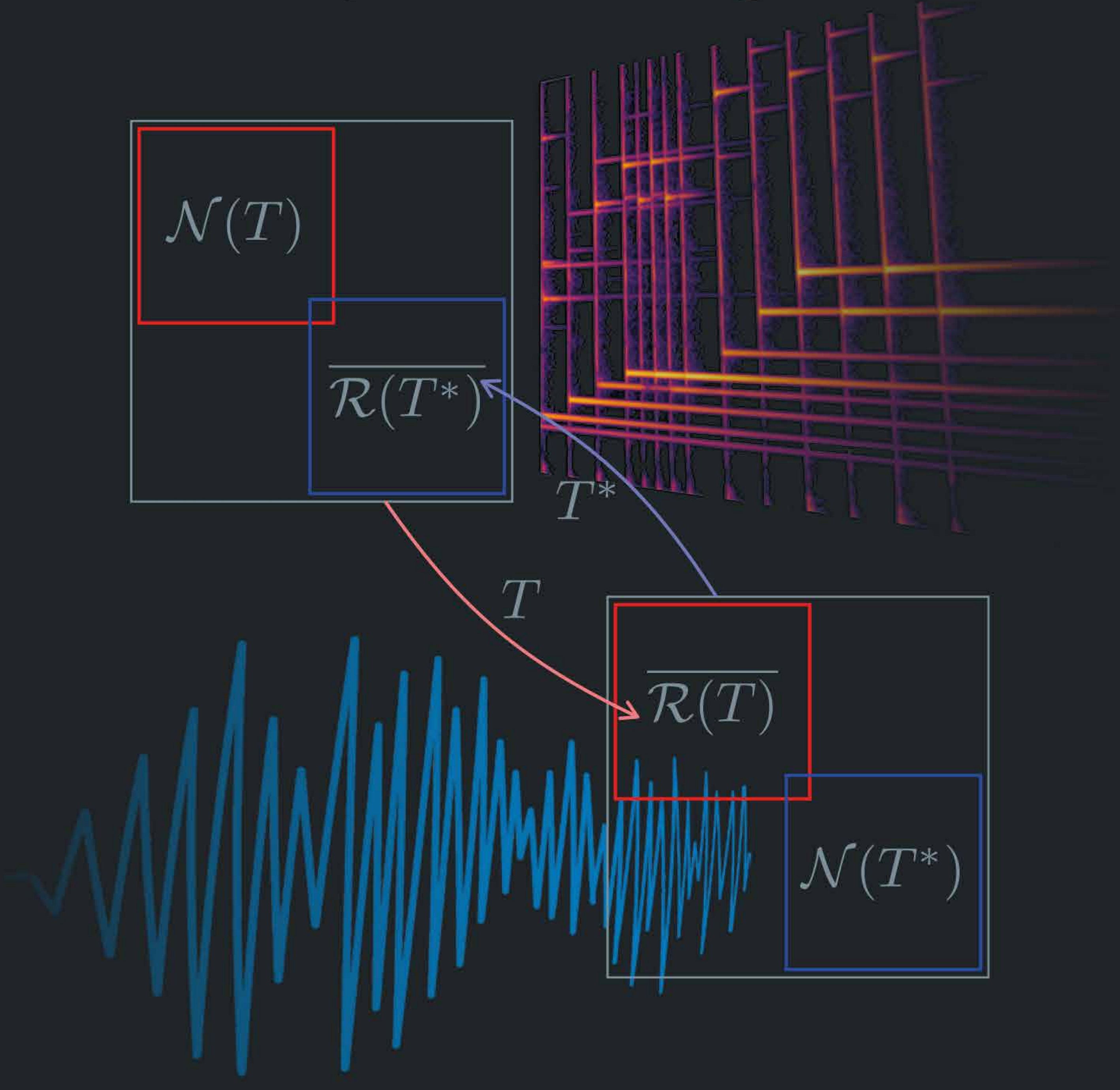
Moderní funkcionální analýza s aplikacemi ve zpracování signálů



Vítězslav Veselý – Pavel Rajmic – Ondřej Mokrý

Vítězslav Veselý, Pavel Rajmic, Ondřej Mokrý

Moderní funkcionální analýza s aplikacemi ve zpracování signálů

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
NAKLADATELSTVÍ VUTIUM

Odborná recenze: doc. RNDr. Jan Vybíral, Ph.D.

ISBN 978-80-214-6138-3

Poděkování

Autoři děkují studentům z Vysokého učení technického v Brně, kteří v období mezi roky 2012 a 2019 nějakou formou napomohli napsání této knihy. Někteří v rané fázi vzniku textu přepsali určité pasáže do LaTeXu, někteří upozornili na překlepy a chyby, jiní nakreslili první podobu obrázků. Konkrétně autoři děkují (v abecedním pořadí) Marii Daňkové (Mangové), Alici Doktorové, Mateji Dolníkovi, Janu Dražkovi, Ivanu Eryganovi, Janu Horníčkovi, Ondřeji Klimešovi, Tereze Konečné, Jiřímu Kráčmarovi, Barboře Navrátilové, Eriku Ochodnickému, Josefu Svatoňovi, Martinu Tejkalovi, Haně Zemanové, Michaele Zemčíkové. Zvláštní poděkování patří Pavlu Záviškovi za pomoc s převedením obrázků do TikZ, za grafické a typografické úpravy a za řešení náročnějších problémů s LaTeXem.

Dále poděkování patří paní ředitelce Nakladatelství VUTIUM Janě Kořínkové za trpělivost a konstruktivní přístup při formování knihy, Janu Skůpovi z Ústřední knihovny VUT za zařízení DOI a trvalých odkazů na některé prameny, Zdeňkovi Průšovi a Radkovi Hrbáčkovi za programování některých ukázek v Matlabu někdy kolem roku 2010, a v neposlední řadě Janu Vybíralovi za jeho postřehy v odborné recenzi.

Obsah

Seznam obrázků

Seznam zkratek a symbolů

Všeobecné konvence značení

V celém textu jsou používány následující běžné konvence značení.

Symbol/zkratka	Popis
	Číselné obory
$\mathbb{N}$	přirozená čísla: $1, 2, 3, \ldots$
$\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$	nezáporná celá čísla: $0, 1, 2, 3, \ldots$
$\mathbb{Z}$	celá čísla: typicky i, j, k, m, n
$\mathbb{Z}_N := \{0, 1, \ldots, N-1\}$	zbytky po dělení celého čísla číslem $N \in \mathbb{N}$
$n \bmod N$	operace modulo: zbytek po dělení čísla $n \in \mathbb{Z}$ číslem $N \in \mathbb{N}$
$\mathbb{R}$	reálná čísla: typicky r, s, t
$\operatorname{sgn} r := \begin{cases} 1 & \text{pro } r > 0 \\ 0 & \text{pro } r = 0 \\ -1 & \text{pro } r < 0 \end{cases}$	znaménko čísla $r \in \mathbb{R}$
$\lfloor r \rfloor$	dolní celá část čísla $r \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}^+ := \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$	nezáporná reálná čísla
$\mathbb{R}^- := \{r \in \mathbb{R} \mid r < 0\}$	záporná reálná čísla
$\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$	rozšířená množina reálných čísel
$\mathbb{Q}$	racionální čísla
$\mathbb{C}$	komplexní čísla, typicky c, z $\bar{z}$ značí číslo komplexně sdružené k číslu $z \in \mathbb{C}$
$\Re c$ ($\Im c$)	reálná (imaginární) část čísla $c \in \mathbb{C}$
$\mathbb{F}$	zástupný symbol pro číselný obor $\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$ (viz 2.1)
	Matice a vektory
např. $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$	matice rozměru (typu) $m \times n$, $m > 1, n > 1$ (tučně velkými písmeny)
např. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$	vektory rozměru $n \times 1$ (standard) nebo $1 \times n$, $n > 1$ (tučně malými písmeny)
	Množiny
$\dot\cup$	sjednocení disjunktních množin
$\lvert M \rvert$	mohutnost (kardinalita) množiny M
$\aleph_0$	spočetná mohutnost
I	obecná (jakákoliv) indexová množina
J	nejvýše spočetná úplně uspořádaná indexová množina, obvykle $J = \mathbb{N}$ nebo $J = \mathbb{Z}$ ($J \neq \emptyset$): viz 6.3

K	konečná indexová množina ($K \neq \emptyset$)
$\exp X$	množina všech podmnožin množiny X

Funkce

$\{a_n\}$, $\{a_n\}_{n\in J}$	posloupnosti
pro s. v. $n \in J$	pro skoro všechna $n \in J$ neboli pro všechna $n \in J$ až na konečně mnoho
$\mathbb{F}^J$	množina všech číselných posloupností (zobrazení $J \to \mathbb{F}$)
$\sum a_n$, $\sum_{n\in J} a_n$	sumace řady
např. f, g, h	komplexní funkce reálného argumentu ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$), není-li řečeno jinak
$f(t)$	hodnota funkce f v bodě $t \in \mathbb{R}$ (jen pro $n = 1$)
$f(\boldsymbol{t}) := f(t_1, \dots, t_n)$	hodnota n-rozměrné funkce f v bodě $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n$
$f(\boldsymbol{t}) := [f(t_1), \dots, f(t_n)]$	hodnota skalární funkce f po složkách vektoru $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n$ (rozměr $\boldsymbol{t}$ je zachován)
$\operatorname{supp} f := \{t \mid f(t) \neq 0\}$	nosič funkce f
$1_S(\boldsymbol{t}) := \begin{cases} 1 & \text{pro } \boldsymbol{t} \in S \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$	charakteristická funkce podmnožiny $S \subseteq \mathbb{R}^n$
$\delta(t)$	Diracova „funkce“ jakožto slabá limita funkcionálů v teorii zobecněných funkcí (distribucí): $\delta(t) := \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} 1_{(-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2})}(t)$, $\int_{\mathbb{R}} f(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t = f(0)$
$\delta_{m,n} := \begin{cases} 1 & \text{pro } m = n \\ 0 & \text{pro } m \neq n \end{cases}$	Kroneckerův symbol ($m, n \in \mathbb{Z}$)

Lebesgueův integrál

$\int_M f(t)\,\mathrm{d}t$	integrál f na měřitelné množině M, kde integrál i měřitelnost je v Lebesgueově smyslu
$\int f(t)\,\mathrm{d}t := \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}t$	Lebesgueův integrál f na $M = \mathbb{R}$
$\int_M f(t)\,\mathrm{d}F(t)$	Lebesgueův–Stieltjesův integrál na M
$\int_M f(t)\,\mathrm{d}\mu(t)$	Lebesgueův integrál s obecnou mírou μ na M
s. v. na M	skoro všude na M, neboli pro všechna $t \in M$ s výjimkou podmnožiny nulové míry
$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in M} f(t)$	esenciální supremum funkce f na M: $\operatorname*{ess\,sup}_{t\in M} f(t) := \inf\{C \mid f \leq C \text{ s. v. na } M\}$

Prostory a jejich prvky

např. $X, Y, X_1, Y_1, X_2, Y_2 \dots$	prostory: neprázdné množiny opatřené nějakou strukturou
$x, y, x_1, y_1, x_2, y_2 \dots$	prvky výše uvedených prostorů

Operátory

$\mathcal{F}(X, Y)$	prostor všech operátorů (zobrazení) $X \to Y$ (množiny)
např. $T\colon X \to Y$	(lineární) operátor neboli zobrazení zachovávající (lineární) strukturu (např. homomorfismus)
$T^{-1}\colon Y \to X$	(bijektivní) inverzní operátor k (bijektivnímu) operátoru T
$T\colon X \hookrightarrow Y$, $X \subseteq Y$	identické vnoření (inkluze) podmnožiny X do Y
$T(x)$ nebo stručně Tx	hodnota operátoru T v bodě x
$T(M)$	obraz množiny M v operátoru T
$T^{-1}(M)$	úplný vzor podmnožiny $M \subseteq Y$ v zobrazení $T\colon X \to Y$; $T^{-1}(M) := \{x \in X \mid Tx \in M\}$
$T^{-1}y := T^{-1}(\{y\})$	úplný vzor prvku $y \in Y$
I, I_X	identický operátor, na X
$\mathit{0}$, $\mathit{0}_X$	nulový operátor, na X ($\mathit{0}_X\colon X \to Y$)

Značení zavedené v textu

Následuje abecední seznam zkratek a symbolů spolu s odkazem do textu, kde byly zavedeny.

Značení	Popis	Odkaz do textu
$A_\Phi \leq R_\Phi, S_\Phi \leq B_\phi$	nejlepší meze framu/Rieszovy báze Φ	6.53
α_T, β_T ($\alpha_T \leq T \leq \beta_T$)	nejlepší meze (kvadratické formy) operátoru T	3.48, 3.51
B-prostor: $B, B_1, B_2 \dots$	Banachův prostor	2.57
$\mathcal{B}(X, Y)$	prostor ohraničených lineárních operátorů	3.3
BSV	Banachova–Steinhausova věta	3.21
$C(\mathcal{I})$	prostor funkcí spojitých na $\mathcal{I}$	2.83
DCK	diskrétní cyklická konvoluce	C.28
DFT	diskrétní Fourierova transformace	C.5, C.10, C.12
DLK	diskrétní lineární konvoluce	C.28
d_X	metrika na X	2.35
$\mathcal{D}(T)$	definiční obor operátoru T	2.3
$\mathit{\Delta}(t)$	trojúhelníkový puls	C.23
$\mathit{\Delta} = \{\Delta_n\}_{n\in J}$	rozdílová Besselova posloupnost	6.74
$\dim X$	dimenze prostoru X	2.2
$\mathcal{E} = \{\varepsilon_n\}_{n\in J}$	přirozená ONB v ℓ^2	2.89
FFT	rychlá Fourierova transformace (Fast Fourier Tr.)	C.7
FŘ	Fourierova řada	2.92, C.1
$\mathbb{F}$	pole skalárů, kde buď $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ nebo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$	2.1
$\gamma(M)$	hranice množiny M (v topologii)	2.18
H-prostor: $H, H_1, H_2 \dots$	Hilbertův prostor	2.71
H^2_+, H^2_-	Hardyho prostory	2.114
HBV	Hahnova–Banachova věta	3.13
IMT	věta o inverzním zobrazení (Inverse Mapping Th.)	3.8
$\operatorname{Int}(M)$	vnitřek množiny M (v topologii)	2.18
$K(s, r)$	otevřená koule o středu s a poloměru r	2.35
$K(x, y)$	jádrová funkce (jádro) RKHS-prostoru	8.2, 8.5
L-izomorfismus	lineární izomorfismus	2.7
L-(pod)prostor	lineární (vektorový) (pod)prostor	2.1
L^p, ℓ^p	p-prostory	2.83, 2.84, 2.87, B.8
$\widetilde{L}^p_T$	p-prostor T-periodických funkcí	2.118, C.2.1
ℓ_N	prostor N-periodických posloupností	C.2.2
$\mathcal{L}_{\mathbb{F}}$	lineární struktura vektorového prostoru nad $\mathbb{F}$	2.1
$\mathcal{L}(M)$	lineární obal množiny M	2.1
$\mathcal{L}(X, Y)$	prostor lineárních operátorů z X do Y	2.3
$\mathcal{LI}(X, Y)$	prostor lineárních izomorfismů z X na Y	2.7
M-(pod)prostor	metrický (pod)prostor	2.35
ML-prostor	metrický lineární prostor	2.50
NL-prostor	normovaný lineární prostor	2.54
$\mathcal{N}(T)$	jádro (nulový prostor) operátoru T (null space)	2.3
$\mathcal{O}$, $\mathcal{O}^*$	otevřené okolí, ryzí (v topologii)	2.18
OGS	ortogonální systém (množina)	2.74
OMT	věta o otevřeném zobrazení (Open Mapping Th.)	3.7
ONS, ONB	ortonormální systém (množina), báze	2.74
PW-prostor	Paleyho–Wienerův prostor	2.109
PI	Parsevalova identita	6.32, C.1.1

$\mathcal{P}_T$	prostor T-periodizovatelných funkcí	2.121
RB	Rieszova báze	6.40
rect(t)	tzv. obdélníková funkce	(C.19)
RFV	Rieszova–Fischerova věta	6.32
RVR	Rieszova věta o reprezentaci	3.19
$\mathcal{R}(T)$	obor hodnot operátoru T (range space)	2.3
$\mathcal{R}^\dagger, \mathcal{R}^\dagger_\Phi$	obor hodnot souřadnicového zobrazení v bázi Φ	6.16
RKHS-prostor	H-prostor s reprodukčním jádrem (kap. 8)	8.3
$\underline{X}$, $\{x\}$, $[\{x\}]$, $L_K[y;\alpha]$, $\mathcal{L}(K)$, $K[y]$	symboly používané v kap. 8	8.1
$\mathrm{sinc}(t) := \frac{\sin \pi t}{\pi t}$	funkce sinc (sinus cardinalis)	2.91(b), C.23
SVD	singulární rozklad matice	5.13
T-(pod)prostor	topologický (pod)prostor	2.18, 2.25
TF-prostor	prostor funkcí koncentrovaných v čase i frekvenci	2.104
TL-prostor	topologický lineární prostor	2.49
TLI	topologický lineární izomorfismus	2.58
$\mathcal{TLI}(X,Y)$	prostor všech TLI z X na Y	2.58
$\mathcal{T}_X$	topologie na X	2.18
$\mathcal{T}(\mathcal{S})$	nejmenší topologie obsahující $\mathcal{S}$	2.22
UI	unitární izomorfismus	3.90
VS-prostor	prostor s vnitřním součinem	2.66

Operační symbol	Popis	Odkaz do textu
$\kappa(T)$	číslo podmíněnosti operátoru T	5.11
X', $x' \in X'$	duální prostor k X spojitých lin. funkcionálů x'	3.12
y', Φ', $\Phi^{\backprime}$	duální prvek, duální frame/Rieszova báze	6.63, 6.64, 6.75
$\hat{x} := \mathcal{F}^- x$	Fourierova transformace x (nebo ortogonální projekce x — viz níže)	2.98, C.12
$\check{x} := \mathcal{F}^+ x$	zpětná Fourierova transformace x	2.98, C.12
$\Diamond$	fourierovský transformační pár	2.102
$\circ$	Hadamardův součin (po složkách)	B.16, C.33
$\times, \prod$	kartézský součin (nebo korelace — viz níže)	2.10
$\xrightarrow{d}$	konvergence dle metriky d	2.35
$\xrightarrow{\text{sl.}}$, $\xrightarrow{\text{sl'.}}$	konvergence slabá	3.23
$\rightrightarrows$	konvergence stejnoměrná	2.85
$\xrightarrow{\mathcal{T}_X}$	konvergence v topologii na X	2.33
$*, \circledast$	konvoluce, periodická	C.15, C.28
$\times, \otimes$	korelace, periodická	C.15, C.28
$\overset{\mathrm{L}}{\simeq}$	lineární izomorfismus	2.7
$\overset{\mathrm{L}}{\subseteq}, \overset{\mathrm{L}}{=}$	lineární podprostor, shoda L-prostorů	2.1
$\mathbb{W}^{\pm}_N$	matice operátoru DFT	C.5
T^*	matice (hermitovsky) transponovaná k T	3.38
$[T]$	maticová reprezentace operátoru T	2.14
$\Vert\cdot\Vert, \Vert\cdot\Vert_X$	norma, na X	2.54, B.20(2)
T', T^*	operátor adjungovaný k T	3.32, 3.34
D_s	operátor dilatace	3.1
L_Φ	operátor diskretizační (Besselův) v bázi/framu Φ	6.28
$\mathrm{DFT}^{\pm}_N$	operátor diskrétní Fourierovy transformace	C.5

$\mathcal{F}^{\pm}_1$	operátor Fourierovy transformace v L^1	2.95, C.10
$\mathcal{F}, \mathcal{F}^{\pm}, \mathcal{F}^{\pm}_2$	operátor Fourierovy transformace v L^2	2.98, 3.1, C.12
S_Φ	operátor framový v bázi/framu Φ	6.28
T_B	operátor Fredholmova typu s jádrem B	B.18, 3.10
$f \to \widetilde{f}$	operátor involuce	3.1
$f \to \bar{f}$	operátor konjugace	3.1
R_Φ	operátor korelační (Gramův) v bázi/framu Φ	6.28
e_a	operátor modulace	3.1
P, P_H	operátor ortogonální projekce, na podprostor H	3.65
$T_h := T^-_h$, $\widetilde{T}_h := \widetilde{T}^-_h$	operátor konvoluce, periodické (s imuplzní odezvou h)	C.15, C.28, 3.10
T^+_h, $\widetilde{T}^+_h$	operátor korelace, periodické (s imuplzní odezvou h)	C.15, C.28
T^+	operátor Mooreovy–Penroseovy pseudoinverze k T	5.1
T^-	operátor zobecněné inverze k T	5.15
R	operátor reflexe	3.1
T_Φ	operátor rekonstrukční v bázi/framu Φ	6.16, 6.28
τ_b	operátor translace (posunutí)	3.1
$\sqrt{T}$	operátorová odmocnina z T	3.62
$\perp$	ortogonalní na, kolmý na	2.68
$M^\perp$	ortogonální komplement množiny M	2.73
$\widehat{x} := P_H x$	ortogonální projekce x na podprostor H	3.64, 3.65
$x^\perp := x - P_H x$	kolmá složka ortogonální projekce x na H	3.66
$\oplus, \bigoplus$	ortogonální součet podprostorů	2.72
$\Vert\cdot\Vert_p$	p-norma	2.83, 2.84, B.1
$x^+ := T^+ y$, $x^- := T^- y$	pseudoinverzní řešení rovnice $Tx = y$	5.4, 5.15
$\dot{+}, \dot{\sum}$	přímý součet podprostorů	2.5, A.5, 2.63
$\dot{T}$	restrikce operátoru T na $\overline{\mathcal{R}(T^*)}$	4.2
T^L	restrikce operátoru T na podprostor L, který je k němu invariantní	7.20
$+, \sum$	součet podprostorů	A.5
$\{x\}_\Phi$	souřadnice prvku x v bázi Φ	6.16
$\langle\cdot,\cdot\rangle, \langle\cdot,\cdot\rangle_X$	vnitřní (skalární) součin, na X	2.66, B.20(2)
T_λ ($R_\lambda := T_\lambda^{-1}$)	spektrální teorie: operátory (rezolventa)	7.1
$\sigma(T)$	spektrum operátoru T	7.2
$C\sigma(T)$	spojité spektrum operátoru T	7.2
$P\sigma(T)$	bodové spektrum operátoru T	7.2
$R\sigma(T)$	reziduální spektrum operátoru T	7.2
$\mathcal{R}_\lambda, \mathcal{N}_\lambda, \mathcal{N}$	spektrální teorie: prostory	7.1, 7.25
$\overset{\mathrm{TLI}}{\simeq}$	topologický lineární izomorfismus	2.58
$\overset{\mathrm{UI}}{\simeq}$	unitární izomorfismus	3.90
$\overline{M}$	uzávěr množiny M (v topologii)	2.18
$\mathrm{Int}(M)$	vnitřek množiny M (v topologii)	2.18