

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
Fakulta strojního inženýrství
Ústav fyzikálního inženýrství

RNDr. Jiří Petráček, Dr.

**Modelování optických vlnovodných struktur
metodou sešívání vidů**

**Modelling of optical waveguide structures using
mode matching method**

Zkrácená verze habilitační práce



Brno 2005

KLÍČOVÁ SLOVA

fotonické krystaly, integrovaná optika, metoda sešívání vidů, optické vlnovody, rozklad do vlastních vidů, šíření světla

KEY WORDS

eigenmode expansion, integrated optics, light propagation, mode matching method, optical waveguides, photonic crystals

Habilitační práce je uložena v Areálové knihovně FSI VUT v Brně.

© Jiří Petráček, 2005

ISBN 80-214-2852-X

ISSN 1213-418X

Obsah

Představení autora	4
Úvod	5
1 Výchozí vztahy a předpoklady	5
2 Jednorozměrná struktura	6
2.1 Základní vztahy	6
2.2 Metoda přenosové matice	7
2.3 Určování vytékajících vidů	9
2.4 Metoda S -matice	10
3 Modelování vývoje pole	10
3.1 Rozklad pole v úseku m	12
3.2 Sešívání vidů	12
3.3 Metoda S -matice	13
3.4 Vrstvy s komplexní tloušťkou	14
3.5 Blochovy vidy	16
3.6 Modelování vlnovodu s braggovskou mřížkou	16
3.7 Modelování fotonických krystalů	17
4 Vlastní vidy	25
4.1 Rozklad pole v úseku m	25
4.2 Formulace problému vlastních hodnot	26
4.3 Porovnání metod	27
Závěr	27
Reference	28
Abstract	32

Představení autora

Jiří Petráček se narodil 6. 10. 1964 v Chrudimi. Po absolvování studia fyziky pevných látek na Přírodovědecké fakultě Masarykovy Univerzity v Brně (dříve Univerzita J. E. Purkyně) (1988) krátce pracoval v Tesle Brno na oddělení metrologie. Od roku 1988 je zaměstnán na Vysokém učení technickém v Brně na Ústavu fyzikálního inženýrství Fakulty strojního inženýrství nejprve jako výzkumný pracovník a od r. 1994 jako odborný asistent.

V letech 1989-1991 se věnoval výzkumu optických metod pro měření povrchové drsnosti.

V letech 1990-1996 byl doktorandem v distančním postgraduálním studiu v oboru fyzikální inženýrství – optika a zabýval se teoretickým popisem samoorganizované generace druhé harmonické v optických vláknech. V tomto období se také začal zajímat o numerické modelování optických jevů.

V posledních letech se odborný zájem J. Petráčka soustřeďuje zejména na výzkum rigorózních metod pro modelování šíření světla ve fotonických prvcích, aplikaci těchto metod pro studium optických vlnovodů, fotonických krystalů a dalších fotonických prvků; širší odborný zájem pak na optoelektroniku, teorii optických vlnovodů, nelineární optiku a aplikaci výpočetních metod ve fyzice.

J. Petráček je autorem nebo spoluautorem více než 20 původních publikací. Byl řešitelem několika grantů podporovaných z domácích i zahraničních zdrojů (GAČR, COST, KON-TAKT).

Během svého pedagogického působení přednášel předměty “Optoelektronika a integrovaná optika” a “Fyzika II”. Kromě toho vyučoval ve cvičení v základním kurzu fyziky, počítačové fyziky a teorie elektromagnetického pole.

Úvod

Důležitými nástroji při vývoji fotonických vlnovodných prvků jsou výpočetní metody, které umožňují předpovědět vlastnosti prvku bez nutnosti výroby. Jednou z často používaných metod je metoda sešívání vidů (MMM, mode matching method), původně používaná v mikrovláknové technice [1]. Princip MMM je založen na jednoduché úvaze vhodné pro většinu fotonických prvků: Analyzovaný prvek rozdělíme na uniformní oblasti (úseky), ve kterých umíme nalézt řešení Maxwellových rovnic. Toto řešení je dáno pomocí lineární kombinace vlastních vidů vlnovodu, jehož omezením by vznikl daný úsek. Celkové řešení pak získáme pomocí “sešívání vidů”, tj. pospojováním řešení v jednotlivých oblastech.

Porovnáme-li různé metody modelování (např. MMM, metodu konečných diferencí, metodu konečných prvků) z hlediska přesnosti výpočtu, je obvykle MMM považována za referenční [2].

Připomeňme, že metoda konečných diferencí a metoda konečných prvků využívají diskretizaci řešených rovnic. Jejich výhodou je obdržení maticového problému (lineární problém vlastních hodnot a vektorů v případě určování vlastních vidů), který lze poměrně snadno řešit pomocí dostupných knihovnických funkcí. Nevýhodou je závislost výsledku na volbě sítě: k získání přesných výsledků je nutné používat kvalitní adaptivní generaci sítě, a to i v průběhu výpočtu. Obvykle tedy výpočet několikrát opakujeme a přitom iterativně upravujeme síť podle charakteru dosaženého řešení.

Naproti tomu situace u MMM vypadá přesně opačně: Protože nepoužíváme diskretizaci, je v případě běžných struktur její aplikace přímočará, avšak vede k řešení nelineárního problému.

Předložená habilitační práce se zabývá použitím MMM pro modelování vývoje pole ve dvojrozměrných vlnovodných strukturách a pro hledání vlastních vidů vlnovodů s dvojrozměrným průřezem a klade si následující cíle:

- Shrnout teoretické základy MMM a společná východiska různých formulací tak, aby tato práce mohla být využita jako referenční příručka při případném dalším rozvoji metody.
- Prezentovat vlastní zlepšené formulace, které zvyšují efektivitu a přesnost metody, a umožňují aplikaci metody na širší množinu prvků (např. fotonické krystaly, pasivní vlnovody), než bylo dříve obvyklé.
- Porovnat přesnost vlastních formulací s jinými metodami a nezávisle vyvinutými programy.
- Demonstrovat vlastní vytvořené počítačové programy.

1 Výchozí vztahy a předpoklady

V celé práci předpokládáme lineární izotropní nemagnetické prostředí bez zdrojů, které je popsáno prostorovým rozložením relativní permitivity $\varepsilon(x, y, z)$. Maxwellovy rovnice řešíme ve frekvenční oblasti s konvencí $\exp(i\omega t)$ pro časovou závislost polí. Hodnoty ε jsou tedy komplexní a závisí na použité optické frekvenci ω .

Pro numerické výpočty je výhodné převést rovnice do bezrozměrné formy. Proto budeme používat bezrozměrné kartézské souřadnice (x, y, z) definované vztahem

$$(x, y, z) = \frac{2\pi}{\lambda}(X, Y, Z) = \frac{\omega}{c}(X, Y, Z), \quad (1)$$

kde λ je vlnová délka záření ve vakuu, (X, Y, Z) jsou běžné souřadnice měřené ve stejných jednotkách jako λ a c je rychlost světla. Ze téhož důvodu budeme magnetické pole popisovat vektorem $c\vec{B}$ (\vec{B} je magnetická indukce), který má stejný rozměr jako intenzita elektrického pole \vec{E} . Výjimky z této konvence tvoří některé numerické údaje, u kterých však budou vždy uvedeny jednotky, takže nemůže dojít k záměně.

Uvažujme prostředí, jehož permitivita se nemění podél určitého (tzv. podélného) směru, např. podél osy z . Platí tedy

$$\varepsilon = \varepsilon(x, y). \quad (2)$$

Protože ε je invariantní vůči posunutí podél z , lze řešení Maxwellových rovnic vyjádřit ve tvaru

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(x, y, z) \\ c\vec{B}(x, y, z) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_\nu(x, y) \\ c\vec{B}_\nu(x, y) \end{array} \right\} \exp(-i\beta_\nu z). \quad (3)$$

Tato řešení se nazývají vlastní vidy nebo mody, vektorové funkce $\vec{E}_\nu(x, y)$ a $c\vec{B}_\nu(x, y)$ popisují příčná rozložení polí daného vidu, β_ν je jeho konstanta šíření a abstraktní symbol ν označuje jednotlivé vidy.

Předpokládejme, že podmínka (2) platí pouze na intervalu (z_1, z_2) . Při použití metody sešívání vidů rozkládáme obecné řešení Maxwellových rovnic na tomto intervalu do vlastních vidů, tj. vyjádříme jej jako lineární kombinaci řešení (3) [3].

Protože v této práci budeme k rozkladu používat vlastní vidy jednorozměrné struktury, popíšeme nejprve vlastnosti a způsoby hledání těchto vidů.

2 Jednorozměrná struktura

V této kapitole se budeme zabývat prostředím, jehož relativní permitivita závisí pouze na souřadnici y

$$\varepsilon = \varepsilon(y). \quad (4)$$

2.1 Základní vztahy

Vlastní vidy nalezneme pomocí řešení problému vlastních funkcí a hodnot [4]

$$\left[\eta_p(y) \varphi'_{pk}(y) \right]' + \eta_p(y) \varepsilon(y) \varphi_{pk}(y) = \beta_{pk}^2 \eta_p(y) \varphi_{pk}(y). \quad (5)$$

Čárka značí derivaci funkce jedné proměnné, namísto abstraktního symbolu ν používáme dva indexy: index $p \in \{h, e\}$ rozlišuje polarizaci řešení (TE nebo TM vidy), index k čísluje vidy v rámci dané polarizace,

$$\eta_p(y) \equiv \begin{cases} 1 & p = h, \\ 1/\varepsilon(y) & p = e, \end{cases} \quad (6)$$

a φ_{pk} popisuje příčné rozložení vidových polí: $\varphi_{hk} \equiv E_x$ pro TE vidy, $\varphi_{ek} \equiv cB_x$ pro TM vidy.

K řešení problému (5) je nutné znát okrajové podmínky v místech $y = y_{\min}$ a $y = y_{\max}$, přitom $\varphi_{pk}(y)$ hledáme na intervalu $\langle y_{\min}, y_{\max} \rangle$. Struktura může být z libovolné strany *uzavřená* pomocí dokonale elektricky vodivých stěn nebo dokonale magneticky vodivých stěn; na příslušných okrajích jsou pak nulové tečné složky elektrického resp. magnetického pole. Pokud je struktura *otevřená*, tj. $y_{\min} \rightarrow -\infty$ nebo $y_{\max} \rightarrow \infty$, požadujeme, aby libovolná komponenta pole byla omezená v $-\infty$ nebo ∞ . Samozřejmě můžeme použít kombinace všech

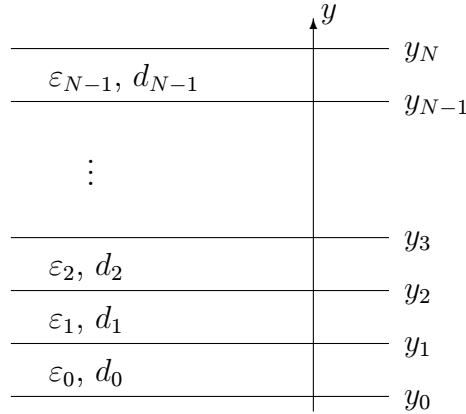
uvedených podmínek. Pro periodickou strukturu $\varepsilon(y) = \varepsilon(y + a)$ zvolíme $y_{\max} - y_{\min} = a$ a podle Floquetova-Blochova teorému (viz. např. [5]) hledáme řešení splňující podmínku

$$\begin{Bmatrix} \vec{E}(y_{\max}) \\ c\vec{B}(y_{\max}) \end{Bmatrix} = \gamma \begin{Bmatrix} \vec{E}(y_{\min}) \\ c\vec{B}(y_{\min}) \end{Bmatrix} \equiv \exp(-ik_{\text{FB}}a) \begin{Bmatrix} \vec{E}(y_{\min}) \\ c\vec{B}(y_{\min}) \end{Bmatrix}. \quad (7)$$

Konstanta k_{FB} je známa jako Blochovo (Floquetovo) vlnové číslo.

2.2 Metoda přenosové matice

Metoda přenosové matice (též charakteristické matice) je velmi užitečný nástroj k řešení rovnice (5) pro vrstevnaté prostředí [6, 7].



Obrázek 1: Vrstevnatá struktura. Strukturu tvoří N vrstev, které rozlišíme pomocí indexu n . ε_n je relativní permitivita a $d_n = y_{n+1} - y_n$ je tloušťka vrstvy n , přitom $0 \leq n < N$. y_n jsou polohy rozhraní mezi vrstvami, $0 < n < N$. y_0 a y_N jsou hranice výpočetního okna, které jsou zvoleny v y_{\min} resp. y_{\max} pokud je struktura periodická nebo na příslušném okraji uzavřená, v opačném případě jsou polohy y_0 nebo y_N libovolné uvnitř krajních vrstev.

Struktura prostředí a definice použitých symbolů jsou na obr. 1. Pro přehlednost v následujících vztazích vynecháme indexy p a k . Uvnitř vrstvy n lze řešení rovnice (5) vyjádřit (bez újmy na obecnosti zvolme $y_n = 0$),

$$\varphi_n(y) = A_n \cos(\alpha_n y) + \frac{B_n}{\alpha_n} \sin(\alpha_n y) \quad (8)$$

$$= \bar{A}_n \cos[\alpha_n (d_n - y)] - \frac{\bar{B}_n}{\alpha_n} \sin[\alpha_n (d_n - y)], \quad (9)$$

kde

$$\alpha_n = \sqrt{\varepsilon_n - \beta^2}. \quad (10)$$

S využitím podmínek spojitosti pole na rozhraních mezi vrstvami (pro TE vidy jsou spojitě φ a φ' , pro TM vidy φ a φ'/ε) definujeme sloupcový vektor

$$\mathbf{V}_n \equiv \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{n-1} \\ \bar{B}_{n-1} \eta_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

\mathbf{V}_0 je definováno pouze pomocí prostředního členu, podobně \mathbf{V}_N je definováno pouze pomocí členu na pravé straně. Použitím (8) pro výpočet $\varphi_n(y_{n+1})$ a $\varphi'_n(y_{n+1})$ obdržíme vztahy

$$\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{M}_n \mathbf{V}_n, \quad (12)$$

kde

$$\mathbf{M}_n \equiv \begin{pmatrix} \cos(\alpha_n d_n) & \sin(\alpha_n d_n) / (\alpha_n \eta_n) \\ -\alpha_n \eta_n \sin(\alpha_n d_n) & \cos(\alpha_n d_n) \end{pmatrix} \quad (13)$$

je tzv. přenosová matice vrstvy. Rekurzivním použitím (12) můžeme obdržet relace mezi libovolnými dvojicemi vektorů \mathbf{V}_n , přitom příslušná přenosová matice vznikne součinem matic typu (13). Zejména je důležitý vztah

$$\mathbf{V}_N = \mathbf{M}\mathbf{V}_0, \quad (14)$$

kde

$$\mathbf{M} \equiv \prod_{n=0}^{N-1} \mathbf{M}_n \quad (15)$$

je přenosová matice vrstevnaté struktury.

Známe-li tedy β^2 a \mathbf{V}_n pro určité n , můžeme jednoduše vypočítat ostatní \mathbf{V}_n pro všechna zbývající n . Naopak, využijeme-li okrajové podmínky v $y = y_{\min}$ a $y = y_{\max}$ (tj. podmínky kladené na \mathbf{V}_0 a \mathbf{V}_{N-1}), můžeme pomocí výše uvedených vztahů obdržet implicitní disperzní rovnici pro neznámou β^2 a po jejím vyřešení určit všechna \mathbf{V}_n [6, 7, 8, 9, 10].

Z numerického hlediska je vhodná formulace disperzní rovnice podle [8, 9, 10]. Zvolme určité rozhraní, označme je indexem j a porovnejme na něm pole vypočtená z obou okrajových podmínek. Kvůli numerické stabilitě je vhodné vybrat rozhraní, na kterém předpokládáme nejsilnější pole, tj. např. u vrstvy s největší $\text{Re}(\varepsilon_n)$. Disperzní rovnice má tvar

$$\Delta(\beta^2) \equiv A_j^+ B_j^- \eta_j - A_j^- B_j^+ \eta_j \equiv (\mathbf{V}_j^-)^T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{V}_j^+ = 0, \quad (16)$$

kde \mathbf{V}_j^+ je vypočteno z podmínek platných pro \mathbf{V}_0 a \mathbf{V}_j^- je vypočteno z \mathbf{V}_{N-1} .

Pokud jsou všechna ε_n reálná, lze k řešení disperzní rovnice použít běžné numerické postupy. V případě komplexní permitivity je však řešení výrazně složitější, protože $\Delta(\beta^2)$ je komplexní funkcí komplexní proměnné. Běžné postupy nelze použít, protože vyžadují relativně dobrý počáteční odhad kořene, navíc není zajištěno, že byly nalezeny všechny kořeny. K řešení problému jsme vyzkoušeli dva postupy.

První postup je rigorózní technika, která využívá analytičnost funkce $\Delta(\beta^2)$ a je schopná nalézt všechny její nuly v zadané oblasti [11, 12]. Podle [12] budeme tuto techniku označovat jako APM (argument principle method). Bohužel efektivní počítačová implementace APM není jednoduchá, protože je nutné numericky integrovat podél uzavřené křivky v komplexní rovině, adaptivně tuto křivku měnit a numericky hledat kořeny polynomů.

Druhý způsob řešení je tzv. metoda posunování kořenů: nejprve položíme imaginární část permitivity všech vrstev rovnu nule a hledáme reálné kořeny disperzní rovnice. Po nalezení požadovaného počtu kořenů postupně zvyšujeme imaginární část permitivity vrstev, což způsobí pohyb nul uvnitř komplexní roviny. Nové polohy nul lze snadno nalézt pomocí běžných numerických metod (v programu používáme Newtonovu-Raphsonovu metodu podle [13]), protože jejich původní polohy využijeme jako dobrý počáteční odhad. Nevýhodou metody je, že nezaručuje nalezení všech kořenů v dané oblasti komplexní roviny a menší rychlost. Dále metoda selže, pokud nastane degenerace posunovaného kořene, k tomuto jevu však dochází v praxi zřídka [9].

Poznamenejme, že při použití otevřených okrajových podmínek je disperzní funkce $\Delta(\beta^2)$ čtyřznačná, což odpovídá čtyřem kombinacím volby znaménka α_n v obou krajních vrstvách [14, 15] a způsobuje výrazné komplikace obou metod. Obvyklý postup spočívající ve zvolení vhodných znamének totiž není možné obecně použít, protože jak při integraci v komplexní

rovině, tak při posunování kořenů můžeme spojitě procházet oblastmi s různými znaménky α_0 a α_{N-1} . Problém lze řešit pomocí vhodného zobrazení, které rozvine příslušnou Riemannovu plochu [14, 15, 16, 17].

Numerickými experimenty jsme zjistili, že obě metody hledání komplexních kořenů poskytují stejné výsledky v případě běžných vlnovodných struktur. Pokud však, jak uvidíme v následujících kapitolách, používáme diskrétní spektrum uzavřeného vlnovodu k rozkladu řešení Maxwellových rovnic, dáváme přednost druhé metodě na základě následujícího zdůvodnění: V případě reálné permitivity používáme k rozkladu prvních L vidů seřazených podle klesající velikosti β^2 . Pokud se permitivita stane komplexní, museli bychom u APM přemýšlet nad volbou oblasti, která by obsahovala L kořenů, spojených s “nejvhodnějšími” vidy pro rozklad. Použijeme-li metodu posunování kořenů, tento problém odpadne za přirozeného předpokladu, že kořeny odpovídající “nejvhodnějším” vidům se spojitě posunují v komplexní rovině.

2.3 Určování vytékajících vidů

Vytékající vidy (leaky modes) jsou diskrétní řešení problému (5) pro otevřené vlnovody používané k aproximaci spojitého spektra zářivých vidů [3, 18, 19, 20] a lze je interpretovat jako “vedené vidy pod mezní frekvencí” [21]. Konstanty šíření těchto vidů jsou komplexní a jejich imaginární část popisuje ztráty způsobené vyzařováním. Připomeňme však, že vytékající vidy *nepatří* do spektra vlastních vidů, protože nesplňují požadované okrajové podmínky (omezenost v $\pm\infty$).

Při určování konstant šíření vytékajících vidů musíme hledat kořeny komplexní funkce v komplexní rovině a opět se setkáváme s problémy zmíněnými v předchozím odstavci. I když komplexní nuly můžeme hledat pomocí APM, [11, 12], její složitost vede k častému použití aproximativních metod [18, 22, 23], jejichž přesnost a užitečnost je omezená. V tomto odstavci popíšeme velmi jednoduchou techniku pro přesné určení konstant šíření, která vychází z myšlenky posunování kořenů [24].

Uvažujme pole vidů v krajních vrstvách otevřeného vlnovodu. Pole vedených vidů zde klesá směrem ven z vlnovodu a hustota toku energie v příčném směru je nulová. Naproti tomu vytékající vidy vyzařují energii ven z vlnovodu. Na horním okraji tedy energie teče ve směru $+y$. Pomocí Poyntingova vektoru \vec{S}

$$S_y \sim \operatorname{Re} \left(\vec{E} \times c\vec{B}^* \right)_y = -\operatorname{Re} (i\varphi\varphi'^*\eta^*)$$

a předpokladu $\varphi \sim \exp(\alpha_{N-1}y)$ [21] obdržíme podmínku

$$\operatorname{Re}(\alpha_{N-1}\eta_{N-1}) > 0. \quad (17)$$

Podobně obdržíme na spodním okraji

$$\operatorname{Re}(\alpha_0\eta_0) < 0. \quad (18)$$

Zvolme y_0 a y_N podle obr. 1 libovolně v krajních vrstvách. Okrajové podmínky pro otevřenou strukturu můžeme také napsat ve tvaru

$$\mathbf{V}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ iw\alpha_0\eta_0 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$\mathbf{V}_N = \begin{pmatrix} 1 \\ -iw\alpha_{N-1}\eta_{N-1} \end{pmatrix}, \quad (20)$$

kde $w = 1$. Okrajové podmínky pro uzavřenou strukturu vyplývající z nulovosti φ' můžeme vyjádřit stejnými vztahy, zvolíme-li $w = 0$.

Hodnotu disperzní funkce $\Delta(\beta^2)$ tedy lze vypočítat podle (16) ze znalosti V_0 a V_N pro oba typy okrajových podmínek. Pomocí parametru w vyjádříme disperzní rovnici v jednotné formě

$$\Delta(w, \beta^2) = 0. \quad (21)$$

K hledání vytékajících vidů můžeme opět použít metodu posunování kořenů: Nejprve nalezeneme řešení (21) pro $w = 0$. Poté postupně zvětšujeme w až dosáhneme $w = 1$ a přitom sledujeme pohyb kořenů v komplexní rovině.

Poznamenejme však, že kromě vedených a vytékajících vidů existují další nefyzikální řešení rovnice (21) pro $w = 1$. Proto ne všechny vidy uzavřené struktury se při posunování kořenů změňjí ve vytékající vidy (nebo zůstanou vedenými) a pro konvergenci metody musíme vždy používat zobrazení, které rozvine příslušnou Riemannovu plochu. Charakter jednotlivých řešení pak určíme podle znamének α_0 a α_{N-1} .

Popsaná technika hledání vytékajících vidů je stejně efektivní jako APM, nepoužívá žádné aproximace a její počítačová implementace je velmi snadná.

2.4 Metoda S -matice

Metoda přenosové matice může být numericky nestabilní v případech, kdy struktura obsahuje tlusté vrstvy. Pokud totiž je imaginární část argumentů trigonometrických funkcí velká, platí $\cos(iz) \approx \exp(z)/2 \approx i \sin(iz)$, matice (13) se stane výpočetně singulární a její determinant se blíží nule (správně se má rovnat 1). Nestabilita souvisí se vztahy (8) a (9), ve kterých sčítáme exponenciálně rostoucí a klesající funkce. Pokud pak na počítači počítáme malé číslo pomocí rozdílu dvou takových součtů (tj. dvou velkých čísel), dojde u výsledku ke ztrátě platných číslic. V rámci metody přenosové matice dochází k akumulaci velikostí exponenciálních funkcí, a tedy nestabilitu nelze odstranit umělým zvětšením počtu vrstev.

Protože se stejný problém vyskytuje v mnoha úlohách z oblasti šíření a rozptylu vln, byla navržena řada řešení, jejichž přehled lze nalézt v [25]. Jednou z možností je použití matice rozptylu (S -matice) známé z teorie rozptylu a z teorie mikrovlnných obvodů.

V habilitační práci je popsána původní aplikace metody S -matice k modelování jednorozměrné vrstevnaté struktury a numericky stabilní formulace disperzní rovnice. Tato technika je však poněkud složitější a pomalejší než metoda přenosové matice. Proto ji používáme pouze v těch případech, kdy metoda přenosové matice selže.

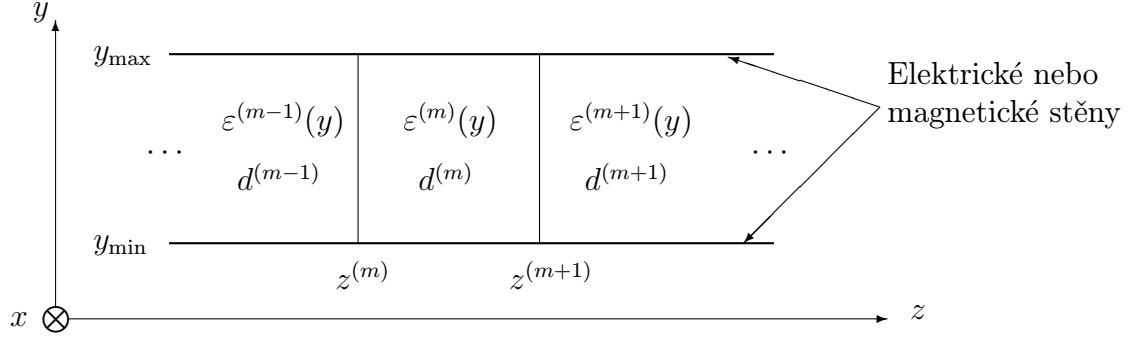
3 Modelování vývoje pole

V této kapitole se budeme zabývat modelováním dvojrozměrné vlnovodné struktury,

$$\varepsilon = \varepsilon(y, z). \quad (22)$$

Podle obrázku 2 předpokládáme, že strukturu lze rozdělit do M podélně homogenních úseků (relativní permitivita každého úseku závisí pouze na y), které na sebe vzájemně navazují. Každý úsek si můžeme představit jako část jednorozměrné struktury a nalézt její vlastní TE a TM vidy (tzv. lokální vidy). Řešení problému pak obdržíme ve dvou krocích [26]:

- Celkové pole v každém úseku rozložíme do lokálních vidů



Obrázek 2: Model dvojrozměrné vlnovodné struktury. Strukturu tvoří M podélně homogenních úseků oddělených svíslými úsečkami v místech $z^{(m)}$, $0 < m < M$. $\varepsilon^{(m)}(y)$ je rozložení relativní permitivity v úseku m a $d^{(m)} = z^{(m+1)} - z^{(m)}$ je jeho délka, přitom $0 \leq m < M$. $z^{(0)}$ a $z^{(M)}$ jsou hranice výpočetního okna ve směru z (na obrázku nejsou znázorněny), ve směru y použijeme uzavřené okrajové podmínky podél přímek $y = y_{\min}$ a $y = y_{\max}$.

- “Sešívání vidů”. Na rozhraních mezi sousedními sekcemi použijeme podmínky spojitosti pro tečné složky vektorů pole a tak obdržíme rovnice pro koeficienty rozkladu.

Přitom použijeme následující aproximace:

1. Otevřenou strukturu uzavřeme pomocí elektrických nebo magnetických stěn, tak aby se spojitá část spektra lokálních vidů změnila na diskrétní.
2. Prostorové rozlišení metody v příčném směru závisí na počtu použitých lokálních vidů. Požadujeme-li v určité oblasti rozlišení δy , pak vzhledem k (8) je nutné vzít v úvahu všechny lokální vidy, pro které platí $\alpha < \pi/\delta y$ [2].
3. Křivočará rozhraní popíšeme pomocí schodové aproximace.

První aproximace se nevztahuje na struktury, které jsou uzavřené nebo periodické v příčném směru, kdy je spektrum lokálních vidů přirozeně diskrétní. V případě modelování otevřených struktur však dochází k odrazu záření okrajů výpočetního okna, kde jsou uměle umístěny elektrické nebo magnetické stěny, což může úplně znehodnotit výsledek výpočtu. K řešení problému použijeme techniku vrstev s komplexní tloušťkou, která bude popsána v odstavci 3.4. Významnou výhodou této techniky je, že přirozeně zapadá do formalismu MMM a nevyžaduje výraznější úpravy výpočetních programů.

Poznamenejme, že existují i jiné způsoby, jak reprezentovat spojitou část spektra otevřené struktury: pomocí vytékajících vidů [19], pomocí přímého vzorkování [27], přitom polohy diskrétních vzorků mohou být adaptivně měněny tak, aby se dosáhlo požadované přesnosti výpočtu [28, 29], nebo použitím tzv. průhledných okrajových podmínek [30] (TBC - transparent boundary condition), které byly původně navrženy pro metodu BPM [31]. Tyto metody však mají určité nevýhody, pro které je zde nepoužíváme: Parazitní odrazy záření od okrajů výpočetního okna vznikají i v důsledku přímého vzorkování, navíc při tvorbě výpočetního programu je nutné odlišit vzorky zářivých vidů od vedených vidů. Použití adaptivních technik je relativně složité a není kompenzováno zvýšením efektivity metody. Tyto závěry vyplývají z vlastních numerických experimentů se zmíněnými metodami. Použití vytékajících vidů je vhodné pouze pro některé typy struktur [20] a účinnost TBC (tj. minimalizace parazitních odrazů) je menší ve srovnání s technikou vrstev s komplexní tloušťkou [30].

Aproximace 2 a 3 většinou nezpůsobují velké komplikace, protože výsledky modelování obvykle rychle konvergují se zvyšujícím se počtem použitých lokálních vidů, resp. schodů.

3.1 Rozklad pole v úseku m

Protože nás zajímá šíření vln podél struktury, existují dvě navzájem nezávislá řešení Maxwellových rovnic polarizovaná jako TE nebo TM. Pro přehlednost tedy v této kapitole vynecháme index p , např. napíšeme-li φ_k , znamená to φ_{hk} pokud hledáme TE řešení, resp. φ_{ek} pro TM řešení.

Protože následující vztahy se týkají pouze určitého úseku, není nutné v tomto odstavci používat horní index (m). Předpokládejme, že jsme určili L nejnižších lokálních vidů tohoto úseku, tj. známe řešení problému (5) $\varphi_k(y)$ a β_k pro $0 \leq k < L$. Tyto vidy použijeme k rozkladu hledaného pole. Pro TE polarizaci platí

$$E_x(y, z) = \sum_k u_k(z) \varphi_k(y), \quad (23)$$

$$cB_y(y, z) = i \sum_k u'_k(z) \varphi_k(y), \quad (24)$$

$$cB_z(y, z) = -i \sum_k u_k(z) \varphi'_k(y). \quad (25)$$

Pro TM polarizaci platí

$$cB_x(y, z) = \sum_k u_k(z) \varphi_k(y), \quad (26)$$

$$E_y(y, z) = -i\eta(y) \sum_k u'_k(z) \varphi_k(y), \quad (27)$$

$$E_z(y, z) = i\eta(y) \sum_k u_k(z) \varphi'_k(y). \quad (28)$$

Bez újmy na obecnosti předpokládáme $z^{(m)} = 0$, pak $u_k(z)$ můžeme vyjádřit několika způsoby

$$u_k(z) = f_k \exp(-i\beta_k z) + b_k \exp(i\beta_k z) \quad (29)$$

$$= \bar{f}_k \exp[i\beta_k(d-z)] + \bar{b}_k \exp[-i\beta_k(d-z)] \quad (30)$$

$$= A_k \cos(\beta_k z) + \frac{B_k}{\beta_k} \sin(\beta_k z) \quad (31)$$

$$= \bar{A}_k \cos[\beta_k(d-z)] - \frac{\bar{B}_k}{\beta_k} \sin[\beta_k(d-z)]. \quad (32)$$

V dalším textu všechny veličiny charakteristické pro daný úsek označíme horním indexem (m).

3.2 Sešívání vidů

Ze spojitosti tečných složek polí na rozhraní $z^{(m+1)}$ a relací ortogonality pro vlastní funkce φ vyplývají následující vztahy

$$\bar{A}_l^{(m)} = \sum_k Q_{lk}^{(m,m+1)} A_k^{(m+1)}, \quad (33)$$

$$A_l^{(m+1)} = \sum_k Q_{lk}^{(m+1,m)} \bar{A}_k^{(m)}, \quad (34)$$

$$\bar{B}_l^{(m)} = \sum_k O_{lk}^{(m,m+1)} B_k^{(m+1)}, \quad (35)$$

$$B_l^{(m+1)} = \sum_k O_{lk}^{(m+1,m)} \bar{B}_k^{(m)}, \quad (36)$$

$$Q_{lk}^{(m,n)} \equiv \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \eta^{(m)} \varphi_l^{(m)} \varphi_k^{(n)} dy, \quad (37)$$

$$O_{lk}^{(m,n)} \equiv \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \eta^{(n)} \varphi_l^{(m)} \varphi_k^{(n)} dy. \quad (38)$$

Porovnáme-li (33) – (35) zjistíme, že

$$[O_{lk}^{(n,m)}]^{-1} = O_{lk}^{(m,n)} \equiv Q_{kl}^{(n,m)}, \quad (39)$$

$$[Q_{lk}^{(n,m)}]^{-1} = Q_{lk}^{(m,n)} \equiv O_{kl}^{(n,m)}. \quad (40)$$

Pro TE řešení navíc platí

$$Q_{lk}^{(m,n)} = O_{lk}^{(m,n)}, \quad (41)$$

$$O_{lk}^{(m,n)} = Q_{kl}^{(n,m)}. \quad (42)$$

Poznamenejme, že rovnice uvedené v tomto odstavci platí zcela přesně pouze pokud pro rozklad pole použijeme *všechny* lokální vidy. Ve výše uvedených sumách pak index k probíhá 0 až ∞ a dimenze matic O a Q je ∞ . Při numerickém výpočtu však používáme konečný počet vidů, a tedy je třeba určité opatrnosti; zejména to platí využíváme-li rovnice (39) a (40) (první znaménko rovnosti zleva, druhé je důsledkem definice) např. k výpočtu inverzní matice.

3.3 Metoda S -matice

Podobně jako v předchozí kapitole lze formulovat metodu přenosové matice, která sice je zajímavá z teoretického hlediska, avšak výpočetně nestabilní. Konstanty šíření β_k pro vidy vyšších řádů mají velkou imaginární část a při násobení přenosových matic by se akumulovaly chyby související se sčítáním exponenciálně rostoucí a klesající funkce. Jedná se opět o problém popsáný na začátku odstavce 2.4, zde je však závažnější, protože obvykle při výpočtu je nutné používat vidy vyšších řádů a navíc rozměr modelované struktury ve směru z bývá mnohonásobně větší než rozměr ve směru y .

K řešení lze v zásadě použít dva různé “maticové” formalismy označované v [25] jako metody S - nebo R -matice. Kromě toho existují další “nematicové” algoritmy, např. immitanční metoda [9] související s formalismem R -matice, nebo metody zmíněné v [25]. Zde slovem “maticový” myslíme tuto vlastnost metody: Podélné úseky modelované struktury lze popsat určitými “charakteristickými” maticemi, dimenze všech takových matic je stejná. Matice popisující celkovou strukturu vznikne pomocí násobení nebo jiné binární operace nad těmito maticemi. Dimenze matice struktury tedy nezávisí na počtu použitých úseků a je stejná jako dimenze jednotlivých charakteristických matic. Výhody maticových metod jsou zřejmé: Změnil-li se vlastnosti některého úseku, není nutné opakovat celý výpočet. Pokud se některé úseky opakují, lze výpočet značně urychlit, zejména to platí pro periodické struktury: programátoři vědí, že správný postup výpočtu např. x^4 není $xxxx$, ale $(x^2)^2$. (Poznamenejme však, že pro periodické struktury existuje alternativní způsob podstatného zefektivnění výpočtu – použití Blochových vidů [9, 32].)

Protože chceme využít tyto výhody a protože ze srovnání v [25] vyplývá, že metoda S -matice je rychlejší a stabilnější než metoda R -matice, použijeme zde formalismus S -matice.

Naše aplikace vychází z obecných principů popsaných v [25] a je obdobná formalismům použitým v [33, 34].

Definujme nejprve sloupcový vektor $f^{(m)} = \{f_k^{(m)}\}$, analogicky vektory $b^{(m)}$, $\bar{f}^{(m)}$, $\bar{b}^{(m)}$ a dále čtvercové diagonální matice

$$K^{(m)} = \{K_{kk}^{(m)}\} = \{i\beta_k^{(m)}\}, \quad (43)$$

$$P^{(m)}(d) = \exp(-K^{(m)}d). \quad (44)$$

Dimeze těchto vektorů a matic je L , ($k = 0 \dots L - 1$).

Amplitudy vidů, které vystupují ($b^{(m)}$, $\bar{f}^{(m)}$) z úseku m a amplitudy vidů, které do něj vstupují ($f^{(m)}$, $\bar{b}^{(m)}$) jsou vázány pomocí S -matice tohoto úseku

$$\begin{pmatrix} \bar{f}^{(m)} \\ b^{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{(m)}(d^{(m)}) & 0 \\ 0 & P^{(m)}(d^{(m)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{(m)} \\ \bar{b}^{(m)} \end{pmatrix} \equiv \mathbf{S}^{(m)} \begin{pmatrix} f^{(m)} \\ \bar{b}^{(m)} \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Všimněme si, že v této matici nevystupují exponenciálně rostoucí členy.

Pomocí vztahů (33)–(36) lze ukázat, že na rozhraní mezi úseky m a $m + 1$ platí

$$\begin{pmatrix} f^{(m+1)} \\ \bar{b}^{(m)} \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{(m,m+1)} \begin{pmatrix} \bar{f}^{(m)} \\ b^{(m+1)} \end{pmatrix}, \quad (46)$$

kde

$$\mathbf{S}^{(m,m+1)} \equiv \begin{pmatrix} 2(K^{(m)}D^{(+)-1})^T & -(D^{(-)}D^{(+)-1})^T \\ D^{(+)-1}D^{(-)} & 2D^{(+)-1}K^{(m+1)} \end{pmatrix}, \quad (47)$$

$$D^{(\pm)} \equiv O^{(m+1,m)}K^{(m)} \pm K^{(m+1)}Q^{(m+1,m)}. \quad (48)$$

Těmito vztahy definujeme S -matici $\mathbf{S}^{(m,m+1)}$ daného rozhraní.

Skládáním S -matic jednotlivých úseků a rozhraní můžeme vytvořit S -matici vyšetřované struktury

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^{(0)} \otimes \mathbf{S}^{(0,1)} \otimes \mathbf{S}^{(1)} \otimes \mathbf{S}^{(1,2)} \otimes \dots \otimes \mathbf{S}^{(M-2,M-1)} \otimes \mathbf{S}^{(M-1)}. \quad (49)$$

Operace skládání \otimes je definována v habilitační práci. Pro amplitudy vidů na levém a pravém okraji struktury pak platí

$$\begin{pmatrix} \bar{f}^{(M)} \\ b^{(0)} \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} f^{(0)} \\ \bar{b}^{(M)} \end{pmatrix}. \quad (50)$$

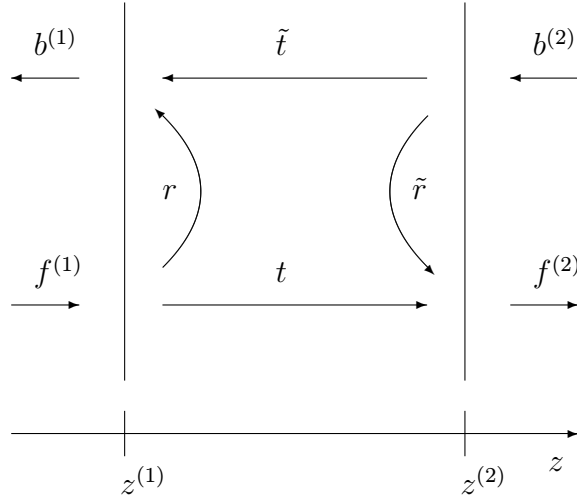
Obecně S -matice popisuje vztah mezi amplitudami vidů, které vstupují a vystupují z libovolné části vlnovodné struktury. S použitím označení podle obr. 3 ji definujeme vztahem

$$\begin{pmatrix} f^{(2)} \\ b^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & \tilde{r} \\ r & \tilde{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{(1)} \\ b^{(2)} \end{pmatrix} \equiv \mathbf{S} \begin{pmatrix} f^{(1)} \\ b^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Dimenze S -matice je $2L$ a t , r , \tilde{t} a \tilde{r} jsou čtvercové matice dimenze L .

3.4 Vrstvy s komplexní tloušťkou

Pokud modelujeme otevřenou strukturu, je nutné minimalizovat parazitní odrazy záření od uzavřených okrajů výpočetního okna. K tomuto účelu vložíme mezi modelovanou strukturu a okraj výpočetního okna vrstvu vytvořenou z umělého materiálu, která absorbuje záření



Obrázek 3: Znázornění prvků S -matice oblasti vymezené přímkami $z = z^{(1)}$ a $z = z^{(2)}$. Polohy obou přímek jsou libovolné za předpokladu $z^{(1)} \leq z^{(2)}$. $f^{(1)}$ a $b^{(1)}$ jsou komplexní amplitudy vidů šířících se ve směrech $+z$ a $-z$ v $z^{(1)}$, amplitudy $f^{(2)}$ a $b^{(2)}$ mají obdobný význam pro $z^{(2)}$. Matice t a r obsahují koeficienty vidové propustnosti a odrazivosti dané oblasti pro vidy vstupující do oblasti ve směru $+z$, \tilde{t} a \tilde{r} mají stejný význam pro vidy vstupující do oblasti ve směru $-z$.

a navíc nevykazuje žádné odrazy na svém okraji pro libovolnou vlnovou délku, úhel dopadu nebo polarizaci. Bylo navrženo několik způsobů, jak vytvořit takovou tzv. dokonale spojenou vrstvu (PML - perfectly matched layer) [35, 36, 37, 38]. Z našeho hlediska je výhodná technika založená na mapování souřadnic do komplexního prostoru [37]. Mapování nemění tvar Maxwellových rovnic, a tedy jej lze velmi snadno použít v metodě sešívání vidů [33, 30]. Podrobnější přehled a teorii lze nalézt v [39], zde pouze popíšeme způsob použití tohoto typu PML.

Připomeňme si obrázek 1. Pokud je některá z vrstev PML, znamená to, že její tloušťka d je komplexní číslo. Vztahy popisující řešení rovnice (5) zůstávají v platnosti, pouze hledané vlastní hodnoty β^2 se stanou komplexní i v případě reálné permitivity. K jejich určení použijeme zřejmou variantu techniky posouvání kořenů, ve které postupně měníme imaginární část d .

Pokud je index lomu PML stejný jako index lomu některé sousední vrstvy, nemůže na rozhraní PML-sousední vrstva docházet k odrazům. Vlna šířící se uvnitř PML

$$\exp(-i\alpha y) \tag{52}$$

bude absorbována, protože y je komplexní s imaginární částí

$$\text{Im}(y) = \frac{\text{Re}(y)}{\text{Re}(d)} \text{Im}(d),$$

přítom $\text{Re}(y)$ má význam běžné reálné polohy ve vrstvě. Poslední vztah je zvláštním případem obecného způsobu mapování běžné polohy do komplexní roviny [39]. Všimněme si však, že pokud pevně zvolíme komplexní tloušťku PML, vlastní hodnoty β^2 *vůbec nezávisí* na konkrétním způsobu mapování poloh uvnitř PML. Ve výrazech použitých při konstrukci disperzní funkce totiž vystupují pouze tloušťky vrstev.

3.5 Blochovy vidy

Metodu S -matice lze použít i k výpočtu Blochových vidů struktury, která je periodická podél osy z . Předpokládejme, že perioda má délku a , je popsána již známou maticí S , jejíž submatice jsou označeny jako ve vztahu (51) a amplitudy vidů na okrajích periody jako v (50).

Blochovy vidy jsou určeny podmínkou (7), kterou však nyní aplikujeme na osu z . Po několika úpravách obdržíme

$$\begin{pmatrix} t & \tilde{r} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{(0)} \\ \bar{b}^{(M)} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & \tilde{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{(0)} \\ \bar{b}^{(M)} \end{pmatrix}. \quad (53)$$

Tato rovnice představuje tzv. zobecněný problém vlastních hodnot a vektorů a lze ji snadno řešit pomocí běžných numerických metod. Blochův vid je pak charakterizován vlastní hodnotou γ , kterou můžeme použít k určení konstanty šíření tohoto vidu k_{FB} a příslušným vlastním vektorem

$$\begin{pmatrix} f^{(0)} \\ \bar{b}^{(M)} \end{pmatrix}, \quad (54)$$

který můžeme použít k výpočtu profilu pole.

Velmi často má perioda zrcadlovou symetrii. K určení S -matice periody pak stačí vypočítat S -matici symetrické části periody

$$S^{(\text{sym})} \equiv \begin{pmatrix} t^{(\text{sym})} & \tilde{r}^{(\text{sym})} \\ r^{(\text{sym})} & \tilde{t}^{(\text{sym})} \end{pmatrix}. \quad (55)$$

S -matici popisující druhou symetrickou část periody snadno určíme pomocí záměn $t^{(\text{sym})} \leftrightarrow \tilde{t}^{(\text{sym})}$ a $r^{(\text{sym})} \leftrightarrow \tilde{r}^{(\text{sym})}$. S -matice periody je pak dána

$$S \equiv \begin{pmatrix} t & \tilde{r} \\ r & \tilde{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{(\text{sym})} & \tilde{r}^{(\text{sym})} \\ r^{(\text{sym})} & \tilde{t}^{(\text{sym})} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \tilde{t}^{(\text{sym})} & r^{(\text{sym})} \\ \tilde{r}^{(\text{sym})} & t^{(\text{sym})} \end{pmatrix} \quad (56)$$

a přímým výpočtem lze ověřit, že pro její prvky platí $t = \tilde{t}$, $r = \tilde{r}$. Rovnice (53) se pak zjednoduší na tvar

$$\begin{pmatrix} t & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{(0)} \\ \bar{b}^{(M)} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{(0)} \\ \bar{b}^{(M)} \end{pmatrix}. \quad (57)$$

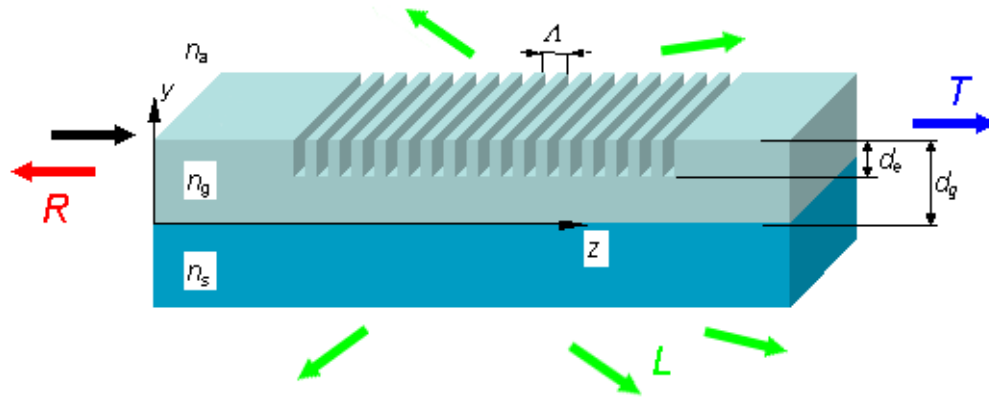
Je vidět, že ke každé vlastní hodnotě γ s příslušným vlastním vektorem (54) existuje vlastní hodnota γ^{-1} s příslušným vlastním vektorem

$$\begin{pmatrix} \bar{b}^{(M)} \\ f^{(0)} \end{pmatrix}. \quad (58)$$

V obecném případě lze dokázat obdobné tvrzení: Ke každému řešení problému (53) s vlastní hodnotou γ existuje řešení s vlastní hodnotou γ^{-1} .

3.6 Modelování vlnovodu s braggovskou mřížkou

V rámci pracovní skupiny 2 evropské akce COST 268 “Wavelength scale photonic components for telecommunications” byl mj. řešen úkol znázorněný na obrázku 4 týkající se studia spektrálních vlastností vlnovodu s hlubokou braggovskou mřížkou [40, 41, 42]. Zmíněná pracovní skupina se zabývala modelováním periodických a kvaziperiodických fotonických struktur a původním cílem zadání, které definoval J. Čtyroký, bylo porovnání různých numerických přístupů



Obrázek 4: Planární vrstevnatý vlnovod s braggovskou mřížkou. Do struktury vstupuje zleva základní vid planárního vlnovodu nesoucí jednotkový výkon (znázorněno černou šipkou). Úkolem je vypočítat výkon odražený R a prošlý mřížkou T vždy pro tentýž vid a dále výkonové ztráty $L = 1 - R - T$. Obrázek je převzat z [40] a mírně upraven.

a verifikace počítačových programů. Protože výsledky obdržené pomocí 6 nezávisle vyvinutých programů, které navíc vycházely ze 4 různých metod, vykazovaly velmi dobrý souhlas, byla struktura dále použita ke studiu ztrát způsobených vyzařováním.

Vlnovodná vrstva je vytvořena z Si_3N_4 a její tloušťka je $d_g = 500$ nm. Materiál substrátu je SiO_2 , superstrát je vzduch. Mřížku tvoří 20 pravoúhlých vrypů o hloubce d_e , která se mění v rozsahu od 125 nm do 750 nm. Hodnoty hloubky větší než 500 nm znamenají, že vrypy zasahují skrz vlnovodnou vrstvu až do substrátu. Perioda mřížky je 430 nm a šířky “zubů” a vrypů jsou totožné, tj. 215 nm. Parametry byly zvoleny tak, aby v případě mělké mřížky docházelo k braggovskému odrazu pro telekomunikační vlnovou délku $1,55 \mu\text{m}$.

Obrázek 5 ukazuje vypočtené spektrální závislosti pro tři různé hloubky vrypů. Charakteristiky jsou výrazně asymetrické. Odrazivost dosahuje téměř 100 % v případě mřížek s vrypy hlubšími než zhruba 375 nm a postupně klesá směrem do kratších vlnových délek při vzrůstajících ztrátách. V oblasti delších vlnových délek vykazují křivky oscilace, které jsou způsobeny interferencemi vln odražených od konců mřížky podobně jako v případě interference na tenké vrstvě. Tento jev je méně viditelný pro mělké mřížky (zde zastoupené případem $d_e=125$ nm), protože odrazivost jejich konců je slabší.

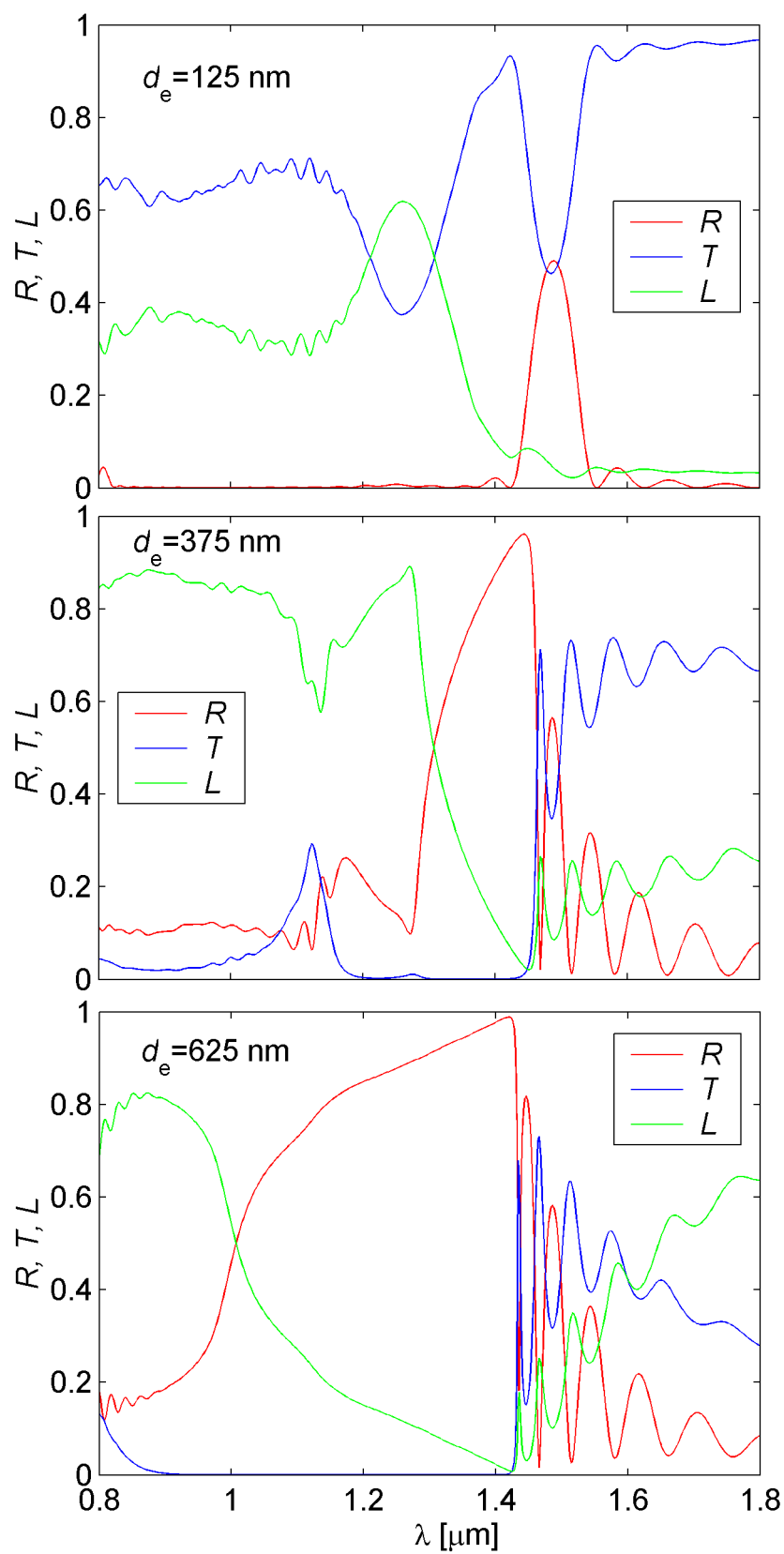
Jednou z diskutovaných otázek bylo, kam je vyzařován ztracený výkon. Proto je na obrázku 6 znázorněno rozložení Poyntingova vektoru pro vlnové délky, při kterých docházelo k největším ztrátám.

Důležitost PML pro modelování otevřené struktury je demonstrována na obrázku 7. Jsou zde porovnány spektrální závislosti ztrát L vypočtené s použitím PML (tloušťka substrátu $d_s = 6 - i0,2 \mu\text{m}$) a bez jejich použití ($d_s = 6 \mu\text{m}$). Je zřejmé, že PML efektivně potlačuje oscilace vzniklé v důsledku parazitních odrazů záření od spodního okraje výpočetního okna.

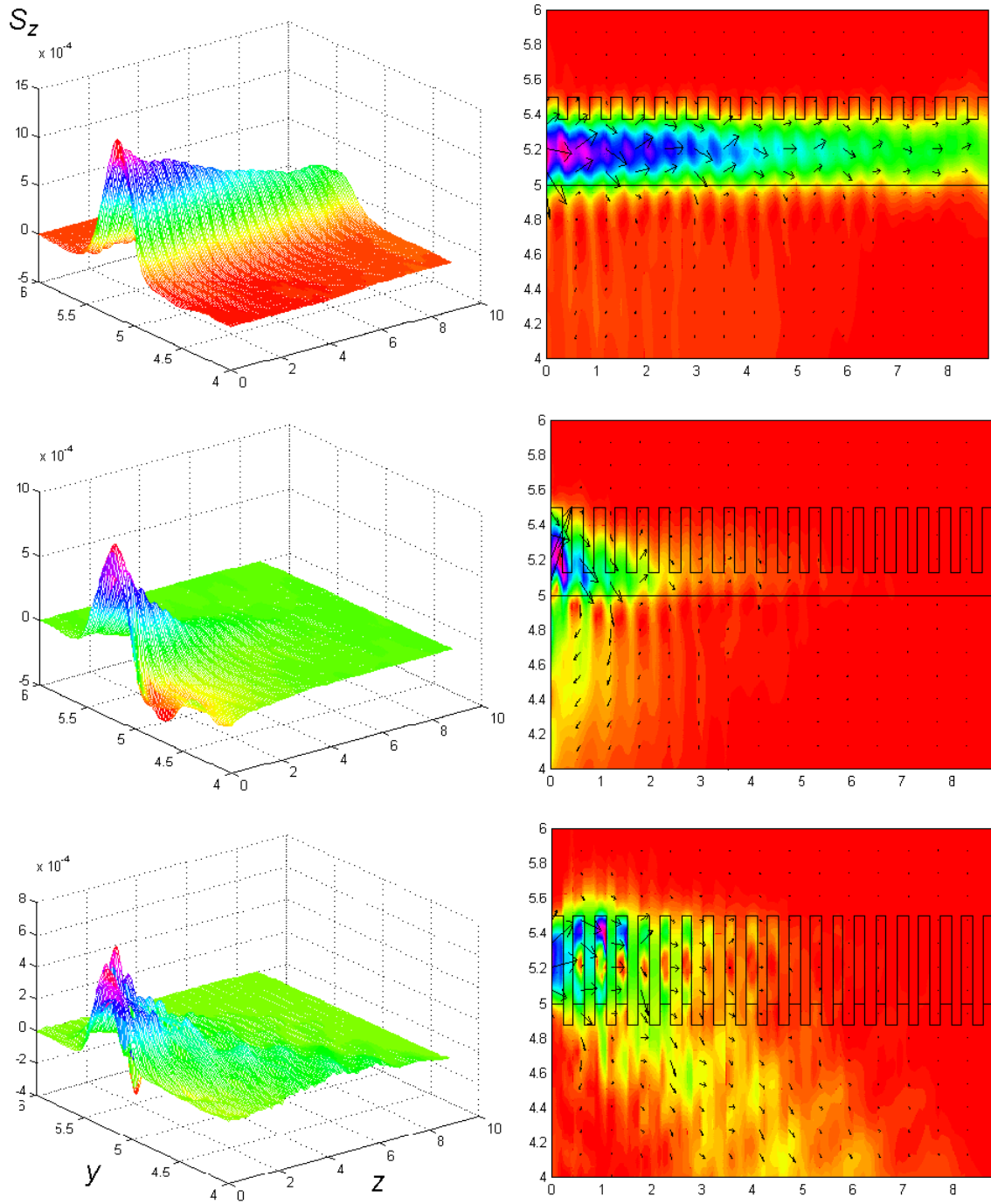
3.7 Modelování fotonických krystalů

Jedním z nejvíce vzrušujících odvětví současné optiky je výzkum fotonických krystalů a jejich použití v moderních fotonických prvcích [5].

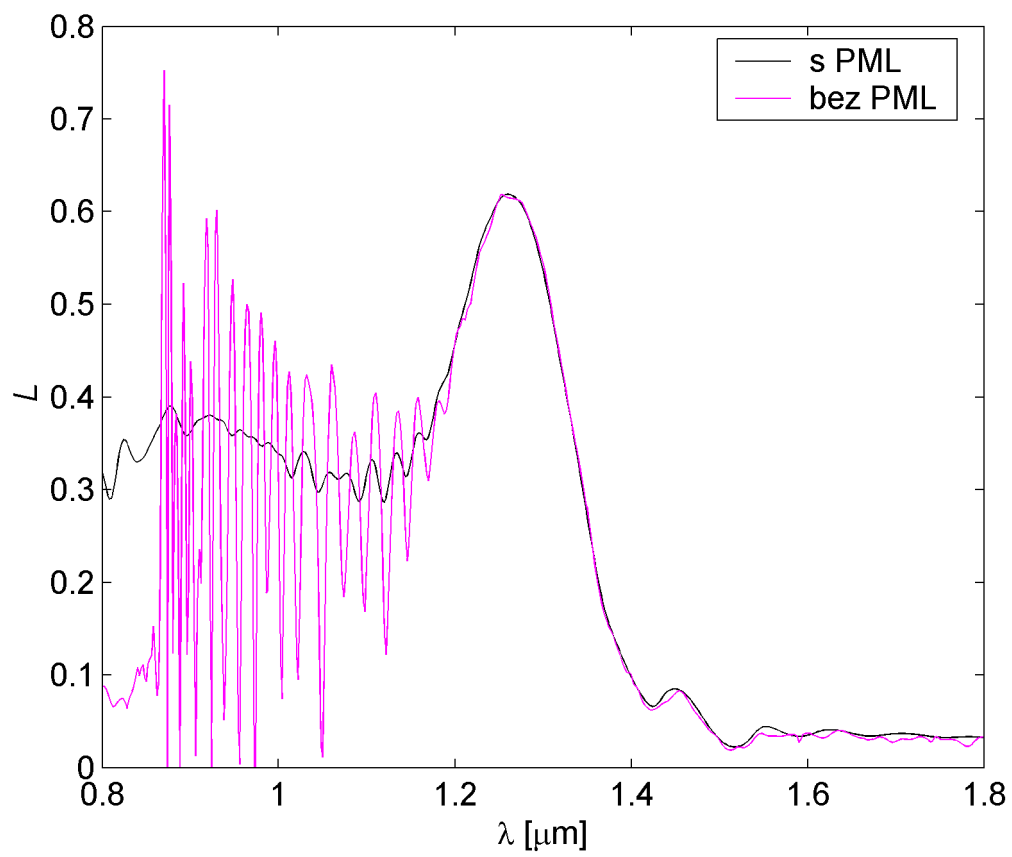
Fotonické krystaly jsou vytvořeny pomocí periodického uspořádání makroskopických dielektrických nebo kovových buněk, které interagují s procházejícím světlem analogickým způsobem jako konvenční krystalová mřížka s elektrony. Podstatnou vlastností fotonických krystalů



Obrázek 5: Spektrální závislosti výkonové odrazivosti R , propustnosti T a ztrát L pro tři různé hloubky vrypů d_e .



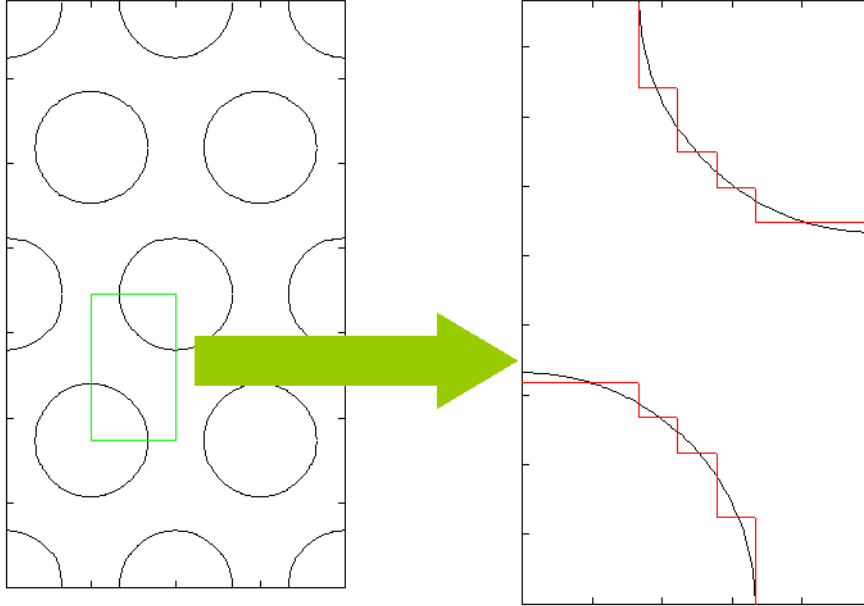
Obrázek 6: Rozložení Poyntingova vektoru \vec{S} uvnitř mřížek s různou hloubkou d_e pro vlnové délky odpovídající maximálním ztrátám. Levý sloupec ukazuje složku S_z v relativních jednotkách, v pravém sloupci je barevně znázorněn profil $|\vec{S}|$ a šipkami směr \vec{S} . Shora jsou ukázány profily pro $d_e=125$ nm a $\lambda = 1,26$ μm , $d_e=375$ nm a $\lambda = 1,26$ μm , $d_e=625$ nm a $\lambda = 0,88$ μm .



Obrázek 7: Ztráty v mělké mřížce s $d_e=125$ nm vypočtené s a bez použití PML.

je existence dovolených a zakázaných frekvenčních pásů (analogie energiových pásů a zakázaných pásů pro elektrony polovodičích). Poznamenejme, že braggovskou mřížku studovanou v předchozím odstavci, je možné považovat za jednorozměrný fotonický krystal.

Při modelování fotonických krystalů se většinou používá metoda založená na rozkladu pole do rovinných vln (PWM, plane wave method, např. [5]). Zde na dvou příkladech demonstrujeme aplikaci metody sešívání vidů podle [44].



Obrázek 8: Vlevo je ukázána část hexagonální mřížky a výpočetní okno (zelený rámeček), vpravo je znázorněn detail výpočetního okna a schodová aproximace křivočarého rozhraní (červeně). Orientace okna odpovídá modelování šíření vln ve směru Γ -K, tj. ve vodorovném směru.

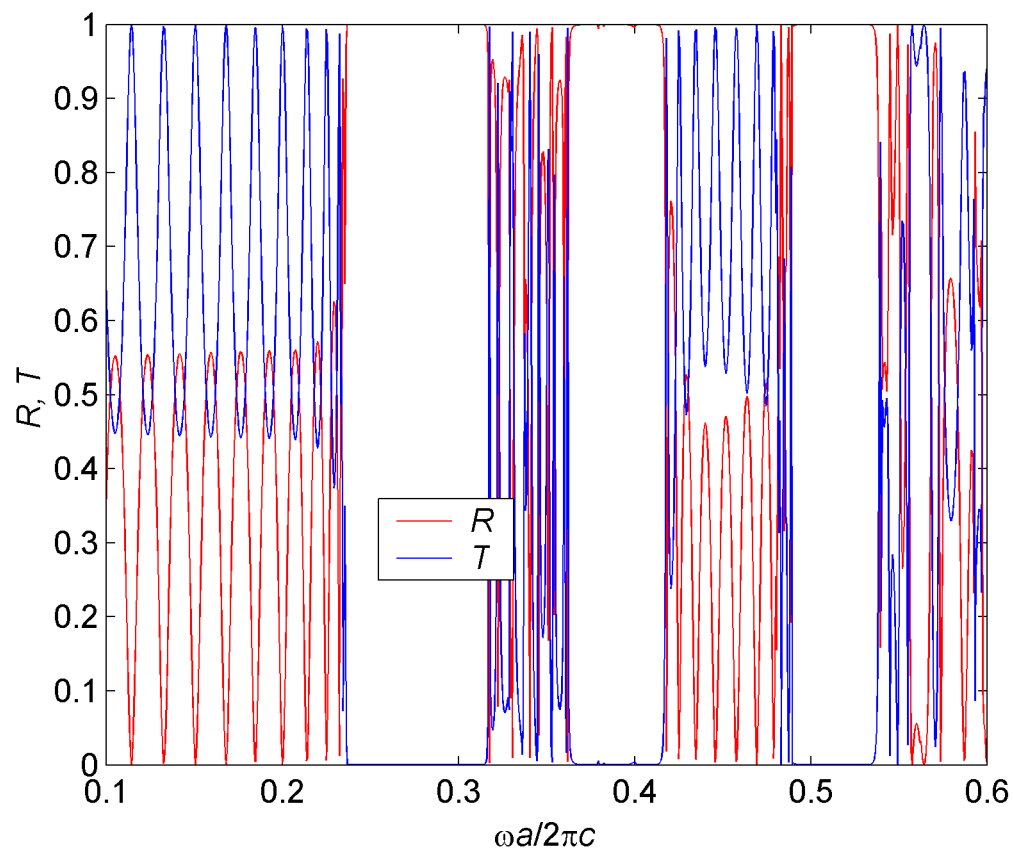
Jako první příklad uvažujme dvojrozměrný fotonický krystal vytvořený pomocí hexagonální mřížky dutých sloupců s kruhovým půdorysem umístěných v InP s relativní permitivitou 10,5. Krystal, výpočetní okno a schodová aproximace rozložení permitivity jsou znázorněny na obrázku 8.

Všimněme si, že okrajové podmínky omezující výpočetní okno ve svislém směru musí nahrazovat nekonečný krystal. Dále, pokud je celý krystal omezen ve vodorovném směru podobně jako na obr. 8 vlevo, stačí k výpočtu celkové S -matice krystalu pouze S -matice popisující výpočetní okno.

Obrázek 9 ukazuje spektrální závislosti výkonové odrazivosti R a propustnosti T pro rovinnou vlnu s TE polarizací (elektrické pole rovnoběžné s osou válců, v literatuře týkající se fotonických krystalů je však často označováno jako TM) dopadající na krystal ve směru Γ -K (vodorovný směr na obrázku 8). Krystal obsahuje 20 vrstev tyčí, tj. je omezen ve vodorovném směru na délku $10a$, kde a je mřížová konstanta. Před a za krystalem je vzduch. Faktor plnění (poměr plochy otvorů ku ploše celého krystalu) byl zvolen 0,4. Vlna dopadá kolmo na čelní plochu krystalu, jehož tvar je zřejmý z obrázků 10 nebo 11.

Ze spektrální závislosti T vyplývá existence tři zakázaných pásů (oblastí s $T = 0$) pro normované frekvence a/λ v intervalech

$$0,24 < a/\lambda < 0,32,$$

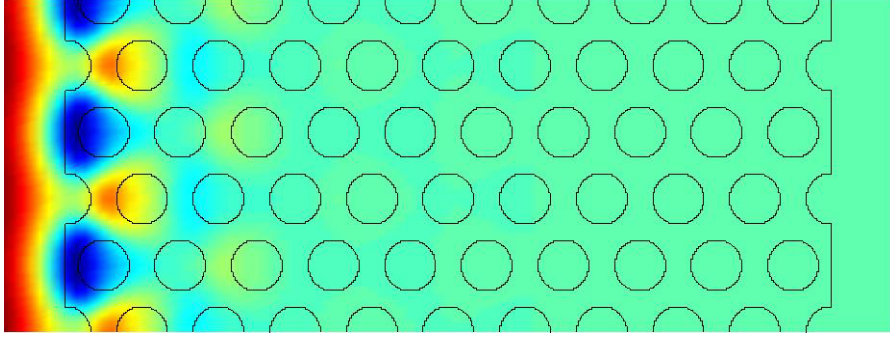


Obrázek 9: Spektrální závislosti výkonové odrazivosti R a propustnosti T pro hexagonální fotonický krystal. Na vodorovné ose je vynesena normovaná frekvence, totožná s veličinou a/λ (a i λ jsou ve stejných jednotkách).

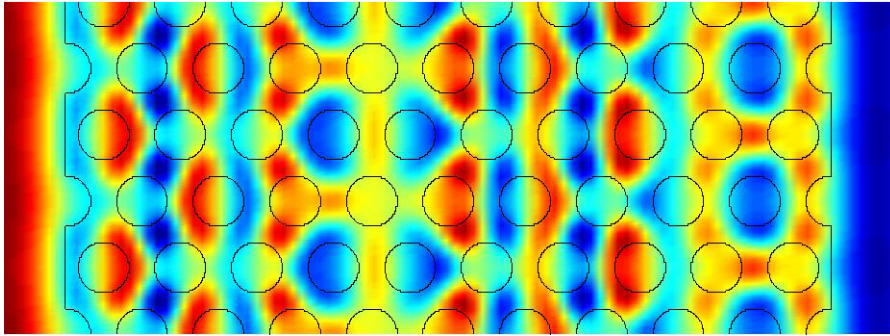
$$0,38 < a/\lambda < 0,42,$$

$$0,49 < a/\lambda < 0,54.$$

Obrázek 10 znázorňuje odpovídající profil elektrického pole pro frekvenci ve středu prvního zakázaného pásu, $a/\lambda = 0,280$. V tomto případě je pole evanescentní (ve vodorovném směru) a je znázorněno v okamžiku, kdy má největší amplitudu. Naopak profil elektrického pole pro frekvenci $a/\lambda = 0,351$, kdy je vysoká propustnost ($T=0,99$), je (pro určitý čas) znázorněn na obrázku 11.



Obrázek 10: Profil elektrického pole pro frekvenci uvnitř zakázaného pásu.



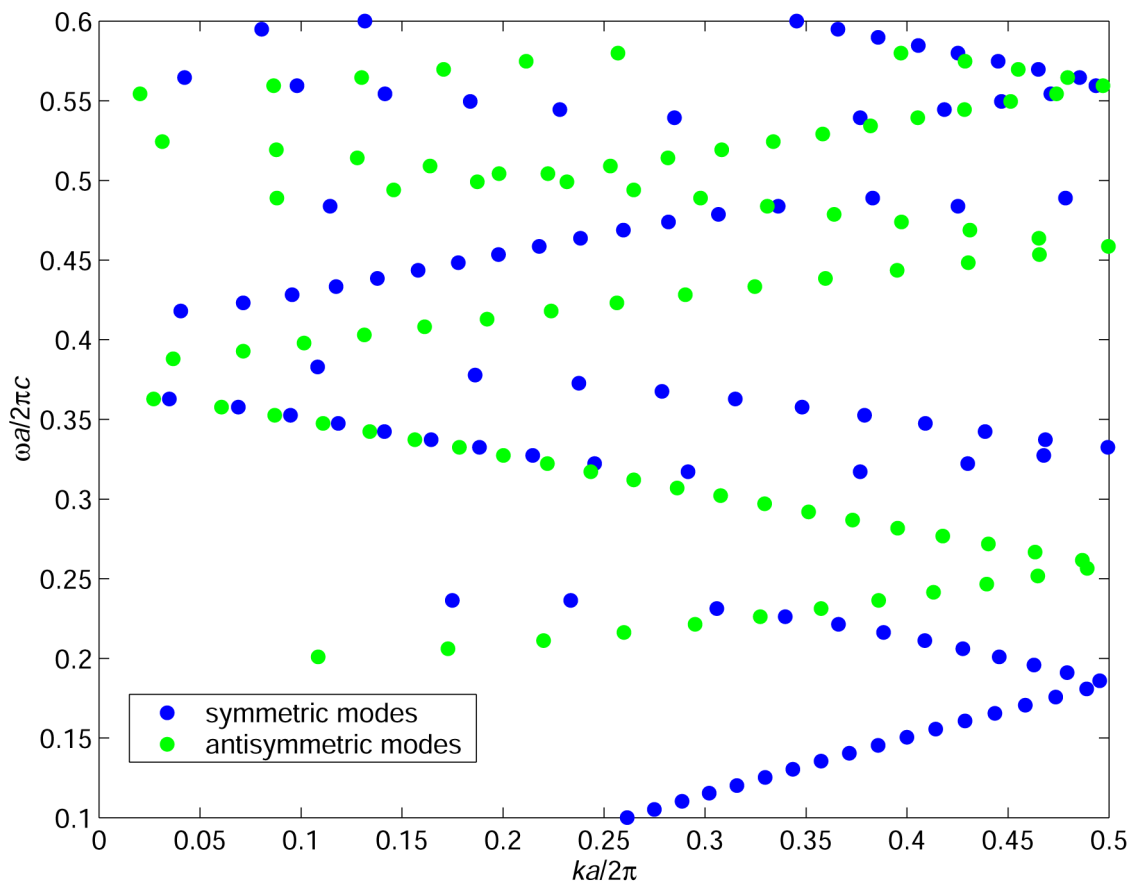
Obrázek 11: Profil elektrického pole pro frekvenci odpovídající vysoké hodnotě T .

Poznamenejme, že výpočet pro jiné orientace krystalu za předpokladu kolmého dopadu by probíhal analogicky.

Pásová struktura krystalu je znázorněna na obrázku 12. Všimněme si, že na rozdíl od PWM, kdy pro zvolenou hodnotu normované konstanty šíření Blochových vidů $k_{\text{FB}}a/2\pi$ hledáme všechny hodnoty normovaných frekvencí a/λ , metoda sešívání vidů postupuje opačně: pro danou frekvenci a/λ (svislá osa) řešíme problém (53) nebo (57) a nakonec určíme hodnoty $k_{\text{FB}}a/2\pi$ (vodorovná osa). V obrázku jsou obsaženy pouze konstanty šíření pro “šířící se” Blochovy vidy, tj. pro které platí $\text{Im}(k_{\text{FB}}) = 0$.

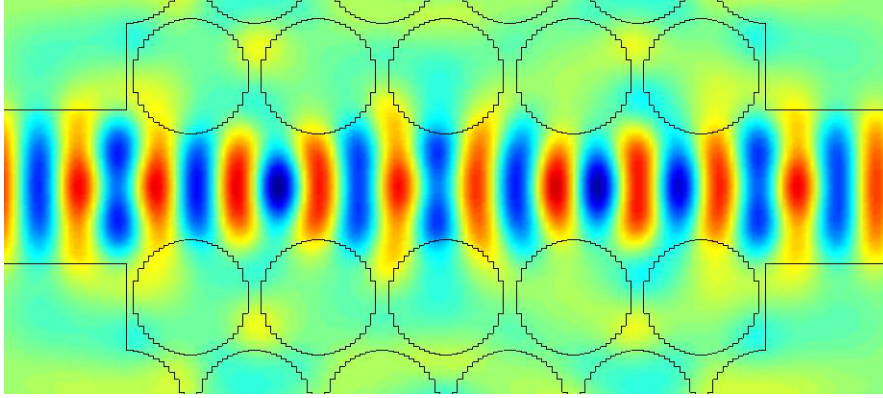
Jak bylo zmíněno, výpočet pro symetrické a antisymetrické vidy provedeme zvlášť, přitom je nutné vhodně zvolit podmínky na okrajích výpočetního okna ve svislém směru. Na obrázku jsou patrné tři zakázané pásy pro symetrické vidy, jejichž frekvence odpovídají již zmíněným oblastem.

Druhý příklad je simulace lineární poruchy v krystalu, která je vytvořena odstraněním jedné řady sloupků ve směru Γ -K. Krystal tvořen hexagonální mřížkou podobně jako předchozím



Obrázek 12: Pásová struktura hexagonálního krystalu ve směru Γ -K. Na svislé ose je vynesena normovaná frekvence, vodorovná osa ukazuje normovanou konstantu šíření Blochových vidů.

příkladě, avšak vzduchové sloupky o průměru $0,9a$ jsou umístěny v prostředí o indexu lomu $2,72$ a je zvoleno $a=\lambda$. Před a za krystalem je umístěn planární vrstevnatý vlnovod tvořený jádrem o tloušťce λ a indexu lomu $2,72$, které je obklopeno vzduchem. Osa vlnovodu je totožná s osou poruchy. Do struktury vstupuje zleva základní TE vid planárního vlnovodu. Rozložení indexu lomu je zřejmé z obrázku 13, který ukazuje profil elektrického pole.



Obrázek 13: Profil elektrického pole v určitém čase ve fotonickém krystalu s lineární poruchou.

4 Vlastní vidy

V této kapitole se budeme zabývat hledáním vlastních vidů vlnovodu s dvojrozměrným průřezem,

$$\varepsilon = \varepsilon(x, y). \quad (59)$$

Parametry popisující vlnovod jsou definovány podle obrázku 14. Princip řešení je obdobný jako v předchozí kapitole. Předpokládáme, že průřez vlnovodu lze ve směru osy x rozdělit do M na sebe navazujících úseků, tak aby relativní permitivita uvnitř každého úseku závisela pouze na y . Celkové pole v každém úseku rozložíme do lokálních vidů a na hranicích mezi úseky použijeme podmínky spojitosti [4, 45]. Oproti předchozí formulaci jsou však TE a TM lokální vidy vázány na hranicích mezi úseky, a proto musíme v rozkladu použít oba typy vidů zároveň [4].

4.1 Rozklad pole v úseku m

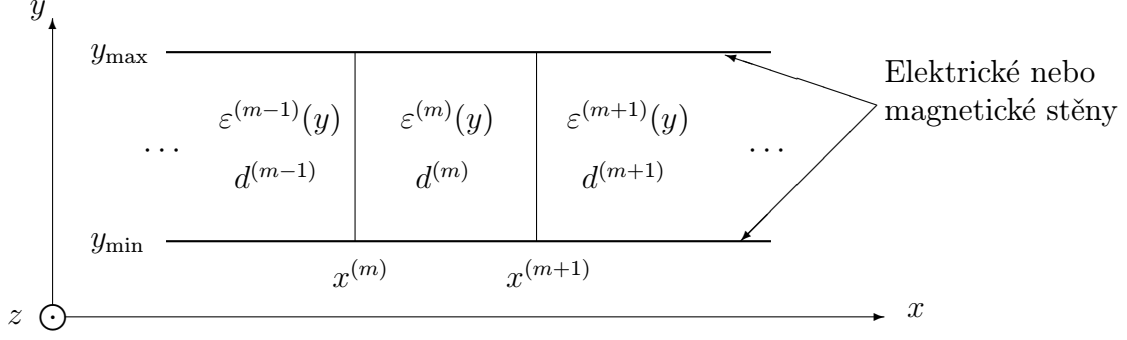
Pro přehlednost v tomto odstavci předpokládejme $x^{(m)} = 0$ a vynechejme horní index (m). Pro příčná rozložení polí hledaného vidu pak platí [4, 8]

$$E_x(x, y) = k_z \sum_k u_{hk}(x) \varphi_{hk}(y) - \frac{1}{\varepsilon(y)} \sum_k u'_{ek}(x) \varphi'_{ek}(y), \quad (60)$$

$$E_y(x, y) = -\frac{1}{\varepsilon(y)} \sum_k u_{ek}(x) \beta_{ek}^2 \varphi_{ek}(y), \quad (61)$$

$$E_z(x, y) = -i \sum_k u'_{hk}(x) \varphi_{hk}(y) + \frac{ik_z}{\varepsilon(y)} \sum_k u_{ek}(x) \varphi'_{ek}(y), \quad (62)$$

$$cB_x(x, y) = \sum_k u'_{hk}(x) \varphi'_{hk}(y) + k_z \sum_k u_{ek}(x) \varphi_{ek}(y), \quad (63)$$



Obrázek 14: Model vlnovodu s dvojrozměrným průřezem. Průřez rozdělíme v místech $x^{(m)}$, $0 < m < M$, na M úseků uniformních ve směru x ; na obrázku jsou znázorněny tři úseky oddělené svislými úsečkami. Na hranicích výpočetního okna ve směru x , $x = x^{(0)}$ a $x = x^{(M)}$, (na obrázku nejsou znázorněny) mohou být použity otevřené nebo uzavřené okrajové podmínky. Ve směru y použijeme uzavřené okrajové podmínky podél přímek $y = y_{\min}$ a $y = y_{\max}$. $\varepsilon^{(m)}(y)$ je rozložení relativní permitivity v úseku m a $d^{(m)} = x^{(m+1)} - x^{(m)}$ je jeho šířka, přitom $0 \leq m < M$.

$$cB_y(x, y) = \sum_k u_{hk}(x) \beta_{hk}^2 \varphi_{hk}(y), \quad (64)$$

$$cB_z(x, y) = -ik_z \sum_k u_{hk}(x) \varphi'_{hk}(y) - i \sum_k u'_{ek}(x) \varphi_{ek}(y), \quad (65)$$

kde

$$k_{xpk} = (\beta_{pk}^2 - k_z^2)^{1/2}, \quad (66)$$

$$u_{pk}(x) = \frac{A_{pk}}{\beta_{pk}^2} \cos(k_{xpk}x) + \frac{B_{pk}}{k_{xpk}} \sin(k_{xpk}x) \quad (67)$$

$$= \frac{\bar{A}_{pk}}{\beta_{pk}^2} \cos[k_{xpk}(d-x)] - \frac{\bar{B}_{pk}}{k_{xpk}} \sin[k_{xpk}(d-x)]. \quad (68)$$

4.2 Formulace problému vlastních hodnot

Nejprve uvažujme rozhraní mezi úseky m a $m+1$. Podobně jako v odstavci 3.2 použijeme podmínky spojitosti pro tečné složky vektorů pole a obdržíme řadu relací mezi koeficienty A , B . Pomocí rekurzivního použití těchto relací a pomocí vztahů uvedených v předchozím odstavci můžeme odvodit různé formulace problému vlastních hodnot pro neznámou konstantu šíření k_z (vlastní hodnotu) a amplitudy A , B , \bar{A} , \bar{B} (vlastní vektory) [4, 8].

Zde jsme použili stabilní formulaci podle [8], která byla rozšířena o možnost použití otevřených okrajových podmínek v $x = x^{(0)}$ a $x = x^{(M)}$ a dále o možnost použití komplexního profilu permitivity. Formulace vede na nelineární problém vlastních hodnot, který může být zapsán v maticové formě

$$\mathcal{M}(k_z)\mathcal{U} = 0. \quad (69)$$

Definici matice \mathcal{M} , vektoru \mathcal{U} a podrobné odvození problému lze nalézt v habilitační práci. Poznamenejme jen, že prvky vektoru \mathcal{U} jsou jednotlivé neznámé amplitudy $A_{pk}^{(m)}$, dimenze matice \mathcal{M} je $2(M-1)L$ a její prvky jsou nelineárními funkcemi k_z .

K nalezení k_z řešíme disperzní rovnici ve tvaru

$$\det[\mathcal{M}(k_z)] = 0. \quad (70)$$

Pro řešení na reálné ose lze použít běžné numerické metody. Polohy k_z v komplexní rovině nalezneme pomocí techniky posouvání kořenů. K určení vlastních vektorů používáme variantu techniky inverzní iterace [13].

4.3 Porovnání metod

Abychom demonstrovali vlastnosti metody sešívání vidů zejména z hlediska přesnosti a výpočetní efektivity, je v habilitační práci tato metoda podrobně porovnána s pokročilou metodou konečných prvků vyvinutou na Univerzitě v Parmě. Porovnání je založeno na práci [46]. Pro modelování byly použity dvě struktury – žebrové vlnovody, které byly v minulosti často využívány při numerických testech různých metod např. [2, 47].

Byly porovnávány číselné hodnoty normalizované konstanty šíření (tyto hodnoty leží vždy mezi 0 a 1) podobným způsobem jako v [2]. Rozdíly výsledků obou metod byly vždy menší než 0,0001, což je alespoň o jeden řád méně než nejpřesnější výsledky uváděné v [2]. Protože obě metody jsou založeny na jiných principech a navíc byly vyvinuty a používány na různých pracovištích, lze předpokládat, že chyba číselných výsledků obou metod je menší než 0,0001. Z porovnání dále vyplynulo, že v případě metody konečných prvků, lze takto přesné výsledky obdržet pouze za použití velmi pokročilých technik (např. adaptivní generace sítě).

Podobný závěr je možné udělat i pro metodu konečných diferencí: metoda poskytující srovnatelné výsledky [47] je založena na pokročilém “multigridovém” algoritmu.

Srovnatelně přesné výsledky vypočtené pomocí jiných metod jsme v literatuře nenalezli.

Závěr

Tématem habilitační práce je použití metody sešívání vidů k modelování optických vlnovodných struktur, které lze alespoň aproximativně rozdělit do pravoúhlých homogenních oblastí. Byly shrnuty teoretické základy metod modelování vlastních vidů vlnovodů s jednorozměrným a dvojrozměrným průřezem a modelování vývoje pole ve dvojrozměrných vlnovodných strukturách. Byly popsány numericky stabilní formulace nutné při tvorbě počítačových programů a na příkladech demonstrovány možnosti metody.

Během práce byla zlepšena a rozšířena běžná formulace metody z hlediska numerické efektivity i obecnosti použití. Původní zlepšení metody představují především

- aplikace metody S -matice k modelování jednorozměrné vrstevnaté struktury,
- přesná a rychlá technika pro určení vytékajících vidů jednorozměrné vrstevnaté struktury,
- stabilní technika pro určení Blochových vidů dvojrozměrné vlnovodné struktury založená na formalismu S -matice.

Rozšíření metody se týká zejména jejího použití ke studiu fotonických krystalů a k hledání vlastních vidů dvojrozměrných vlnovodů s komplexním profilem permitivity.

Dalším původním výsledkem je podrobné porovnání vlastností metody sešívání vidů a pokročilé metody konečných prvků na příkladě modelování žebrového vlnovodu. Přitom bylo ukázáno, že chyba výsledků obou metod je alespoň o řád menší než nejpřesnější dosud uváděné údaje.

K tématu práce se vztahují publikace autora [24, 41, 42, 44, 46, 48, 49].

Výsledky práce také demonstrují výhody metody sešívání vidů. Snad největší předností je její přímočarost a bezproblémová algoritmizace. Metoda neobsahuje žádné skryté parametry,

které by bylo nutné zkusmo nastavovat nebo odhadovat podle průběhu výpočtu. V závislosti na počtu lokálních vidů lze metodu použít pro rychlý odhad řešení zadaného úkolu, i k získání přesných “referenčních” výsledků.

Nevýhodami metody sešívání vidů jsou určitá složitost a nepřehlednost řešených rovnic, nelineární problém vlastních hodnot, schodová aproximace křivočarých rozhraní a nutnost tvorby rychlého a spolehlivého programu pro určení vlastních vidů jednorozměrné struktury.

V souvislosti s tématem práce byly vyvinuty tři počítačové programy, které odpovídají jednotlivým metodám popsaným v kapitolách 2, 3 a 4. Programy jsou využívány v přednášce Optoelektronika a integrovaná optika a v úvahu připadá i jejich využití v dalších výukových předmětech oboru optika.

Další příležitostí k využití programů je evropská akce COST P11 “Physics of linear, non-linear and active photonic crystals” zahájená v roce 2003. S ohledem na tuto akci se autor této práce chce zaměřit na modelování složitějších vlnovodných struktur založených na fotonických krystalech a rozšířit metodu sešívání vidů o možnost popisu některých nelineárních optických interakcí.

Reference

- [1] T. Itoh, Ed., *Numerical techniques for microwave and millimeter wave passive structures*. Wiley, New York, 1989.
- [2] C. Vassallo, “1993-1995 Optical mode solvers,” *Opt. Quantum Electron.* **29**, s. 95-114, 1997.
- [3] C. Vassallo, *Optical Waveguide Concepts*. Elsevier, Amsterdam, 1991.
- [4] S. T. Peng, A. A. Oliner, “Guidance and Leakage Properties of a Class of Open Dielectric Waveguides: Part I – Mathematical Formulations,” *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **MTT-29**, s. 843-854, 1981.
- [5] J. D. Joannopoulos, R. D. Meade, J. N. Winn, *Photonic Crystals. Molding the Flow of Light*. Princeton University Press, Princeton, 1995.
- [6] J. Chilwell, I. Hodgkinson, “Thin-films field-transfer matrix theory of planar multilayer waveguides and reflection from prism-loaded waveguides,” *J. Opt. Soc. Amer. A* **1**, s. 742-753, 1984.
- [7] L. M. Walpita, “Solutions for planar optical waveguide equations by selecting zero elements in a characteristic matrix,” *J. Opt. Soc. Amer. A* **2**, s. 595-602, 1985.
- [8] A. S. Sudbø, “Film mode matching: a versatile numerical method for vector mode field calculations in dielectric waveguides,” *J. Europ. Opt. Soc.* **2**, s. 211-233, 1993.
- [9] J. Čtyroký, *Modelování optických vlnovodných struktur metodou obousměrného rozkladu ve vlastní vidy*. Habilitační práce, ČVUT, Praha, 1998.
- [10] R. März, *Integrated Optics. Design and Modelling*. Artech House, Boston, 1995.
- [11] R. E. Smith, S. N. Houde-Walter, G. W. Forbes, “Numerical determination of planar waveguide modes using the analyticity of the dispersion relation,” *Opt. Lett.* **16**, s. 1316-1318, 1991.

- [12] E. Anemogiannis, E. N. Glytsis “Multilayer Waveguides: Efficient Numerical Analysis of General Structures,” *J. Lightwave Technol.* **10**, s. 1344-1351, 1992.
- [13] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling: *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [14] R. E. Smith, S. N. Houde-Walter, G. W. Forbes, “Mode Determination for Planar Waveguides Using the Four-Sheeted Dispersion Relation,” *IEEE J. Quantum Electron.* **28**, s. 1520-1526, 1992.
- [15] R. E. Smith, G. W. Forbes, S. N. Houde-Walter, “Unfolding the Multivalued Planar Waveguide Dispersion Relation,” *IEEE J. Quantum Electron.* **29**, s. 1031-1034, 1993.
- [16] R. E. Smith, S.N. Houde-Walter, “The Migration of Bound and Leaky Solutions to the Waveguide Dispersion Relation,” *J. Lightwave Technol.* **11**, s. 1760-1768, 1993.
- [17] A. Bakhtazad, H. Abiri, R. Ghayour, “A General Transform for Regularizing Planar Open Waveguide Dispersion Relation,” *J. Lightwave Technol.* **15**, s. 383-390, 1997.
- [18] P. Benech, D. Khalil, “Rigorous spectral analysis of leaky structures: application to the prism coupling problem,” *Opt. Commun.* **118**, s. 220-226, 1995.
- [19] S. L. Lee, Y. Chung, L. A. Coldren, N. Dagli, “On Leaky Mode Approximations for Modal Expansion in Multilayer Open Waveguides,” *IEEE J. Quantum Electron.* **31**, s. 1790-1802, 1995.
- [20] R. E. Smith, S. N. Houde-Walter, “Leaky guiding in nontransparent waveguides,” *J. Opt. Soc. Amer. A* **12**, s. 715-724, 1995.
- [21] D. Marcuse, *Theory of Dielectric Optical Waveguides*. Academic Press, New York, 1974.
- [22] Y. Z. Lin, J. H. Zhan, S. M. Tseng, “A New Method of Analyzing the Light Transmission in Leaky and Absorbing Planar Waveguides,” *Photonics Technol. Lett.* **9**, s. 1241-1243, 1997.
- [23] E. Anemogiannis, E. N. Glytsis, T. K. Gaylord, “Determination of Guided and Leaky Modes in Lossless and Lossy Planar Multilayer Optical Waveguides: Reflection Pole Method and Wavevector Density Method,” *J. Lightwave Technol.* **17**, s. 929-940, 1999.
- [24] Jiří Petráček, Kirat Singh, “Determination of Leaky Modes in Planar Multilayer Waveguides,” *Photonics Technol. Lett.* **14**, s. 810-812, 2002.
- [25] L. Li, “Formulation and comparison of two recursive matrix algorithms for modeling layered diffraction gratings,” *J. Opt. Soc. Am. A* **13**, s. 1024-1035, 1996.
- [26] G. Sztefka, H.P. Nolting, “Bidirectional Eigenmode Propagation for Large Refractive Index Steps,” *IEEE Photon. Technol. Lett.* **5**, s. 554-557, 1993.
- [27] P. Gerard, P. Benech, D. Khalil, R. Rimet, S. Tedjini, “Towards a full vectorial and modal technique for the analysis of integrated optics structures: the Radiation Spectrum Method (RSM),” *Opt. Commun.* **140**, s. 128-145, 1997.
- [28] V. M. Schneider, “Analysis of passive optical structures with an adaptive set of radiation modes,” *Opt. Commun.* **160**, s. 230-234, 1999.

- [29] K. P. Fakhiri, P. Benech, “A new technique for the analysis of planar optical discontinuities: an iterative modal method,” *Opt. Commun.* **177**, s. 233-243, 2000.
- [30] P. Bienstman, R. Baets, “Advanced boundary conditions for eigenmode expansion models,” *Opt. Quantum Electron.* **34**, 523-540, 2002.
- [31] G. R. Hadley, “Transparent boundary condition for beam propagation,” *Opt. Lett.* **16**, s. 624-626, 1991.
- [32] J. Čtyroký, S. Helfert, R. Pregla, “Analysis of a deep waveguide Bragg grating,” *Opt. Quantum Electron.* **30**, s. 343-358, 1998.
- [33] P. Bienstman, R. Baets, “Optical modelling of photonic crystals and VCSELs using eigenmode expansion and perfectly matched layers,” *Opt. Quantum Electron.* **33**, s. 327-341, 2001.
- [34] W.-D. Sheng, “The scattering matrix method for quantum waveguides,” *J. Phys.: Condens. Matter* **9**, s. 8369-8380, 1997.
- [35] J.-P. Berenger, “A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves,” *J. Comp. Phys.* **114**, s. 185-200, 1994.
- [36] D. S. Katz, E. T. Thiele, A. Taflove, “Validation and Extension to Three Dimensions of the Berenger PML Absorbing Boundary Condition for FD-TD Meshes,” *IEEE Microwave Guided Wave Lett.* **4**, s. 268-270, 1994.
- [37] W. C. Chew, W. H. Weedon, “A 3D Perfectly Matched Medium from Modified Maxwell’s Equations with Stretched Coordinates,” *Microwave Opt. Technol. Lett.* **7**, s. 599-604, 1994.
- [38] Z. S. Sacks, D. M. Kingsland, R. Lee, J.-F. Lee, “A Perfectly Matched Anisotropic Absorber for Use as an Absorbing Boundary Condition,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **43**, s. 1460-1463, 1995.
- [39] F. L. Teixeira, W. C. Chew, “Complex space approach to perfectly matched layers: a review and some new developments,” *Int. J. Numer. Model.* **13**, s. 441-445, 2000.
- [40] www.ure.cas.cz/dpt130/cost268
- [41] J. Čtyroký, S. Helfert, R. Pregla, P. Bienstman, R. Baets, R. de Ridder, R. Stoffer, G. Klaasse, J. Petráček, R. M. De La Rue, P. Lalanne, J.-P. Hugonin, “Bragg waveguide grating as a 1D photonic bandgap structure: COST 268 modelling task,” 9th International Workshop on Optical Waveguide Theory and Numerical Modelling, Paderborn 6-7 April 2001.
- [42] J. Čtyroký, S. Helfert, R. Pregla, P. Bienstman, R. Baets, R. de Ridder, R. Stoffer, G. Klaasse, J. Petráček, P. Lalanne, J.-P. Hugonin, R. M. De La Rue, “Bragg waveguide grating as a 1D photonic bandgap structure: COST 268 modelling task,” *Opt. Quantum Electron.* **34**, s. 455-470, 2002.
- [43] S. F. Helfert, R. Pregla, “Efficient analysis of periodic structures,” *J. Lightwave Technol.* **16**, s. 1694-1702, 1998.

- [44] J. Petráček, J. Čtyroký, “Modelling 2D photonic crystals using bi-directional mode expansion and propagation method,” 10th International Workshop on Optical Waveguide Theory and Numerical Modelling, Nottingham 5-6 April 2002.
- [45] M. Koshiya, M. Suzuki “Vectorial Wave Analysis of Dielectric Waveguides for Optical-Integrated Circuits Using Equivalent Network Approach,” *J. Lightwave Technol.* **LT-4**, s. 656-664, 1986.
- [46] S. Selleri, J. Petráček, “Modal analysis of rib waveguide through finite element and mode matching methods,” *Opt. Quantum Electron.* **33**, s. 373-386, 2001.
- [47] K. Ramm, P. Lüsse, H.-G. Unger, “Multigrid eigenvalue solver for mode calculation of planar optical waveguides,” *IEEE Photon. Technol. Lett.* **9**, s. 967-969, 1997.
- [48] J. Petráček, “A complex eigenmode solver,” 6th International Workshop on Optical Waveguide Theory and Numerical Modelling, Hagen 18-19 September 1998.
- [49] S. Selleri, J. Petráček, “Photonic device analysis through finite element and mode matching methods,” 8th International Workshop on Optical Waveguide Theory and Numerical Modelling, Prague 26-27 May 2000.

Abstract

When developing new photonic guided-wave components, it is necessary to use fast and accurate computational methods that can model optical properties of the various designs prior their fabrication. This work deals with one of such method - the Mode Matching Method (MMM).

The method is based on splitting of the structure to be analysed into “sections” with the aim to obtain solutions of Maxwell’s equations for each section in the form of orthogonal eigenmodes. At the interfaces between all neighbouring sections, the continuity conditions for the electromagnetic fields are used (this is called “mode matching”).

In this work we have provided a detailed description of MMM principles and the application of the method for searching eigenmodes of 1D and 2D structures (Mode Solvers), and for the modelling of light propagation in non-uniform waveguide structures with 1D cross-section.

During the work we have improved upon the common formulation of MMM and some related techniques. The main improvements are:

- The formulation of MMM for searching of eigenmodes of 2D structures has been extended so that the method can deal with complex permittivity profiles.
- A stable technique for calculating Floquet-Bloch modes of periodical structures has been developed. The technique naturally fits into the S -matrix formalism (often used when modelling non-uniform waveguides) and leads to the generalized linear eigenvalue problem.
- We have developed a novel technique for the determination of leaky modes in planar multilayer waveguides. The technique is based on smooth transition between bound modes of closed waveguide and leaky modes of open waveguide.

Moreover we have compared in detail the accuracy of MMM and the Finite-Element Method (FEM) by analysing rib waveguides using these two methods. Differences between the normalized propagation constants provided by the two methods are always less than 0.0001 which is at least about one order of magnitude smaller than previously reported values.

The work has also demonstrated the advantages of the MMM: the method is straightforward, numerically stable, very accurate and applicable to full vector field calculations.

Finally we have demonstrated our own developed software.