

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles

Ing. Alena Škuderová

**K ANALÝZE VNITŘNÍ DYNAMIKY  
SILNĚ NELINEÁRNÍ PARAMETRICKÉ SOUSTAVY  
S KINEMATICKÝMI VAZBAMI**

TO ANALYSIS OF INTERNAL DYNAMICS  
OF STRONGLY NONLINEAR PARAMETRIC SYSTEM  
WITH KINEMATIC COUPLINGS

ZKRÁCENÁ VERZE PH.D. THESIS

Obor: Inženýrská mechanika

Školitel: Prof. Ing. Ctirad Kratochvíl, DrSc.

Oponenti: Prof. RNDr. Jan Šklíba, CSc.  
Ing. Zdeněk Doležal, CSc.

Datum obhajoby: 7. 4. 2004

**KLÍČOVÁ SLOVA**

*nelineární dynamika, parametrické soustavy, ozubení, zubová vůle, simulační model*

**KEY WORDS**

*nonlinear dynamics, parametric systems, gearing, gear backlash, simulation model*

Originál dizertační práce je uložen v Ústavu mechaniky těles FSI VUT Brno.

# OBSAH

1 ÚVOD.....	5
1.1 Současný stav problematiky .....	5
1.2 Cíl práce, způsoby řešení a použité metody.....	6
2 FYZIKÁLNÍ FORMULACE PROBLÉMU .....	8
2.1 Shrnutí zjednodušujících předpokladů řešení .....	14
3 MATEMATICKÝ POPIS SOUSTAVY.....	15
4 SIMULAČNÍ MODEL SOUSTAVY .....	18
5 ANALÝZA ZVLÁŠTNÍCH PŘÍPADŮ RELATIVNÍHO POHYBU $y(t)$ KINEMATICKÉ DVOJICE OZUBENÝCH KOL V JEDNOTLIVÝCH FÁZÍCH ZÁBĚRU.....	19
5.1 Shrnutí nejdůležitějších výsledků analýzy.....	24
6 ZÁVĚR.....	26
7 POUŽITÁ LITERATURA.....	28
8 SEZNAM PUBLIKOVANÝCH PRACÍ .....	29
9 ŽIVOTOPIS.....	31
10 SUMMARY.....	32



# 1 ÚVOD

Ozubené převody jsou jedním z nejrozšířenějších mechanismů většiny strojů, mají mimo řady předností jako poměrně vysokou účinnost, jednoduchost a spolehlivost provozu i některé nedostatky. Při odvalování ozubených kol vznikají v záběru profilů kinematických dvojic proměnné deformace, které vyvolávají kmitání jak v samotných kolech, tak i v celém převodovém systému jako celku. Vznikají tak přídatná dynamická zatížení, v jejichž důsledku a vlivem dalších zatížení, např. vnějšími silami a momenty, působícími na daný mechanický systém, může při dynamických deformacích, odpovídajících řádově statickým deformacím v ozubení, dojít k přerušení styku mezi zabírajícími profily zubů. Tím vznikají rázové účinky, které pak způsobují další zvětšení dynamického namáhání celé soustavy.

Znalost účinků dynamických sil vyvolaných v ozubených převodech jak vnitřními, tak i vnějšími budicími vlivy, je důležitá jak z hlediska jejich pevnostního dimenzování, rovnoměrnosti chodu, tak i z hlediska akustických vlastností celé soustavy. Stejně jako v jiných oborech techniky, stojí při konstrukci ozubených převodů v popředí snaha o dimenzionální i hmotnostní minimalizaci na jednotku přenášeného výkonu. Ještě v dnešní době není dosud uspokojivě vyřešena celá řada otázek, týkající se návrhu a výpočtu, zejména dynamiky převodových systémů.

## 1.1 SOUČASNÝ STAV PROBLEMATIKY

Hlavní snahou v celosvětovém výzkumu ozubených kol je řešení zásadních otázek v pohonové technice, ke kterým patří zvýšení výkonu, redukce hmotnosti, zvýšení spolehlivosti a redukce vyzařování hluku. V oblasti techniky ozubených kol to znamená rozvoj takových modelů záběru kol, které by co nejlépe vystihovaly přenos a rozložení zatížení v zubových záběrech s různou chybou profilu (resp. profilovou modifikací). Z mnoha prací zabývajících se touto tematikou jmenujme např. [2],[8],[9],[10],[19].

Přesné určení vibrací v zubovém záběru vyžaduje detailní modelování všech možných vlivů působících v záběru ozubení, včetně periodické změny tuhosti dané střídáním různého počtu zubů v záběru, chyb zubových profilů a možné účinky zubových vůlí a např. pro šikmé ozubení je nutné modelování v 3D prostoru. Výsledky rozšířené, tzv. 3D analýzy, dosud nebyly obecně použity v konstrukci a návrhu ozubených kol, s výjimkou některých "high-tech" námořních a kosmických projektů [3].

Životnost a zátěž ozubených převodových soustav závisí zejména od jejich dynamického chování. Mohou se zde podle druhu zatížení konstrukcí vyskytovat téměř všechny z dynamiky soustav známé druhy dynamických jevů jako lineární a nelineární, parametrické, vynucené a chaotické kmitání, bifurkace apod. Zvláštní význam zde nabývá zejména kmitání vyvolané silnými nelinearitami od existence vůlí jak zubových, tak i možných ložiskových. Ve spojení s vyzařovaným hlukem zde stojí v popředí nelineární chování od odlehnutí – odskoku a rázovém spojení zubových boků v záběru. Tyto jevy nastávají buď při relativně *silném* předpětí

ozubených kol vlivem větších dynamických než statickoelastických deformací zubových profilů nebo při relativně *slabém* nebo *žádném* předpětí ozubených kinematických dvojic. Druhý případ tvoří tzv. volná kola, jak se vyskytují u předlohových kol stálého záběru, např. v automobilových převodových skříních.

V dynamice soustav s kinematickými dvojicemi s ozubením nazýváme uvedené fenomény *za předpětí* jako rázy – tlučení (v anglické terminologii "rattling", v německé pak "Hämmern"), u soustav *bez předpětí* jako rázy – klepání (v anglické terminologii "clattering", v německé jako "Rasseln"), [9],[22],[23],[24],[25].

V případech zubových rázů – rattlingu – se předpokládá velmi krátká doba trvání rázu a jeho působení přibližně ve směru záběrové přímky, která je kolmá na rovinu kontaktu.

K domácím pracem z oblasti výzkumu soustav s kinematickými vazbami patří zejména práce M.Hortela (např. [4]), zaměřené na analýzu dynamiky nelineárních parametrických systémů na základě analytické globální metody transformace nelineárních okrajových diferenciálních úloh na ekvivalentní úlohy řešení integrodiferenciálních soustav rovnic metodou rozštěpení řešících jader, dále práce V.Zemana (např. [5]) a Z.Doležala (např. [6]).

## 1.2 CÍL PRÁCE, ZPŮSOBY ŘEŠENÍ A POUŽITÉ METODY

Cílem předkládané práce je sestavení takového náhradního modelu soustavy páru ozubených kol s čelním přímým ozubením, který by na základě kvalitativního rozboru současných poznatků měl co nejobecnější platnost v rámci dané třídy mechanismů a který by respektoval maximum vlivů, jež mohou ovlivnit dynamické chování takovéto soustavy.

Jako zdroje vzniku kmitání je možno obecně uvést tyto základní příčiny

1. *vnější*: kolísání hnacího a hnaného momentu,

2. *vnitřní*:

(a) kinematické

- výrobní nepřesnosti v ozubení (odchylka od ideálního evolventního profilu boků zubů),
- výrobní nepřesnosti v kolech (házivost roztečných kružnic způsobená buď uložením kol nebo jejich necentrickým tvarem),
- výrobní nepřesnosti v ostatních částech převodové soustavy

(b) parametrické

- periodicky s časem proměnlivé tuhosti ozubení (způsobené střídáním  $m$  a  $m+1$  (obecně) párů zubů na záběrové dráze),
- proměnlivé tření (možný je i výskyt samobuzeného kmitání vlivem charakteru tření mezi boky zubů v záběru – důsledek suchého tření)

(c) rázy

jejich výskyt je v důsledku existence technologických bočních zubových vůlí možný, nikoliv však nutný, a je podmíněn většími dynamickými než staticko-elastickými deformacemi v zubovém záběru. Důležitou roli při

posuzování rovnoměrnosti chodu hraje i chyba v základní rozteči, která může vyvolat dva druhy rázů:

- *hranový ráz* – na začátku záběru – je-li základní zubová rozteč u hnaného kola větší než u hnacího,
- *ráz středový* – při výstupu jednoho páru zubů ze záběru – je-li základní zubová rozteč u hnaného kola menší než u hnacího.

Rázové jevy – měkké rázy - v ozubených kolech s předpětím způsobují

- nerovnoměrnosti chodu – střídavými odskoky v záběru se nacházejících zubů a jejich opětovný styk jak v oblasti normálního či inverzního záběru,
- opakované porušování souvislé nosné olejové vrstvy, tím jsou dány podmínky pro vznik polosuchého až suchého tření v záběru s důsledkem vzniku samobuzeného kmitání, a tím snížené životnosti soukolí,
- vznik hluku – nejen při provozním zatížení ozubených kol a přejíždění rezonančních oblastí, ale též ve fázi nezatížených párů zubů.

Zubové profily zabírajících kol vykonávají složitý pohyb valení – smyk, a to smyk vyplývající jak z geometrie záběru, tak i z relativních pohybů elastických podpor těchto kol. O rychlosti vytvoření a kvalitě olejového filmu po opětovném styku profilů zubů rozhoduje

- vzdálenost styku záběru od centrálního bodu záběru na záběrové přímce,
- velikost relativního pohybu (resp. relativní rychlosti) zabírajících boků zubů, vyplývajícího z pohybů v elastických podporách.

Pouze v případě absolutně tuhého uložení ozubených kol a při záběru v centrálním bodě vykonávají boky zubů pouze valivý pohyb. Smykový pohyb daný geometrií záběru je pak v tomto bodě nulový.

Dále je třeba věnovat pozornost, zejména u soustav s proměnlivým oborem otáček, rezonančním stavům – hlavní a vedlejší vnitřní rezonance, kombinační periodické i neperiodické rezonance. Při rezonanci rostou dynamická zatížení, což může vést dokonce až k porušení ozubených kol samotných, tak i jiných součástí nebo celých uzlů převodového ústrojí.

V dizertační práci je řešena a analyzována problematika *vnitřní dynamiky* slabě a silně nelineárních parametrických soustav, tj. soustav s časově variabilními členy a rázovými jevy se šesti stupni volnosti. Fyzikálně se jedná o kinematické dvojice elasticky uložených kol s čelním přímým ozubením.

Pohybové rovnice řešené soustavy jsou sestaveny pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu. Dynamické chování uvažované soustavy je pak popsáno soustavou šesti nelineárních diferenciálních rovnic druhého řádu s časově proměnlivými koeficienty. Protože řešení pohybových rovnic není, až na malé výjimky, možné v analyticky uzavřených tvarech (z důvodu vyjádření některých funkcí Fourierovými řadami – tzn. vícefrekvenční buzení), ukázala se jako výhodná jednak

aplikace analytické teorie nelineárních integrálních rovnic [4], jednak numerická simulace v prostředí MATLAB/Simulink.

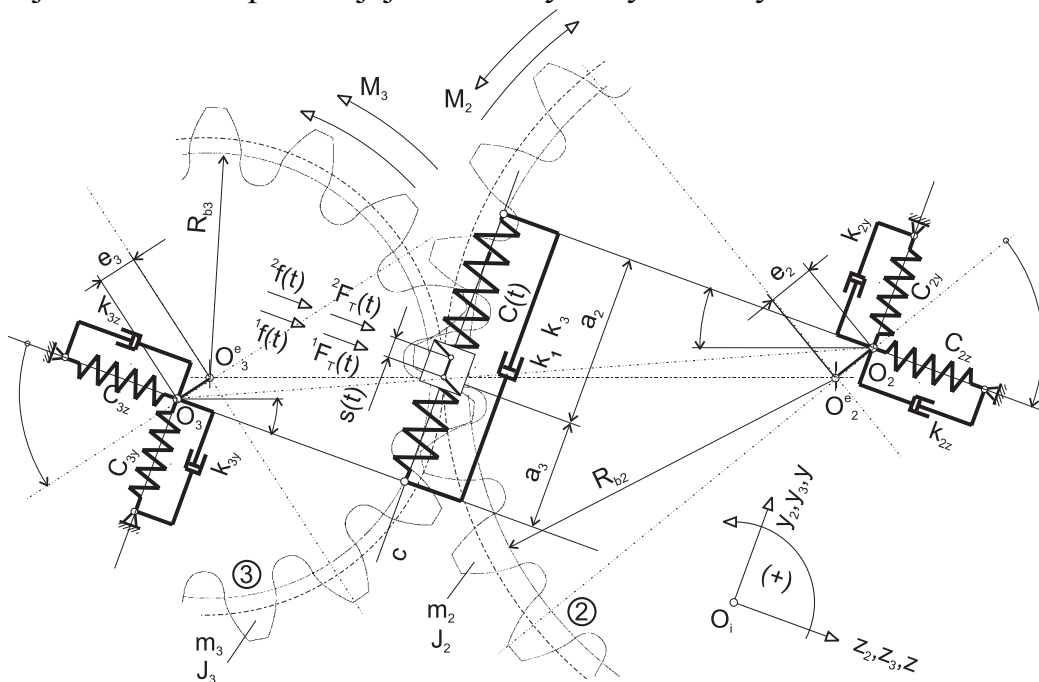
V práci je pro řešení dynamického chování silně nelineární parametrické soustavy použita numerická simulace v prostředí MATLAB/Simulink, která se ukázala jako výhodná nejen pro účely sestavení celého simulačního modelu řešené soustavy, ale i pro možnost následného grafického zobrazení výsledků řešení pomocí grafických nástrojů programu Matlab.

V modelu řešené soustavy jsou respektovány zejména následující vlivy:

- vliv zubové vůle, časově proměnlivé v důsledku elasticity uložení kol a možné házivosti roztečných kružnic,
- vliv tření v záběru ozubení,
- vliv tlumení ve fázi záběru ozubení a při průchodu oblastí zubové vůle,
- vliv časově proměnlivé výsledné tuhostní funkce v záběru ozubení,
- vliv chybové funkce jako odchylky od ideálního evolventního profilu boků zubů,
- vliv fáze mezi výslednou tuhostní funkcí v záběru ozubení a chybovou funkcí,
- vliv házivostí roztečných kružnic s uvažováním jejich možného vzájemného natočení.

## 2 FYZIKÁLNÍ FORMULACE PROBLÉMU

Izolovaná soustava jednoho páru pružně uložených ozubených kol je v náhradním mechanickém schématu představována systémem o šesti stupních volnosti – obr.1. Cílem práce je obecné zmapování jejich některých dynamických vlastností.



Obr.1 – Schema páru pružně uložených ozubených kol.



Ozubená kola (hnací – (3) a hnané – (2),  $m_j$ ... hmotnost,  $J_j$ ... moment setrvačnosti,  $\varphi_j$ ... úhel natočení,  $R_{bj}$ ... poloměr základní kružnice,  $M_j$ ... vnější moment působící na kinematickou dvojici,  $Z_j$ ... počet zubů příslušného  $j$ -tého kola;  $j = 3,2$  a  $\alpha'$  je úhel záběru) jsou vzájemně paralelně spojena pružinou ( $C(t)$ ), která modeluje pružnost v záběru se nacházejících zubů, a tlumičem se součiniteli útlumu  $k_1$  (lineárního) a  $k_3$  (nelineárního - kubického).

S časem proměnlivá funkce  $s(t)$  představuje boční zubovou vůli v soukolí, která je ovlivněna případnými excentricitami kol  $e_j$  a jejich vzájemným natočením o fázový úhel  $\Delta$  a v případě elasticky uloženého soukolí i pohyby v podporách obou kol  $y_j, z_j$ .

Do pružiny je vsunuta "šablona", modelující funkci  ${}^{1,2}f(t)$ . Z fyzikálního hlediska představuje tato funkce výsledné výrobní nepřesnosti v záběru se nacházejících profilů zubů jako odchylky od ideálního evolventního profilu, chyby rozteče či odchylky od podmínek ideální modifikace atd. Periodicita výsledné rušivé funkce  ${}^{1,2}f(t)$  je dána náhodnou periodou výrobní chyby, která může být např. za jednu otáčku kola nebo za uběhnutí jedné či více zubových roztečí atd. Budící frekvence rušivé funkce je pak (s ohledem na společný násobek otáček kol pro převodový poměr  $i \neq 1$ ) v prvním případě rovna úhlové rychlosti kola  $\omega_j$  ( $j = 3,2$ ), v druhém případě rovna úhlové frekvenci  $\omega_c = \omega_j Z_j K$ ,  $K$ ... přirozené číslo. (Pro  $K = 1$  je úhlová frekvence  $\omega_c$  rovna záběrové frekvenci.)

Periodicky proměnlivou rušivou funkci  ${}^{1,2}f(\omega_c t)$  (indexem 1 je označena funkce působící při normálním záběru, indexem 2 při inverzním záběru boků zubů) předpokládáme dále  ${}^1f(\omega_c t) = {}^2f(\omega_c t) = f(\omega_c t)$ . Chybovou funkci  $f(\omega_c t)$  v dalším uvažujeme podle [4] ve tvaru Fourierovy řady

$${}^{1,2}f(\omega_c t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos i\omega_c t \quad (1)$$

Podpory uložení kol jsou modelovány tuhostmi  $C_{jy}, C_{jz}$  a tlumiči se součiniteli útlumu  $k_{jy}, k_{jz}$  ve dvou vzájemně ortogonálních směrech. Uvažované tuhosti podpor  $C_{jy}, C_{jz}$  jsou výslednými tuhostmi vlastních ložisek, olejového filmu, ložiskových podpor a hřídelů, na kterých jsou kola uložena.

---

<sup>1</sup> Pro měřená kola v [7] jsou hodnoty koeficientů  $a_i$  prvních  $i = 5$  členů řady následující:  $a_1 = 0.00164$ ,  $a_2 = 0.00094$ ,  $a_3 = 0.000352$ ,  $a_4 = 0.000078$ ,  $a_5 = 0.0000078$ .

V náhradním schematu je též uvažován vliv házivosti roztečných kružnic – je vyjádřen výstřednostmi kol  $e_j$ , vliv vzájemného možného natočení těchto výstředností vůči sobě respektuje fázový úhel  $\Delta$ .

Střídáním (obecně) počtu  $m$  a  $m+1$  párů zubů na záběrové dráze dochází v průběhu výsledné funkce tuhosti  $C(t)$  spoluzabírajících zubů k periodickým změnám. Výslednou tuhostní funkci můžeme vyjádřit Fourierovou řadou ve tvaru ([7])

$$C(t) = C_s + \frac{C_{\max}(1-\kappa)}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n} (-1)^n \sin n[(\varepsilon-2)\pi] \cos n\omega_c t, \quad (2)$$

kde střední tuhost

$$C_s = \kappa C_{\max} + \frac{C_{\max}(1-\kappa)}{2} [1 + (2\varepsilon-3)], \quad (3)$$

$\kappa = C_{\min} C_{\max}^{-1}$  je amplitudová modulace výsledné tuhostní funkce,  $C_{\min}$ ,  $C_{\max}$  minimální, resp. maximální hodnota tuhosti v záběru ozubení a  $\varepsilon$  součinitel trvání záběru. V tuhosti zubů je zde respektována tuhost pouze vlastních zubů a vetknutí do tuhého poloprostoru, věnce a kotouče předpokládáme absolutně tuhé.

Funkce  ${}^{1,2}F_T(t)$  popisuje třecí síly, které vznikají v průběhu záběru vlivem prokluzu mezi zabírajícími profily. Indexy (1,2) vlevo nahoře respektují normální (1) a inverzní (2) fázi záběru zubových boků. Obecně předpokládáme, že výsledná třecí síla působící v zubovém záběru je funkcí

- relativní rychlosti prokluzu zabírajících zubových profilů
  - dáno geometrií jejich záběru,
  - dáno pohyby středů otáčení kol ve směru ortogonálním na záběrovou dráhu,
- přítláčné síly v záběru ozubení,
- součinitele tření.

O velikosti součinitele tření v mazací vrstvě záběru ozubení jsou dosud velmi omezené znalosti. Závisí na celé řadě faktorů (rychlost relativního pohybu v záběru ozubení, zatížení, viskozita a teplota mazacího oleje, makrogeometrie povrchu – poloměry křivosti dotyku, mikrogeometrie povrchu – střední aritmetická úchylka profilu  $R_a$ , vlastnosti materiálu a jeho povrchu – modul pružnosti, tvrdost povrchu, atd.). Dosud známé střední hodnoty součinitele tření byly získány převážně experimentálně.

Na obr.2 je schematicky znázorněna jedna perioda idealizovaného průběhu výsledné tuhostní funkce  $C(t)$  v záběru se nacházejícího ozubení, která odpovídá základní zubové rozteči  $t_b = \overline{AD}$ . Délka záběrové úsečky je  $\overline{A'D'}$ . Podle definice je součinitel trvání záběru  $\varepsilon = \overline{A'D'}/t_b$ . Na délkách úseček  $\overline{A'B} = (\varepsilon-1)t_b$

a  $\overline{CD'} = (\varepsilon - 1)t_b$  zabírají současně dva páry zubů, hodnota výsledné tuhostní funkce v záběru je zde  $C_{\max}$ . Úsečce  $\overline{BC}$  odpovídá jednopárový záběr ozubených kol s hodnotou výsledné tuhostní funkce v záběru se nacházejícího ozubení  $C_{\min}$ . Velikost základní zubové rozteče  $t_b = \pi m \cos \alpha'$  odpovídá záběrové frekvenci  $2\pi / \omega_c$ , přičemž  $m$  je modul ozubení,  $\alpha'$  úhel záběru a  $\omega_c$  záběrová frekvence.

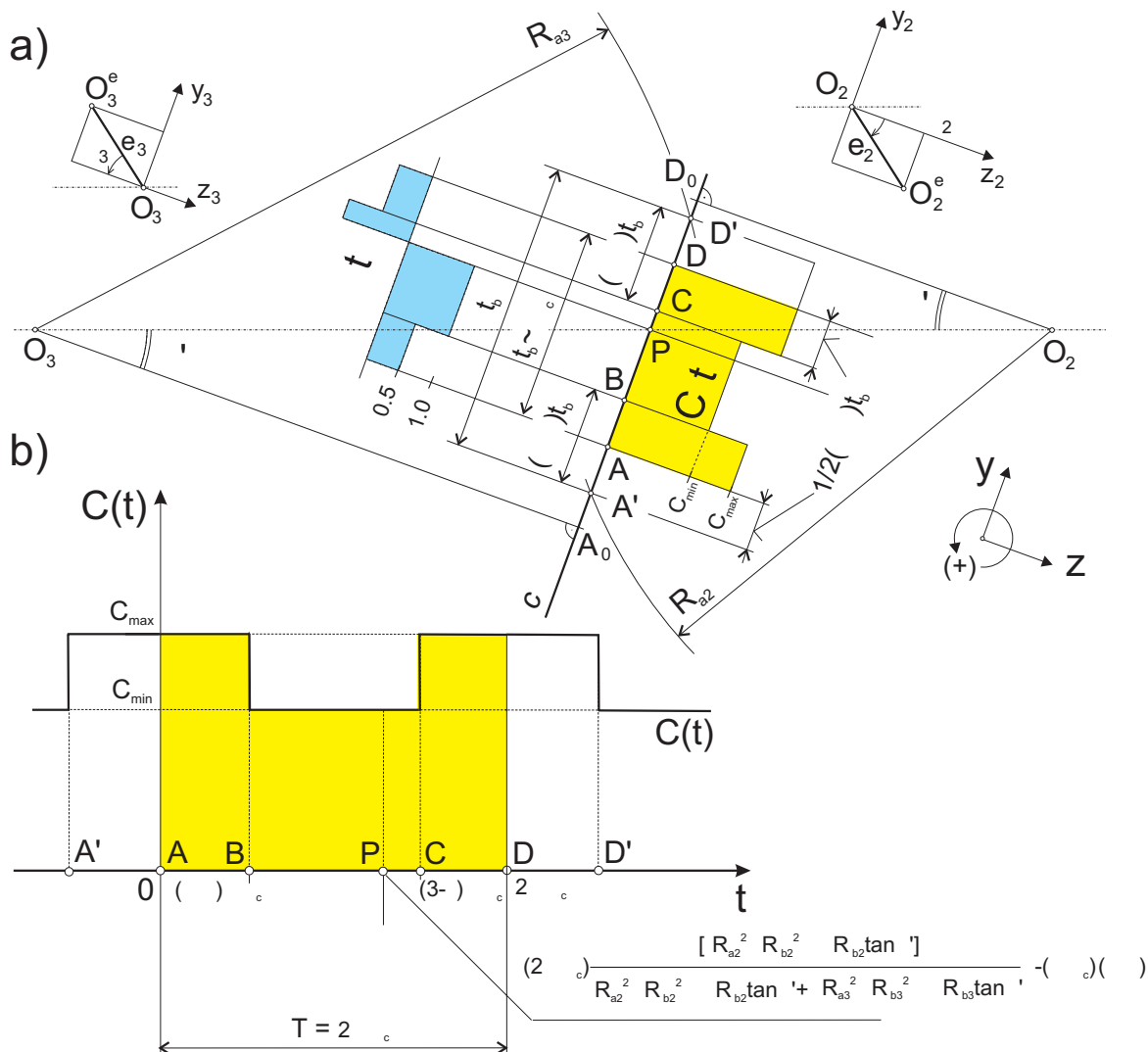
Protože řešení dynamických vlastností uvedené soustavy pružně uložených ozubených kol bude prováděno numerickou simulací, zavedeme dále jako pomocnou nezávislou proměnnou čas  $t' = t - \text{int}(t / (2\pi / \omega_c))$ , kterým v dalším zohledníme periodu  $2\pi / \omega_c$ .

V čase  $t = 0$  působí třecí síla v bodě  $A$ , tj. v úseku dvoupárového záběru, a současně v bodě  $D$  vzdáleném od bodu  $A$  o hodnotu zubové rozteče  $t_b$ , která v časovém vyjádření odpovídá periodě  $T = 2\pi / \omega_c$ . S ohledem na skutečné rozměry ozubených kol, velikost součinitele tření v záběru ozubení, atd. můžeme předpokládat, že chyba, způsobená tím, že uvažujeme v dalším pro úseky dvoupárového záběru rozložení třecí síly do dvou sil poloviční velikosti a působících v místech vzdálených o hodnotu zubové rozteče  $t_b$ , nebude veliká. V časovém intervalu  $(0; (\varepsilon - 1)\pi / \omega_c)$  tedy působí třecí síla poloviční velikostí v úseku  $\overline{AB}$  a současně poloviční velikostí v úseku  $\overline{DD'}$ , v časovém intervalu  $((\varepsilon - 1)\pi / \omega_c; (3 - \varepsilon)\pi / \omega_c)$  působí třecí síla svou původní velikostí v úseku jednopárového záběru ozubení, tj. v intervalu  $\overline{BC}$ . A konečně v časovém intervalu  $(3 - \varepsilon)\pi / \omega_c; 2\pi / \omega_c)$  působí třecí síla svou poloviční velikostí v úseku dvoupárového záběru  $\overline{CD}$  a současně poloviční velikostí na záběrové úsečce  $t_b$  v úseku dvoupárového záběru zubů  $\overline{A'A}$ , vzdáleném o hodnotu zubové rozteče  $t_b$ .

Smysl působení třecích sil, tj. kolmo k záběrové přímce, je dán smyslem vzájemného skluzu boků zubů. V centrálním bodě  $P$  záběru – bod valení při absolutně tuhém uložení kol – jsou třecí smykové síly nulové a skokem mění znaménko. V intervalu  $\overline{AP}$  působí třecí síly proti zasouvání zubů do záběru, v intervalu  $\overline{PD}$  proti vysouvání ze záběru. Smysl působení třecích sil v závislosti na okamžité poloze záběru na záběrové přímce lze vyjádřit pro výslednou funkci tuhosti  $C(t)$  v záběru ozubení funkcí  $\gamma(t)$ , která nabývá hodnot 1/2, 1, 0, -1, -1/2, a to postupně v intervalech  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BP}$ , v bodě  $P$ , v intervalech  $\overline{PC}$  a  $\overline{CD}$ , viz obr.2.

Třecí síla vyvolává svým střídavým průběhem vedle kmitání ve směru ortogonálním na záběrovou přímku i přídavné krouticí momenty  $M_{jT}$ , které způsobují další nerovnoměrnost chodu. Velikost ramen  $a_j$  třecích sil  $F_{jT}$ , působících v jednotlivých úsecích záběrové úsečky  $\overline{A'D'}$  vzhledem ke středům otáčení ozubených kol  $O_j$ , je proměnlivá v čase  $t'$  a vztahy pro jejich určení jsou uvedeny v tabulce tab.2.2 a tab.2.3 [27\*]. Protože uvažujeme i možné výstřednosti

$e_j$  ozubených kol s vlivem jejich vzájemného natočení vůči sobě o fázový úhel  $\Delta$  a elastické uložení kol, tj. možné pohyby jejich středů  $y_j$  a  $z_j$ , okamžitá velikost příslušných ramen třecích sil se bude s časem měnit, a to o hodnotu  $a^*(t) = y_3(t) - y_2(t) + e_3 \sin(\varphi_3) - e_2 \sin(\Delta - \varphi_2)$ .



Obr.2 – Průběhy jedné periody funkcí  $C(t)$  a  $\gamma(t)$  na záběrové úsečce.

Třecí síly v záběru ozubení jsou funkcí výsledné tuhosti v záběru se nacházejícího ozubení a jsou proto jedním z parametrických zdrojů vnitřního buzení, jsou proměnlivé jak co do velikosti, tak i smyslu orientace. Protože dosud není přesně známa závislost mezi relativní rychlostí prokluzu v záběru ozubení a třecí silou, která působí proti smyslu pohybu, předpokládáme stanovení třecí síly v ozubení podle Coulombova zákona ve tvaru

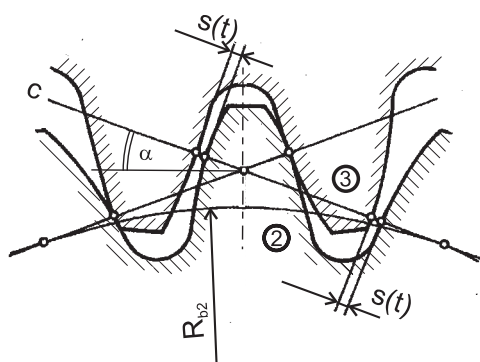
$$F_T(t) = -f_T \{y(t)H[y(t)] + [y(t) + s(t)]H[-y(t) - s(t)]\}C(t)\gamma(t) \quad (4)$$

$$\text{sign}\left\{\delta_{e_2+e_3}^0 + [e_3\dot{\varphi}_3 \sin \varphi_3 - e_2\dot{\varphi}_2 \sin(\Delta - \varphi_2)]\right\} \text{sign}\left[\delta_{e_2+e_3}^0 + (\dot{z}_3 - \dot{z}_2)\right]$$

kde jsou  $f_T$  součinitel tření v záběru ozubení,  $s(t)$  boční vůle a  $y(t)$  relativní pohyb v záběru ozubení,  $\varphi_2, \varphi_3$  natočení kol,  $e_2, e_3$  excentricity kol s jejich možným natočením vůči sobě o úhel  $\Delta$ , rychlost pohybu středů kol  $\dot{z}_2, \dot{z}_3$  ve směru kolmém na záběrovou přímku,  $C(t)$  je výsledná tuhostní funkce v záběru ozubení a  $H$  je Heavisideova funkce, která bude zmíněna dále.  $\delta_{e_2+e_3}^0$  je tzv. Kroneckerův symbol, umožňující modelovat třecí sílu v záběru ozubení v případech vyšetřování pohybu kol s uvažováním jejich možné excentricity, tj. pro  $e_2, e_3 \neq 0$  i bez vlivu excentricity kol, tj. pro  $e_2, e_3 = 0$ .

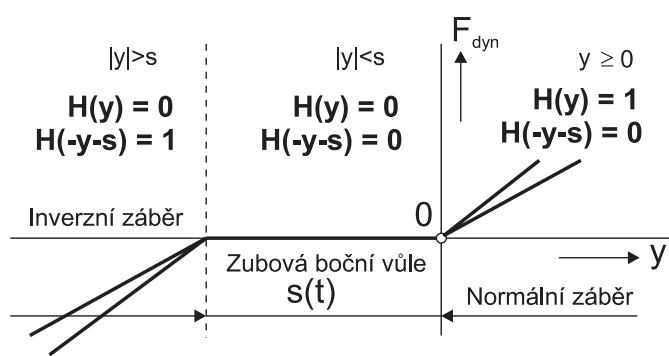
Jak již bylo zmíněno v úvodu, může docházet v zubovém záběru v důsledku existence technologických bočních zubových vůlí k rázovým jevům. Jejich výskyt je podmíněn většími dynamickými než staticko-elastickými deformacemi v záběru ozubení.

Pro případ kontaktu páru zubů v záběru, tj. pro oblast normálního záběru ozubení, platí pro relativní pohyb v záběru ozubení  $y(t) \geq 0$ . V případě, když relativní pohyb v záběru ozubení  $y(t) < 0$ , dochází ke ztrátě kontaktu zabírajících zubových profilů. Podle velikosti setrvačných sil v tomto okamžiku a v závislosti na tlumení v oblasti zubové vůle buď zub proběhne celou oblastí boční vůle  $s(t)$ , narazí neaktivní stranou profilu na profil zubu druhého kola ( $|y| > s$  – inverzní záběr) a po zpětném proběhnutí oblastí vůle dojde znovu ke kontaktu pracovních částí zubů s měkkým rázem, nebo zuby od sebe pouze odskočí ( $|y| < s$ ) a opět se s měkkým rázem spojí, viz obr.3 a 4.



Obr. 3

Technologická boční zubová vůle.



Obr. 4

Hodnoty Heavisideových funkcí v oblastech zubového záběru s vůlemi.

Zatímco pro soustavu s absolutně tuhým uložením kol a pro případ  $\mathbf{e}_j = \mathbf{0}$  platí, že velikost boční zubové vůle  $\mathbf{s}(t)$  zůstává při chodu soukolí konstantní (rovnající se hodnotě technologické boční zubové vůle  $\mathbf{s}_k$ , jejíž hodnota pak závisí na stupni přesnosti soukolí), u elasticky uloženého soukolí je zubová vůle proměnlivou funkcí času<sup>2</sup>, závislou na relativním pohybu podpor ve směru záběrové přímky, tj.

$$\mathbf{s}(t) = -\mathbf{s}_k + y_3 - y_2 + \mathbf{e}_3 \sin \varphi_3 - \mathbf{e}_2 \sin(\Delta - \varphi_2) \quad (5)$$

Tlumení uvažované v normálním i inverzním záběru ozubení předpokládáme lineární se součinitelem  $k_1$  a kubické – se součinitelem  $k_3$ , stejné v obou oblastech záběru. Součinitelé lineárního i kubického tlumení mohou nabývat kladných  $k_1, k_3 > 0$  i záporných  $k_1, k_3 < 0$  hodnot, tzn., že v záběru ozubení může docházet jak k disipaci, tak i samobuzení. V zubové mezeře předpokládáme pouze disipaci, tj. součinitel lineárního i možného kubického tlumení v mezeře  $k_{1m} > 0$  resp.  $k_{3m} > 0$ .

## 2.1 SHRNUTÍ ZJEDNODUŠUJÍCÍCH PŘEDPOKLADŮ ŘEŠENÍ

Souhrnně lze různá zjednodušení i předpoklady použité při výchozí fyzikální formulaci úlohy a při matematických úpravách rozdělit do dvou hledisek:

1. hledisko, kdy o zaváděných parametrech jsou velmi omezené znalosti,
2. hledisko kvantitativní, kdy na základě kvantitativních diskusí jednotlivých členů např. řádových velikostí je usuzováno na váhu ovlivnění pohybu celé dané mechanické soustavy.

Pro další řešení zavedeme jisté omezující či zjednodušující předpoklady:

- protože pozornost je věnována výzkumu *vnitřní dynamiky* (kmitání ozubených převodů vybuzené vnitřními zdroji buzení v zubových záběrech), zanedbáváme vlivy sousedních pružných členů – vedlejších ozubených kol, torzní tuhost hřídelů, věnce kol předpokládáme absolutně tuhé, atd.
- vnější momenty předpokládáme konstantním, vnitřní i vnější buzení jsou harmonická, vícefrekvenční,
- velikost uvažovaných excentricit  $\mathbf{e}_j$  umožňuje z kinematického hlediska chod ozubeného soukolí a účinek těchto excentricit se projevuje především jako budící složka kmitů s frekvencí odpovídající úhlové rychlosti kol  $\omega_j$ ,
- změna velikosti záběrového úhlu  $\alpha$ , způsobená výstřednostmi  $\mathbf{e}_j$  a pohyby  $y_j$  a  $z_j$  středů kol je malá, zanedbáváme ji z důvodů jejich řádové velikosti proti velikosti zubové rozteče  $t_b$ , tzn.  $\alpha = \alpha'$ ,

<sup>2</sup> Dosáhne-li v určitém časovém okamžiku hodnota funkce  $\mathbf{s}(t) = 0$ , jedná se o vymezení vůle v zubovém záběru, případ  $\mathbf{s}(t) < 0$  znamená interferenci, tj. současný normální i inverzní záběr, čili zadírání zubů v záběru.

- ze stejných důvodů předpokládáme, že změna velikosti součinitele záběru  $\varepsilon$ , definovaného poměrem délky záběrové úsečky k zubové rozteči  $t_b$ , je malá, protože i změna velikosti délky záběrové úsečky o hodnotu relativního pohybu v záběru ozubení  $y$  je řádově nepatrná, a předpokládáme tedy velikost součinitele záběru  $\varepsilon = konst.$ ; dále zde uvažujeme pouze interval  $\varepsilon \in \langle 1; 2 \rangle$ , tedy jedno- popř. dvoupárový záběr ozubení,
- budící frekvence výsledné chybové funkce v záběru ozubení  ${}^{1,2}f(\omega_c t)$  je rovna záběrové frekvenci  $\omega_c$ ,
- pro normální i inverzní záběr ozubení (označený horními indexy 1 resp. 2) předpokládáme stejné hodnoty výsledné chybové funkce v záběru ozubení, tj.  ${}^1f(\omega_c t) = {}^2f(\omega_c t) = f(\omega_c t)$ , stejné hodnoty třecích sil v záběru ozubení  ${}^1F_T = {}^2F_T = F_T$ , rovněž tak i velikosti lineárního  $k_1$  či kubického  $k_3$  tlumení v záběru ozubení stejné v normálním i inverzním záběru ozubení,
- neuvažujeme vedení tepla, vznik hluku, atd.,
- velikost třecích sil v záběru ozubení  $F_T$  uvažujeme podle Coulombova zákona, pro jejich výpočet předpokládáme konstantní hodnotu součinitele tření  $f_T$  po celou dobu modelovaného chodu soukolí.

### 3 MATEMATICKÝ POPIS SOUSTAVY

Rozhodující pro vlastní pevnostní a dimenzionální návrh ozubených kol je relativní pohyb v záběru ozubení  $y$ , protože dynamická síla v ozubení  $F_{dyn}$  je dána součinem  $F_{dyn} = yC(t)$ . Relativní pohyb ve směru záběrové přímky  $c$  je (podle kladného smyslu otáčení ozubených kol – viz obr.1) dán vztahem

$$y = R_{b3}\varphi_3 - (-\varphi_2)R_{b2} + y_3 - y_2 + \mathbf{e}_3 \sin \varphi_3 - \mathbf{e}_2 \sin(\Delta - \varphi_2) + {}^{1,2}f(\omega_c t) \quad (6)$$

Pohybové rovnice řešené soustavy byly sestaveny pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} + \frac{\partial E_p}{\partial q_j} + \frac{\partial E_d}{\partial \dot{q}_j} = Q_j, \quad j = 2, 3,$$

kde  $E_k, E_p, E_d$  jsou kinetická energie, potenciální energie a disipativní funkce,  $q_j$  a  $\dot{q}_j$  jsou zobecněné souřadnice a jejich rychlosti a  $Q_j$  je vnější nepotenciální síla.

Za kinetickou energii soustavy dosadíme výraz

$$E_k = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=2}^3 J_j \dot{\varphi}_j^2 + \sum_{j=2}^3 m_j [(\dot{y}_j + \dot{\mathbf{e}}_{jy})^2 + (\dot{z}_j + \dot{\mathbf{e}}_{jz})^2] \right\},$$

kde podle obr.1 jsou složky krouživého pohybu středů otáčení  $j$ -tého kola, způsobeného jeho možnou excentricitou  $\mathbf{e}_j$ , ve směrech os zavedené soustavy souřadnic

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{jy} &= \mathbf{e}_j \sin \varphi_j & \text{a tedy} & \quad \dot{\mathbf{e}}_{jy} = \mathbf{e}_j \dot{\varphi}_j \cos \varphi_j, \\ \mathbf{e}_{jz} &= \mathbf{e}_j \cos \varphi_j & \text{a tedy} & \quad \dot{\mathbf{e}}_{jz} = -\mathbf{e}_j \dot{\varphi}_j \sin \varphi_j. \end{aligned}$$

Za potenciální energii soustavy dosadíme výraz

$$E_p = \frac{1}{2} \left[ \sum_{j=2}^3 (C_{jy} y_j^2 + C_{jz} z_j^2) + C(t) y^2 \right],$$

a konečně za disipativní funkci vztah

$$E_d = \frac{1}{2} \left[ \sum_{j=2}^3 (k_{1jy} y_j^2 + k_{1jz} z_j^2) + k_1 y^2 + \sum_{j=2}^3 (k_{3jy} y_j^4 + k_{3jz} z_j^4) + k_3 y^4 \right].$$

Tlumení v soustavě Lagrangeových rovnic je respektováno disipativní funkcí  $E_d$ . Tvar této funkce pro útlum v ozubených převodech, který by správně vyjadřoval skutečné tlumení, není dosud zatím přesně znám a je obecně uvažován ve tvaru polynomu  $k$ -tého stupně rychlosti. Závisí na mnoha činitelích – materiálovém tlumení, tlumení na bocích profilů a v ložiskách uložení, tlumení vlivem proudění oleje atd. Pro následné řešení pohybu v soustavě pružně uložených ozubených kol je předpokládáno lineární tlumení v záběru ozubení i v podporách, představované součiniteli  $k_1$  a  $k_{1jy}$  a  $k_{1jz}$  a možné kubické tlumení, představované podobně součiniteli  $k_3$  pro záběr ozubení a  $k_{3jy}$  a  $k_{3jz}$  pro uložení kol.

Popis pohybu ve všech třech oblastech (tj. v oblasti normálního záběru, vůle a v oblasti inverzního záběru) usnadňuje zavedení Heavisideových funkcí  $H(y)$  a  $H(-y - s)$ , viz obr.4, do soustavy pohybových rovnic, přičemž  $k_{1m}$  respektuje lineární tlumení v zubové mezeře,  $k_{3m}$  možné kubické tlumení v zubové mezeře, předpokládáme, že jsou úměrná první resp. třetí mocnině rychlosti relativního pohybu  $y$ , bez uvažování teplotního vlivu na viskozitu mazacího oleje.

Zobecněnou vnější nepotenciální sílu  $\mathbf{Q}_j$  představuje vnější moment  $M_j$ , třecí síla  $F_T$  a moment od třecích sil  $M_{jT}$ , zobecněnou souřadnicí je úhel natočení  $\varphi_j$  a pohyby  $y_j$  a  $z_j$  středů kol ve směrech os zavedené soustavy souřadnic  $y$  a  $z$ .



Dynamické chování uvažovaného soukolí je pak po úpravách popsáno soustavou šesti nelineárních diferenciálních rovnic druhého řádu s časově proměnlivými koeficienty

$$\begin{aligned}
& (J_2 + m_2 e_2^2) \ddot{\varphi}_2 - m_2 \ddot{y}_2 e_2 \cos(\Delta - \varphi_2) + m_2 \ddot{z}_2 e_2 \sin(\Delta - \varphi_2) \\
& + y[H(y) + H(-y - s)] \left\{ C(t)[R_{b2} + e_2 \cos(\Delta - \varphi_2)] + \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial \varphi_2} y \right\} \\
& + [R_{b2} + e_2 \cos(\Delta - \varphi_2)] \dot{y} ([H(y) + H(-y - s)] (k_1 + 2k_3 \dot{y}^2) \\
& + (k_{1m} + 2k_{3m} \dot{y}^2) \{1 - [H(y) + H(-y - s)]\}) = M_2 + M_{2T} [H(y) + H(-y - s)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (J_3 + m_3 e_3^2) \ddot{\varphi}_3 + m_3 \ddot{y}_3 e_3 \cos \varphi_3 - m_3 \ddot{z}_3 e_3 \sin \varphi_3 \\
& + y[H(y) + H(-y - s)] \left\{ C(t)[R_{b3} + e_3 \cos \varphi_3] + \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial \varphi_3} y \right\} \\
& + [R_{b3} + e_3 \cos \varphi_3] \dot{y} ([H(y) + H(-y - s)] (k_1 + 2k_3 \dot{y}^2) \\
& + (k_{1m} + 2k_{3m} \dot{y}^2) \{1 - [H(y) + H(-y - s)]\}) = M_3 + M_{3T} [H(y) + H(-y - s)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& m_2 \ddot{y}_2 - m_2 \ddot{\varphi}_2 e_2 \cos(\Delta - \varphi_2) - m_2 \dot{\varphi}_2^2 e_2 \sin(\Delta - \varphi_2) \\
& - C(t)y[H(y) + H(-y - s)] + C_{2y}y_2 + k_{12y}\dot{y}_2 + 2k_{32y}\dot{y}_2^3 \\
& - \dot{y}([H(y) + H(-y - s)](k_1 + 2k_3 \dot{y}^2) \\
& + (k_{1m} + 2k_{3m} \dot{y}^2) \{1 - [H(y) + H(-y - s)]\}) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& m_3 \ddot{y}_3 + m_3 \ddot{\varphi}_3 e_3 \cos \varphi_3 - m_3 \dot{\varphi}_3^2 e_3 \sin \varphi_3 \\
& + C(t)y[H(y) + H(-y - s)] + C_{3y}y_3 + k_{13y}\dot{y}_3 + 2k_{33y}\dot{y}_3^3 \\
& - \dot{y}([H(y) + H(-y - s)](k_1 + 2k_3 \dot{y}^2) \\
& + (k_{1m} + 2k_{3m} \dot{y}^2) \{1 - [H(y) + H(-y - s)]\}) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& m_2 \ddot{z}_2 + m_2 \ddot{\varphi}_2 e_2 \sin(\Delta - \varphi_2) - m_2 \dot{\varphi}_2^2 e_2 \cos(\Delta - \varphi_2) \\
& + C_{2z}z_2 + k_{12z}\dot{z}_2 + 2k_{32z}\dot{z}_2^3 = F_T [H(y) + H(-y - s)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& m_3 \ddot{z}_3 - m_3 \ddot{\varphi}_3 e_3 \sin \varphi_2 + m_3 \dot{\varphi}_3^2 e_3 \cos \varphi_3 \\
& + C_{3z}z_3 + k_{13z}\dot{z}_3 + 2k_{33z}\dot{z}_3^3 = F_T [H(y) + H(-y - s)]
\end{aligned} \tag{7}$$

kde, položíme-li  $\omega_c t = Z_j \omega_j t = Z_j \varphi_j$  do výrazu pro výslednou tuhostní funkci v záběru ozubení (2), je parciální derivace této funkce podle  $\varphi_j$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \varphi_2} &= -\frac{C_{max}(1-\kappa)Z_2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} (-1)^n \sin n[(\varepsilon-2)\pi] \sin nZ_2\varphi_2 \\ \frac{\partial C}{\partial \varphi_3} &= -\frac{C_{max}(1-\kappa)Z_3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} (-1)^n \sin n[(\varepsilon-2)\pi] \sin nZ_3\varphi_3 \end{aligned} \quad (8)$$

Protože řešení uvedených pohybových rovnic není, až na malé výjimky, možné v analyticky uzavřených tvarech (např. funkce  $C(t)$  v (7) a  $f(\omega_c t)$  – viz (1) jsou vyjádřeny Fourierovými řadami – z čehož plyne vícefrekvenční buzení soustavy), ukázala se jako výhodná jednak aplikace analytické teorie nelineárních integrálních rovnic [4], jednak numerická simulace v prostředí MATLAB/Simulink.

## 4 SIMULAČNÍ MODEL SOUSTAVY

Numerická simulace soustavy elasticky uloženého soukolí s čelním ozubením s přímými zuby z obr.1 v prostředí Matlab/Simulink vychází z pohybových rovnic (7), z nich jsou explicitně vyjádřeny druhé derivace úhlového natočení  $j$ -tého kola  $\varphi_j$  a pohybů  $y_j$  a  $z_j$  středu kola.

Simulační model (včetně jeho subsystémů), [viz 27\*], umožňuje zadávání těchto zvolených parametrů soustavy

- počet zubů  $Z_j$
- modul ozubení
- hmotnost kola  $m_j$
- momenty setrvačnosti kol  $J_j$
- hnací a hnaný moment  $M_j$
- excentricita  $e_j$  kola
- vzájemné natočení  $\Delta$  excentricit
- tlumení v záběru ozubení  $k_1$  (lineární) a  $k_3$  (kubické)
- tlumení v oblasti zubové vůle  $k_{1m}$  (lineární) a  $k_{3m}$  (kubické)
- tlumení v uložení středu  $j$ -tého kola ve směru osy  $y$   $k_{1jy}$  (lineární) a  $k_{3jy}$  (kubické)
- tlumení v uložení středu  $j$ -tého kola ve směru osy  $z$   $k_{1jz}$  (lineární) a  $k_{3jz}$  (kubické)
- tuhost v uložení středu  $j$ -tého kola ve směru osy  $y$   $C_{jy}$

- tuhost v uložení středu  $j$ -tého kola ve směru osy  $z$   $C_{jz}$
- amplitudová modulace výsledné tuhostní funkce v záběru ozubení  $\kappa$
- maximální hodnota tuhosti v záběru ozubení  $C_{\max}$
- počet členů  $n$  Fourierovy řady pro popis výsledné tuhostní funkce v záběru ozubení
- velikost součinitele tření v záběru ozubení  $f_T$
- velikost technologické zubové boční vůle  $S_{\text{konst}}$
- záběrová frekvence  $\omega_c$
- naladění soustavy  $\nu = \omega_c \Omega^{-1}$  jako poměr záběrové ke střední vlastní výsledné frekvenci ozubení

Při simulaci dynamického chování nelineárních soustav se ukázalo jako důležité srovnání výsledků dosažených při různých zvolených parametrech simulace<sup>3</sup>. Ty se mohou někdy lišit a nastává problém, jak posoudit, který výsledek je korektní. Důležitou roli tu sehrává i možnost ověření správnosti výsledků numerické simulace dynamické soustavy analytickými metodami řešení, příp. srovnáním s experimentem.

Sestavený simulační model soustavy o šesti stupních volnosti s uvažováním silných nelinearit, způsobených technologickými bočními vůlemi v ozubení, dovoluje provádět analýzu jejího dynamického chování.

## 5 ANALÝZA ZVLÁŠTNÍCH PŘÍPADŮ RELATIVNÍHO POHYBU $y(t)$ KINEMATICKÉ DVOJICE OZUBENÝCH KOL V JEDNOTLIVÝCH FÁZÍCH ZÁBĚRU

Při řešení a analýze problematiky vnitřní dynamiky slabě a silně nelineárních parametrických soustav, tj. soustav s časově variabilními členy a rázovými jevy se šesti stupni volnosti, představovanými elasticky uloženými koly s čelním přímým ozubením, byla pozornost věnována především následujícím vlivům, význačným z hlediska dynamického chování takovýchto soustav:

1. vliv zubové vůle  $s(t)$ , časově proměnlivé v důsledku elasticity uložení kol (ukázka na obr.5) a možné házivosti roztečných kružnic, vyjádřenou možnými excentricitami  $e_j$  kol ( $j = 2,3$ )
2. vliv třecí síly  $F_T$  v záběru ozubení, které je funkcí
  - relativní rychlosti prokluzu zabírajících zubových profilů (dáno geometrií zubových profilů),

---

<sup>3</sup> Zde byla vybrána metoda řešení diferenciálních rovnic Runge-Kutta - ode4 – s pevným krokem, protože je třeba pravidelně v každém časovém okamžiku sledovat, v jaké oblasti záběru ozubení se boky zubových profilů právě nacházejí.

- relativní rychlosti prokluzu při pohybu středů otáčení kol ve směru ortogonálním na záběrovou dráhu,
  - přítláčné síly v záběru ozubení,
  - součinitele tření
3. vliv tlumení ve fázi záběru ozubení a při průchodu oblasti zubové vůle – lineárního ( $k_{1m}$ ) i kubického ( $k_{3m}$ ) – ukázka na obr.6 (modrá barva – normální záběr, zelená barva – pohyb oblastí zubové vůle, červená barva – inverzní záběr ozubení),
  4. vliv časově proměnlivé výsledné tuhostní funkce  $C(t)$  v záběru ozubení,
  5. vliv chybové funkce  $f(\omega_c t)$  jako odchylky od ideálního evolventního profilu boků zubů,
  6. vliv fáze  $\bar{\varphi}$  mezi budícími složkami, tj. výslednou tuhostní funkcí v záběru ozubení  $C(t)$  a výslednou chybovou funkcí od ideálního evolventního profilů zabírajících zubových profilů  $f(\omega_c t)$  – ukázka na obr.7 – opět se stejným barevným rozlišením jednotlivých fází záběru ozubení,
  7. vliv házivostí roztečných kružnic  $e_j$  s uvažováním jejich možného vzájemného natočení  $\Delta$ .

Protože pro dynamické zatížení zubů a pro klidný bezrázový chod systému je rozhodující časový průběh relativního pohybu  $y(t)$  v záběru ozubení, je řešení zaměřeno převážně na analýzu tohoto pohybu.

Z důvodu větší přehlednosti jsou jednotlivé vlivy uvedené v kap.1.2 studovány na jednodušších soustavách, s parametry uvedenými v kap.5 [27\*], jako zvláštní případy soustavy obecnější.

Na základě zjištěných rezonančních charakteristik relativního pohybu  $y(t)$  v záběru ozubení pro soustavu ozubených kol buzenou jednak pouze parametricky, tj. výslednou tuhostní funkcí  $C(t)$  v záběru ozubení, jednak smíšeně, tj. parametricky a vlivem výsledné chybové funkce  $f(\omega_c t)$  v záběru ozubení, s tuhostí uložení středů kol  $C_{jz} = C_{jy} \rightarrow \infty$  ( $j = 2,3$ ), tj. soustavu o dvou stupních volnosti, byly zvoleny tři hodnoty naladění soustavy  $\nu_1 = 0.29; \nu_2 = 0.87; \nu_3 = 2.22$ .<sup>4</sup>

Nejprve byla prováděna analýza dynamického chování soustavy buzené *pouze parametricky*, tj. výslednou tuhostní funkcí  $C(t)$  v záběru ozubení. Protože pozornost je zaměřena především na dynamické děje probíhající v soustavách s vůlemi, simulace pohybu byla prováděna především pro naladění  $\nu_2$ , při němž

---

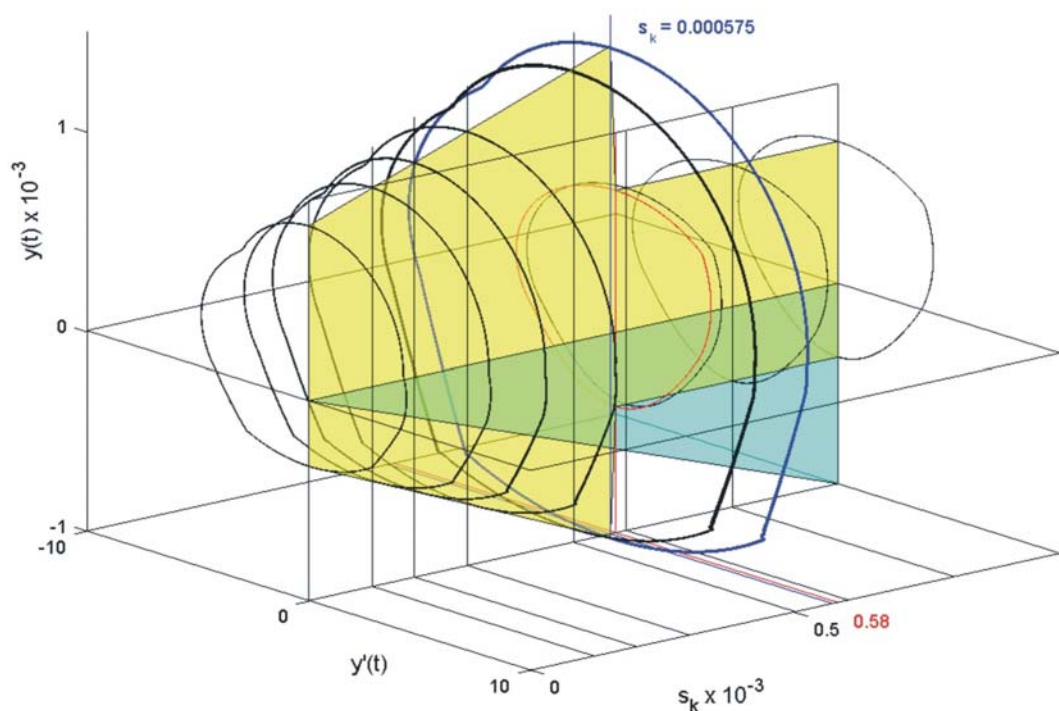
<sup>4</sup> Součinitel naladění  $\nu = \omega_c \Omega_0^{-1}$  vyjadřuje poměr záběrové frekvence  $\omega_c$  k vlastní frekvenci soustavy  $\Omega_0$ , určené ze vztahu  $\Omega_0 = \sqrt{\frac{C_s}{m_{red}}}$ , kde pro daný převodový poměr  $i$  je redukovaná hmotnost  $m_{red} = \frac{J_2 J_3}{i^2 J_2 + J_3} \frac{1}{R_{b3}^2}$  a hodnota výsledné střední tuhosti v záběru ozubení  $C_s$  je dána vztahem (3).

dochází v záběru ozubení k odskokům boků zabírajících zubových profilů do oblasti zubové vůle.

Při simulaci byl sledován relativní pohyb  $y(t)$  v soustavě během pěti otáček soukolí, součet Heavisideových funkcí  $H1 = H[y(t)]$  a  $H2 = H[-y(t) - s(t)]$ , který vyjadřuje hodnotou 1 normální či inverzní záběr ozubení, hodnotou 0 pak ztrátu kontaktu boků zubových profilů, tedy pohyb v oblasti zubové vůle a konečně časový průběh zubové vůle  $s(t)$

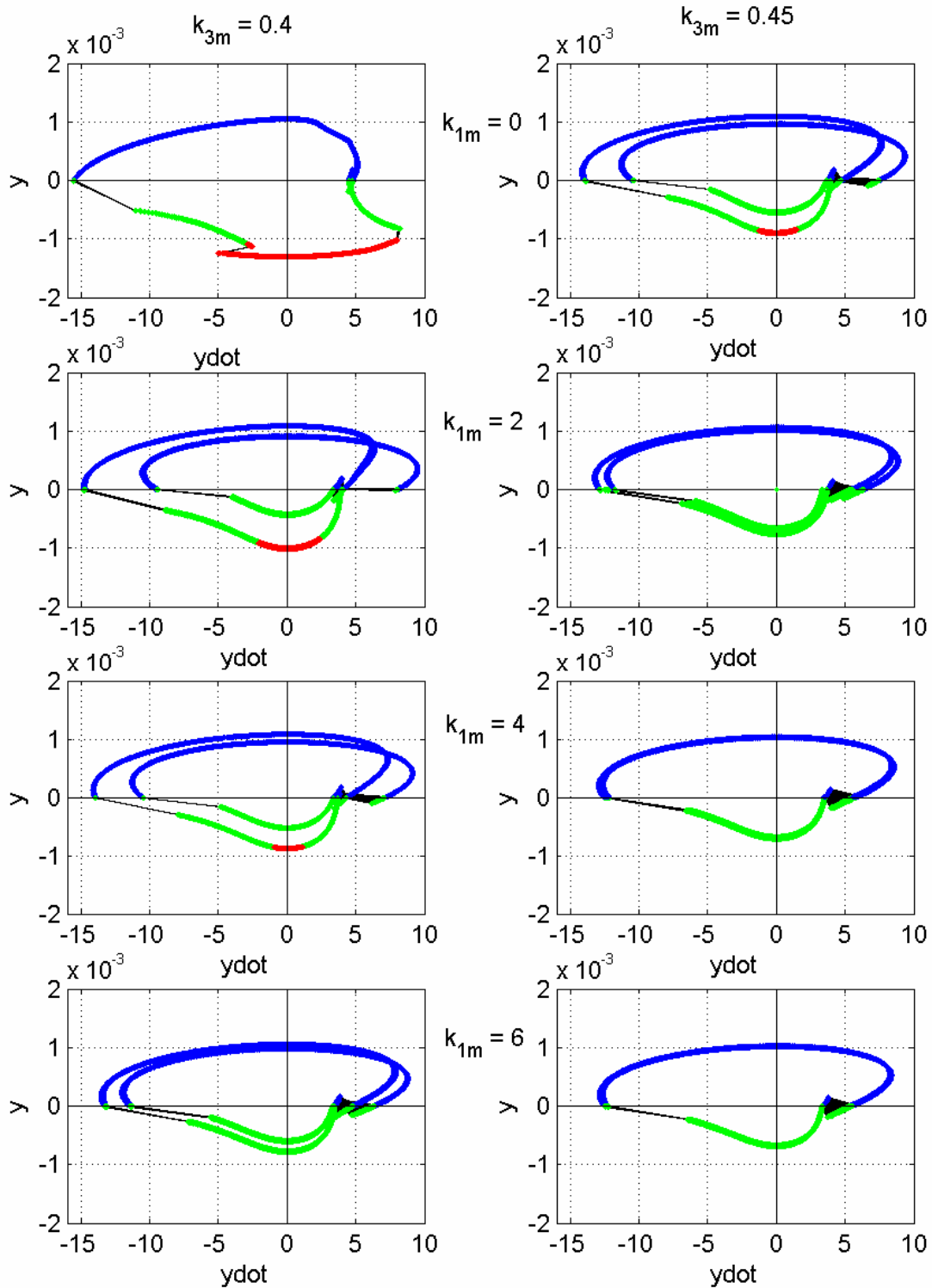
Pro pátou otáčku soukolí byly graficky zpracovány časové průběhy výsledné tuhostní funkce  $C(t)$  v záběru ozubení a funkce  $C(t) * (H1 + H2)$ <sup>5</sup>, která modifikuje parametrickou funkci buzení s ohledem na ztrátu kontaktu boků zubových profilů v oblasti zubové vůle, dále časové průběhy relativního pohybu  $y(t)$  v záběru ozubení, průběh zubové vůle  $s(t)$ , časové průběhy dynamické síly  $F_{dyn}(t)$  a třecí síly  $F_T(t)$  v záběru ozubení a rovněž pak časová změna převodu soukolí, vyjádřená poměrem  $-\varphi_2 / \varphi_3$ .

Detailněji bylo rovněž sledováno chování soustavy během poslední periody záběrové frekvence  $\omega_c$  páté otáčky soukolí, kdy byly graficky zpracovány časové průběhy relativního pohybu  $y(t)$  v záběru ozubení, jeho rychlosti  $\dot{y}(t)$ , zrychle-

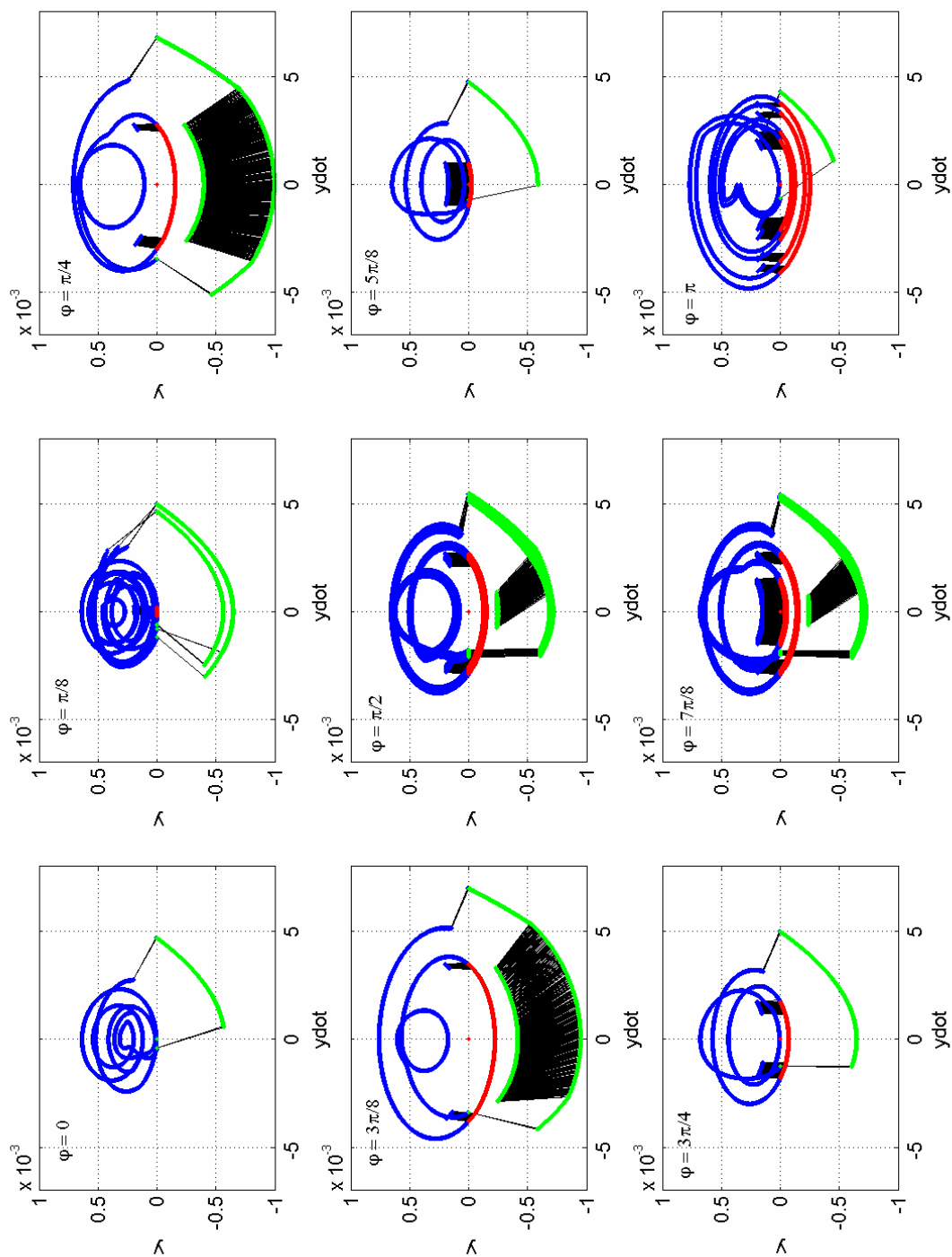


Obr. 5 – Závislost relativního pohybu  $y(t)$  a jeho rychlosti  $\dot{y}(t)$  na velikosti technologické boční zubové vůle  $s_k$  v záběru ozubení elasticky uložené soustavy ozubených kol. buzené pouze parametricky a netlumené v oblasti zubové vůle.

<sup>5</sup> \* ... symbolika pro operaci násobení v prostředí Matlab.



Obr.6 – Fázové roviny relativního pohybu  $\{y_j \dot{t}; y_j\}$  v záběru ozubení smíšeně buzené soustavy elasticky uloženého páru ozubených kol při kombinaci lineárního  $k_{1m} = 0;2;4;6$  a kubického  $k_{3m} = 0.40;0.45$  tlumení v oblasti zubové vůle.



Obr.7 – Fázové roviny relativního pohybu  $\{y_j \dot{y}_j\}$  soustavy páru ozubených kol pro naladění  $\nu_2 = 0.29$  s uvažováním tření v záběru ozubení, nulových excentricit obou kol, konstantní zubové vůle  $s_k = 0$  a smíšeným buzením v závislosti na fázovém posunutí  $\bar{\varphi}$  obou jeho složek.

ní  $\ddot{y}(t)$ , vůle  $s(t)$  v záběru ozubení, výsledné tuhostní funkce  $C(t)$  v záběru ozubení, modifikované funkce  $C(t) * (H1 + H2)$ , funkce  $\gamma(t)$ , Heavisideových funkcí  $H1$ ,  $H2$  a  $H1 + H2$  a třecí síly  $F_T(t)$  v záběru ozubení a znázorněna fázová rovina relativního pohybu v záběru ozubení  $\{\dot{y}; y\}$ . Pozornost byla věnována i pohybům  $y_j(t)$  a  $z_j(t)$  středů  $O_j(t)$  ( $j = 2,3$ ) kol ve směrech os zavedeného souřadnicového systému  $\{O_j; y_j; z_j\}$  (viz obr.1), jejich rychlostem  $\dot{y}_j(t)$ ,  $\dot{z}_j(t)$ , fázovým rovinám  $\{\dot{y}_j; y_j\}$  resp.  $\{\dot{z}_j; z_j\}$  a trajektoriím pohybů  $\{y_j; z_j\}$  středů kol.

Podobně byla prováděna i analýza dynamického chování soustavy buzené *smíšeně*, tj. výslednou tuhostní funkcí  $C(t)$  v záběru ozubení a výslednou chybovou funkcí  $f(\omega_c t)$  v záběru ozubení, předpokládanou ve tvaru (1). Zde byl navíc sledován časový průběh druhé derivace výsledné chybové funkce  $d^2 f(\omega_c t) / dt^2$  v záběru ozubení a budící složka od této funkce  $d^2 f(\omega_c t) / dt^2 * (H1 + H2)$ . Simulace pohybu byla prováděna jednak pro naladění soustavy  $\nu_2$ , jednak pro naladění  $\nu_1$ , při kterém dochází k odskokům boků zabírajících zubových profilů do oblasti zubové vůle pouze v případě smíšeného buzení soustavy.

## 5.1 SHRNU TÍ NEJDŮLEŽITĚJŠÍCH VÝSLEDKŮ ANALÝZY

Z výsledků provedené analýzy zvláštních případů řešené soustavy se ukázalo, že

- snížení tuhosti v uložení středů kol se projevuje zvětšením vůle v záběru ozubení spolu se zvětšením pohybů  $y_j, z_j$  v uložení středů kol ( $j = 2,3$ ), přičemž převažující je pohyb ve směru záběrové přímky, tj.  $y_j$ ; při průchodu rezonancí může docházet i ke zmenšení zubové vůle;
- uvažování tření v záběru ozubení nemá podstatný vliv na dynamické chování řešené soustavy, jeho účinek se projevuje především ve směru kolmém na záběrovou přímku; dále nepatrným zvýšením odchylky od ideálního převodu soustavy; pouze nepatrně ovlivňuje svým třecím momentem  $M_{JT}$  natočení  $\varphi_j$ ;
- excentricita  $e_j$  kola – vyjadřuje vliv házivosti roztečných kružnic způsobený např. házivostí hřídelů, tj. excentrickým uložením kol v ložiskách v důsledku výrobních nepřesností – se projevuje jako další budící složka s frekvencí odpovídající úhlové rychlosti kola  $\omega_j$  a zvýšením momentu setrvačnosti kola o hodnotu  $m_j e_j^2$  a způsobuje během otáčky kola změnu v charakteru průběhu zubové vůle  $s(t)$ , dochází k zánějovému charakteru průběhu relativního pohybu  $y(t)$  v záběru ozubení a zvětšení jeho velikosti s následkem zvýšení dynamického namáhání řešené soustavy (tj. dynamické síly  $F_{dyn}(t)$  v záběru ozubení), a tím i vzrůstu třecí síly  $F_T(t)$  v záběru ozubení; zvětšuje se



i velikost pohybu středu kola ve směru kolmém na záběrovou přímku (tj.  $Z_j$ ) a odchylka od ideálního převodu soukolí;

- při uvažování excentricit obou kol záleží na jejich vzájemné poloze (natočení) vůči sobě; pouze v případě, kdy je v řešené soustavě páru stejných ozubených kol ( $Z_2 = Z_3, e_2 = e_3$  a  $\Delta = \pi$ ), je možno eliminovat vliv excentricit na dynamické chování soustavy, s výjimkou charakteru třecí síly  $F_T(t)$  v záběru ozubení; v ostatních případech lze vliv nejvýše minimalizovat;
- výsledná chybová funkce  $f(\omega_c t)$ , vyjadřující odchylku boků zubových profilů od ideální evolventy, vnáší do soustavy ozubených kol další vnitřní budící člen; způsobuje větší dynamické namáhání soustavy, zvětšuje odchylku od ideálního převodu; může způsobovat i odskoky zubových profilů ze záběru (tj. normálního i inverzního) do oblasti zubové vůle a zpět; tyto rychlé přechody mezi oblastmi zubového záběru a vůle mohou způsobit i porušení nosné vrstvy olejového filmu, spojené s vytvořením podmínek pro vznik polosuchého až suchého tření v záběru, s důsledkem vzniku samobuzeného kmitání a hluku
- tlumení  $k_{1m}$ , popř.  $k_{3m}$  v oblasti zubové mezery zmenšuje dynamické namáhání soustavy páru ozubených kol i odchylku od ideálního převodu, může ovlivnit chování soustavy v tom smyslu, že od jisté hodnoty dále nedochází k inverznímu záběru ozubení;
- růst velikosti vůle  $s(t)$  v záběru ozubení se projevuje růstem relativního pohybu  $y(t)$  v záběru ozubení – až do jisté velikosti zubové vůle  $s(t)$ , kdy nastává "skokem" zmenšení relativního pohybu  $y(t)$  a s dalším růstem zubové vůle se již dále kvantitativně neprojevuje změna dynamického chování soustavy; místa "skoků" jsou závislá na průběhu budících složek, tj. parametrické a vnější od chybové funkce v záběru ozubení, a na tom, zda po opětném styku boků zubů nastává jak v inverzním, tak i v normálním záběru jednopárový či dvoupárový záběr, tj. záběr na nižší či vyšší hladině výsledné tuhostní funkce v záběru; posunutí tohoto "skoku" k nižším hodnotám zubové vůle ovlivňuje existence disipativního tlumení v zubové mezeře.

Model páru spoluzabírajících ozubených kol z obr.1 je formulován tak, aby mohl být snadno zařazen jako subsystém do větší soustavy ozubených kol, jako např. do obecné planetové soustavy s  $n$  satelity (dvojnásobnými), tj. soustavy s děleným tokem výkonu, kde index  $j = 3$  označuje satelit, index  $j = 2$  centrální kolo planetové převodové soustavy. (Index  $j = 1$  je rezervován pro "rám" soustavy.) Rovněž sestavený simulační model páru ozubených kol dovoluje úpravu jeho subsystémů po případném upřesnění funkcionálních závislostí v nich řešených – ať už se to týká např. možného přesnějšího vyjádření výsledné tuhostní funkce  $C(t)$  v záběru ozubení, popř. výsledné chybové funkce  $f(\omega_c t)$  v záběru ozubení, nebo funkce, popisující tlumení v záběru i v oblasti zubové mezery.

Předložená práce tvoří výchozí bázi pro dynamické vyšetřování složitých vysokoparametrických převodových soustav s děleným tokem výkonu, jaké se vyskytují v leteckém, automobilovém popř. obranném průmyslu. Přitom zejména u převodových soustav, které pracují v širokém pásmu otáček, kdy dochází k "přejíždění" rezonančních oblastí, má problematika výskytu a řešení nežádoucích – rázových jevů v ozubení své významné opodstatnění.

Vzhledem ke složitosti, rozsáhlosti a obtížnosti problematiky netvoří práce uzavřený celek, mnohé otázky, např. zákonitosti jevů apod., zůstávají otevřené pro další jak teoretický, tak i experimentální výzkum v této oblasti.

## 6 ZÁVĚR

Dynamická síla je primárním faktorem při dimenzionálním a pevnostním návrhu zařízení, je základním faktorem pro optimalizaci konstrukcí. Poznání o možnosti snížit namáhání konstrukcí při dimenzionální a hmotnostní minimalizaci a přenosu maximálního výkonu je proto základní úlohou modelování, dynamické analýzy, ladění a predikce spolehlivosti systémů.

Podrobný základní výzkum v oblasti dynamiky pohonových soustav je prvořadou nutností jak pro žádaný cílený výzkum těchto soustav obecně, tak i pro teoretické poznání ve fyzice. Jedná se zejména o třídu mobilních konstrukcí s přímým či děleným tokem výkonu, jak vyžaduje reálná potřeba současné vysokoparametrické techniky v leteckém či automobilovém průmyslu či průmyslu obranném u těžkých pásových vozidel s konstrukčně vymezeným – omezeným zástavbovým prostorem.

Současné metody modelování, simulace, analýzy a predikce dynamických vlastností a spolehlivosti pohonových soustav s čelním ozubením jsou však stále ještě aplikovány za značně zjednodušujících předpokladů. To svědčí o složitosti a teoretické i experimentální náročnosti problematiky. Je proto třeba rozvíjet v těchto směrech výzkum, neboť zjednodušující předpoklady a spekulativní dosazování parametrů (např. tlumení,...) intuitivně odhadnutých s využitím mnohdy značně rozporných experimentálních údajů způsobují, že docílené výsledky výpočtů bývají nespolehlivé a většinou odlišné od výsledků experimentů. Přitom mnohdy malé změny parametrů způsobují velké kvalitativní i kvantitativní změny v chování soustavy.

Výzkum v oblasti dynamiky soustav, zejména pak třídy nelineárních soustav s časově variabilními členy a rázovými jevy, jako jsou soustavy s ozubenými koly, je stále ve světovém měřítku vysoce aktuální a motivován především neobjasněností řady dynamických jevů – fenoménů. Vznik a existence těchto jevů a jejich vlastnosti nejsou v mnohých případech z hlediska základního poznání dosud zcela obecně vysvětlené. Mimo již známé jevy, které se v takových nelineárních parametrických soustavách vyskytují, např. kombinační rezonance apod., k nim patří v současné době dosud obecně nezvládnuté a analyticky nepopsané jevy jako jsou

deterministický chaos, frekvenční skoky, štěpení a bifurkace rezonančních amplitudofrekvenčních charakteristik. Jsou to převážně jevy související s iregularitou pohybu, s vlivem parametrických nelinearit, senzibilitou parametrů, se silnými neanalytickými nelinearitami – rázy v důsledku např. existence technologicky podmíněných zubových vůlí v záběru kinematických dvojic apod.

Tyto jevy dále značně ovlivňují i tribologické poměry v záběrech kinematických dvojic, což může mít za následek např. zvýšení teploty mazacího média, a tím snížení jeho viskozity, s konečným efektem zmenšení přenášeného výkonu či destrukce dílčích nebo celých převodových uzlů soustavy.

Pro zvládnutí mnohých výše citovaných dynamických účinků se mimo náročných analytických metod jeví jako perspektivní zejména rozvíjející se metody simulační, a to jak v oblastech tzv. vnitřní, tak i vnější dynamiky těchto topologicky složitých silně nelineárních vícefrekvenčně buzených parametrických soustav s rázy.

## 7 POUŽITÁ LITERATURA

- [1] Dudley, D.W.: Gear handbook, McGraw-Hill, 1963.
- [2] Munro, R.G.: Dynamics of spur gears. Univ. of Cambridge, 1962.
- [3] Mudd, G.C., Myers, E.J.: Load distribution factors as used in proposed ISO and AGMA rating procedures. AGMA Conf., Toronto, 1981.
- [4] Hortel, M.: Dynamika nelineární parametrické soustavy s kinematickými vazbami. Praha, N AVČR, v tisku.
- [5] Zeman, V.: Maticová metoda řešení torsních kmitů soustav s ozubenými převody. Strojírnoství 24, 11, 1972.
- [6] Doležal, Z.: Modelování provozního zatížení přímých zubů moderního čelního vysokootáčkového ozubení. Zpráva VZLÚ, a.s. V-1732/01.
- [7] Pfeiffer, F.: Chaos im Getriebe. ZAMM, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 68 (1988), T100-T102.
- [8] Nadolski, W., Pielorz, A.: The influence of variable stiffness of teeth on dynamic loads in single-gear transmission. Archive of Applied Mechanics 68 (1998), 185-194, Springer-Verlag.
- [9] Küçükay, F.: Zur Formulierung und Programmierung der Bewegungsgleichungen von Antriebssträngen. VDI - Z.Bd 126(1984), Nr.20, S769/74.
- [10] Smith, D.J.: Gear Noise and Vibration. ISBN 0-8247-6005-0, Marcel Dekker Inc., New York, 1999.
- [11] Hortel, M.: Výzkum vlivu parametrických kmitů na dynamické chování ozubeného převodu. Výzkumná zpráva ÚT ČSAV Z-178/64, Praha, 1964.
- [12] Hortel, M.: Vynucené kmitání v nelineárním parametrickém systému ozubených kol s více stupni volnosti. Výzkumná zpráva ÚT ČSAV Z-216/66, Praha, 1966.
- [13] Hoffmann, J.: MATLAB und SIMULINK. Beispielorientierte Einführung in die Simulation dynamischer Systeme. Addison/Wesley Verlag GmbH, Bonn, 1998.
- [14] SIMULINK. Dynamic System Simulation for MATLAB. The MathWorks, Inc., 1998.
- [15] Šalamoun, Č., Suchý, M.: Čelní a šroubová soukolí s evolventním ozubením. SNTL Praha, 1990.
- [16] Kratochvíl, C., Slavík, J.: Mechanika Těles. Dynamika, FSI VUT Brno, PC-DIR, 1997.
- [17] Janíček, P., Ondráček, E.: Řešení problémů modelováním. PC-DIR s.r.o., Brno, 1998.
- [18] British Gear Association (BGA) Technical Reports: [www.bga.org.uk](http://www.bga.org.uk)
- [19] Proceedings of International Conference on Gears 2002, Vol.1-2, VDI-Berichte 1665, ISBN 3-18-091665-6.
- [20] Pars, L.A.: A Treatise on analytical dynamics. Woodbridge: Ox Bow Press 1979.
- [21] Pfeiffer, F., Küçükay, F.: Eine erweiterte mechanische Stosstheorie und ihre Anwendung in der Getriebedynamik. VDI-Z Bd.127 (1985) Nr.9, S.341-349.

- [22] Rosenberg, R.M.: Analytical dynamics of discrete systems. New York, London: Plenum Press, 1977.
- [23] Pfeiffer, F.: Mechanische Systeme mit un stetigen Übergängen. Ingenieur-Archiv 54 (1984),232-240.
- [24] Wittenburg, J.: Dynamics of systems of rigid bodies. Stuttgart: Teubner, 1977.
- [25] Peeken, H., Troeder, Ch., Tooten, K.: Belastung von Zahnrädern durch "Hämmern". VDI-Berichte Nr.488, 1983.

## **8 SEZNAM VYBRANÝCH PUBLIKOVANÝCH PRACÍ**

- [1\*] Hortel, M. - Škuderová, A.: Vliv parametrů na kvalitativní vlastnosti kmitání v nelineárních parametrických převodových soustavách. In Proceedings Mezinárodní seminář "Dynamická a pevnostní analýza pohonových systémů", 3.-6.5.1993, Svratka, ES VUT Brno, 1993, 99-102.
- [2\*] Hortel, M. - Škuderová, A.: O některých dynamických jevech v soustavách s parametrickými nelinearitami. In Sborník referátů kolokvia Dynamika strojů 94, ÚT AV ČR, Praha, 11.-13.4.1994, str.37-70.
- [3\*] Hortel, M. - Škuderová, A.: K některým dynamickým jevům v třídě mechanických soustav s variabilní strukturou. In Sborník Kolokvium Dynamika strojů 95, ÚT AV ČR, 1.-2.2, Praha, str.47-54.
- [4\*] Hortel, M. - Škuderová, A.: K existenci některých zvláštních jevů nelineárních soustav s kinematickými vazbami. In Sborník Sekce 17 - Aplikovaná mechanika, Mechanika tuhého tělesa, mezinárodní vědecká konference VŠB - TU Ostrava, 12.-15.9.1995, s.36-41.
- [5\*] Hortel, M. - Škuderová, A.: Dynamic phenomena in the class of gearing systems with parametric non-linearities. In Proceedings "Ninth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Politecnico di Milano, Italy, Augut 29 / September 2, 1995, Vol.2, 951-955.
- [6\*] Hortel, M. - Škuderová, A.: K některým jevům v nelineárních parametrických soustavách s časově proměnlivými parametry. In Sborník 11. Seminář s mezinárodní účastí Výpočtová mechanika 95, Pernink, 18.-20.říjen 1995, ZČU - FAV, Plzeň, katedra mechaniky, str.70-77.
- [7\*] Hortel, M. - Škuderová, A.: K některým otázkám analýzy dynamiky soustav s kinematickými vazbami - ozubenými koly. In Sborník Engineering Mechanics 96. National Conference with International Participation, May 13-16, 1996, Svratka, 107-112.
- [8\*] Hortel, M., - Škuderová, A.: Chaotische Schwingungen in Systemen mit Parameternichtlinearitäten. In Supplements of ZAMM, GAMM 96, ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 77 (1977), Supplement 1, S135-S16.
- [9\*] Hortel, M. - Škuderová, A.: Nelineární parametrické kmitání v technické praxi. In Sborník IFToMM, VII.International Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Sept., 3-5, 1996, Technical University Liberec, 197-202.

- [10\*] Hortel, M. - Škuderová, A.: K dynamické analýze nelineárních parametrických soustav. In Sborník Kolokvium Dynamika strojů 97, Praha, 4.-5.2.1997.
- [11\*] Hortel, M. - Škuderová, A.: Převodová ústrojí s ozubenými koly jako nelineární parametrické dynamické soustavy. In Sborník referátů k doprovodnému programu Převodová ústrojí a mechanismy - mezinárodní výstava hnacích mechanismů DRIVE 97 Ostrava, červen 1997, 39-46.
- [12\*] Hortel, M. - Škuderová, A.: K vlivu tlumení na proces kmitání v nelineárních systémech s časově variabilními členy. In Sborník Kolokvium Dynamika strojů 98, Praha, 3.-4.2.1998, 87-95.
- [13\*] Hortel, M. - Škuderová, A.: K analýze deterministických nelineárních parametrických systémů s výskytem iregulárních - chaotických pohybů, zpráva ÚT AV ČR, Z1193/94, Praha.
- [14\*] Hortel, M. - Škuderová, A.: Vliv tlumení na kvalitativní vlastnosti soustav s parametrickými nelinearitami, zpráva ÚT AV ČR, Z1261/99, Praha, 1999.
- [15\*] Hortel, M. - Škuderová, A.: Zur Existenz von Phänomenen in nichtlinearen parametererregten Systemen. ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 78 [S] 1 (1998).
- [16\*] Hortel, M. - Škuderová, A.: K některým význačným jevům v dynamice nelineárních parametrických soustav s ozubenými koly. In: Nové poznatky z teorie, výpočtů, výroby a provozu ozubených převodů. Sborník konference ICESA '98. - Ostrava, VŠB Technická universita 1998. - S. 99-104.
- [17\*] Škuderová, A.: Poznámky k numerické simulaci dynamických jevů v nelineárních parametrických soustavách. In: Dynamika strojů 2000. - Praha, Ústav termomechaniky AV ČR 2000. - S. 217-224.
- [18\*] Škuderová, A.: Simulation of dynamic phenomenons in nonlinear parametric systems with kinematic coupling and backlash. In: Engineering mechanics 2000. Praha, UTAM AV ČR 2000. - S. 31-38.
- [19\*] Hortel, M. - Škuderová, A.: Stosseffekte in nichtlinearen parametererregten Getriebesystemen. In: GAMM 2001 Annual Scientific Conference, Book of Abstracts. - Zürich, Swiss Federal Institute of Technology 2001. - S. 57.
- [20\*] Hortel, M. - Škuderová, A.: Damping influence on the qualitative properties of nonlinear systems with parametric nonlinearities. In: Inženýrská mechanika 2001. Praha, Ústav termomechaniky AV ČR 2001. - S. 99-100 (abstrakt). + celý článek - CD-ROM 320 KB.
- [21\*] Škuderová, A.: Simulation of impact effects in nonlinear parametric systems. In: Inženýrská mechanika 2001. Praha, Ústav termomechaniky AV ČR 2001. Abstrakt (253-254) + celý článek CD-ROM 399 KB.
- [22\*] Hortel, M. - Škuderová, A.: Stosseffekte in nichtlinearen parametererregten Getriebesystemen. Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics 1 (1) (2002) 63-64.
- [23\*] Hortel, M. - Škuderová, A.: To the mathematical-physical modelling and solution of dynamic phenomena in a class of transmissive systems with spur gears. In: Proceedings of the Abstracts, 6th International Conference Dynamics

of Gear Drives. Trnava, Slovak University of Technology, Dept. of Applied Mechanics, 2002. + celý článek na CD-ROM.

- [24\*] Hortel, M. - Škuderová, A.: K analýze vlivu tuhosti podpor na amplitudofrekvenční charakteristiku ozubených kol. In: Dynamika strojů 2003. Praha, Ústav termomechaniky AV ČR, 2003, 61-68.
- [25\*] Hortel, M. - Škuderová, A.: Über einige dynamische Eigenschaften von nichtlinearen parameterregten Getriebesystemen. In: Vortragssammelbuch der Internationalen Tagung für Antriebstechnik 03. Varna, Bulharsko, Balkan Association of Power Transmissions, 2003, 20-25.
- [26\*] Hortel, M. - Škuderová, A.: K některým dynamickým jevům v silně nelineárních parametrických soustavách s děleným tokem výkonu. In: Spolehlivost 2003. Brno, Vojenská akademie, 2003, 83-88.
- [27\*] Škuderová, A.: K analýze vnitřní dynamiky silně nelineární parametrické soustavy s kinematickými vazbami. Doktorská dizertační práce, FSI VUT Brno, 2003.

## 9 ŽIVOTOPIS

Datum narození:	30.června 1951
Místo narození:	Nymburk
Státní příslušnost:	ČR
Národnost:	česká
Vzdělání:	1957-1966 ZDŠ Praha 3 1966-1969 SVVŠ Praha 3 – přírodovědná větev 1969-1973 FSI ČVUT Praha – 4 roky denní studium (1.-4.ročník) 1975-1977 FSI ČVUT Praha – 2 roky dálkové studium 23.6.1977 státní zkouška a obhajoba diplomové práce 1990-1992 čtyřsemestrové postgraduální studium na FEL ČVUT Praha, obor „Počítačová grafika“ 1998-2004 externí forma postgraduálního studia na FSI VUT Brno, obor „Inženýrská mechanika“
Zaměstnání:	23.9.1974 – dosud Ústav termomechaniky AV ČR Praha; oddělení „Dynamika a vibrace“ (výzkumný pracovník)

## 10 SUMMARY

Gearing is one of the most widespread mechanisms of the majority of contemporary machines. Although the problems has been known more than two thousand years, this matter has not yet been comfortably solved for the contemporary state of technology, especially from the point of view of dynamics of systems.

Dynamic force is the primary factor in the projecting of size and solidity of a machine equipment and the basic factor in optimizing and ensuring the reliability of the construction.

The basic model for the analysis of nonlinear dynamic phenomena in a gear system is created by a pair of meshing and elastically supported spur gears. This gear pair model considers the influence of the damping, frictional forces and periodically variable stiffness in the gear mesh, possible eccentricity of gears and manufacturing inaccuracy of the teeth profile, linear and cubic damping in gear backlash and the influences of impacts, caused by the existence of tooth backlash.

Lagrange equations of the second order are used for the formulation of motion equations. The dynamic model of gear system is described by the system of six non-homogeneous weakly and strongly (due to technological tooth backlash) nonlinear second order differential equations with time variable coefficients. These are solved numerically, by means of the software package Matlab/Simulink. Explicit form (for the second derivation of displacement) of the nonlinear differential equations of motion of dynamic system – gear pair – is convenient to a composition of model for simulating and analyzing its dynamic behavior.

The simulation model allows to analyze the influences of the damping, frictional forces and periodically variable stiffness in the gear mesh, possible eccentricity of gears (with their possible angular position), manufacturing inaccuracy of the teeth profile, linear and cubic damping in gear backlash and the influences of impacts, caused by the existence of tooth backlash, in nonlinear parametric system with kinematic couplings, excited purely parametrical or parametrical and external, with six degrees of freedom, as a special case of general power system.

This simulation method of analysis create the starting basis for the studies and development of complicated constructions with split power flow of aeronautical and automotive industry. These constructions can be perceived as branched chains of gear pairs systems, i.e. as the synthesis of definite - by sure way - composed basic systems or their especial cases.