VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta strojního inženýrství

Doc. RNDr. Josef Daněček, CSc.

NĚKTERÉ ASPEKTY TEORIE REGULARITY

SOME ASPECTS OF REGULARITY THEORY

TEZE PŘEDNÁŠKY K PROFESORSKÉMU JMENOVACÍMU ŘÍZENÍ

V OBORU

APLIKOVANÁ MATEMATIKA

VUTIUM

BRNO 2004

KLÍČOVÁ SLOVA
nelineární diferenciální rovnice, slabé řešení, regularita
KEY WORDS
nonlinear differential equations, weak solution, regularity

ISBN 80-214-2769-8
ISSN 1213-418X

OBSAH

Josef Daněček se narodil 21. 11. 1946 ve Znojmě. Po maturitě studoval odbornou matematiku (obor matematická analýza) na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně, kterou ukončil v roce 1973 státní závěrečnou zkouškou a obhajobou diplomní práce na téma *"Perronův integrál a některé jeho aplikace"*.

V říjnu 1974, po ukončení základní vojenské služby, nastoupil jako odborný asistent-nepedagog na katedru obráběcích a tvářecích strojů Fakulty strojní VUT Brno, kde pod vedením doc. J. Hlaváčka prováděl matematickou analýzu problémů statiky stojanů karuselů a v závěrečné fázi řadu výpočtů programoval v jazyku *Algol*. Výsledky byly prezentovány v oponovaných výzkumných zprávách. V průběhu působení na této katedře vykonal v červnu 1976 na Přírodovědecké fakultě MU v Brně rigorózní zkoušku v oboru matematická analýza a obhájil rigorózní práci na téma *"Parciální diferenciální rovnice v polorovině"* pod vedením doc. J. Chrastiny.

V červnu 1977 nastoupil na katedru matematiky Fakulty stavební VUT Brno jako odborný asistent. Na podzim roku 1978 začal navštěvovat na Matematickém ústavu ČSAV v Praze seminář prof. J. Nečase z parciálních diferenciálních rovnic. V roce 1979 zahájil externí aspiranturu u prof. J. Nečase z Matematicko-fyzikální fakulty UK Praha, kterou v roce 1985 ukončil obhajobou kandidátské dizertační práce *"Regularita slabých řešení nelineárních eliptických systémů"* v oboru diferenciální a integrální rovnice.

Během aspirantury začal spolupracovat na problematice regularity slabých řešení nelineárních eliptických a parabolických systémů parciálních diferenciálních rovnic s doc. J. Starou a doc. O. Johnem z Matematicko-fyzikální fakulty UK Praha. Tato spolupráce se i nadále rozvíjí a v současné době je podán společný grant *"Regularita řešení nelineárních systémů parciálních diferenciálních rovnic a minim variačních integrálů"* do GA ČR. Další spolupráce na poli teorie regularity nelineárních systémů parciálních diferenciálních rovnic byla navázána s vědeckými pracovníky katedry matematické analýzy Matematicko-fyzikální fakulty UK v Bratislavě. Navázal rovněž aktivní pracovní kontakty s předními světovými odborníky v oblasti diferenciálních rovnic z Petrohradské státní univerzity a Petrohradského elektrotechnického institutu, kde o svých výsledcích referoval.

Zapojil se také do výzkumu na problematice matematického popisu šíření vlhkosti a tepla v porézních materiálech. Na řešení tohoto problému byl na ústavu matematiky Fakulty stavební získán v roce 1995 grant *"Numerické modelování difusních procesů v extrémních podmínkách"*, který byl ukončen v lednu 1997 úspěšnou obhajobou.

Další rozsáhlá spolupráce zaměřená na aplikace matematických metod ve vodohospodářském výzkumu se rozvinula s pracovníky ústavu vodních staveb Fakulty stavební. V letech 1999-2001 se podílel na grantu *"Návrh obecné metodiky pro sestavování matematických modelů kvality vody v síti vodních toků"*. Touto problematikou se doc. Daněček dále zabývá ve výzkumném záměru, jehož nositelem je ústav vodních staveb, a z těchto pracovních kontaktů vzešla celá řada cenných publikací. V roce 1998 se habilitoval na Fakultě stavební v oboru *"Aplikovaná matematika"*.

Po nástupu na katedru matematiky Fakultu stavební VUT Brno v roce 1977 byl zapojen do výuky nejprve vedením cvičení a seminářů a po ukončení aspirantury byl pověřován přednáškami jak na dálkovém, denním, tak i doktorském studiu. Je spoluautorem čtyř skript pro základní kurzy matematiky a učebních podkladů pro kombinovanou formu studia na Fakultě stavební VUT, byl členem pedagogické komise pro vodohospodářské obory. Připravil také návrh výuky nového předmětu s názvem *"Systém MAPLE"*. Doc. Daněček je školitelem doktorandů v oboru matematické inženýrství na Fakultě strojního inženýrství VUT. V loňském roce obhájil jeho doktorand disertační práci.

Doc. Daněček se též aktivně podílí na organizaci vědeckého života v české matematické komunitě. Byl členem organizačních výborů tří mezinárodních, tří domácích konferencí a je aktivním členem Matematické vědecké sekce Jednoty český matematiků a fyziků.

Výsledky své vědecko-výzkumné práce publikoval doc. Daněček jako autor nebo spoluautor v jednoho příspěvku v zahraniční monografii, jednoho příspěvku v domácí monografii, deseti článcích ve vědeckých zahraničních časopisech, devíti článcích v domácích vědeckých časopisech a dvaceti příspěvcích ve sbornících mezinárodních a národních konferencí. Je rovněž dlouholetým recenzentem pro časopis *"Zentralblatt für Mathematik"*

1 ÚVOD

Budeme se zabývat kvalitativními vlastnostmi slabých řešení nelineárních systémů parciálních diferenciálních rovnic v divergentním tvaru

$$-D_\alpha A_i^\alpha(x, u(x), Du(x)) = B_i(x, u(x), Du(x)), \quad i = 1, \dots, N, \ N \geq 1 \tag{1}$$

v omezené, otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ (zde a v dalším používáme Einsteinovu sčítací konvenci). Na koeficienty A_i^α, B_i jsou kladeny jisté podmínky hladkosti, růstové podmínky a jestliže navíc platí, že existují spojité parciální derivace koeficientů A_i^α, tj. $A_i^\alpha \in C^1(\mathbb{R}^{nN})$ a $\partial A_i^\alpha(x, u, p)/\partial p_\beta^j \xi_i^\alpha \xi_j^\beta \geq \nu |\xi|^2$ pro každé $x \in \Omega$, $u \in \mathbb{R}^n$, $p, \xi \in \mathbb{R}^{nN}$, $\nu > 0$ je daná konstanta, říkáme, že je splněna podmínka elipticity a systém (1) nazýváme nelineárním eliptickým systémem parciálních diferenciálních rovnic. Slabým řešením rozumíme vektorovou funkci u, která je ze Sobolevova prostoru $W_{loc}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ a splňuje následující integrální identitu

$$\int_\Omega A_i^\alpha \left(x, u(x), Du(x)\right) D_\alpha \varphi^i(x)\, dx = \int_\Omega B_i \left(x, u(x), Du(x)\right) \varphi^i(x)\, dx \tag{2}$$

pro každé $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

Problém regularity (hladkosti) slabého řešení je velmi důležitá část teorie parciálních diferenciálních rovnic. Tato problematika se často v literatuře nazývá 19-tý Hilbertův problém. Výsledky této teorie jsou významné i z hlediska numerického řešení parciálních diferenciálních rovnic. Jeho řešením se v posledních desetiletích zabývala celá řada významných matematiků.

Otázka regularity slabého řešení jedné nelineární rovnice ($N = 1$), lineárního eliptického systému (v rovnici (1) je $A_i^\alpha(x, u, Du) = A_{ij}^{\alpha\beta}(x) D_\beta u^j$) a nelineárního systému byla v letech 1940 - 1972 kladně řešena řadou autorů pro dimenzi dva. Zcela odlišná situace nastává v případě, že dimenze je větší než dva.

Ve své práci z roku 1968 E. De Giorgi ukázal příklad lineárního systému s neregulárním řešením. Další protipříklady následovaly: pro quasilineární systémy (v rovnici (1) je $A_i^\alpha(x, u, Du) = A_{ij}^{\alpha\beta}(x, u) D_\beta u^j$) v článku z roku 1968 E. Giusti, M. Miranda, 1972 J. Nečas, J. Stará a konečně J. Nečas v roce 1977 ukázal příklad nelineárního eliptického systému s analytickými koeficienty, který má právě jedno lipšicovské řešení, tj. gradient řešení je nespojitý. Hilbertův problém byl tedy zodpovězen negativně.

V současné době už bylo mnoho otázek teorie regularity zodpovězeno, ale na druhé straně zůstává řada otevřených problémů. Obecně lze říci, že slabé řešení nelineárních eliptických systémů není regulární (řešení není v prostoru $C^{1,\gamma}$, $0 < \gamma < 1$, viz [30]). V minulém období byla publikována celá řada prací, které se týkaly částečné regularity, t.j. regularity všude až na množinu singulárních bodů s nulovou Hausdorffovou mírou (přehledně viz [2], [3], [4], [19], [20], [22], [30], [31], [32]). Otázka regularity gradientu jediného minima konvexního a diferencovatelného funkcionálu zůstávala pro $3 \leq n \leq 4$ dlouho otevřena. Problém byl řešen v publikacích V. Šveráka a X. Yan, [34], [35], kde je konstruován příklad funkcionálu, který má všechny požadované vlastnosti a jediné minimum s nespojitým a neomezeným gradientem. Úplná regularita (tj.každé řešení je tak hladké, jak dovolují koeficienty a okrajové podmínky dané úlohy) nemůže být tedy obecně ukázána ani v tomto speciálním případě. Proto se hledaly doplňující podmínky, za kterých regularita platí. V článku M. Giaquinty a J. Nečase [21] bylo ukázáno, že jestliže nelineární systém splňuje Liouvillovu podmínku, pak je řešení regulární. Za jistých předpokladů platí i opačné tvrzení. Aby ovšem tento postup mohl být použit, je třeba ověřit, že všechna slabá řešení systému mají omezený gradient (viz [21], [29]). Tento restriktivní požadavek byl zeslaben v pracích [6], [8], kde Liouvillova podmínka byla formulována v termínech BMO prostorů (prostory funkcí s omezenou střední oscilací). Funkce z tohoto prostoru nemusí být ohraničné, tj. $L^\infty \subsetneq BMO$. Dále v práci [7] bylo ukázáno, že existují nelineární eliptické systémy, pro něž je gradient slabého řešení v prostoru BMO. V práci [12], která v jistém smyslu zobecňuje výsledek práce [23], bylo pro nelineární eliptický systém ukázáno, že pokud bude gradient slabého řešení v okolí bodu v jistém smyslu blízký lineární funkci, pak je v tomto okolí řešení regulární. Jiný přístup k této problematice ukázal A. I. Koševel ve své práci [25]. Myšlenky této práce v dalších letech rozvinul a publikoval spolu se svými spolupracovníky v článcích a v knihách [26], [27] a [28]. A. I. Koševel dokázal regularitu slabého řešení v případě, že disperze vlastních čísel matice koeficientů $(\partial A_i^\alpha / \partial p_\beta^j)$ není příliš velká. Problematika regularity slabého řešení nelineárních parabolických systémů parciálních diferenciálních rovnic je sama natolik obsáhlá, že ji zde není možno prezentovat v plné šíři. Některé podstatné výsledky jsou obsaženy v článku J. Nečase, V. Šveráka (viz [33]) a pro $n = 2$ v článku [24].

Z výše uvedeného plyne, že nalézt podmínky úplné regularity nelineárního systému je a asi zůstane poměrně obtížné. Jako schůdnější se jeví ukázat, že slabé řešení je v prostoru hölderovsky spojitých funkcí, jak bylo v prostoru dimenze dva a tři ukázáno v článcích [3], [4] a [19] anebo dokázat silnější výsledek, a to, že gradient slabého řešení patří do prostoru BMO. Tento fakt implikuje, že řešení je hölderovsky spojité s libovolným exponentem hölderovskosti menším než jedna a dokonce více - řešení je zygmundovsky spojité. Jistým pokrokem v tomto směru byla práce [9], kde je ukázana nutná podmínka pro BMO-regularitu gradientu slabého řešení nelineárního eliptického systému a kde je uveden systém, který dané podmínce vyhovuje. Práce [10] je podstatným zobecněním výsledku z [9]. V článku [10] je dokázáno, že jestliže poměr koeficientu omezenosti a konstanty elipticity je menší nebo roven konstantě $P > 1$, pak pro dostatečně velkou konstantu elipticity dostaneme, že gradient slabého řešení je lokálně v prostoru BMO. Výsledek z [10] neplyne ze závěrů práce [26] a [27], jak ukazuje článek [11]. Na některé myšlenky článku [10] navazuje práce [18], kde je za slabších předpokladů kladených na systém dokázána dokonce $C^{1,\gamma}$-regularita nelineárního eliptického systému a je tedy částečně zodpovězena otázka položená v [20]. Práce [18] obsahuje a zobecňuje výsledek článku [10]. Článek [13] zobecňuje výsledek práce [7] a v jistém směru rozšiřuje publikaci [1] na nelineární eliptický systém, jehož hlavní část je součtem eliptického operátoru s nespojitými, měřitelnými a omezenými koeficienty a nelineární perturbace, která má sublineární růst v proměnné, jež odpovídá gradientu slabého řešení. Zobecněním a rozšířením výsledků práce [13] jsou články [15] a [16]. Články [14], [17] jsou důsledkem práce [13] a týkají se problematiky regularity minim variačních integrálů.

V závěru lze říci, že výzkum BMO-regularity lineárních eliptických systémů parciálních diferenciálních rovnic (viz např. [2], [1]) otevírá cestu k pochopení problematiky regularity nelineárních eliptických a parabolických systémů. První poznatky jsou získány v článcích [15] a [16] s využitím práce [7]. Dále práce [10] a [18] ukazují, že cesta přes kontrolovanou oscilaci koeficientů systému s kombinací jemnějších odhadů vede k důkazu BMO-regularity, resp. $C^{1,\gamma}$-regularity. Tyto závěry se dají použít na složitější systémy eliptických a parabolických parciálních diferenciálních rovnic. Cílem je nalézt takové podmínky na koeficienty nelineárního eliptického (parabolického) systému parciálních diferenciálních rovnic, které by zaručovaly BMO-regularitu, resp. $C^{1,\gamma}$-regularitu slabého řešení (což se podařilo aspoň v případě, že koeficienty systému závisí pouze na gradientu řešení) s možným rozšířením až do hranice, případně za jistých dosti obecných podmínek dokázat hölderovskost řešení v libovolné dimenzi větší než dva. Rovněž je aktuálním tématem studovat regularitu v dimenzi dva, kde je celá řada otevřených problémů (viz [24]). Získání takových výsledků by podstatně přispělo k prohloubení teorie regularity.

Studium regularity slabého řešení nelineárních parciálních diferenciálních rovnic má nejen čistě teoretický aspekt, ale i značný význam pro kvalitu numerického řešení lineárních i nelineárních diferenciálních rovnic (viz [32]). Všechny numerické metody řešení nelineárních eliptických systémů jsou totiž vysoce citlivé na regularitu řešení. Přítomnost singularit vede ke značnému zpomalení konvergence a dokonce k možnosti úplného kolapsu výpočtu, či k získání zcela nevěrohodných výsledků.

Protože problematika regularity nelineárních systémů parciálních diferenciálních rovnic je technicky poměrně náročná, ukážeme některé její aspekty v dimenzi jedna.

2 REGULARITA DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

2.1 Úvod

1. Příklady obyčejných nelineárních diferenciálních rovnic:
(a)

$$\frac{d^2u}{dx^2}(t) + G\left(t, u(t)\right) = f(t), \qquad t \in (0, \pi)$$

s podmínkami

$$u(0) = u(\pi) = 0$$

kde G spojitá funkce na $[0, \pi] \times \mathbb{R}$. V případě, že $G(t, u(t)) = \omega^2 \sin u(t)$ a $f(t) = 0$ předešlá nelineární rovnice popisuje malé kmity matematického kyvadla s úhlovou frekvencí $\omega = g/l$.
(b) V teorii chemických reaktorů

$$\beta \frac{d^2c}{dx^2}(x) - \frac{dc}{dx}(x) + F\left(c(x)\right) = 0, \qquad x \in (0, 1)$$

s podmínkami

$$\alpha u(0) - u'(0) = 0 \quad u'(1) = 0$$

kde c je koncentrace látky, F je spojitá funkce na $\mathbb{R}$ a α, $\beta > 0$ jsou dané konstanty.
2. Příklady nelineárních parciálních diferenciálních rovnic:
(a) Rovnice *Mongeova-Amperova* - charakteristickým nelineárním problémem je úloha najít plochu popsanou funkcí $u(x, y)$ pro $(x, y) \in \overline{\Omega}$, která má na okraji $\partial\Omega$ předepsaný tvar a která má přitom předepsanou křivost. Tato úloha vede k rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 = f(x, y)$$

s podmínkou

$$u(x, y) = g(x, y)$$

pro každé $(x, y) \in \partial\Omega$.
(b) *Boussinesqova rovnice (1904)* - používá se k popisu proudění podzemní vody a má následující tvar

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{K}{S}\frac{\partial}{\partial x}\left(u(x, t)\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right) - \frac{1}{S}N(t) = 0$$

s podmínkami

$$u(x,0) = u_0(x) \quad u(0,t) = g(t) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(a,t) = 0$$

kde u je volná hladina vody, u_0, g jsou dané funkce, N je rychlost vertikálního přítoku k hladině vody, K je hydraulická vodivost homogenního izotropního kolektoru a S je storativita. Konstanty závisí na vlastnostech kapaliny a zeminy (porovitost a vlhkost prostředí).
(c) Následující rovnice se vyskytuje v aplikacích: teorie šíření tepla, difuze plynu (šíření energie a látek v hostitelském prostředí - hostitelské prostředí se nehýbe)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}\left(|u(x,t)|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) = f(x,t) \quad x \in (0,1),\ t > 0$$

(kde $p > 2$ je daná konstanta) s podmínkami

$$\begin{aligned} u(x,0) &= u_0(x) \quad x \in (0,1) \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0 \quad t > 0 \end{aligned}$$

2.2 Pojem klasického řešení

Nechť $a_1 \in C^1([a,b]\times\mathbb{R}^2)$, $a_0 \in C([a,b]\times\mathbb{R}^2)$ a $f \in C([a,b])$. Klasickým řešením okrajové úlohy

$$-\frac{d}{dx}\left[a_1(x,u(x),u'(x))\right] + a_0\left(x,u(x),u'(x)\right) = f(x) \tag{3}$$

$$u(a) = u(b) = 0 \tag{4}$$

nazýváme funkci $u \in C^2([a,b])$, která splňuje (3) pro každé $x \in (a,b)$ a podmínky (4).

Předpokládejme, že $u \in C^2([a,b])$ je řešením problému (3), (4). Platí

$$\begin{aligned} -\int_a^b \frac{d}{dx}\left[a_1(x,u(x),u'(x))\right]\varphi(x)\,dx &+ \int_a^b a_0\left(x,u(x),u'(x)\right)\varphi(x)\,dx \\ &= \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \end{aligned} \tag{5}$$

a platí-li navíc $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, dostáváme integrací per partes

$$\int_a^b a_1\left(x,u(x),u'(x)\right)\varphi'(x)\,dx + \int_a^b a_0\left(x,u(x),u'(x)\right)\varphi(x)\,dx = \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \tag{6}$$

Vidíme, že funkce $u \in C^2([a,b])$, která pro každou funkci $\varphi \in C_0^1([a,b])$ splňuje vztah (6), je řešením rovnice (3) za podmínek (4) v obvyklém smyslu. Z tohoto vyplývá, že můžeme místo rovnice (3) uvažovat integrální identitu (6).

Integrální rovnice (6) má smysl i za obecnějších předpokladů než $u \in C^2([a,b])$. Stačí, aby funkce u byla absolutně spojitá na intervalu $[a,b]$. Funkce absolutně spojitá má skoro všude na (a,b) konečnou derivaci (ve smyslu Lebesgueovy míry), která je Lebesgueovsky integrovatelná na (a,b).

2.3 Sobolevovy prostory

Nyní zavedeme výše uvedené prostory absolutně spojitých funkci. Řekneme, že funkce f je absolutně spojitá na intervalu $[a,b]$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro jakákoliv $a \le a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le \ldots \le a_n < b_n \le b$ platí implikace

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

Prostor absolutně spojitých funkcí budeme značit $AC([a,b])$.

Funkce

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x} & x \in (0,1], \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

je spojitá, ale není absolutně spojitá.

Funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{\sqrt{x}} & x \in (0,1], \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

je absolutně spojitá.

Dalším důležitým pojmem spojitosti je Hölderovsky spojitá funkce. Řekneme, že funkce f je Hölderovsky spojitá na intervalu $[a,b]$ s exponentem $0 < \lambda \le 1$, jestliže pro každé x, $y \in [a,b]$ platí

$$|f(x) - f(y)| \le c\,|x-y|^{\lambda}\,.$$

Prostor Hölderovsky spojitých funkcí budeme značit $C^{0,\lambda}([a,b])$. Pro $\lambda = 1$ těmto funkcím říkáme Lipschitzovsky spojité funkce.

Funkce

$$f(x) = \frac{1}{\ln x}$$

je absolutně spojitá na $[0,1]$, ale není Hölderovská pro žádné $\alpha \in (0,1]$.

Funkce

$$f(x) = |x|^{\alpha}$$

je Hölderovsky spojitá na $[-1,1]$, ale nemá derivaci v bodě 0 pro žádné $\alpha \in (0,1]$. Hölderovskost vyplývá z nerovnice

$$||x|^\alpha - |y|^\alpha| \leq ||x| - |y||^\alpha \leq |x-y|^\alpha \ .$$

Platí následující vnoření

$$C^2([a,b]) \subsetneq C^1([a,b]) \subsetneq C^{0,\lambda}([a,b]) \subsetneq C^{0,1}([a,b]) \subsetneq AC([a,b]) \subsetneq C([a,b]) \,,$$

kde $0 < \lambda < 1$.

Symbolem $W^{1,2}((a,b))$ označme množinu všech funkcí absolutně spojitých na intervalu $[a,b]$ s derivací (derivace existuje skoro všude na (a,b)) patřící do Lebesgueova prostoru $L^2((a,b))$. Na tomto prostoru se definuje skalární součin vztahem

$$(u,v)_{W^{1,2}((a,b))} = \int_a^b u(x)v(x)\,dx + \int_a^b u'(x)v'(x)\,dx$$

a tedy norma

$$\|u\|_{W^{1,2}((a,b))} = \left(\int_a^b |u(x)|^2\,dx + \int_a^b |u'(x)|^2\,dx \right)^{1/2}$$

Tyto lineární prostory opatřené výše definovanou normou se obvykle nazývají Sobolevovy prostory. Podprostor $W_0^{1,2}((a,b))$ prostoru $W^{1,2}((a,b))$ je tvořen funkcemi $u \in W^{1,2}(a,b)$ takovými, že $u(a) = u(b) = 0$.

Poznámka 1. Prostor $C^1([a,b])$ je hustý podprostor v prostoru $W^{1,2}((a,b))$ a prostor $C_0^1([a,b])$ je hustý podprostor v prostoru $W_0^{1,2}((a,b))$.

Analogicky se definují prostory $W^{1,p}((a,b))$, kde $1 \leq p \leq \infty$. Zde se požaduje, aby derivace (derivace existuje skoro všude na (a,b)) patřila do Lebesgueova prostoru $L^p((a,b))$. Dá se ukázat, že prostor $W^{1,\infty}((a,b))$ je ekvivalentní s prostorem $C^{0,1}([a,b])$.

2.4 Definice a existence slabého řešení

Nechť a_1, $a_0 \in C^0([a,b] \times \mathbb{R}^2)$ a g je spojitá funkce na $\mathbb{R}$. Budeme předpokládat, že

$$|a_1(x,v,p)| \leq c(g(v) + |p|) \qquad |a_0(x,v,p)| \leq c(g(v) + |p|^2) \tag{7}$$

pro každé $x \in [a,b]$ a každé v, $p \in \mathbb{R}$.

Nechť $f \in L^2((a,b))$. Řekneme, že funkce $u \in W^{1,2}((a,b))$ je slabým (zobecněným) řešením okrajové úlohy

$$-\frac{d}{dx}\left[a_1\left(x, u(x), u'(x)\right)\right] + a_0\left(x, u(x), u'(x)\right) = f(x) \tag{8}$$

$$u(a) = u_0, \qquad u(b) = u_1 \tag{9}$$

jestliže funkce u splňuje podmínky (9) a pro každé $\varphi \in W_0^{1,2}((a,b))$ platí

$$\int_a^b a_1(x, u(x), u'(x))\varphi'(x)\,dx + \int_a^b a_0(x, u(x), u'(x))\,\varphi(x)\,dx = \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \tag{10}$$

Poznámka 2. Okrajové úloze, při které jsou předepsány pouze hodnoty funkce v okrajových bodech, se říká Dirichletova úloha.

Abychom dostali existenci slabého řešení, musíme o koeficientech a_1, a_0 vědět více, než je spojitost koeficientů a růstové podmínky (7). Předpokládejme, že existují konstanty $c_2 > 0$ a $c_2 > c_3$ tak, že pro všechna $x \in [a,b]$, v, w, p, $q \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}&[a_1(x,v,p) - a_1(x,w,q)]\,(p-q) + [a_0(x,v,p) - a_0(x,w,q)]\,(v-w)\\ &\geq c_2|p-q|^2 - c_3|v-w|^2.\end{aligned} \tag{11}$$

Tuto podmínku nazýváme podmínkou monotonie.

Příklad 1. Budeme-li v příkladu 1(b) z úvodu předpokládat, že funkce F je neklesající na $\mathbb{R}$ a $\beta > 1$, máme

$$\begin{aligned}&[a_1(x,v,p) - a_1(x,w,q)]\,(p-q) + [a_0(x,v,p) - a_0(x,w,q)]\,(v-w)\\ &= [\beta p - v - (\beta q - w)]\,(p-q) + [F(v) - F(w)]\,(v-w)\\ &\geq \beta(p-q)^2 - (v-w)(p-q) \geq \beta(p-q)^2 - \frac{1}{2}(v-w)^2 - \frac{1}{2}(p-q)^2\\ &\geq \left(\beta - \frac{1}{2}\right)|p-q|^2 - \frac{1}{2}|v-w|^2\end{aligned}$$

pro každé v, w, p, $q \in \mathbb{R}$ a tedy podmínka monotonie (11) je splněna.

Věta 1. *Nechť a_1, a_0 jsou spojité funkce na $[a,b]\times\mathbb{R}^2$ splňující růstové podmínky (7), podmínky monotonie (11) a $f \in L^2((a,b))$. Pak existuje právě jedno slabé řešení úlohy (8)-(9).*

2.5 Některé výsledky teorie regularity

Nyní můžeme formulovat základní věty o regularitě. V dalším se omezíme na Dirichletovy podmínky (9) s $u(a) = u(b) = 0$.

Věta 2. *Nechť jsou splněny předpoklady Věty 1 a funkce f je spojitá na $[a,b]$ a nechť $u \in W_0^{1,2}((a,b))$ je slabé řešení úlohy (8)-(9). Pak $u \in C_0^1([a,b])$.*

Věta 3. *Nechť jsou splněny předpoklady Věty 2 a navíc $a_1 \in C^1([a,b]\times\mathbb{R}^2)$. Pak slabé řešení úlohy (8)-(9) má spojitou derivaci druhého řádu na intervalu $[a,b]$ a rovnice (8) je splněna v každém bodě intervalu $[a,b]$.*

3 VARIAČNÍ INTEGRÁLY

3.1 Funkcionály

Budeme uvažovat funkcionály typu

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx \tag{12}$$

které se nazývají variační integrály. Integrand f je spojitá funkce na $[a, b] \times \mathbb{R}^2$ a nazývá se Lagrangeova funkce (Lagrangián).

Řada technických a fyzikálních problémů vede na hledání minima těchto funkcionálů na nějakých vhodných funkčních prostorech.

Příklady funkcionálů :

(a) *Brachistochrona - J.Bernoulli, 1696*

Úlohou je najít tvar dráhy u mezi body $A = [0, 0]$ a $B = [a, b]$, po které se pohybuje těleso o hmotnosti m (vlivem vlastní tíže bez tření) z bodu A do bodu B tak, aby čas byl nejkratší. Po jistých úvahách lze problém převést na úlohu nalezení minima funkcionálu

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}{\sqrt{2gu(x)}}\, dx$$

za podmínek $u(0) = 0$ a $u(a) = b$, kde a, $b > 0$ jsou dané konstanty a g je gravitační konstanta.

(b) *Obtékání pevného tělesa*

Problém tvaru pevného tělesa, které má nejmenší odpor v proudu plynu. Je zřejmé, že tato úloha vyžaduje použití variačního počtu. Variační formulace zde vzniká přirozeně a není alternativního přístupu k této úloze. Následující funkcionál je odvozen za předpokladu, že $u' \ll 1$ a přepokladu, že jde o řídký plyn. Funkcionál představuje velikost síly, která působí na těleso, jehož tvar je dán rovnicí $y = u(x)$.

$$\mathcal{F}(u) = 4\pi\varrho v^2 \int_0^a [u'(x)]^3\, u(x)\, dx$$

za podmínek

$$u(0) = 0, \qquad u(a) = R,$$

kde a, R jsou dané kladné konstanty, ϱ je hustota plynu a v je rychlost plynu vzhledem k tělesu.

Řešení je tvaru

$$u(x) = R\left(\frac{x}{a}\right)^{3/4}.$$

Slabým minimem funkcionálu (12) na množině

$$\mathcal{M} = \left\{u \in C^1([a,b]) :\, u(a) = A, u(b) = B\right\}$$

nazveme funkci $u_0 \in \mathcal{M}$ tak, že platí

$$\mathcal{F}(u_0) \leq \mathcal{F}(u)$$

pro každé $u \in \mathcal{M}$.

Příklad 1. Nyní ukážeme příklad Lagrangiánu, který je polynom - tedy analytická funkce a minimum příslušného funkcionálu patří do prostoru $C^1([-1,1])$, ale minimum není třídy C^2. Tedy ani pěkné chování Lagrangiánu nezaručí, že slabé minimum je automaticky klasické minimum. Funkce

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-1,0], \\ x^2 & x \in (0,1] \end{cases}$$

je třídy $C^1([-1,1])$, která je jediným minimem funkcionálu

$$\mathcal{F}(u) = \int_{-1}^{1} u^2(x)\left[2x - u'(x)\right]^2\, dx$$

s podmínkami $u(-1) = 0$ a $u(1) = 1$. Je zřejmé, že funkce u není třídy C^2.

Příklad 2 (*Eulerův paradox*). Situace je dokonce komplikovanější. Existuje Lagrangián, který je polynom - tedy analytický a minimum příslušného funkcionálu s pevnými okrajovými podmínkami leží v třídě lipšicovských funkcí, ale není třídy $C^1([0,1])$, a tedy ani funkce třídy $C^2([0,1])$.

Je vidět, že infimum funkcionálu

$$\mathcal{F}(u) = \int_{0}^{1} \left[(u'(x))^2 - 1\right]^2\, dx$$

na množině $\mathcal{C} = \left\{C^1([0,1]) :\, u(0) = u(1) = 0\right\}$ je 0, ale tato hodnota nemůže být dosažena v prostoru $\mathcal{C}$.

Nicméně existuje nekonečně mnoho pilovitých funkcí na $[0,1]$ splňujících podmínky $u(0) = u(1) = 0$ a nabývajících hodnoty 0 pro funkcionál $\mathcal{F}$. Skutečně každá lipšicovská funkce u splňující $u'(x) = \pm 1$ skoro všude je ta správná.

Poznámka 1. Tyto příklady ukazují, že prostory C^1, nebo C^2 nemusí být přirozenými třídami pro řešení variačních problémů. Je vidět, že problém zde vzniklý je v tom, v jakém funkčním prostoru hledat minimum daného funkcionálu. Problém s "*lomeným minimem*" nemá žádný umělý původ, ale vyskytuje se zcela přirozeně v aplikacích. Např. plachtění proti větru. Námořník musí křižovat a mění směr plachtění mezi dvěma nejlepšími úhly, aby využil vítr co nejlépe.

Řekneme, že funkcionál (12) má v bodě $u \in W^{1,2}((a,b))$ zobecněné minimum, jestliže funkce u je minimem na množině

$$\mathcal{N} = \left\{ u \in W^{1,2}((a,b)) : \, u(a) = A, u(b) = B \right\}.$$

Příklad 3 (*Lavrentěvův jev*). Tento příklad ukazuje, že je nutný opatrný výběr prostoru ve kterém hledáme minimum daného funkcionálu. Uvažujme funkcionál

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 [x - u(x)]^2 \, [u'(x)]^6 \; dx.$$

Označme

$$\mathcal{M}_1 = \left\{ u \in C^{0,1}((0,1));\, u(0) = 0, u(1) = 1 \right\}$$
$$\mathcal{M}_2 = \left\{ u \in W^{1,1}((0,1)) : \, u(0) = 0, u(1) = 1 \right\}.$$

Pak

$$\inf_{u \in \mathcal{M}_1} \mathcal{F}(u) \geq c > 0 = \inf_{u \in \mathcal{M}_2} \mathcal{F}(u)$$

a navíc minimum $\mathcal{F}$ na $\mathcal{M}_2$ nastává pro funkci $u(x) = \sqrt[3]{x}$.

Poznámka 3. Je nutno poznamenat, že jestliže použijeme metodu konečných prvků (vybereme po částech afinní funkce, které patří do prostoru $C^{0,1}([a,b])$), nebudeme schopni určit minimum funkcionálu takového, jaký je uveden výše.

Příklad 4. Lze ukázat, že funkcionál

$$\mathcal{F}(u) = \int_{-1}^1 x^2 \, [u'(x)]^2 \; dx$$

nemá na množině

$$\mathcal{M} = \left\{ u \in C^1([-1,1]) : \, u(-1) = -1, u(1) = 1 \right\}$$

ani na množině

$$\mathcal{N} = \left\{ u \in W^{1,2}((-1,1)) : \, u(-1) = -1, u(1) = 1 \right\}$$

minimum.

3.2 Základní věty o regularitě zobecněného minima

Budeme předpokládat, že Lagrangián f je spojitá funkce na $[a,b] \times \mathbb{R}^2$, která splňuje následující růstové podmínky

$$|z|^2 - c(M) \leq f(x,v,z) \leq c(M) + \lambda(M)|z|^2 \tag{13}$$

pro každé $x \in [a,b]$, $|v| \leq M$ a $z \in \mathbb{R}$.

Označme

$$\mathcal{N} = \{u \in W^{1,2}((a,b)) : \, u(a) = A, u(b) = B\}.$$

Věta 1. *Nechť Lagrangián f splňuje podmínky (13) a nechť funkce u je zobecněné minimum funkcionálu $\mathcal{F}$ na množině $\mathcal{N}$. Potom $u \in C^{0,\alpha}([a,b])$.*

Jestliže budeme o Lagrangiánu vědět více, dostaneme silnější výsledek. Budeme předpokládat, že

$$0 < \nu(M) \leq f''_{zz}(x,v,z) \leq L(M) \tag{14}$$

pro každé $x \in [a,b]$, $|v| \leq M$ a $z \in \mathbb{R}$ a dále nechť existuje ohraničená, spojitá, konkávní, neklesající funkce ω na $[0,\infty)$, $\omega(0) = 0$ a $\omega(t) \leq A\, t^\beta$ $(0 < \beta \leq 1/2)$ na pravém okolí bodu 0 tak, že platí

$$|f(x,v,z) - f(y,w,z)| \leq \left(1 + |z|^2\right) \omega\left(|x-y|^2 + |v-w|^2\right) \tag{15}$$

pro každé x, $y \in [a,b]$, v, w, $z \in \mathbb{R}$.

Věta 2. *Předpokládejme, že Lagrangián f splňuje podmínky (13), (14), (15) a nechť funkce u je zobecněné minimum funkcionálu $\mathcal{F}$ na množině $\mathcal{N}$. Potom $u \in C^{1,\alpha}([a,b])$ pro každé $0 < \alpha < 1$.*

Nechť existuje neklesající funkce $c(\cdot) > 0$ na $[0,\infty)$ tak, že pro každé $M > 0$, $x \in [a,b]$, $|v| \leq M$ a $z \in \mathbb{R}$ platí

$$|f'_v(x,v,z)|\,, \, |f'_z(x,v,z)| \leq c(M)\,(1 + |z|)\ . \tag{16}$$

Věta 3. *Předpokládejme, že Lagrangián f splňuje podmínky (13) (14), (16) a dále nechť funkce u je zobecněné minimum funkcionálu $\mathcal{F}$ na množině $\mathcal{N}$. Potom $u \in C^2([a,b])$.*

Z jistými modifikacemi lze předešlé věty formulovat v případě, že uvažujeme vícedimenzionální úlohu, tj. $n > 1$.

4 NĚKTERÉ APLIKACE TEORIE REGULARITY

4.1 Využití výsledků teorie regularity pro numerické řešení diferenciálních rovnic

Uvažujme nelineární diferenciální rovnici v divergentním tvaru (viz (8))

$$L(u) = -\frac{d}{dx}\left[a_1\left(x, u(x), u'(x)\right)\right] + a_0\left(x, u(x), u'(x)\right) = 0 \tag{17}$$

s homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami

$$u(0) = u(1) = 0, \tag{18}$$

kde a_1, a_0 jsou spojité funkce na $[0,1]\times\mathbb{R}^2$, které splňují následující růstové podmínky

$$|a_1(x,v,p)| \le C(1+|v|+|p|) \qquad |a_0(x,v,p)| \le C(1+|v|+|p|) \tag{19}$$

pro každé $x\in[0,1]$, každé v, $p\in\mathbb{R}$ a navíc nechť $a_1\in C^2((a,b)\times\mathbb{R}^2)$, $a_0\in C^1(\mathbb{R}^2)$. Dále předpokládejme, že příslušné parciální derivace funkcí a_0, resp. a_1 jsou omezeny stejnou konstantou C (viz (19)) na množině $\mathbb{R}^2$ resp. $(a,b)\times\mathbb{R}^2$ a je splněna následující podmínka

$$\begin{aligned}\nu\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right) &\le \frac{\partial a_1(x,v,p)}{\partial p}\xi_1^2 + \left(\frac{\partial a_1(x,v,p)}{\partial v} + \frac{\partial a_0(x,v,p)}{\partial p}\right)\xi_1\xi_2 \\ &+ \frac{\partial a_0(x,v,p)}{\partial v}\xi_2^2 \le \mu\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right)\end{aligned} \tag{20}$$

pro každé ξ_1, $\xi_2\in\mathbb{R}$ a každé $(x,v,p)\in(a,b)\times\mathbb{R}^2$, kde $\mu\ge\nu>0$ jsou dané konstanty.

Operátor L, který splňuje podmínky (19) a (20) se nazývá operátor s *omezenými nelinearitami.*

Pro řešení úlohy (17), (18) uvažujme následující iterační proces

$$\begin{aligned}u_{n+1}''(x) - u_{n+1}(x) &= u_n''(x) - u_n(x) - \varepsilon L\left(u_n(x)\right), \quad n=0,1,2,\dots \\ u_n(0) &= u_n(1) = 0,\end{aligned} \tag{21}$$

kde $\varepsilon>0$ je daná konstanta.

Věta 1. *Nechť jsou splněny předpoklady (19), (20) a iterační posloupnost* $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ *vytvořená předpisem (21) splňuje nerovnost*

$$\|u_{n+1}-u_n\|^2_{W_0^{1,2}((0,1))} \le (1-C\varepsilon)\,\|u_n-u_{n-1}\|^2_{W_0^{1,2}((0,1))} \qquad n=0,1,2,\dots \tag{22}$$

Pak itereční posloupnost $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ *konverguje v prostoru* $W^{2,2}((0,1))$ *k řešení* $u \in W^{2,2}((0,1))$ *problému (17), (18) pro libovolnou volbu počáteční aproximace* $u_0 \in W^{2,2}((0,1))$ *a platí následující odhad*

$$\|u_{n+1} - u_n\|^2_{W_0^{1,2}((0,1))} \leq C_1\, n^4 e^{-C_2 n}\,, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{23}$$

kde C_1, $C_2 > 0$ *jsou konstanty.*

4.2 Regularita řešení diferenciálních rovnic a superkonvergence metody konečných prvků

Uvažujme lineární diferenciální rovnici v divergentním tvaru

$$-\frac{d}{dx}\left[a_1(x)u'(x)\right] + a_0(x)u(x) = f(x) \tag{24}$$

$$u(0) = u(1) = 0,$$

kde $a_1 > 0$, $a_0 > 0$ a f jsou hladké funkce na intervalu $[0,1]$. Řešení u se aproximuje pomocí spojitých a po částech polynomiálních funkcí.

Při použití metody konečných prvků pro řešení problému (24) bylo ukázáno, že pro $h \to 0$ ($h = 1/(n+1)$) a $x_i = ih$ platí

$$\max_i |u(x_i) - u_h(x_i)| = \mathcal{O}(h^{2k})$$

je-li $u \in C^{k+1}([0,1])$, zatímco

$$\max_{x\in[0,1]} |u(x) - u_h(x)| = \mathcal{O}(h^{k+1})$$

je optimální globální odhad, který nelze obecně zlepšit. Pro $k \geq 2$ je tedy rychlost konvergence v uzlových bodech x_i mnohem větší než na celém intervalu $[0,1]$. Tento jev se nazývá *superkonvergence*. Vyšší přesnost přibližného řešení při použití superkonvergenčních technik má celou řadu praktických aplikací (viz [5]).

Z předešlého je tedy vidět, že k superkonvergenci je potřebná hladkost, neboli *regularita* řešení u.

Literatura

[1] Acquistapace P. *On BMO regularity for linear elliptic systems.* Ann. Mat. pura ed appl., 161, (1992) 231-269.

[2] Campanato S. Sistemi ellittici in forma divergenza. Regolarita all'interno. Quaderni Scuola Norm. Sup. Pisa, Pisa 1980.

[3] Campanato S. *Hölder continuity of the solutions of some non-linear elliptic systems.* Adv. Math., 48, (1983) 16-43.

[4] Campanato S. *A maximum principle for non linear non-linear elliptic systems: Boundary fundamental estimates.* Advances Math., 66, (1987) 293-317.

[5] Brandts J., Křížek M. *Třicet let od objevu superkonvergence metody konečných prvků.* Pokroky matematiky fyziky & astronomie, 48,4 JČMF Praha (2003) 288-293.

[6] Daněček J. Regularita slabých řešení nelineárních eliptických systémů. Thesis, Matematicko-fyzikální fakulta UK Praha, (1984).

[7] Daněček J. *Regularity for nonlinear elliptic systems.* Comment. Math. Univ. Carolinae, 27,4 (1986) 755-764.

[8] Daněček J. *On the regularity of weak solutions to nonlinear elliptic systems of second order.* Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen, Bd. 9(6) (1990) 535-544.

[9] Daněček J. *On the* $\mathcal{L}^{2,n}-$ *regularity of the gradient of weak solution to the nonlinear elliptic systems.* Comment. Math. Univ. Carolinae, 37,3)(1996) 523-536.

[10] Daněček, J. *The interior BMO - regularity for a weak solution of a nonlinear second order elliptic systems.* Nonlinear differ. equ. appl., 9 (2002) 385-396.

[11] Daněček J., Nikodým M. *The example of a nonlinear second order elliptic systems in three dimension.* Comment. Math. Univ. Carolinae, 45,3 (2004) 431-442.

[12] Daněček J., Viszus E. *A note on regular points for solutions of nonlinear elliptic systems.* Archivum math., 32,2 (1996) 105-116.

[13] Daněček J., Viszus E. $L^{2,\lambda}$ *- regularity for nonlinear elliptic systems of second order.* In Applied Nonlinear Analysis (A.Sequeira, H.B. da Veiga, J.H.Videman, eds.) Kluwer Academic/Plenum Publishers New York, (1999) 30-40.

[14] Daněček J., Viszus E. *Regularity of minima of variational integrals.* Math. Slovaca, 49,3 (1999) 345-356.

[15] Daněček J., Viszus E. *A note on regularity for nonlinear elliptic systems.* Archivum math., 6(3) (2000) 229-237.

[16] Daněček J., Viszus E. $L^{2,\Phi}$ *- regularity for nonlinear elliptic systems of second order.* Electron. J. Diff. Eqns., 20 (2002) 1-13.

[17] Daněček J., Viszus E. $\mathcal{L}_\Phi$ *- regularity for nonlinear elliptic systems of second order.* Bolletino U.M.I., 8(6-B) (2003) 39-48.

[18] Daněček, J., John O., Stará, J.: *The interior* $C^{1,\gamma}$ *- regularity for a weak solution of nonlinear second order elliptic systems.* Math. Nachr., 276, (2004) 47-56.

[19] Giaquinta M. Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems. Annals of Mathematics Studied N.105, Princenton university press, Princeton, (1983).

[20] Giaquinta M. Introduction to regularity theory for nonlinear elliptic systems. Lecture in Math., Birkäuser, Basel (1993).

[21] Giaquinta M., Nečas J. *On the regularity of weak solutions to nonlinear elliptic systems.* Jour.Reine Angew.Math., 316 (1981) 140-159.

[22] Giusti E. *Metodi diretti nel calcolo delle variazioni.* Unione Matematica Italiana, Bologna (1994).

[23] Giusti E., Modica G. *A note one regular points for solutions of elliptic systems.* Manuscripta mathematica, 29 (1979) 417-426.

[24] John O., Stará J.: *On the regularity of weak solutions to parabolic systems in two spatial dimensions.* Commun. Partial Diff. Eq., 23(7&8) (1998) 1159-1170.

[25] Koševel A.I. *Reguljarnost rešenij kvazilinejnych elliptičeskich sistem.* Uspechi Mat. Nauk, 23,4 (1978) 3-49.

[26] Koševel A.I. Reguljarnosť rešenij elliptičeskich uravněnij i sistěm. Nauka, Moskva, (1986).

[27] Koshelev, A.I. Regularity problem for quasilinear elliptic and parabolic system. Lecture Notes in Mathematics 1614, Springer-Verlag Heidelberg (1995).

[28] Koshelev A.I., Chelkak S.I. Regularity of solutions of quasilinear elliptic systems. Teubner-Texte, 77, Leipzig, (1985).

[29] Meier M. *Liouville theorems for nondiagonal elliptic systems in arbitrary dimensions.* Mathematiche Zeitschrift, 176 (1981) 123-133.

[30] Nečas J. *Example of an irregular solution to a nonlinear elliptic systems with analytic coefficients and conditions for regularity.* Theory of Nonlinear Operators, Proceeding of an international summer school held at Berlin 1975, Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften der DDR, Abt. mathematik (1977) 197-206.

[31] Nečas J. Introduction to the theory of nonlinear elliptic equations. Teubner-Texte zur Mathematik, Band 52, Leipzig (1983).

[32] Nečas J. *On singularities of solutions to nonlinear elliptic systems of partial differential equations.* Proc.Symp.Pure Math., 46,2 (1986) 219-228.

[33] Nečas J., Šverák L. *On regularity of solutions of nonlinear parabolic systems.* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 18 (1991) 1-11.

[34] Šverák, V., Yan, X. *A singular minimizer of smooth strongly convex functional in three dimensions.* Calc. Var. Differ. Eq., (2002).

[35] Šverák V., Yan, X. *Non - Lipschitz minimizers of smooth strongly convex functional.* Proc. Math. Acad. Sc. USA, 99 (2002).

Abstract

The paper presents various conditions on the coefficients of nonlinear systems of partial differential equations guaranteeing BMO-regularity and Hölder continuity of the gradient of any weak solution to such systems. This information would essentially contribute to the state of knowledge concerning the regularity of weak solutions to the systems of partial differential equations of both elliptic and parabolic type and the regularity of weak minima of variational integrals.