateji Dolníkoví, Janu Dražkovi, Ivanu Eryganovi, Janu Horníčkoví, Ondřeji Klimešovi, Tereze Konečné, Jiřímu Kráčmarovi, Barboře Navrátilové, Eriku Ochodnickému, Josefu Svatoňovi, Martinu Tejkalovi, Haně Zemanové, Michaele Zemčíkové. Zvláštní poděkování patří Pavlu Záviškovi za pomoc s převedením obrázků do TikZ, za grafické a typografické úpravy a za řešení náročnějších problémů s  $\LaTeX$ em.

Dále poděkování patří paní ředitelce Nakladatelství VUTIUM Janě Kořínkové za trpělivost a konstruktivní přístup při formování knihy, Janu Skůpovi z Ústřední knihovny VUT za zařízení DOI a trvalých odkazů na některé prameny, Zdeňkovi Průšovi a Radkovi Hrbáčkovi za programování některých ukázek v Matlabu někdy kolem roku 2010, a v neposlední řadě Janu Vybíralovi za jeho postřehy v odborné recenzi.

© Vítězslav Veselý, Pavel Rajmic, Ondřej Mokrý 2024  
© Vysoké učení technické v Brně – Nakladatelství VUTIUM

ISBN 978-80-214-6138-3

# Obsah

Seznam obrázků .....	ix
Seznam zkratk a symbolů .....	xi
<b>1 Úvod .....</b>	<b>1</b>
<b>2 Prostory .....</b>	<b>7</b>
2.1 Hierarchie prostorů .....	8
2.1.1 Vektorové prostory (lineární prostory, L-prostory) .....	9
2.1.2 Topologické prostory (T-prostory) .....	11
2.1.3 Metrické prostory (M-prostory) .....	14
2.1.4 Topologické lineární prostory (TL-prostory) .....	16
2.1.5 Metrické lineární prostory (ML-prostory) .....	17
2.1.6 Normované lineární prostory (NL-prostory) .....	17
2.1.7 Prostory s vnitřním součinem (VS-prostory) .....	19
2.2 Kompaktní množiny .....	22
2.3 Přehled standardních NL-prostorů a VS-prostorů .....	23
2.3.1 NL-prostory $L^p$ a $\ell^p$ , $1 \leq p \leq \infty$ ( $p \in \mathbb{R}^*$ ) .....	23
2.3.2 Funkce koncentrované v čase a frekvenci (TF-prostory) .....	30
2.3.3 Frekvenčně omezené funkce (Paleyho–Wienerovy prostory) ..	33
2.3.4 Hardyho prostory .....	34
2.3.5 Prostory periodických a periodizovatelných funkcí v $L^2$ .....	35
<b>3 Operátory v normovaných prostorech a v prostorech s vnitřním součinem .....</b>	<b>37</b>
3.1 Spojité lineární operátory .....	37
3.2 Adjungované operátory .....	47
3.3 Samoadjungované operátory .....	50
3.4 Kompaktní operátory .....	61
3.5 Unitární operátory .....	63
<b>4 Inverze spojitých lineárních operátorů .....</b>	<b>69</b>
4.1 Teoretická východiska .....	70
4.2 Konstrukce inverze .....	75
<b>5 Pseudoinverze spojitých lineárních operátorů .....</b>	<b>79</b>
<b>6 Úplné systémy: ortonormální báze, Rieszovy báze a framy .....</b>	<b>91</b>
6.1 Úplné systémy a báze .....	92
6.2 Ortonormální báze .....	101
6.3 Rieszovy báze .....	106
6.4 Framy .....	109
6.5 Framové reprezentace v Hilbertově prostoru. Princip duality .....	116

<b>7</b>	<b>Spektrální analýza operátorů</b> .....	127
7.1	Spektrální teorie samoadjungovaných operátorů v $H$ -prostorech .....	129
<b>8</b>	<b>Hilbertovy prostory s reprodukcí jádrem</b> .....	137
8.1	Základy teorie .....	138
8.2	Jádrové funkce .....	144
8.2.1	Konstrukce reprodukcí jader v RKHS-prostorech .....	144
8.2.2	Invariantní operace s jádrovými funkcemi .....	149
8.3	Ilustrační příklady .....	159
8.4	Rekapitulace ke konstrukci RKHS-prostorů .....	168
8.4.1	$H$ -prostory .....	169
8.4.2	Funkcionální $H$ -prostory .....	170
8.4.3	RKHS-prostory .....	171
8.4.4	Lineární RKHS-model .....	178
8.5	Aplikace .....	179
8.5.1	Interpolace v RKHS-prostorech .....	179
8.5.2	Aproximace v RKHS-prostorech .....	182
<b>9</b>	<b>Moderní reprezentační systémy (báze, framy) ve zpracování signálů</b> .....	185
<b>A</b>	<b>Faktor prostory a přímý součet vektorových prostorů</b> .....	199
<b>B</b>	<b>Metriky, normy a operátory</b> .....	203
B.1	$p$ -metriky a $p$ -normy .....	203
B.2	Ekvivalentní metriky a normy .....	207
B.3	Operátory Fredholmova typu .....	208
B.4	Tenzorové součiny .....	210
<b>C</b>	<b>Fourierova řada a Fourierova transformace</b> .....	215
C.1	Fourierova řada .....	215
C.1.1	Parsevalova identita (PI) .....	218
C.1.2	Diskretizace Fourierovy řady .....	220
C.1.3	Diskrétní Fourierova transformace posloupností .....	223
C.2	Konvoluční operátory .....	224
C.2.1	Integrální konvoluční operátory .....	225
C.2.2	Diskrétní konvoluční operátory .....	235
<b>D</b>	<b>Důkazy vybraných tvrzení</b> .....	245
<b>E</b>	<b>Řešení vybraných cvičení</b> .....	251
<b>F</b>	<b>Algoritmy inverze a pseudoinverze operátorů</b> .....	261
<b>G</b>	<b>Shrnutí obsahu formou tabulek</b> .....	273
<b>H</b>	<b>Obsah repozitáře</b> .....	277
	<b>Literatura</b> .....	279
	<b>Summary</b> .....	281
	<b>Rejstřík</b> .....	285

## Seznam obrázků

2.1	Schéma hierarchie prostorů .....	8
2.2	Funkce v prostorech $L^1 \setminus L^2$ a $L^2 \setminus L^1$ .....	26
2.3	Příklady funkcí v $L^1$ a $L^2$ a koincidence těchto prostorů .....	27
2.4	Funkce z prostoru $PW_{\frac{1}{2}}$ , její vzorky v čase a její rekonstrukce pomocí báze $\{\text{sinc}(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ .....	34
3.1	Vektory na povrchu jednotkové koule po aplikování matic $T_0, T_1, T_2$ .....	40
3.2	Výpočet normy vektoru na základě důsledku 3.27 .....	46
3.3	Konstrukce adjungovaného operátoru .....	48
3.4	Třídy omezených operátorů v $\mathcal{B}(H, H)$ nad $\mathbb{F}$ .....	57
3.5	Projekce povrchu jednotkové koule v prostoru $\mathbb{R}^3$ na podprostor generovaný danými vektory .....	58
3.6	Ilustrace převodu barevného obrázku do stupňů šedi jakožto projekce .....	60
3.7	Ilustrace k příkladu projekce 3.73 .....	61
4.1	Rozklad prostorů .....	70
5.1	Grafické znázornění příkladu 5.5 .....	81
5.2	Oblasti numerické stability pro operátor $T$ .....	87
6.1	Ukázka aproximace funkce $\sin t$ polynomem stupně 3 .....	110
6.2	Ukázka Parsevalova framu získaného projekcí ONB na podprostor nižší dimenze .....	114
6.3	Mercedes-Benz frame .....	115
6.4	Příklad jednoduchého framu a jeho (kanonického) duálního framu .....	118
7.1	Ilustrace rozložení hodnot spektra operátoru $T$ .....	128
8.1	Ilustrace konstrukce z části (2) důkazu věty 8.26 .....	148
8.2	Ilustrace příkladu souřadnicové reprezentace funkcí .....	164
9.1	Ortonormální báze a frame pro $\mathbb{C}^8$ .....	186
9.2	Reálná kosinová ortonormální báze prostoru $\mathbb{R}^8$ .....	187
9.3	Šedesát čtyři prvků DCT ortonormální báze prostoru $\mathbb{R}^{8 \times 8}$ .....	188

9.4	Vlnka „Daubechies 2“ jakožto mateřská funkce $\psi$ a funkce z ní odvozená dilatací a posunem	190
9.5	Příklad vlnkových bázových vektorů v diskrétním případě	193
9.6	Několik prvků rekonstrukční báze $\Phi'$ pro prostor $\mathbb{R}^{128 \times 128}$	194
9.7	Spektrogramy úryvků hudebních signálů	195
9.8	Symetrické B-splajny řádů 2, 3 a 4	196
9.9	Ukázka několika atomů Gaborova framu složeného z posunutých a modulovaných B-splajnů	196
9.10	Několik prvků z vlnkového paketu pro vlnku „Daubechies 2“	197
B.1	Jednotkové koule ve vybraných $p$ -metrikách/normách	205
C.1	Ukázky součtů prvních $K$ harmonických složek usměrněného kosinu	219
C.2	Ukázky součtů prvních $K$ harmonických složek pilové funkce	219
C.3	Srovnání růstu složitosti DFT a FFT pro rostoucí délku signálu	222
C.4	Demonstrace filtrace signálu	242
E.1	Ilustrace řešení cvičení 5.17	253

## Seznam zkratk a symbolů

### Všeobecné konvence značení

V celém textu jsou používány následující běžné konvence značení.

Symbol/zkratka	Popis
	<b>Číselné obory</b>
$\mathbb{N}$	přirozená čísla: $1, 2, 3, \dots$
$\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$	nezáporná celá čísla: $0, 1, 2, 3, \dots$
$\mathbb{Z}$	celá čísla: typicky $i, j, k, m, n$
$\mathbb{Z}_N := \{0, 1, \dots, N-1\}$	zbytky po dělení celého čísla číslem $N \in \mathbb{N}$
$n \bmod N$	operace modulo: zbytek po dělení čísla $n \in \mathbb{Z}$ číslem $N \in \mathbb{N}$
$\mathbb{R}$	reálná čísla: typicky $r, s, t$
$\operatorname{sgn} r := \begin{cases} 1 & \text{pro } r > 0 \\ 0 & \text{pro } r = 0 \\ -1 & \text{pro } r < 0 \end{cases}$	znaménko čísla $r \in \mathbb{R}$
$\lfloor r \rfloor$	dolní celá část čísla $r \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}^+ := \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$	nezáporná reálná čísla
$\mathbb{R}^- := \{r \in \mathbb{R} \mid r < 0\}$	záporná reálná čísla
$\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$	rozšířená množina reálných čísel
$\mathbb{Q}$	racionální čísla
$\mathbb{C}$	komplexní čísla, typicky $c, z$
$\Re c$ ( $\Im c$ )	$\bar{z}$ značí číslo komplexně sdružené k číslu $z \in \mathbb{C}$ reálná (imaginární) část čísla $c \in \mathbb{C}$
$\mathbb{F}$	zástupný symbol pro číselný obor $\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$ (viz 2.1)
	<b>Matice a vektory</b>
např. $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	matice rozměru (typu) $m \times n$ , $m > 1, n > 1$ (tučně velkými písmeny)
např. $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$	vektory rozměru $n \times 1$ (standard) nebo $1 \times n$ , $n > 1$ (tučně malými písmeny)
	<b>Množiny</b>
$\underline{\cup}$	sjednocení disjunktních množin
$ M $	mohutnost (kardinalita) množiny $M$
$\aleph_0$	spočetná mohutnost
$I$	obecná (jakákoliv) indexová množina
$J$	nejvýše spočetná úplně uspořádaná indexová množina, obvykle $J = \mathbb{N}$ nebo $J = \mathbb{Z}$ ( $J \neq \emptyset$ ): viz 6.3

$K$	konečná indexová množina ( $K \neq \emptyset$ )
$\exp X$	množina všech podmnožin množiny $X$
<b>Funkce</b>	
$\{a_n\}, \{a_n\}_{n \in J}$	posloupnosti
pro s. v. $n \in J$	pro skoro všechna $n \in J$ neboli pro všechna $n \in J$ až na konečně mnoho
$\mathbb{F}^J$	množina všech číselných posloupností (zobrazení $J \rightarrow \mathbb{F}$ )
$\sum a_n, \sum_{n \in J} a_n$	sumace řady
např. $f, g, h$	komplexní funkce reálného argumentu ( $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ ), není-li řečeno jinak
$f(t)$	hodnota funkce $f$ v bodě $t \in \mathbb{R}$ (jen pro $n = 1$ )
$f(t) := f(t_1, \dots, t_n)$	hodnota $n$ -rozměrné funkce $f$ v bodě $t \in \mathbb{R}^n$
$f(t) := [f(t_1), \dots, f(t_n)]$	hodnota skalární funkce $f$ po složkách vektoru $t \in \mathbb{R}^n$ (rozměr $t$ je zachován)
$\text{supp } f := \{t \mid f(t) \neq 0\}$	nosič funkce $f$
$1_S(t) := \begin{cases} 1 & \text{pro } t \in S \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$	charakteristická funkce podmnožiny $S \subseteq \mathbb{R}^n$
$\delta(t)$	Diracova „funkce“ jakožto slabá limita funkcionalů v teorii zobecněných funkcí (distribucí): $\delta(t) := \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} 1_{(-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2})}(t)$ , $\int_{\mathbb{R}} f(t)\delta(t) dt = f(0)$
$\delta_{m,n} := \begin{cases} 1 & \text{pro } m = n \\ 0 & \text{pro } m \neq n \end{cases}$	Kroneckerův symbol ( $m, n \in \mathbb{Z}$ )
<b>Lebesgueův integrál</b>	
$\int_M f(t) dt$	integrál $f$ na měřitelné množině $M$ , kde integrál i měřitelnost je v Lebesgueově smyslu
$\int f(t) dt := \int_{\mathbb{R}} f(t) dt$	Lebesgueův integrál $f$ na $M = \mathbb{R}$
$\int_M f(t) dF(t)$	Lebesgueův–Stieltjesův integrál na $M$
$\int_M f(t) d\mu(t)$	Lebesgueův integrál s obecnou mírou $\mu$ na $M$
s. v. na $M$	skoro všude na $M$ , neboli pro všechna $t \in M$ s výjimkou podmnožiny nulové míry
$\text{ess sup}_{t \in M} f(t)$	esenciální supremum funkce $f$ na $M$ : $\text{ess sup}_{t \in M} f(t) := \inf\{C \mid f \leq C \text{ s. v. na } M\}$
<b>Prostory a jejich prvky</b>	
např. $X, Y, X_1, Y_1, X_2, Y_2 \dots$	prostory: neprázdné množiny opatřené nějakou strukturou
$x, y, x_1, y_1, x_2, y_2 \dots$	prvky výše uvedených prostorů
<b>Operátory</b>	
$\mathcal{F}(X, Y)$	prostor všech operátorů (zobrazení) $X \rightarrow Y$ (množiny)
např. $T: X \rightarrow Y$	(lineární) operátor neboli zobrazení zachovávající (lineární) strukturu (např. homomorfismus)
$T^{-1}: Y \rightarrow X$	(bijektivní) inverzní operátor k (bijektivnímu) operátoru $T$
$T: X \hookrightarrow Y, X \subseteq Y$	identické vnoření (inkluze) podmnožiny $X$ do $Y$
$T(x)$ nebo stručně $Tx$	hodnota operátoru $T$ v bodě $x$
$T(M)$	obraz množiny $M$ v operátoru $T$
$T^{-1}(M)$	úplný vzor podmnožiny $M \subseteq Y$ v zobrazení $T: X \rightarrow Y$ ; $T^{-1}(M) := \{x \in X \mid Tx \in M\}$
$T^{-1}y := T^{-1}(\{y\})$	úplný vzor prvku $y \in Y$
$I, I_X$	identický operátor, na $X$
$\theta, \theta_X$	nulový operátor, na $X$ ( $\theta_X: X \rightarrow Y$ )

**Značení zavedené v textu**

Následuje abecední seznam zkratk a symbolů spolu s odkazem do textu, kde byly zavedeny.

Značení	Popis	Odkaz do textu
$A_{\Phi} \leq R_{\Phi}, S_{\Phi} \leq B_{\Phi}$	nejlepší meze framu/Rieszovy báze $\Phi$	6.53
$\alpha_T, \beta_T$ ( $\alpha_T \leq T \leq \beta_T$ )	nejlepší meze (kvadratické formy) operátoru $T$	3.48, 3.51
B-prostor: $B, B_1, B_2 \dots$	Banachův prostor	2.57
$\mathcal{B}(X, Y)$	prostor ohraničených lineárních operátorů	3.3
BSV	Banachova–Steinhausova věta	3.21
$C(J)$	prostor funkcí spojitých na $J$	2.83
DCK	diskrétní cyklická konvoluce	C.28
DFT	diskrétní Fourierova transformace	C.5, C.10, C.12
DLK	diskrétní lineární konvoluce	C.28
$d_X$	metrika na $X$	2.35
$\mathcal{D}(T)$	definiční obor operátoru $T$	2.3
$\Delta(t)$	trojúhelníkový puls	C.23
$\Delta = \{\Delta_n\}_{n \in J}$	rozdílová Besselova posloupnost	6.74
$\dim X$	dimenze prostoru $X$	2.2
$\mathcal{E} = \{\varepsilon_n\}_{n \in J}$	přirozená ONB v $\ell^2$	2.89
FFT	rychlá Fourierova transformace (Fast Fourier Tr.)	C.7
FŘ	Fourierova řada	2.92, C.1
$\mathbb{F}$	pole skalárů, kde buď $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ nebo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$	2.1
$\gamma(M)$	hranice množiny $M$ (v topologii)	2.18
H-prostor: $H, H_1, H_2 \dots$	Hilbertův prostor	2.71
$H_+^2, H_-^2$	Hardyho prostory	2.114
HBV	Hahnova–Banachova věta	3.13
IMT	věta o inverzním zobrazení (Inverse Mapping Th.)	3.8
$\text{Int}(M)$	vnitřek množiny $M$ (v topologii)	2.18
$K(s, r)$	otevřená koule o středě $s$ a poloměru $r$	2.35
$K(x, y)$	jádrová funkce (jádro) RKHS-prostoru	8.2, 8.5
L-izomorfismus	lineární izomorfismus	2.7
L-(pod)prostor	lineární (vektorový) (pod)prostor	2.1
$L^p, \ell^p$	$p$ -prostory	2.83, 2.84, 2.87, B.8
$\tilde{L}_T^p$	$p$ -prostor $T$ -periodických funkcí	2.118, C.2.1
$\ell_N$	prostor $N$ -periodických posloupností	C.2.2
$\mathcal{L}_{\mathbb{F}}$	lineární struktura vektorového prostoru nad $\mathbb{F}$	2.1
$\mathcal{L}(M)$	lineární obal množiny $M$	2.1
$\mathcal{L}(X, Y)$	prostor lineárních operátorů z $X$ do $Y$	2.3
$\mathcal{LI}(X, Y)$	prostor lineárních izomorfismů z $X$ na $Y$	2.7
M-(pod)prostor	metrický (pod)prostor	2.35
ML-prostor	metrický lineární prostor	2.50
NL-prostor	normovaný lineární prostor	2.54
$\mathcal{N}(T)$	jádro (nulový prostor) operátoru $T$ (null space)	2.3
$\mathcal{O}, \mathcal{O}^*$	otevřené okolí, ryzí (v topologii)	2.18
OGS	ortogonální systém (množina)	2.74
OMT	věta o otevřeném zobrazení (Open Mapping Th.)	3.7
ONS, ONB	ortonormální systém (množina), báze	2.74
PW-prostor	Paleyho–Wienerův prostor	2.109
PI	Parsevalova identita	6.32, C.1.1

$\mathcal{P}_T$	prostor $T$ -periodizovatelných funkcí	2.121
RB	Rieszova báze	6.40
$\text{rect}(t)$	tzv. obdélníková funkce	(C.19)
RFV	Rieszova–Fischerova věta	6.32
RVR	Rieszova věta o reprezentaci	3.19
$\mathcal{R}(T)$	obor hodnot operátoru $T$ (range space)	2.3
$\mathcal{R}^\dagger, \mathcal{R}_\Phi^\dagger$	obor hodnot souřadnicového zobrazení v bázi $\Phi$	6.16
RKHS-prostor	H-prostor s reprodukcí jádrem (kap. 8)	8.3
$\underline{X}, \{x\}, [\{x\}], L_K[y; \alpha], \mathcal{L}(K), K[y]$	symboly používané v kap. 8	8.1
$\text{sinc}(t) := \frac{\sin \pi t}{\pi t}$	funkce sinc (sinus cardinalis)	2.91(b), C.23
SVD	singulární rozklad matice	5.13
T-(pod)prostor	topologický (pod)prostor	2.18, 2.25
TF-prostor	prostor funkcí koncentrovaných v čase i frekvenci	2.104
TL-prostor	topologický lineární prostor	2.49
TLI	topologický lineární izomorfismus	2.58
$\mathcal{T}\mathcal{L}(X, Y)$	prostor všech TLI z $X$ na $Y$	2.58
$\mathcal{T}_X$	topologie na $X$	2.18
$\mathcal{T}(\mathcal{S})$	nejmenší topologie obsahující $\mathcal{S}$	2.22
UI	unitární izomorfismus	3.90
VS-prostor	prostor s vnitřním součinem	2.66

Operační symbol	Popis	Odkaz do textu
$\kappa(T)$	číslo podmíněnosti operátoru $T$	5.11
$X', x' \in X'$	duální prostor k $X$ spojitých lin. funkcí $x'$	3.12
$y', \Phi', \Phi'$	duální prvek, duální frame/Rieszova báze	6.63, 6.64, 6.75
$\hat{x} := \mathcal{F}^- x$	Fourierova transformace $x$ (nebo ortogonální projekce $x$ — viz níže)	2.98, C.12
$\check{x} := \mathcal{F}^+ x$	zpětná Fourierova transformace $x$	2.98, C.12
$\diamond$	fourierovský transformační pár	2.102
$\circ$	Hadamardův součin (po složkách)	B.16, C.33
$\times, \prod$	kartézský součin (nebo korelace — viz níže)	2.10
$\xrightarrow{d}$	konvergence dle metriky $d$	2.35
$\xrightarrow{\text{sl.}}, \xrightarrow{\text{sl.}'}$	konvergence slabá	3.23
$\rightrightarrows$	konvergence stejnoměrná	2.85
$\xrightarrow{\mathcal{T}_X}$	konvergence v topologii na $X$	2.33
$*, \otimes$	konvoluce, periodická	C.15, C.28
$\times, \otimes$	korelace, periodická	C.15, C.28
$\stackrel{L}{\simeq}$	lineární izomorfismus	2.7
$\stackrel{L}{\subseteq}, \stackrel{L}{=}$	lineární podprostor, shoda L-prostorů	2.1
$\mathbb{W}_N^\pm$	matice operátoru DFT	C.5
$T^*$	matice (hermitovsky) transponovaná k $T$	3.38
$[T]$	maticová reprezentace operátoru $T$	2.14
$\ \cdot\ , \ \cdot\ _X$	norma, na $X$	2.54, B.20(2)
$T', T^*$	operátor adjungovaný k $T$	3.32, 3.34
$D_s$	operátor dilatace	3.1
$L_\Phi$	operátor diskretizační (Besselův) v bázi/framu $\Phi$	6.28
$\text{DFT}_N^\pm$	operátor diskrétní Fourierovy transformace	C.5

$\mathcal{F}_1^\pm$	operátor Fourierovy transformace v $L^1$	2.95, C.10
$\mathcal{F}, \mathcal{F}^\pm, \mathcal{F}_2^\pm$	operátor Fourierovy transformace v $L^2$	2.98, 3.1, C.12
$S_\Phi$	operátor framový v bázi/framu $\Phi$	6.28
$T_B$	operátor Fredholmova typu s jádrem $B$	B.18, 3.10
$f \rightarrow \tilde{f}$	operátor involuce	3.1
$f \rightarrow \bar{f}$	operátor konjugace	3.1
$R_\Phi$	operátor korelační (Gramův) v bázi/framu $\Phi$	6.28
$e_a$	operátor modulace	3.1
$P, P_H$	operátor ortogonální projekce, na podprostor $H$	3.65
$T_h := T_h^-, \tilde{T}_h := \tilde{T}_h^-$	operátor konvoluce, periodické (s impulzní odezvou $h$ )	C.15, C.28, 3.10
$T_h^+, \tilde{T}_h^+$	operátor korelace, periodické (s impulzní odezvou $h$ )	C.15, C.28
$T^+$	operátor Mooreovy–Penroseovy pseudoinverze k $T$	5.1
$T^-$	operátor zobecněné inverze k $T$	5.15
$R$	operátor reflexe	3.1
$T_\Phi$	operátor rekonstrukční v bázi/framu $\Phi$	6.16, 6.28
$\tau_b$	operátor translace (posunutí)	3.1
$\sqrt{T}$	operátorová odmocnina z $T$	3.62
$\perp$	ortogonální na, kolmý na	2.68
$M^\perp$	ortogonální komplement množiny $M$	2.73
$\hat{x} := P_H x$	ortogonální projekce $x$ na podprostor $H$	3.64, 3.65
$x^\perp := x - P_H x$	kolmá složka ortogonální projekce $x$ na $H$	3.66
$\oplus, \bigoplus$	ortogonální součet podprostorů	2.72
$\ \cdot\ _p$	$p$ -norma	2.83, 2.84, B.1
$x^+ := T^+ y, x^- := T^- y$	pseudoinverzní řešení rovnice $Tx = y$	5.4, 5.15
$\dot{+}, \dot{\sum}$	přímý součet podprostorů	2.5, A.5, 2.63
$\hat{T}$	restrikce operátoru $T$ na $\overline{\mathcal{R}(T^*)}$	4.2
$T^L$	restrikce operátoru $T$ na podprostor $L$ , který je k němu invariantní	7.20
$+$	součet podprostorů	A.5
$\{x\}_\Phi$	souřadnice prvku $x$ v bázi $\Phi$	6.16
$\langle \cdot, \cdot \rangle, \langle \cdot, \cdot \rangle_X$	vnitřní (skalární) součin, na $X$	2.66, B.20(2)
$T_\lambda (R_\lambda := T_\lambda^{-1})$	spektrální teorie: operátory (rezolventa)	7.1
$\sigma(T)$	spektrum operátoru $T$	7.2
$C\sigma(T)$	spojité spektrum operátoru $T$	7.2
$P\sigma(T)$	bodové spektrum operátoru $T$	7.2
$R\sigma(T)$	reziduální spektrum operátoru $T$	7.2
$\mathcal{R}_\lambda, \mathcal{N}_\lambda, \mathcal{N}$	spektrální teorie: prostory	7.1, 7.25
$\stackrel{\text{TLI}}{\simeq}$	topologický lineární izomorfismus	2.58
$\stackrel{\text{UI}}{\simeq}$	unitární izomorfismus	3.90
$\bar{M}$	uzávěr množiny $M$ (v topologii)	2.18
$\text{Int}(M)$	vnitřek množiny $M$ (v topologii)	2.18