VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Doc. RNDr. Jan Franců, CSc.

MATEMATICKÉ MODELOVÁNÍ MATERIÁLŮ S PERIODICKOU STRUKTUROU

MATHEMATICAL MODELING OF MATERIALS WITH PERIODIC STRUCTURE

Teze přednášky k profesorskému jmenovacímu řízení v oboru

Aplikovaná matematika

Brno 2005

KLÍČOVÁ SLOVA

Matematické modelování, kompozitní materiál, prostředí s periodickou strukturou, homogenizace, metoda asymptotického rozvoje, lineární pružnost

KEY WORDS

Mathematical modeling, composite material, medium with periodic structure, homogenization, correctors, asymptotic expansion method, linear elastcity

© Jan Franců, 2005

ISBN 80-214-2858-9

ISSN 1213-418X

Obsah

Představení autora **4**

Úvod **6**

1 Modelování prostředí s periodickou strukturou **7**
1.1 Prostředí s periodickou strukturou 7
1.2 Homogenizace 7
1.3 Obecný postup 8
1.4 Další řešené úlohy, prostředky a problémy 8
1.5 Historie počátků teorie homogenizace 9

2 Modelová úloha **10**
2.1 Rovnice 10
2.2 Fyzikální interpretace 10
2.3 Formulace homogenizační úlohy 11
2.4 Homogenizovaná úloha 12

3 Příklady **14**
3.1 Jednorozměrná úloha 14
3.2 Vrstevnatý materiál 15
3.3 Ostatní kompozitní materiály 15
3.4 Materiál vyztužený vlákny 15

4 Metoda asymptotického rozvoje **17**
4.1 Podstata metody 17
4.2 Odvození soustavy rovnic 17
4.3 Pomocná tvrzení 18
4.4 Okrajové podmínky 20

5 Matematické aspekty **21**
5.1 Konvergence funkcí 21
5.2 Slabá konvergence 22
5.3 Slabá konvergence a homogenizace 24
5.4 Dvojškálová konvergence 24
5.5 Dvojškálová konvergence a homogenizace 25

6 Výsledky homogenizace vybraných problémů **26**
6.1 Homogenizace rovnic lineární pružnosti 26
6.2 Homogenizace rovnic s hysterézním operátorem 27

7 Problémy modelování reálných materiálů **28**
7.1 Metoda spolehlivého řešení 28
7.2 Materiály s náhodnou strukturou 28

Závěr **29**

Poděkování **29**

Literatura **30**

English summary **32**

Představení autora

Jan Franců se narodil 25. září 1952 v Brně. Po absolvování základní a střední všeobecně-vzdělávací školy v Bratislavě vystudoval v letech 1971–76 na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy obor matematika, specializaci matematická analýza s diplomovou prací na téma: *Okrajová úloha pro von Kármánovu soustavu rovnic v případě nehladké oblasti.*

Během vědecké přípravy u profesora Jindřicha Nečase na Katedře matematické fyziky MFF UK v Praze v letech 1977–80 složil rigorózní zkoušku a získal titul doktora přírodních věd. Kandidátskou disertační práci: *Homogenizace rovnic lineární pružnosti* obhájil v roce 1981 a získal vědeckou hodnost kandidáta věd v oboru matematická analýza.

V letech 1980-1988 pracoval na Katedře matematické analýzy Přírodovědecké fakulty UJEP v Brně. V roce 1989 byl přijat do Oblastního výpočetního centra VUT v Brně a po roce přešel na Katedru matematiky Fakulty strojní VUT (dnes Ústav matematiky Fakulty strojního inženýrství), kde pracuje dosud. V roce 1994 po obhajobě habilitační práce *Modelování Czochralského proudění* na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity byl jmenován docentem v oboru matematická analýza.

Vědeckovýzkumná činnost

Zabývá se aplikovanou analýzou, zaměřenou na matematické modelování pomocí parciálních diferenciálních rovnic zejména v mechanice kontinua a metodami funkcionální analýzy vhodnými pro matematické modelování. Publikoval přes 30 vědeckých prací.

Ve své diplomové práci zobecnil důkaz existence řešení nelineární von Kármánovy soustavy rovnic modelující deformaci tenké desky z hladké oblasti (tvar desky) na případ oblastí s rohy a s různými okrajovými podmínkami.

Během vědecké přípravy se setkal s matematickou metodou zvanou homogenizace, o kterou se zajímá dosud. Tato metoda umožňuje efektivně modelovat prostředí a materiály s periodickou strukturou. Ve své kandidátské práci metodu homogenizace použil na rovnice lineární pružnosti v primární i duální formulaci. Protože homogenizace byla tehdy u nás metodou málo známou, napsal několik článků s cílem tuto metodu přiblížit odborné veřejnosti. Zabýval se i použitím metody homogenizace při modelování biologických objektů – krevní cévy a neuronu.

Analýza matematických modelů ve tvaru nelineárních parciálních diferenciálních rovnic ho přivedla k abstraktní teorii monotónních operátorů. Velký ohlas vzbudily jeho práce shrnující výsledky teorie těchto operátorů použitelné pro důkaz existence zobecněných řešení a konstrukci jejich aproximací vhodných pro numerické řešení.

Jako člen skupiny, která pracovala na numerickém modelování proudění taveniny při výrobě monokrystalu křemíku Czochralského metodou v podniku Tesla Rožnov pod Radhoštěm, se zabýval diskretizací rovnic a návrhem algoritmů pro numerické výpočty. Po roce 1990, kdy podnik Tesla přestal mít zájem o numerické modelování, vytvořil matematickou analýzu tohoto složitého modelu, který popisuje proudění ovlivněné přirozenou i nucenou konvekcí, tepelné jevy i efekt magnetického pole — model má tvar nelineární soustavy pěti sdružených parciálních diferenciálních rovnic.

K homogenizaci se vrátil v druhé polovině devadesátých let. Zabýval homogenizací diferenciálních rovnic se skalárním hysterézním operátorem Prandtova–Ishlinského typu. Odvodil tvar homogenizovaného operátoru a s P. Krejčím dokázali konvergenci příslušných řešení pro rovnici kmitání plastické tyče. Analogické výsledky dokázal i pro rovnice difúze v jednorozměrném prostředí a rovnici vedení tepla ve vícerozměrném prostředí.

Protože data reálného materiálu jsou zatížena chybou a kompozitní materiál není zcela periodický, v posledních letech se zajímá o řešení těchto problémů. Pod jeho vedením ing. Luděk Nechvátal obhájil doktorskou práci, ve které adaptoval metodu spolehlivého řešení

(také zvanou metoda nejhoršího scénáře) pro homogenizaci. Se svými studenty doktorského studia se začal zabývat stochastickymi diferenciálními rovnicemi, které přinášejí nový pohled na matematické modelování reálných inženýrských problémů.

Pedagogická činnost

Od roku 1978 se podílí na výuce matematiky, nejprve na Matematicko-fyzikální fakultě UK v Praze, potom na Přírodovědecké fakultě UJEP v Brně a od roku 1990 na Fakultě strojní VUT v Brně a to jak v základních kurzech, tak v předmětech pro specializace v magisterském i doktorském studiu. Pro nový studijní obor matematické inženýrství vytvořil dva nové předměty a sepsal pro tyto předměty dvoje nová skripta.

Vedl řadu diplomových prací, je členem komise pro státní závěrečné zkoušky. Pravidelně působí v porotách soutěže SVOČ i ve středoškolské Matematické olympiádě, v roce 2004 zorganizoval závěrečné česko-slovenské kolo soutěže SVOČ v matematice na FSI VUT.

Recenzní činnost

Posuzoval řadu projektů grantové agentury ČR a AVČR a oponoval několik habilitačních, doktorských a rigorozních prací. Přes 10 let je členem redakční rady mezinárodního vědeckého časopisu *Applications of Mathematics* a posuzoval řadu článků pro tento časopis, pro časopis *Archivum Mathematicum* i rukopisy několika nových skript. Pro recenzní časopis *Zentralblatt–MATH* napsal cca 25 recenzí.

Zahraniční pobyty

Zúčastnil se třítýdenní odborné praxe na Novosibirské státní univerzitě (SSSR) v roce 1974 jako účastník a v roce 1979 jako vedoucí skupiny studentů. V roce 1984 byl na pětiměsíčním studijním pobytu na Univerzitě Karla Marxe v Lipsku a Humboldtově univerzitě v Berlíně.

V Centru pro teoretickou fyziku ICTP v Terstu se zúčastnil dvoutýdenního Workoshopu a Školy o kompozitních prostředích a homogenizaci v letech 1990 a 1993 a Školy o nelineární funkcionální analýze a aplikacích na diferenciální rovnice v roce 1997. V tomto Centru v letech 1993, 1994, 1995, 1996 také vedl dvoutýdenní kurz o monotonních operátorech v rámci jejich programu Diplomových kurzů.

Byl pozván ke dvoutýdenním pobytům v Nigérii jako hlavní přednášející Workshopu o teorii nelineárních operátorů – v roce 1994 na Nigerijské univerzitě v městě Nsukka a v roce 1995 v Národním matematickém centru Nigérie v hlavním městě Abuja.

Z dalších zahraničních cest uveďme Mezinárodní kongres o průmyslové a aplikované matematice ICIAM v Hamburku (1995), dvě konference v Berlíně (1999), Kongres aplikované matematiky v Paříži (2002) a pobyty na univerzitách v Magdeburgu (1996), v Berlíně (1999), v Paříži (2000, 2004) a Göteborgu (2003).

Práce pro vědeckou komunitu

Je členem Jednoty českých (dříve československých) matematiků a fyziků od roku 1978, přes 10 let pracoval jako jednatel brněnské pobočky, od roku 1993 působí ve výboru České matematické společnosti JČMF. V lednu 2005 zorganizoval seminář k nedožitým 80. narozeninám profesora Miloše Zlámala. Jeho práce v Jednotě byla oceněna čestným uznáním, pedagogickým vyznamenáním a v roce 2002 mu sjezd JČMF v Opavě udělil Zasloužilé členství JČMF.

Další zájmy

Vedle zájmu o příbuzné matematické, fyzikální a technické obory se ve volném čase věnuje pěší, vodní, lyžařské a hlavně vysokohorské turistice a fotografování přírody i lidí.

Úvod

V této práci se budeme zabývat, jak už titul napovídá, matematickým modelováním prostředí s periodickou strukturou, kterými jsou zejména kompozitní materiály. Jejich význam pro technickou praxi není třeba zdůrazňovat, pro své vynikající vlastnosti pevnost, lehkost, odolnost vůči korozi atd. se využívají v mnoha oborech strojního i stavebního inženýrství.

Kompozitních materiálů však existuje velké množství a lze vytvářet nepřeberné množství dalších zejména změnou kombinace materiálů pro jednotlivé složky, změnou jejich obsahového poměru a také změnou jejich prostorového uspořádání.

Zkoumat experimentálně toto množství hypotetických materiálů je finančně i časově velmi náročné: nutno napřed vyrobit vzorky, ty pak podrobit zkouškám a výsledky vyhodnotit. Proto matematické modelování přináší velké úspory finanční i časové při navrhování nových kompozitních materiálů a při analýze konstrukcí z nich vyrobených. Experimentům se sice zcela nevyhneme, ale podstatně můžeme omezit jejich množství. Lze namodelovat stovky různých hypotetických variant materiálů a numericky spočítat jejich vlastnosti. To umožňuje optimalizovat jejich vlastnosti s ohledem na zadaná kritéria, například pevnost, lehkost, cenu a pod. Fyzicky vyrobit a změřit pak stačí až výsledné optimální varianty.

Přímé matematické modelování kompozitního materiálu pomocí vlastností jeho složek vyžaduje velmi jemnou triangulaci při použití metody konečných prvků, aby se mohla vystihnout jeho heterogenní struktura. To však vede na příliš rozsáhlé úlohy nezvládnutelné ani na dnešní výkonné výpočetní technice. Proto pro výpočty nutno reálný silně heterogenní materiál nahradit myšleným „ekvivaletním“ materiálem homogenním, který má globálně stejné vlastnosti. Určení parametrů tohoto ekvivalentního materiálu není věc jednoduchá, pro různé případy jsou vyvinuty různé metody, které dávají různě přesné výsledky. Zvláštní význam má matematické metoda zvaná homogenizace. Touto metodou se zabývám už skoro třicet let. Tato metoda má velký váznam pro technickou praxi, proto ji v těchto tezích přiblížím.

V první části je problém homogenizace charakterizován obecně, včetně poznámek o historii metody. Metoda je předvedena na jednoduché modelové úloze v části druhé, třetí obsahuje výsledky několika názorných příkladů. Ve čtvrté části popíšeme podstatu metody asymptotického rozvoje, která představuje velmi užitečný prostředek pro odvozování homogenizované rovnice včetně vzorců pro výpočet homogenizovaných koeficientů.

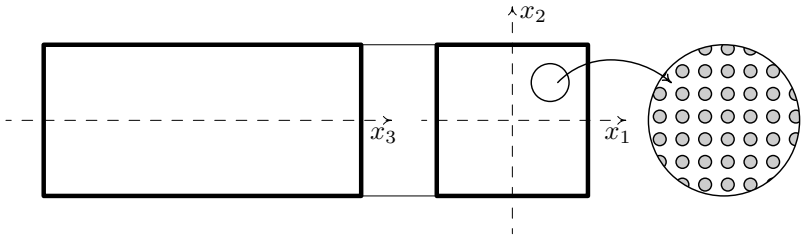
Důkazy všech matematických tvrzení vynecháváme, v páté části však uvedeme některé matematické aspekty, které vysvětlují, proč tyto úlohy přinášejí z matematického hlediska tolik problémů. V šesté a sedmé části jsou stručně popsány vybrané výsledky v této oblasti dosažené autorem nebo jeho mladšími kolegy pod jeho vedením.

Protože text je určen nejen pro matematiky, pro větší srozumitelnost jsou v něm z matematického hlediska některé drobné nepřesnosti vzniklé vynecháním „samozřejmých“ předpokladů, například, že se vylučují „patologické“ funkce, které nelze integrovat a pod.

1 Modelování prostředí s periodickou strukturou

1.1 Prostředí s periodickou strukturou

S kompozitními materiály nebo obecněji s prostředním s periodickou strukturou se setkáváme v mnoha technických oborech, ve fyzice, chemii a také v neživé i živé přírodě. Základním rysem těchto heterogenních prostředí jsou v prostoru proměnné vlastnosti, například v dvousložkovém vláknovém kompozitu (sklotextil zalitý epoxydem) se pravidelně střídají pevná vyztužující vlákna s měkčí matricí.



Takovýto materiál můžeme matematicky modelovat pomocí parciálních diferenciálních rovnic. Uvažujeme-li rovnice lineární pružnosti pro obě složky, příslušné koeficienty charakterizující vlastnosti jednotlivých složek (Laméovy konstanty) jsou nekonstantní funkce nabývající jiné hodnoty ve vláknech a jiné v matrici, jsou to silně oscilující funkce. Abychom vystihli lokální vlastnosti pro příslušný numerický výpočet – například metodou konečných prvků, potřebujeme velmi jemnou triangulaci, která vede na příliš velký počet rovnic.

1.2 Homogenizace

Řešení problému spočívá v tom, že pro numerické výpočty silně heterogenní materiál nahradíme hypotetickým materiálem homogenním, který však má globálně stejné vlastnosti, říkáme, že materiál homogenizujeme. Z matematického pohledu při homogenizaci rovnici se silně nekonstantními koeficienty (obvykle předpokládáme, že struktura materiálu a tím i koeficienty jsou periodické) nahradíme „ekvivalentní“ rovnicí s koeficienty konstantními, která dává globálně stejné řešení. Vzniká tu však problém, jak určit vlastnosti tohoto hypotetického homogenizovaného materiálu – jeho efektivní parametry, protože běžné průměry dávají chybné výsledky, viz příklady v části 3.

Vznikla řada metod výpočtu těchto efektivních parametrů. Jejich nedostatkem však bývá to, že jsou subjektivní, a proto se hodí jen pro některá prostorová uspořádání.

Babuškův přístup

Ivo Babuška (český inženýr a matematik působící od roku 1966 v USA) v roce 1973 přišel s myšlenkou, které říkal čočkování. Na materiál jakoby se díval obráceným dalekohledem, při kterém se materiál vzdaluje, jeho struktura se přitom zjemňuje. Místo jednoho materiálu uvažuje myšlenou posloupnost materiálů se zjemňující se strukturou, viz [2]. Z matematického pohledu místo jedné rovnice uvažujeme nekonečnou posloupnost rovnic s periodickými koeficienty a^ε se zmenšující se periodou ε. Příslušná řešení u^ε tvoří posloupnost funkcí, která konverguje k tzv. homogenizovanému řešení u^*. Za homogenizované koeficienty a^* pak bereme koeficienty, které určují homogenizované řešení u^*.

Aproximace řešení úlohy s periodickými koeficienty

Homogenizované řešení u^* aproximuje však pouze globální chování – hodnoty řešení u^*. K řešení u^* lze přidat tzv. korektor (funkce počítaná z řešení u^* a pomocných funkcí), čímž dostaneme funkci U^ε, která aproximuje i lokální chování – derivace řešení u^ε, což má zásadní význam, protože např. v pružnosti se z nich počítají napětí.

1.3 Obecný postup

Metoda homogenizace, kterou podrobně popíšeme na modelové úloze v Kapitole 3, byla rozpracována pro řadu parciálních diferenciálních lineárních rovnic eliptických, parabolických i hyperbolických, druhého řádu i řádů vyšších, viz [4]. Homogenizace okrajové úlohy pro parciální diferenciální rovnice spočívá v následujících krocích:

- Definujeme posloupnost periodických koeficientů $\{a^\varepsilon\}$ se zmenšující se periodou $\varepsilon \to 0$; správně by se mělo psát $\varepsilon_n \to 0$, pro přehlednost se index n vynechává.
- Pro každé ε formulujeme příslušnou tzv. periodickou okrajovou (počáteční) úlohu (P^ε).
- Odvodíme tvar tzv. homogenizované úlohy (P^*) metodou asymptotického rozvoje.
- Dokážeme existenci řešení u^ε periodických úloh (P^ε) i existenci a případně i jednoznačnost řešení u^* homogenizované úlohy (P^*). Dostáváme tak posloupnost řešení u^ε a řešení homogenizované u^*.
- Dokážeme, že při $\varepsilon \to 0$ řešení u^ε periodických úloh (P^ε) konvergují v jistém smyslu k řešení u^* homogenizované úlohy (P^*).
  Důkaz využívá prostředky teorie prostorů funkcí a funkcionální analýzy. Je založen na odhadu velikosti (normy) řešení u^ε nezávislém na ε. Díky kompaktnosti vzhledem ke slabé konvergenci ohraničená posloupnost řešení u^ε obsahuje konvergentní podposloupnost $u^{\varepsilon'}$ konvergující k funkci u, o které dokážeme, že splňuje příslušnou homogenizovanou úlohu a je tedy řešením homogenizovaným.
- V dalších krocích lze zavést U^ε – řešení s korektory a dokázat jejich „lepší konvergenci“; přesněji lze dokázat konvergenci rozdílu $u^\varepsilon - U^\varepsilon \to 0$ v „silnějším“ smyslu, tj. že navíc konvergují i derivace rozdílu $u^\varepsilon - U^\varepsilon$.
- V některých případech lze dokázat i odhad rychlosti konvergence rozdílu $u^\varepsilon - U^\varepsilon$ pomocí mocniny ε.

1.4 Další řešené úlohy, prostředky a problémy

Řada lineárních eliptických, parabolických i hyperbolických parciálních diferenciálních rovnic druhého i vyššího řádu, soustavy rovnic i některé nelineární rovnice byly homogenizovány. Poznamenejme, že ne vždy je homogenizovaná rovnice stejného typu. Asymptotický rozvoj umožňuje odvodit homogenizovanou rovnici, k důkazu konvergence řešení periodických úloh k řešení homogenizovanému bylo nutno použít metody jiné.

Dvojškálová konvergence

Začátkem devadesátých let se objevila tzv. dvojškálová konvergence, která umožnila spojit odvození tvaru homogenizované úlohy s důkazem konvergence řešení do jednoho kroku. Současně umožnila homogenizovat i řadu nelineárních rovnic, i když ne vždy lze prakticky spočítat homogenizované koeficienty. Podstatu dvouškálové konvergence popíšeme v 5.4.

Perforované oblasti

Vedle rovnic s periodickými koeficienty se zmenšující se periodou, se často studují i rovnice s konstantními koeficienty, ale na tzv. perforované oblasti, tj. oblasti s periodicky uspořádanými otvory. Přitom se průměr (případně i tvar děr) nemusí zmenšovat se stejnou rychlostí jako vzdálenost periodicky rozmístěných děr. Jiné úlohy zkoumají chování řešení při zmenšující se periodě okrajových podmínek nebo tvaru hranice.

Problém náhodné struktury

Protože struktura reálného materiálu není ideálně periodická, z technického hlediska má význam studium materiálů se skoroperiodickou případně náhodnou strukturou. Otázkou, jaké chyby se dopustíme, když skoroperiodickou strukturu materiálu považujeme za periodickou,

se zabývá práce [32], numerické experimenty ukázaly, že tato chyba nemusí byt zanedbatelná, podrobněji v odstavci 7.2. Náhodný charakter struktury vede na stochastické diferenciální rovnice.

Problém nejistých dat

Všechna data – parametry popisující vlastnosti složek jsou získány experimentálně a jsou zatíženy chybou. Přestože chyby mají náhodný charakter, problém lze řešit deterministickou metodou, tzv. metodou spolehlivého řešení, viz [6, 29], kterou popíšeme v odstavci 7.1.

1.5 Historie počátků teorie homogenizace

První pokusy o sestrojení efektivních parametrů periodických prostředí spadají do 19. století v pracech S. Poissona (1822), O. F. Mosotta (1850), J. C. Maxwella (1873) a J. Raleigha (1982). Ve 20. století je této problematice věnováno množství prací, přehled literatury je např. v [2, 4, 7, 9]. Teorií homogenizace obyčejných diferenciálních rovnic ve spojení s úlohami mechaniky se zabývaly práce N. N. Bogoljubova (1945) a jeho žáků. Pro mnohé tyto jednorozměrné problémy dává homogenizace stejné výsledky jako metoda průměrování.

Homogenizací eliptických diferenciálních rovnic se zabýval E. Sanchez Palencia (1970) při studiu konkrétních fyzikálních úloh pro heterogenní prostředí. Fyzikálními úvahami dospěl ke stejné homogenizované rovnici.

Metoda asymptotického rozvoje

Myšlenka použít asymptotického rozvoje „multiple scales“, viz část 4, pro okrajové úlohy parciálních diferenciálních rovnic se připisuje J. B. Kellerovi (1973). Metodu použil I. Babuška a dále rozvinuli A. Bensoussan, J. L. Lions a G. Papanicolaou. Souhrn jejich výsledků homogenizace eliptických, parabolických a dalších rovnic ve velké šíři lze najít v jejich ještě stále inspirující monografii [4]. K důkazovým metodám přispěl také L. Tartar (1974) svojí metodou konvergence lokální energie. Také práce N. S. Bachvalova (1977) využívá asymptotický rozvoj pro rovnice matematické fyziky.

Abstraktní konvergence

S teorií homogenizace úzce souvisí také teorie tzv. G-konvergence a Γ-konvergence, kterou vyvinula italská škola. Podnětem byl příklad E. De Giorgi (1967), viz odst. 5.3, který ukazuje existenci operátorové konvergence odlišné od konvergence založené na konvergenci koeficientů. K výsledkům homogenizace eliptických rovnic dospěl S. Spagnolo (1967) pomocí limity pro $t \to \infty$ řešení evolučních rovnic. V letech 1973-77 se rozvinula hluboká teorie G-konvergence diferenciálních operátorů a Γ-konvergence integrálních funkcionálů, která umožnila studovat i homogenizaci nelineárních rovnic.

Další vývoj

Koncem sedmdesátých let se uvedené proudy spojují, homogenizaci je věnováno množství prací. Zmiňme ještě ruskou školu v čele s O. A. Olejnikovou, která zavedla tzv. silnou G-konvergenci. K důkazové technice přispěli dále F. Murat a L. Tartar H-konvergenci a metodou kompenzované kompaktnosti. Významným přínosem pro teorii homogenizace byla metoda tzv. dvojškálové konvergence zavedená Nguetsengem (1989) a rozvinutá G. Allairem (1990), viz odst. 5.4. Homogenizaci a souvisejícím problémům jsou věnovány stovky prací, ve kterých se studují různé aspekty lineárních i nelineárních problémů včetně stochastických rovnic, perforovaných oblastí a řady dalších úloh.

2 Modelová úloha

Modelová úloha sice popisuje reálnou situaci velmi zjednodušeně a pro aplikace se nehodí, je však vhodné předvést novou metodu na ní, protože umožňuje pochopit podstatu metody bez toho, abychom se ztratili ve složité symbolice a v množství technických detailů.

Toto je značně důležité zvláště v matematice, kde vysoký stupeň abstrakce – pomocí abstraktních pojmů jsou definovány další a další abstraktní pojmy, které se už zcela vymykají běžné představě nespecialistů – způsobuje velmi obtížné porozumění pro ty, kteří s těmito pojmy nepracují a s danou matematickou disciplínou se nezabývají.

2.1 Rovnice

Protože v jednorozměrné úloze se jevy z vyšší dimenze neprojevují, budeme se zabývat dvourozměrnou úlohou na čtverci, i když formulace úlohy ve vyšší dimenzi a na jiné oblasti nečiní žádné obtíže. Na jednotkovém čtverci $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ v rovině $\mathbb{R}^2$ se souřadnicemi $\mathrm{x} = (x_1, x_2)$ se budeme zabývat rovnici

$$-\mathrm{div}[a(\mathrm{x})\nabla u] = f\,, \qquad \text{tj.} \qquad -\frac{\partial}{\partial x_1}\left[a(\mathrm{x})\,\frac{\partial u}{\partial x_1}\right] - \frac{\partial}{\partial x_2}\left[a(\mathrm{x})\,\frac{\partial u}{\partial x_2}\right] = f \quad \mathrm{x} \in \Omega\,. \tag{1}$$

Pro lepší čitelnost rovnice budeme psát jak ve vektorovém tvaru, tak po složkách. Tuto rovnici jsme zvolili, protože na tento typ rovnic vede modelování řady stacionárních jevů. V případě, že koeficient a je konstanta, což odpovídá homogennímu prostředí, se rovnice redukuje na Poissonovu rovnici $-\Delta u = f$ s Laplaceovým operátorem Δ. Na hranici – obvodu čtverce Γ předepíšeme okrajovou podmínku, například

$$u = g \qquad \mathrm{x} \in \Gamma\,. \tag{2}$$

2.2 Fyzikální interpretace

Uvedená okrajová úloha, tj. rovnice (1) s okrajovou podmínkou (2) popisuje několik fyzikálních jevů:

Ustálené vedení tepla

Uvažujme tenkou nehomogenní desku čtvercového tvaru Ω tepelně izolovanou po obou stranách. V této interpretaci neznámá funkce $u(\mathrm{x})$ má význam teploty desky v místě $\mathrm{x} \in \Omega$. Vektor $\mathbf{t} \equiv (t_1, t_2)(\mathrm{x})$ popisuje tepelný tok a pravá strana $f(\mathrm{x})$ lokální výkon tepelných zdrojů. Zákon zachování tepelné energie vede na rovnici

$$\mathrm{div}\,\mathbf{t} = f\,, \qquad \text{tj.} \qquad \frac{\partial t_1}{\partial x_1} + \frac{\partial t_2}{\partial x_2} = f\,.$$

Lineární Fourierův zákon vedení tepla

$$\mathbf{t} = -a(\mathrm{x})\,\nabla u\,, \qquad \text{tj.} \qquad t_i = -a(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

říká, že tepelný tok $\mathbf{t}$ je přímo úměrný teplotnímu gradientu ∇u a záporné znaménko ukazuje, že teplo teče proti teplotnímu gradientu z teplejších míst do chladnějších. Konstanta úměrnosti $a(\mathrm{x})$ – tepelná vodivost – vyjadřuje lokální vlastnost materiálu a protože materiál není homogenní, není to konstanta, ale funkce závislá na místě $\mathrm{x} \in \Omega$. Dosazením druhé rovnice do první dostáváme rovnici (1), okrajová podmínka (2) předepisuje teplotu podél okraje desky.

Ustálené vedení elektrického proudu

Uvažujme opět tenkou nehomogenní desku z vodivého materiálu tvaru Ω elektricky izolovanou po obou stranách. Neznámá funkce $u(\mathrm{x})$ je v tomto případu elektrický potenciál (napětí) v místě x. Vektor $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$ popisuje hustotu elektrického proudu. První Kirchhoffův zákon – důsledek zákona zachování elektrického náboje – vyjadřuje rovnice

$$\operatorname{div} \mathbf{t} = f\,, \qquad \text{tj.} \qquad \frac{\partial t_1}{\partial x_1} + \frac{\partial t_2}{\partial x_2} = f\,,$$

kde funkce $f(\mathrm{x})$ zde popisuje množství náboje dodávaného vnějšími zdroji. Závislost hustoty proudu $\mathbf{t}$ na spádu napětí ∇u vyjadřuje Ohmův zákon

$$\mathbf{t} = -a(x)\,\nabla u\,, \qquad \text{tj.} \qquad t_i = -a(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\,.$$

Lokální vlastnost materiálu určuje funkce $a(\mathrm{x})$ – lokální elektrická vodivost. Je to převrácená hodnota elektrického ohmického odporu. Dosazením druhé rovnice do první dostáváme opět rovnici (1). Okrajová podmínka (2) předepisuje elektrické napětí na obvodu desky Γ.

Kroucení tyče

V tomto případě jde o pružnou tyč tvaru hranolu s osou (výškou) ve směru s osy x_3. Podél celé délky osy má heterogenní tyč stálý průřez Ω v rovině os (x_1, x_2), který se nemění podél celé výšky h tyče. Dolní podstavu hranolu upevníme a horní podstavu pootočíme o úhel αh podél osy tyče. Neznámá $u(\mathrm{x})$ je Prandtlova potenciální funkce, jejíž derivace určují jediné nenulové složky tenzoru napětí τ v tyči $\tau_{13} \equiv \tau_{31} = \frac{\partial u}{\partial x_2}$ a $\tau_{23} \equiv \tau_{32} = -\frac{\partial u}{\partial x_1}$. Tato funkce splňuje opět rovnici

$$-\operatorname{div}[a(\mathrm{x})\nabla u] = 2\alpha\,, \qquad \text{tj.} \qquad -\frac{\partial}{\partial x_1}\left[a(\mathrm{x})\frac{\partial u}{\partial x_1}\right] - \frac{\partial}{\partial x_2}\left[a(\mathrm{x})\frac{\partial u}{\partial x_2}\right] = 2\alpha\,.$$

přičemž funkce $a(\mathrm{x})$ nabývá převrácené hodnoty modulu smyku pružného materiálu. Nulové napětí na hranici pak vede na okrajovou podmnínku $u = 0$ na Γ.

2.3 Formulace homogenizační úlohy

Struktura materiálu

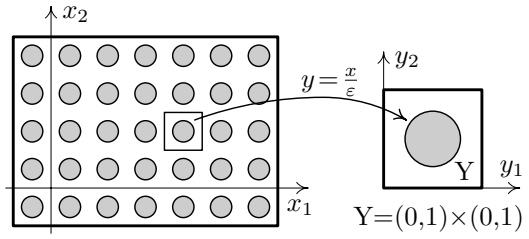
Strukturu materiálu popisuje funkce $a(\mathrm{x})$. Pokud v místě x je vyztužující vlákno, funkce a v bodě x má hodnotu charakteristiky (součinitele tepelné vodivosti, elektrické vodivosti nebo převrácené hodnoty modulu smyku) vlákna a v místech matrice pak hodnotu charakteristiky matrice. Proto funkce $a(\mathrm{x})$ je po částech konstantní a nabývá dvou hodnot.

Uvažujme periodickou strukturu takovou, že v souřadné soustavě $\mathrm{x} = (x_1, x_2)$ je funkce $a(\mathrm{x}) \equiv a(x_1, x_2)$ periodická s periodou $\bar{x}_1$ ve směru osy x_1 a s periodou $\bar{x}_2$ ve směru osy x_2. Pro jednoduchost uvažujme případ $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{\varepsilon}$. V oblasti Ω zvolíme periodu – čtverec o hraně $\bar{\varepsilon}$ a funkci na tomto čtverci „zvětšíme“ na základní periodu $Y = (0,1) \times (0,1)$ a periodicky prodloužíme na celou rovinu. Dostáváme tak novou funkci, kterou označíme $a(\mathrm{y})$, která je definovaná v celé rovině $\mathbb{R}^2$ a je periodická v obou proměnných s periodou jedna. Zkráceně budeme říkat, že funkce $a(\mathrm{y})$ je Y-periodická, jestliže

$$a(y_1 + k_1, y_2 + k_2) = a(y_1, y_2) \qquad \text{pro všechna celá } k_1, k_2\,.$$

Posloupnost struktur

Zvolíme posloupnost parametrů ε popisujících velikost periody, například $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ (správně bychom měli psát ε_n, ale pro přehlednost se v literatuře index n vynechává a píše pouze ε) a pro každé ε vztahem



$$a^\varepsilon(\mathrm{x}) = a\left(\frac{\mathrm{x}}{\varepsilon}\right) \qquad a^\varepsilon(x_1, x_2) = a\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right) \tag{3}$$

definujeme periodickou funkci a^ε s periodou ε v obou proměnných x_1, x_2. Poznamenejme, že volbou $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$ dostáváme původní koeficient s periodou $\bar{\varepsilon}$. S posloupností parametrů ε dostáváme posloupnost koeficientů a^ε.

Konstrukce posloupnosti úloh

Pomocí posloupnosti a^ε definujeme posloupnost tzv. periodických úloh, řešení přitom označíme také indexem ε:

Úloha (P^ε) *Hledáme funkci u^ε splňující na Ω rovnici*

$$-\mathrm{div}\left[a^\varepsilon(\mathrm{x})\,\nabla u^\varepsilon\right] = f\,, \qquad tj. \qquad -\frac{\partial}{\partial x_1}\left[a(\mathrm{x}^\varepsilon)\,\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1}\right] - \frac{\partial}{\partial x_2}\left[a(\mathrm{x}^\varepsilon)\,\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2}\right] = f \tag{4}$$

a okrajovou podmínku $u^\varepsilon = g$ na hranici Γ.

2.4 Homogenizovaná úloha

Lze dokázat, že v tomto případě posloupnost řešení u^ε úlohy (P^ε) konverguje k funkci u^*, která je řešením následující tzv. homogenizované úlohy:

Úloha (P^*) *Hledáme funkci u^* splňující rovnici*

$$-\sum_{i,j=1}^{2} a^*_{ij}, \frac{\partial^2 u^*}{\partial x_i\,\partial x_j} = f \tag{5}$$

a okrajovou podmínku $u^* = g$ na hranici Γ.

Koeficienty a^*_{ij} jsou konstanty, které se počítají z funkce $a(y)$ a pomocných funkcí $\chi_1(y)$, $\chi_2(y)$, jak popíšeme dále.

Pomocné funkce χ_k

Pro výpočet koeficientů homogenizované úlohy potřebujeme spočítat pomocné funkce χ_1 a χ_2, ve kterých se projeví vliv jak vlastností obou složek, tak jejich geometrického uspořádání. Tyto funkce jsou periodickým řešením rovnice stejného typu na základní periodě Y se speciální pravou stranou typu „zatížení“ ve směru osy y_1, případně y_2.

Pomocná úloha (PY^1) *Hledáme Y-periodickou funkci $\chi_1(\mathrm{y})$ splňující na periodě Y rovnici*

$$-\mathrm{div}_y[a(\mathrm{y})\nabla\chi_1] = \frac{\partial a}{\partial y_k}\,, \qquad tj. \qquad -\frac{\partial}{\partial y_1}\left[a(\mathrm{y})\,\frac{\partial \chi_1}{\partial y_1}\right] - \frac{\partial}{\partial y_2}\left[a(\mathrm{y})\,\frac{\partial \chi_1}{\partial y_2}\right] = \frac{\partial a}{\partial y_1}(\mathrm{y})\,. \tag{6}$$

Protože koeficienty i pravá strana obsahuje derivace nespojitých funkcí, rovnici nutno brát v zobecněném tzv. slabém smyslu.

Stejným způsobem je definována funkce $\chi_2(\mathrm{y})$ jakožto řešení úlohy (PY^2), která hledá Y-periodické funkci χ_2 splňující na periodě Y v slabém smyslu rovnici

$$-\mathrm{div}_y[a(\mathrm{y})\,\nabla\chi_1] = \frac{\partial a}{\partial y_k}\,, \qquad \mathrm{tj.} \qquad -\frac{\partial}{\partial y_1}\left[a(\mathrm{y})\,\frac{\partial \chi_2}{\partial y_1}\right] - \frac{\partial}{\partial y_2}\left[a(\mathrm{y})\,\frac{\partial \chi_2}{\partial y_2}\right] = \frac{\partial a}{\partial y_2}(\mathrm{y})\,. \tag{7}$$

Řešení obou úloh (PY^1) a (PY^2) jsou určena jednoznačně až na aditivní konstanty, které však na hodnotu homogenizovaných koeficientů nemají žádný vliv. Aby řešení bylo jednoznačné, přidáme například podmínky nulového integrálního průměru

$$\int_\Omega \chi_1(\mathrm{y})\mathrm{dy} = 0\,, \qquad \int_\Omega \chi_2(\mathrm{y})\mathrm{dy} = 0\,. \tag{8}$$

Homogenizované koeficienty a^*_{ij}

Homogenizované koeficienty jsou rovny integrálnímu průměru (integrálu z funkce přes periodu Y děleného velikostí periody $|Y|$, v našem případě je $|Y| = 1$) periodického koeficientu opraveného o derivaci pomocné funkce χ_k

$$a^*_{11} = \int_Y a(\mathrm{y}) \left(1 - \frac{\partial \chi_1}{\partial y_1}(\mathrm{y})\right) \mathrm{dy}\,, \qquad a^*_{12} = \int_Y a(\mathrm{y}) \left(-\frac{\partial \chi_2}{\partial y_1}(\mathrm{y})\right) \mathrm{dy}\,, \tag{9}$$

$$a^*_{21} = \int_Y a(\mathrm{y}) \left(-\frac{\partial \chi_1}{\partial y_2}(\mathrm{y})\right) \mathrm{dy}\,, \qquad a^*_{22} = \int_Y a(\mathrm{y}) \left(1 - \frac{\partial \chi_2}{\partial y_2}(\mathrm{y})\right) \mathrm{dy}\,. \tag{10}$$

Poznamenejme, že podle geometrického uspořádání složek v periodě oba koeficienty a_{12} a a_{21} v homogenizované rovnici mohou být nenulové a navíc koeficienty a_{11} a a_{22} mohou být různé, přestože původní rovnice neobsahovala žádné smíšené druhé derivace.

Tyto vzorce lze odvodit metodou asymptotického rozvoje, o které pojednává část 4, nebo metodou dvojškálové konvergence, viz odstavec 5.4.

Konvergence a korektory

Lze dokázat, že pro $\varepsilon \to 0$ hodnoty řešení u^ε konvergují k homogenizovanému řešení u^*, přesněji řečeno řešení u^ε konvergují k u^* slabě v Sobolevově prostoru $W^{1,2}(\Omega)$.

Protože nás však zajímají také derivace řešení u^ε, k homogenizovanému řešení u^* přidáme korektor, který aproximuje i derivace u^ε. Řešení s korektorem potom definujeme vztahem

$$U^\varepsilon(\mathrm{x}) = u_0(\mathrm{x}) - \varepsilon \left[\chi_1\left(\frac{\mathrm{x}}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_0}{\partial x_1}(\mathrm{x}) + \chi_2\left(\frac{\mathrm{x}}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(\mathrm{x})\right]\,. \tag{11}$$

Lze dokázat, že i derivace rozdílu $u^\varepsilon - U^\varepsilon$ konverguje k nule, přesněji $u^\varepsilon - U^\varepsilon$ konverguje k nule silně (tj. v normě) Sobolevova prostoru $W^{1,2}(\Omega)$. Přidáním dalších členů asymptotického rozvoje (12) lze konstruovat korektory vyšších řádů, které dosahují lepší aproximaci řešení u^ε, viz například [4, 25].

3 Příklady

Pro ilustraci uveďme několik jednoduchých příkladů:

3.1 Jednorozměrná úloha

Uvažujme rovnici

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\mathrm{d}u^\varepsilon}{\mathrm{d}x}\right]=1 \qquad \text{na } (0,2\,\pi)$$

s koeficientem

$$a(y)=\frac{1}{2+\cos y}$$

a okrajovými podmínkami $u(0)=0$ a $u(\pi)=0$ pro hodnoty parametru $\varepsilon=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots$

Integrací snadno spočítáme

$$\frac{\mathrm{d}u^\varepsilon}{\mathrm{d}x}=-(x+c(\varepsilon))\left(2+\cos\frac{r}{\varepsilon}\right),$$

$$u^\varepsilon(x)=-x^2-2\,x\,c\,(\varepsilon)+\varepsilon(x+c(\varepsilon))\sin\frac{x}{\varepsilon}-\varepsilon^2\cos\frac{x}{\varepsilon}+k(\varepsilon)\,.$$

Z okrajových podmínek spočítáme konstanty

$$k(\varepsilon)=\varepsilon^2\,, \qquad c(\varepsilon)=-\pi$$

a řešení u^ε můžeme zapsat ve tvaru

$$u^\varepsilon(x)=x(2\pi-x)+\varepsilon(\pi-x)\sin\frac{x}{\varepsilon}+\varepsilon^2\left(1-\cos\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Ze vzorce je vidět, že řešení u^ε pro $\varepsilon\to 0$ stejnoměrně konverguje k funkci $u^*=x(2\,\pi-x)$, ktera je řešením úlohy

$$-a^*\frac{\mathrm{d}^2\,u^*}{\mathrm{d}x^2}=1 \qquad \text{na } (0,2\pi) \qquad u^*(0)=0\;\; u^*(\pi)=0\,,$$

kde $a^*=1/2$. Koeficient a^* se liší od integrálního aritmetického průměru $\int_Y a(y)\mathrm{d}y=1/3$.

Podle (6) pomocná funkce $\chi(y)$ je 2π-periodickým řešením rovnice

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[a(y)\,\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}y}\right]=-\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}y}(y)\,.$$

Integrováním lze snadno spočítat

$$\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}y}=1+c\,(2+\cos y), \qquad \chi(y)=y+x(2\,y+\sin y)+k\,.$$

Protože funkce χ je periodická, platí $\chi(0)=\chi(2\pi)$, odkud $c=-1/2$. Přidáme-li podmínku (8), potom $k=0$ a $\chi(y)=-\frac{1}{2}\sin y$. Vzorec (9) dává

$$a^*=\int_Y a(y)\left[1-\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}y}\right]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-(-\frac{1}{2}\sin y)}{2+\sin y}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\,,$$

což se shoduje s homogenizovanou rovnicí. Poznamenejme, že v případě jednorozměrné rovnice lze dokázat, že homogenizovaný koeficient a^* je roven integrálnímu harmonickému průměru funkce $a(y)$.

Podle (11) funkce s korektorem

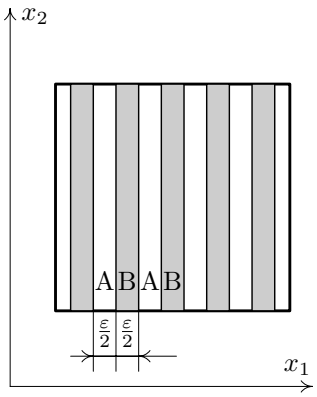
$$U^\varepsilon(x) = u^*(x) - \varepsilon\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\mathrm{d}u^*}{\mathrm{d}x}(x) = x(2\pi - x) + \varepsilon\,\sin\frac{x}{\varepsilon}(x-\varepsilon)$$

se liší od u^ε jen ve členu řádu ε^2, zatímco derivace $\frac{\mathrm{d}u^\varepsilon}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}U^\varepsilon}{\mathrm{d}x} = \varepsilon\sin\frac{x}{\varepsilon}$ se liší členem řádu ε, tj. rozdíl jejich derivací konverguje stejnoměrně k nule.

3.2 Vrstevnatý materiál

Uvažujme materiál, který se skládá ze dvou izotropních složek A a B, které jsou tvoří tenké vrstvy tloušťky $\varepsilon/2$ kolmé na osu x_1. Uvažujme úlohu o ustáleném vedení elektrického proudu v tomto materiálu. Situaci modeluje rovnice (1), přičemž koeficient $a(\mathrm{x}) \equiv a(x_1)$ nabývá hodnot elektrické vodivosti, která se rovná převrácené hodnotě elektrického odporu ρ_A a ρ_B složek A a B. Proto $a(x) = 1/\rho_A$ ve složce A a $a(x) = 1/\rho_B$ ve složce B.

V tomto případě lze snadno odvodit efektivní hodnoty elektrického odporu: ve směru osy x_1 jsou vrstvy – odpory – „zapojeny“ sériově, odpory se sčítají, a proto průměrný odpor je $\rho = (\rho_A + \rho_B)/2$. Ve směru osy x_2 jsou vrstvy „zapojeny“ paralelně a proto se sčítají vodivosti $1/\rho = \frac{1}{2}(1/\rho_A + 1/\rho_B)$. Odvodili jsme hodnoty průměrné vodivosti ve směrech os x_1 a x_2 a tím hodnoty homogenizovaných koeficientů a^*_{11} a a^*_{22}:



$$a^*_{11} = \left[\frac{1}{2}(\rho_A + \rho_B)\right]^{-1}, \qquad a^*_{22} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_A} + \frac{1}{\rho_B}\right).$$

Vidíme, že vodivosti ve směrech x_1 a x_2 jsou různé. Jestliže například $\rho_A = 1$ a $\rho_B = 1/9$, potom koeficient $a(\mathrm{x})$ nabývá hodnot 1 a 9, ale $a^*_{11} = 1,8$ a $a^*_{22} = 5$. Ve směru osy x_2 máme aritmetický průměr koeficientu $a(\mathrm{x})$, zatímco ve směru osy x_2 máme průměr harmonický. Homogenizovaný materiál je tedy anizotropní, přestože obě složky byly izotropní.

3.3 Ostatní kompozitní materiály

V předchozím příkladu jsme uvažovali vrstevnatý materiál, ve kterém je heterogennost materiálu v jistém smyslu „jednorozměrná“ a homogenizované koeficienty lze proto vyjádřit explicitně. V případě jiného uspořádání složek v materiálu – například materiálu vyztuženého vlákny – již homogenizované koeficienty nelze explicitně vyjádřit, pomocné funkce χ_1 a χ_2 nutno spočítat numericky a hodnoty homogenizovaných koeficientů potom počítat z nich. Pro hodnoty homogenizovaných koeficientů existují pouze odhady, zjednodušeně lze říct, že hodnoty se pohybují mezi aritmetickým a harmonickým průměrem. Předchozí příklad ukazuje, že tento interval nelze obecně zúžit.

Dále poznamenejme, že pokud rozložení složek v periodě není symetrické podél os x_1 a x_2, mohou být nenulové i koeficienty $a^*_{12} = a^*_{21}$, jak ukáže následující příklad.

3.4 Materiál vyztužený vlákny

Uvažujme materiál periodicky vyztužený vlákny rovoběžnými s osou x_3. Tento případ vede na tzv. dvourozměrnou homogenizaci; heterogenitu materiálu lze popsat funkcí $a(\mathrm{x})$ dvou proměnných x_1, x_2. Uvažujme opět základní periodu $Y = (0,1)\times(0,1)$ ve které je vyztužující vlákno s průřezem Y_1.

Závislost hodnot homogenizovaných koeficientů na tvaru vyztužujících vláken ilustrujeme

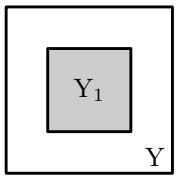
výsledky výpočtů následujících vzorků. Ve všech případech budeme brát stejné hodnoty koeficientu $a(\mathrm{y})$

$$a(\mathrm{y}) = \begin{cases} 0.1 & \mathrm{x} \in Y_1 \quad \text{– vyztužující vlákno} \\ 1 & \mathrm{x} \in Y - Y_1 \quad \text{– matrice} \end{cases}$$

a stejný poměr obsahů složek $|Y_1| : |Y| = 1 : 4$, ale pět různých tvarů průřezu vyztužujícího vlákna Y_1 a uvedeme příslušnou matici homogenizovaných koeficientů $A^* = (a^*_{ij})$

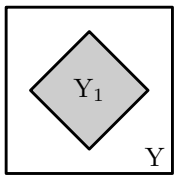
(a) – Y_1 je čtverec $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

$$A^* = \begin{pmatrix} 0,648 & 0 \\ 0 & 0.648 \end{pmatrix}$$



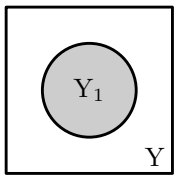
(b) – Y_1 je stejný čtverec otočený o 45°

$$a^* = \begin{pmatrix} 0,645 & 0 \\ 0 & 0.645 \end{pmatrix}$$



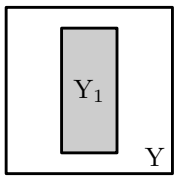
(c) – Y_1 je kruh se o obsahu 1/4

$$a^* = \begin{pmatrix} 0,653 & 0 \\ 0 & 0.653 \end{pmatrix}$$



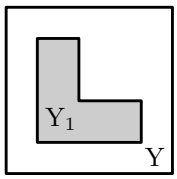
(d) – Y_1 je obdélník o obsahu 1/4

$$a^* = \begin{pmatrix} 0,518 & 0 \\ 0 & 0.727 \end{pmatrix}$$



(e) – Y_1 je nekonvexní pravoúhelník o obsahu 1/4

$$a^* = \begin{pmatrix} 0,726 & -0,023 \\ -0,023 & 0.726 \end{pmatrix}$$



Tyto numerické výsledky jsou převzaty z práce [14], kde lze najít další experimenty: závislost na hodnotě koeficientu $a(\mathrm{x})$, na poměru velikosti stran základní periody Y i řezy grafů řešení u^ε, u^* i U^*. Řada numerických experimentů je také v diplomových pracech [25, 30, 33].

4 Metoda asymptotického rozvoje

Metoda asymptotického rozvoje je důležitá metoda, která se užívá k odvození tvaru homogenizované úlohy včetně vzorců pro výpočet homogenizovaných koeficientů.

4.1 Podstata metody

Pro posloupnost malých parametrů ε jdoucích k nule máme posloupnost rovnic s periodickými koeficienty se zmenšující se periodou. Tyto rovnice určují posloupnost řešení u^ε, funkcí proměnné $\mathrm{x} = (x_1, x_2)$. Metoda vychází z předpokladu, že existuje posloupnost funkcí $u_0, u_1, u_2, \ldots$ proměnných $\mathrm{x} = (x_1, x_2)$ a $\mathrm{y} = (y_1, y_2)$, které jsou Y-periodické v proměnných $\mathrm{y} = (y_1, y_2)$ takových, že pro každé řešení $u^\varepsilon(\mathrm{x})$ platí

$$u^\varepsilon(\mathrm{x}) = \left[u_0(\mathrm{x},\mathrm{y}) + \varepsilon\, u_1(\mathrm{x},\mathrm{y}) + \varepsilon^2\, u_2(\mathrm{x},\mathrm{y}) + \varepsilon^3\, u_3(\mathrm{x},\mathrm{y}) + \ldots\right]_{\mathrm{y}=\mathrm{x}/\varepsilon} . \tag{12}$$

Z předpokladu platnosti rovnosti pro všechny hodnoty parametru ε dostáváme posloupnost rovnic, jejichž analýzou vyjdou nakonec vztahy pro homogenizované koeficienty i korektory. I tuto metodu předvedeme na příkladu modelové úlohy.

4.2 Odvození soustavy rovnic

Nejprve připomeňme derivování funkce $u(\mathrm{x}, \frac{\mathrm{x}}{\varepsilon})$. Je to funkce dvou proměnných x a y, ve druhé proměnné je složená $\mathrm{y} = \mathrm{x}/\varepsilon$. Při derivování podle x_i ji nejprve derivujeme podle x_i a potom podle y_i, přičemž člen násobíme derivací vnitřní funkce, tj. konstantou $\frac{1}{\varepsilon}$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[u\left(\mathrm{x}, \frac{\mathrm{x}}{\varepsilon}\right)\right] = \left[\frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathrm{x},\mathrm{y}) + \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial u}{\partial y_i}(\mathrm{x},\mathrm{y})\right]_{\mathrm{y}=\mathrm{x}/\varepsilon} .$$

Operátory

Derivujme uvedeným způsobem členy levé straně rovnice (5), tj. operátor

$$Au = -\mathrm{div}\left[a^\varepsilon(\mathrm{x})\nabla u^\varepsilon\right] \qquad Au = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left[a\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right] - \frac{\partial}{\partial x_2}\left[a\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right]$$

a aplikujeme na funkci u proměnných x a y. Protože každý člen obsahuje dvě derivace, dostáváme členy s různou mocninou ε. V případě, kdy jsme derivovali dvakrát podle x_i, je to $1 = \varepsilon^0$, pokud jsme derivovali jednou podle x_i a jednou podle y_i je to faktor ε^{-1} a v případě, že jsme derivovali dvakrát podle y_i máme faktor ε^{-2}. Když tyto členy seřadíme podle mocnin ε, dostáváme

$$A\ u(\mathrm{x}) = \left[\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\mathscr{A}_0 u\ + \frac{1}{\varepsilon}\mathscr{A}_1 u\ + \mathscr{A}_2 u\right)(\mathrm{x},\mathrm{y})\right]_{\mathrm{y}=\mathrm{x}/\varepsilon} , \tag{13}$$

kde do operátorů $\mathscr{A}_k$ jsme sdružili členy se stejnou mocninou ε:

$$\mathscr{A}_0 u = -\mathrm{div}_y\left[a(\mathrm{y})\,\nabla_y u\right] , \quad \text{tj.} \quad \mathscr{A}_0 u = -\frac{\partial}{\partial y_1}\left[a(\mathrm{y})\,\frac{\partial u}{\partial y_1}\right] - \frac{\partial}{\partial y_2}\left[a(\mathrm{y})\,\frac{\partial u}{\partial y_2}\right] , \tag{14}$$

$$\mathscr{A}_1 u = -\mathrm{div}_y\left[a(\mathrm{y})\,\nabla_x u\right] + \mathrm{div}_x\left[a(\mathrm{y})\,\nabla_y u\right] , \qquad \text{tj.} \tag{15}$$

$$\mathscr{A}_1 u = -\frac{\partial}{\partial y_1}\left[a(\mathrm{y})\,\frac{\partial u}{\partial x_1}\right] - \frac{\partial}{\partial y_2}\left[a(\mathrm{y})\,\frac{\partial u}{\partial x_2}\right] - \frac{\partial}{\partial x_1}\left[a(\mathrm{y})\,\frac{\partial u}{\partial y_1}\right] - \frac{\partial}{\partial x_2}\left[a(\mathrm{y})\,\frac{\partial u}{\partial y_2}\right] ,$$

$$\mathscr{A}_2 u = -\mathrm{div}_x\left[a(\mathrm{y})\,\nabla_x u\right] \qquad \mathscr{A}_2 u = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left[a(\mathrm{y})\,\frac{\partial u}{\partial x_1}\right] - \frac{\partial}{\partial x_2}\left[a(\mathrm{y})\,\frac{\partial u}{\partial x_2}\right] . \tag{16}$$

Soustava rovnic

Dosaďme do rovnice $Au = f$ s operátorem (13) řešení u^ε ve tvaru rozvoje (12). Rovnici roznásobme a sdružme členy se stejnými mocninami parametru ε. Protože rovnost má platit pro každé ε, musejí nastat rovnosti členů odděleně u každé mocniny ε. Dostáváme tak soustavu rovnic. Napišme první tři rovnice pro členy u mocnin ε^{-2}, ε^{-1} a $\varepsilon^0 \equiv 1$:

$$\mathscr{A}_0\, u_0 = 0\,, \tag{17}$$

$$\mathscr{A}_0\, u_1 + \mathscr{A}_1\, u_0 = 0\,, \tag{18}$$

$$\mathscr{A}_0\, u_2 + \mathscr{A}_1\, u_1 + \mathscr{A}_2\, u_0 = f\,. \tag{19}$$

Tak lze pokračovat dále, například členy u mocniny ε^1 dávají rovnici

$$\mathscr{A}_0\, u_3 + \mathscr{A}_1\, u_2 + \mathscr{A}_2\, u_1 = 0 \tag{20}$$

4.3 Pomocná tvrzení

Při analýze výše uvedených rovnic budeme využívat dvě tvrzení, která uvedeme bez důkazu:

LEMMA 1 *Nechť $f(\mathrm{y})$ je Y-periodická funkce. Potom integrální průměr jejích parciálních derivací podle y_i je nulový, tj.*

$$\int_Y \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0\,, \qquad \int_Y \frac{\partial f}{\partial y_2} = 0\,.$$

Tvrzení plyne ze vztahu $\int_0^1 f'(y)\mathrm{d}y = f(1) - f(0)$ a skutečnosti že periodická funkce má stejné hodnoty na protějších stranách periody.

LEMMA 2 *Lineární diferenciální rovnice*

$$\mathscr{A}_1 v \;\equiv -\frac{\partial}{\partial y_1}\left[a(\mathrm{y})\,\frac{\partial v}{\partial y_1}\right] - \frac{\partial}{\partial y_2}\left[a(\mathrm{y})\,\frac{\partial v}{\partial y_2}\right] = b$$

s pravou stranou $b(\mathrm{x},\mathrm{y})$ má Y-periodické řešení $v(\mathrm{x},\mathrm{y})$, jestliže je splněna podmínka

$$\int_Y b(\mathrm{x},\mathrm{y})\mathrm{d}\mathrm{y} = 0. \tag{21}$$

Toto řešení je určeno jednoznačně až na aditivní konstantu. Protože proměnná x *hraje roli parametru, k řešení můžeme přičíst libovolnou funkci proměnné* x*. Přidáme-li podmínku nulového průměru $\int_Y v(\mathrm{x},\mathrm{y})\mathrm{d}\mathrm{y} = 0$, řešení je určeno jednoznačně.*

Nutnost podmínky plyne z předchozího tvrzení, protože levá strana rovnice se skládá z derivací Y-periodických funkcí.

Analýza první rovnice (17)

Jedná se o rovnici bez pravé strany, které vyhovuje libovolná funkce nezávislá na proměnných $\mathrm{y} = (y_1, y_2)$. Proto funkce u_0 nezávisí na proměnných $\mathrm{y} = (y_1, y_2)$, tj. $u_0 = u_0(\mathrm{x})$.

Analýza druhé rovnice (18)

Rovnici přepíšeme do tvaru

$$\mathscr{A}_0\, u_1 = -\mathscr{A}_1\, u_0 \equiv \mathrm{div}_y\left[a(\mathrm{y})\nabla_x u_0\right] + \mathrm{div}_x\left[a(\mathrm{y})\nabla_y u_0\right]\,.$$

Protože u_0 nezávisí na y, druhý člen je nulový a rovnice se redukuje na tvar

$$\mathscr{A}_0\, u_1 = \mathrm{div}_y\, a(\mathrm{y})\, \nabla_x u_0(\mathrm{x}) \equiv \frac{\partial a}{\partial y_1}(\mathrm{y})\, \frac{\partial u_0}{\partial x_1}(\mathrm{x}) + \frac{\partial a}{\partial y_2}(\mathrm{y})\, \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(\mathrm{x})\,.$$

Podmínka nulového průměru pravé strany z Lemmatu 2 je splněna, existuje proto Y-periodické řešení u_1. Protože pravou stranu tvoří součet dvou členů se separovanými proměnnými, ve stejném tvaru budeme hledat také řešení u_1.

Označme $\chi_1(\mathrm{y})$ a $\chi_2(\mathrm{y})$ funkce, které jsou Y-periodická řešení rovnic

$$\mathscr{A}_0\chi_1 = \frac{\partial a}{\partial y_1}\,, \qquad \mathscr{A}_0\chi_2 = \frac{\partial a}{\partial y_2}\,.$$

Díky Lemmatu 2 obě tyto funkce existují a přidáme-li podmínky

$$\int_Y \chi_1 \mathrm{dy} = 0\,, \qquad \int_Y \chi_1 \mathrm{dy} = 0\,,$$

jsou určena jednoznačně. Položme

$$u_1(\mathrm{x},\mathrm{y}) = -\chi_1(\mathrm{y})\, \frac{\partial u_0}{\partial x_1}(\mathrm{x}) - \chi_2(\mathrm{y})\, \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(\mathrm{x}) + v(\mathrm{x})\,, \tag{22}$$

kde $v(\mathrm{x})$ je libovolná funkce. Funkce $u_1(\mathrm{x},\mathrm{y})$ je Y-periodická a dosazením se lze přesvědčit, že splňuje rovnici (17).

Analýza třetí rovnice (19)

Rovnici přepíšeme do tvaru

$$\mathscr{A}_0\, u_2 = -\mathscr{A}_1\, u_1 - \mathscr{A}_2\, u_0 + f\,.$$

Předpokládejme, že existuje řešení $u_2(\mathrm{x},\mathrm{y})$ této rovnice. Podle Lemmatu 2 nutnou podmínkou existence Y-periodického řešení této rovnice je

$$\int_Y (-\mathscr{A}_1\, u_1 - \mathscr{A}_2\, u_0 + f)\mathrm{dy} = 0\,.$$

Dosaďme do této podmínky operátory $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ z (15) a (16). Členy začínající derivací podle y_i vypadnou podle Lemmatu 1, protože se jedná o průměr derivací Y-periodických funkcí.

Nyní funkci $f(\mathrm{x})$ převedeme na pravou stranu, v rovnici změníme znaménko

$$-\int_Y \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(a(\mathrm{y})\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(a(\mathrm{y})\frac{\partial u_1}{\partial y_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(a(\mathrm{y})\frac{\partial u_0}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(a(\mathrm{y})\frac{\partial u_0}{\partial x_2}\right)\right]\mathrm{dy} = f,$$

za $u_1(\mathrm{x},\mathrm{y})$ dosadíme z (22) a vzniklé výrazy upravíme, například

$$\int_Y \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(a(\mathrm{y})\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\right)\right]\mathrm{dy} = \int_Y \left[a(\mathrm{y})\frac{\partial \chi_1}{\partial y_1}\right]\mathrm{dy}\,\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2} + \int_Y \left[a(\mathrm{y})\frac{\partial \chi_2}{\partial y_1}\right]\mathrm{dy}\,\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1\,\partial x_2}\,.$$

Konečně sloučením členů se stejnými derivacemi u_0, dostáváme rovnici

$$-\int_Y \left[a(\mathrm{y})\left(1 - \frac{\partial \chi_1}{\partial y_1}\right)\right]\mathrm{dy}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2} - \int_Y \left[a(\mathrm{y})\left(-\frac{\partial \chi_2}{\partial y_1} - \frac{\partial \chi_1}{\partial y_2}\right)\right]\mathrm{dy}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1\,\partial x_2} -$$

$$-\int_Y \left[a(\mathrm{x})\left(1 - \frac{\partial \chi_2}{\partial y_2}\right)\right]\mathrm{dy}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2} = f\,, \tag{23}$$

která už má konstantní koeficienty. Porovnáme-li tuto rovnici s homogenizovanou rovnicí (5), získáme vzorce pro homogenizované koeficienty, které se neliší od (9).

Navíc, jestliže v rozvoji (12) vezmeme první dva členy

$$u_0(\mathrm{x}) + \varepsilon u_1(\mathrm{x}, \mathrm{y})$$

a dosadíme za u_1 z (22), dostáváme řešení U^ε s korektorem (11). Přidáním dalších členů, lze získát korektory vyšších řádů, viz [4] [13], [25].

4.4 Okrajové podmínky

Dosadíme-li rozvoj (12) do okrajové podmínky (2), dostáváme

$$u^\varepsilon(\mathrm{x}) = u_0(\mathrm{x}) + \varepsilon\, u_1\left(\mathrm{x}, \frac{\mathrm{x}}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2\, u_2\left(\mathrm{x}, \frac{\mathrm{x}}{\varepsilon}\right) + \ldots = g \qquad \mathrm{x} \in \Gamma\,.$$

Porovnáním členů se stejnou mocninou ε dostáváme u ε^0 přirozenou podmínku $u_0 = g$ na hranici Γ. Člen u mocniny ε dává $u_1(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0$. Dosadíme-li za u_1 z (22), dostáváme podmínku, kterou – až na triviální případy – splnit nelze. Stejně tak u dalších členů. Tato skutečnost vysvětluje také horší konvergenci řešení $u^\varepsilon \to u^*$ v blízkosti hranici.

Řešení s korektorem U^ε dané (11) zřejmě nesplňuje okrajovou podmínku (2). Proto se často druhý člen násobí tzv. ořezávací funkcí $\zeta(\mathrm{x})$

$$\tilde{U}^\varepsilon(\mathrm{x}) = u_0(\mathrm{x}) - \varepsilon\,\zeta(\mathrm{x}) \left[\chi_1\left(\frac{\mathrm{x}}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_0}{\partial x_1}(\mathrm{x}) + \chi_2\left(\frac{\mathrm{x}}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(\mathrm{x})\right]\,.$$

Takto upravená funkce $\tilde{U}^\varepsilon(\mathrm{x})$ už okrajovou podmínku (2) splňuje. Za ořezávací funkci volíme hladkou funkci $\zeta(\mathrm{x})$, která je nulová na hranici Γ, v úzkém pruhu kolem hranice stoupá k hodnotě 1, kterou má „uvnitř“ oblasti Ω.

5 Matematické aspekty

V této části se pokusím poukázat na zdroje zvláštních obtíží, které přináší homogenizace, zejména posloupnost koeficientů a^ε se zmenšující se periodou. Je to způsobeno, tzv. slabou konvergencí funkcí, které představují prvky prostoru nekonečné dimenze, viz např. [18]. Dopustím se přitom řady zjednodušení, matematici snad prominou.

Při modelovaní materiálu s periodickou strukturou pomocí homogenizace jsme se v rovnici (1) setkali s periodickou funkcí $a(\mathrm{x})$. Tuto funkci jsme „natáhli“ na tzv. Y-periodickou funkci, tj. funkci s periodou 1 v obou proměnných y_1, y_2 a označili $a(\mathrm{y})$. Abychom získali posloupnost rovnic s koeficientem se zmenšující se periodou ε, pro každé $\varepsilon > 0$ jsme vztahem

$$a^\varepsilon(\mathrm{x}) = a\left(\frac{\mathrm{x}}{\varepsilon}\right)$$

„vyrobili“ periodickou funkci a^ε s periodou velikosti ε. Posloupnost ε_n klesající k nule, například $\varepsilon_n = 1/n$ nám pak dává posloupnost funkcí a^{ε_n} se zmenšující se periodou.

Tyto funkce a^{ε_n} při $\varepsilon \to 0$ představují posloupnost, která nekonverguje v obvyklém smyslu, ale ve zvláštním, tzv. slabém smyslu, který si objasníme na jednoduchých příkladech.

5.1 Konvergence funkcí

Obvyklá konvergence vektorů, matic, funkcí a pod. se v lineárních (vektorových) prostorech měří pomocí tzv. normy $\|\cdot\|$, která dává jistý druh velikosti $\|v\|$ prvku v lineárního prostoru.

Říkáme, že *posloupnost* $\{\mathbf{v}_n\}$ *konverguje k limitě* $\mathbf{v}$, pokud se pro $n \to \infty$ vzdálenost, tj. velikost rozdílu členu $\mathbf{v}_n$ a limity $\mathbf{v}$ blíží k nule

$$\mathbf{v}_n \to \mathbf{v}\,, \quad \text{jestliže} \quad \|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\| \to 0\,.$$

Konvergence v prostorech konečné dimenze

V prostorech $\mathbb{R}^N$ lze zavést normu, tj. měření velikosti vektoru $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_N)$ například tzv. euklidovskou normou

$$\|\mathbf{v}\| = \left[v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_N^2\right]^{1/2}\,.$$

Pomocí této normy pak posuzujeme, zda posloupnost $\{\mathbf{v}_n\}$ konverguje.

Poznamenejme, že na tomto prostoru lze zavést i jiné normy, například normu součtovou $\|\mathbf{v}\| = |v_1| + |v_2| + \ldots + |v_N|$ nebo normu maximovou $\|\mathbf{v}\| = \max\{|v_1|, |v_2|, \ldots, |v_N|\}$, na skutečnosti, zda posloupnost $\{\mathbf{v}_n\}$ konverguje to však nemá žádný vliv, říkáme, že tyto normy jsou ekvivalentní. To je charakteristická vlastností prostoru konečné dimenze. Druhou charakteristickou vlastností prostorů konečné dimenze je tzv. kompaktnost, tj. skutečnost, že z každé ohraničené posloupnosti lze vybrat podposloupnost konvergentní.

Konvergence v prostorech nekonečné dimenze

Předmětem našeho zájmu jsou však funkce. Ty lze chápat jako prvky prostoru nekonečné dimenze. Skutečně, každý vektor $\mathbf{v}$ prostoru $\mathbb{R}^N$ konečné dimenze N můžeme ztotožnit s N-ticí jeho souřadnic $(x_1, \ldots, x_N)$. Pro funkce f na intervalu I zase její hodnoty $f(x)$ pro $x \in I$ představují souřadnice, kterých je nekonečně mnoho.

Jsou i jiné možnosti, my se však v dalším omezíme na funkce $v(x)$ na intervalu I, které lze integrovat a jejichž druhá mocnina má konečný integrál $\int_I v(x)\mathrm{d}x$. Analogicky euklidovské normě zavedeme normu, tj. měření velikosti funkcí, pomocí integrálu:

$$\|v\| = \left[\int_I v(x)\mathrm{d}x\right]^{1/2}\,.$$

Tyto funkce lze sčítat i násobit skalárem; říkáme, že tvoří lineární prostor, který označujeme $L^2(I)$. Tato norma určuje tzv. silnou konvergenci, také konvergenci v normě:

$$v_n \to v\,, \quad \text{jestliže} \quad \|v_n - v\| = \left[\int_I |v_n(x) - v(x)|^2 \mathrm{d}x\right]^{1/2} \longrightarrow 0\,.$$

Poznamenejme, že na tomto prostoru lze zavést i jiné normy, například analogii normy maximové. Ty však už ekvivalentní nejsou, protože určují jiné konvergence. To je také charakteristickou vlastností prostorů nekonečně dimenze. Druhou nepříjemnou vlastností je ztráta kompaktnosti, tj. skutečnost, že v prostoru nekonečně dimenze z ohraničené posloupnosti už obecně nelze vybrat podposloupnost, která by konvergovala.

5.2 Slabá konvergence

Vedle konvergence funkcí určené normou můžeme zavést na prostoru funkcí $L^2(I)$ tzv. konvergenci slabou. Při této konvergenci testujeme, zda se funkce $v_n(x)$ blíží k funkci $v(x)$ tím, že rozdíl $v_n(x) - v(x)$ vynásobíme libovolnou, tzv. testovací funkcí $\varphi(x)$ a integrujeme přes interval I:

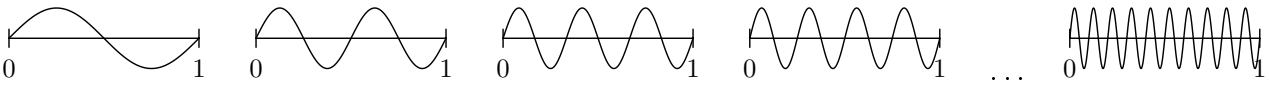
Řekneme, že posloupnost funkcí v_n v prostoru $L^2(I)$ konverguje slabě k funkci v, jestliže pro každou funkci φ také z $L^2(I)$ platí

$$\int_I (v_n(x) - v(x))\,\varphi(x)\mathrm{d}x \to 0\,. \tag{24}$$

Poznamenejme, že pokud posloupnost v_n konverguje silně, tj. v normě, konverguje i slabě. Obráceně to však neplatí, ne každá slabě konvergující posloupnost konverguje i silně, jak bude vidět z následujících příkladů.

Příklad 1 – „zhušťující se sinusovky“

Pro jednoduchost zvolme $I = (0, 1)$. Typickým příkladem posloupnosti funkcí na $L^2(I)$, která konverguje slabě, ale nekonverguje silně, je posloupnost $v_n(x) = \sin(2\pi n x)$. Jsou to periodické funkce se zmenšující se periodou $1/n$, „stále rychleji kmitající“ a „zhušťující se“ sinusovky kmitající s neměnnou aplitudou



Tato posloupnost konverguje slabě k nulové funkci. Lze to spočítat analyticky, ale je to „vidět“ i z obrázku. Zvolíme-li za testovací funkci $\varphi(x) = 1$ integrand ve vztahu (24) je rychle kmitající funkce na obrázku. Při integrování se sousední, stejně velké kladné a záporné části vyruší, takže celkový integrál je stále roven nule.

Pokud zvolíme za φ spojitou funkci, zhušťující se sinusovky mohou mít na různých místech různý rozkmit. Při integrování (24) se už kladné a záporné částí nemusí zcela vyrušit, výsledná hodnota integrálu však s rostoucím n klesá k nule. Posloupnost v_n však nekonverguje silně, protože jediným kandidátem limity je nulová funkce a

$$\|v_n - 0\|^2 = \int_0^1 (\sin(2\pi n x) - 0)^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}(1 - \sin(4\pi n x))\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \neq 0\,.$$

Tento příklad lze zobecnit tím, že sinusovku nahradíme jinou periodickou funkcí $s(y)$ s periodou 1 a nulovým průměrem a její kmity „modulujeme“ funkcí $f(x)$ a posuneme o funkci $g(x)$

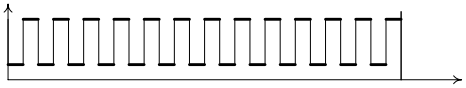
$$v_n(x) = f(x)s(nx) + g(x)\,.$$

Snadno lze ověřit, že takto definovaná posloupnost funkcí konverguje slabě k funkci $v(x) = g(x)$ ale nekonverguje silně s výjimkou případu nulové funkce $s(x)$.

Příklad 2 – „zhušťující se cimbuří“

Pro kladné konstanty α, β definujeme posloupnost funkcí $v_n(x)$ nabývajících na intervalech délky $\frac{1}{2n}$ střídavě hodnoty α_1, α_2, tj. pro celé k položíme

$$v_n(x) = \begin{cases} \alpha & x \in \langle \frac{2k}{2n}, \frac{2k+1}{2n} \rangle\,, \\ \beta & x \in \langle \frac{2k+1}{2n}, \frac{2k+2}{2n} \rangle\,. \end{cases}$$



Také u této posloupnosti lze snadno dokázat, že konverguje slabě ke konstantní funkci $v(x) = (\alpha + \beta)/2$, ale nekonverguje silně.

Dobrá vlastnost slabé konvergence

Jak už jsme uvedli dříve, omezená posloupnost funkcí v prostoru nekonečné dimenze nemusí obsahovat konvergentní podposloupnost, jak tomu bylo v prostorech dimenze konečné. Příkladem mohou být posloupnosti z obou výše uvedených příkladů. Omezená posloupnost funkcí v_n v prostoru $L^2(I)$ však obsahuje vybranou podposloupnost konvergující slabě.

Nepříjemné vlastnosti slabé konvergence

Zatímco silná konvergence zachovává řadu operací, například součet, rozdíl, násobení, převrácenou hodnotu, složenou funkci, slabá konvergence zachovává pouze lineární operace jakou je například součet:

$$\text{Jestliže}\quad u_n \to u \quad \text{a} \quad v_n \to v\,, \quad \text{potom také} \quad u_n + v_n \to u + v.$$

Nezachovává však převrácenou hodnotu, tj. neplatí implikace

$$\text{Jestliže}\quad v_n \to v\,, \quad \text{potom také} \quad \tfrac{1}{v_n} \to \tfrac{1}{v}.$$

Vyvracejí to funkce z Příkladu 2. Zatímco $v_n(x)$ konvergují ke konstantní funkci $v(x) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, převrácené hodnoty konvergují k $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)$, což není převrácená hodnota $v(x)$. Zvolíme-li $\alpha = 1$ a $\beta = 9$, limita $v_n(x)$ je $v(x) = 5$, ale limita $1/v_n(x)$ je $\frac{5}{9}$.

Slabá konvergence také nezachovává součin, tj. neplatí tvrzení

$$\text{Jestliže}\quad u_n \to u \quad \text{a} \quad v_n \to v\,, \quad \text{potom také} \quad u_n \cdot v_n \to u \cdot v.$$

Vyvracejí to například funkce $v_n(x)$ z Příkladu 1. Zvolíme-li $u_n = \sin(2\pi nx)$, obě posloupnosti $u_n(x)$ i $v_n(x)$ konvergují slabě k nulové funkci, ale jejich součin funkce $u_n\, v_n = \sin^2(2\pi nx)$ konverguje ke konstantní funkci $\frac{1}{2}$. Zvolíme-li za $u_n(x) = \cos(2\pi nx)$ případně $w_n(x) = -\sin(2\pi nx)$, které také konvergují slabě k nulové funkci, součin $u_n \cdot v_n$ konverguje slabě k nulové funkci a součin $w_n \cdot v_n$ zase ke konstantní funkci $-\frac{1}{2}$.

Z těchto příkladů je vidět, že pokud máme součin dvou slabě konvergentních posloupností, o limitě jejich součinu nemůžeme obecně nic říct.

5.3 Slabá konvergence a homogenizace

Posloupnost funkcí v_n z Příkladu 1 využil v práci z roku 1967 italský matematik Ennio De Giorgi ke konstrukci posloupnosti diferenciálních operátorů A_n definovaných

$$A_n \,:\, u \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[v_n(x)\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right] .$$

Lze ověřit, že tato posloupnost konverguje k operátoru A s konstantním koeficientem $v(x)$ ve smyslu: pro každou funkci φ platí

$$A_n \to A\,, \quad \text{jestliže} \quad A_n\varphi \to A\varphi.$$

Pokud budeme brát konvergenci řešení u_n rovnic $A_nu_n = f$ s podmínkou $u(0) = u(1) = 0$, tj. konvergenci inverzních operátorů (jak to děláme při homogenizaci)

$$A_n \to A^*\,, \quad \text{jestliže} \quad u_n = (A_n)^{-1}f \to u = (A^*)^{-1}f\,.$$

V obou případech dostáváme, že posloupnost operátorů konverguje, ale pokaždé k jinému limitnímu operátoru; $A \neq A^*$.

Tento příklad inspiroval italskou školu matematiků k definování a studiu konvergence založenou na konvergenci inverzních operátorů, tzv. operátorové G-konvergence, která představuje jen jiný přístup k homogenizaci.

Při homogenizaci v rovnici (4) je součin dvou slabě konvergentních posloupností – koeficientů a^ε a derivací řešení u^ε. V tomto součinu, jak ukazují předešlé příklady, nelze přejít k limitě, což je zdrojem problémů spojených s teorií homogenizace.

Ztráta informace

Při slabé konvergenci dochází totiž ke ztrátě informace. V Příkladu 1 máme posloupnost v_n. Její limitou je nulová funkce, z níž nelze rekonstruovat lokální chování funkcí v_n. Také funkce $v_n(x) = f(x)s(nx) + g(x)$ slabě konvergují k limitní funkci $g(x)$ bez ohledu na to, jaké jsou funkce $f(x)$ a $s(y)$.

Limita slabě konvergentní posloupnosti také nestačí při složené funkci. Kvadratická funkce $F(\xi) = \xi^2$ také nezachovává slabou konvergenci. Stačí opět vzít zhušťující se sinusovky z Příkladu 1. Ty konvergují slabě k nulové funkci, ale funkce $F(v_n(x)) = \sin^2(2\pi nx)$ konvergují ke konstantní funkci $\frac{1}{2}$.

Částečným řešením této ztráty informace je následující dvojškálová konvergence.

5.4 Dvojškálová konvergence

Vraťme se k homogenizaci. Připomeňme, že funkci $f(\mathrm{x},\mathrm{y})$ nazveme Y-periodickou, pokud je Y periodická v proměnné y, tj. má periodu 1 v proměnných y_i.

Nyní budeme značit prvky posloupnost indexem n místo zmenšujících se parametrů $\varepsilon_n \to 0$.

Definice

Řekneme, že posloupnost $u_n(\mathrm{x})$ **dvojškálově konverguje** *k* Y*-periodické limitě* $u^\diamond(\mathrm{x},\mathrm{y})$, *pokud pro každou testovací* Y*-periodickou funkci* $\psi(\mathrm{x},\mathrm{y})$ *platí konvergence*

$$\int_\Omega u_n(\mathrm{x})\psi\left(\mathrm{x},\frac{\mathrm{x}}{\varepsilon_n}\right)\mathrm{dx} \to \int_\Omega\int_Y u^\diamond(\mathrm{x},\mathrm{y})\psi(\mathrm{x},\mathrm{y})\mathrm{dy}\,\mathrm{dx}\,.$$

Jestliže navíc

$$\left\| u_n(\mathrm{x}) - u^\diamond\left(\mathrm{x},\frac{\mathrm{x}}{\varepsilon_n}\right)\right\| \equiv \int_\Omega\left[u_n(\mathrm{x}) - u^\diamond\left(\mathrm{x},\frac{\mathrm{x}}{\varepsilon_n}\right)\right]^2\mathrm{dx} \to 0\,,$$

řekneme, že posloupnost u_n *konverguje k* $u^\diamond$ *silně dvojškálově.*

Poznamenejme, že posloupnost funkcí u_n proměnných x_i má za limitu funkci $u^\diamond$ dvojnásobného počtu proměnných x_i a y_i. Pokud však posloupnost u_n konverguje silně (tj. v normě), limita $u^\diamond$ na proměnných y_i nezávisí.

Příklady

Pro posloupnost $\varepsilon = 1/n$ posloupnosti funkcí z Příkladu 1 dvojškálově konvergují:

$$v_n(x) = \sin(2\pi n x) \quad \text{silně dvojškálově konverguje k} \quad v^\diamond(x,y) = \sin(2\pi n y)$$

$$v_n(x) = f(x)s(nx) + g(x) \quad \text{silně dvojškálově konverguje k} \quad v^\diamond(x,y) = f(x)s(y) + g(x)\,.$$

V těchto příkladech se informace o lokálním chování funkcí v_n v periodách zachovala.

Pokud však posloupnost period funkcí v_n není v souladu se zvolenou posloupností period $\varepsilon_n = 1/n$, funkce $v_n = \sin(2n^2\pi x)$ již jen dvojškálově konverguje k nulové funkci, stejně tak $v_n(x) = f(x)s(n^2x) + g(x)$ jen dvojškálově konverguje k funkci $g(x)$, v obou případech se informace o lokálním chování funkcí v_n ztratila.

Dobré vlastnosti dvojškálové konvergence

Přestože dvojškálová konvergence je silnější než slabá konvergnece, dobrá vlastnost slabé konvergence zůstala zachována:

Tvrzení 1. *Každá ohraničená posloupnost* $u_n(\mathrm{x})$ *obsahuje podposloupnost* $u_{n'}$*, která dvojškálově konverguje k nějaké funkci* $u^\diamond(\mathrm{x}, yr)$.

Na druhé straně za určitých podmínek můžeme přejít k limitě:

Tvrzení 2. *Nechť posloupnosti funkcí*

$$u_n(\mathrm{x}) \quad \textit{dvojškálově konverguje k funkci} \quad u^\diamond(\mathrm{x},\mathrm{y}) \;\; a$$

$$v_n(\mathrm{x}) \quad \textit{silně dvojškálově konverguje k funkci} \quad v^\diamond(\mathrm{x},\mathrm{y})\,.$$

Potom můžeme přejít k limitě

$$u_n(\mathrm{x})v_n(\mathrm{x}) \to \int_Y u^\diamond(\mathrm{x},\mathrm{y})v^\diamond(\mathrm{x},\mathrm{y})\mathrm{dy}\,.$$

Dále při silné dvojškálové konvergenci můžeme přejít k limitě i ve složené funkci:

Tvrzení 3. *Buď* $F(\xi)$ *spojitá funkce a nechť posloupnost funkcí*

$$v_n(\mathrm{x}) \quad \textit{silně dvojškálově konverguje k funkci} \quad v^\diamond(\mathrm{x},\mathrm{y}).$$

Potom posloupnost složených funkcí $F(v_n(\mathrm{x}))$ *konverguje k funkci* $\int_Y F(v^\diamond(\mathrm{x},\mathrm{y}))\mathrm{dy}$.

5.5 Dvojškálová konvergence a homogenizace

Dvojškálová konvergence představuje velmi užitečný prostředek pro homogenizaci. Při homogenizaci koeficienty $a^\varepsilon(\mathrm{x})$ v posloupnosti rovnic silně dvojškálově konvergují. Pokud dokážeme, že derivace posloupnosti řešení $u^\varepsilon(\mathrm{x})$ jsou ohraničené, díky Tvrzení 1 můžene z ní vybrat podposloupnost dvojškálově konvergující. Máme tedy součin posloupnosti silně dvojškálově konvergující a dvojškálově konvergující a díky Tvrzení 2 můžeme přejít k limitě a dostáváme homogenizovanou rovnici podobnou rovnici (23). Pokud se podaří odseparovat proměnné x a y dostáváme vzorce pro homogenizované koeficienty.

Díky Tvrzení 3 můžeme „homogenizovat“ také nelineární rovnice. Nutno však poznamenat, že ani v lineárních rovnicích limitní rovnice nemusí být stejného typu, například z diferenciální rovnice se stane rovnice integrodiferenciální, ve které homogenizované koeficienty závisejí na předchozím řešení; může se zde projevit efekt paměti materiálu.

6 Výsledky homogenizace vybraných problémů

Autor se zabývá matematickým modelováním prostředí s periodickou strukturou již od roku 1978 a publikoval řadu prací v této oblasti. Jsou to jednak články popisující hlavně nové výsledky – např. [11, 12, 15, 16, 19, 20, 21, 24], a potom články, zmiňme [13, 14, 17, 18, 22, 23], jejichž cílem je seznámit matematickou a technickou veřejnost s homogenizací a s pojmy, které s ní souvisejí. V této části stručně popíšeme výsledky autora ve dvou oblastech.

6.1 Homogenizace rovnic lineární pružnosti

V tomto odstavci jsou popsány problémy řešené v [11, 12]. Deformaci pružného tělesa modelují rovnice lineární pružnosti. Fyzikální situaci popisuje vektor posunutí $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a symetrický tenzor napětí $\mathbf{t} = (t_{ij})_{i,j=1}^3$ proměnné x, která probíhá objem tělesa Ω. Rovnice vycházejí z linearizovaného tenzoru malých deformací $\mathbf{e} = \frac{1}{2}\left[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^\top\right]$, lineárního Hookeova zákona $\mathbf{t} = A : \mathbf{e}$ a pohybových rovnic $\operatorname{div}\mathbf{t} + \mathbf{f} = 0$.

Periodickou strukturu heterogenního materiálu popisují konstanty v Hookeově zákonu, kterými jsou periodické funkce; je to čtyřrozměrná matice A funkcí $a_{ijk\ell}$ s jistými symetriemi. Při homogenizaci zvolíme opět základní periodu Y, například jednotkovou krychli $Y = (0,1)^3$ a definujeme posloupnost ε-periodických koeficinetů vztahem

$$a^\varepsilon_{ijk\ell}(\mathrm{x}) = a_{ijk\ell}\left(\frac{\mathrm{x}}{\varepsilon}\right) .$$

Příslušný vektor posunutí $\mathbf{u}$ a tenzor napětí $\mathbf{t}$ označíme také indexem ε. Dosadíme-li tenzor deformace do Hookeova zákonu a přidáme-li pohybové rovnice, dostáváme soustavu rovnic

$$\mathbf{t}^\varepsilon = \mathrm{A}^\varepsilon(\mathrm{x}) : \nabla\mathbf{u}^\varepsilon , \tag{25}$$

$$-\operatorname{div}\mathbf{t}^\varepsilon = f^\varepsilon . \tag{26}$$

Soustavu rovnic doplníme okrajovými podmínkami předepsaného posunutí na části hranice Γ_u a předepsaného napětí na zbytku hranice Γ_t s vektorem normály $\mathbf{n}$

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} \quad \text{na } \Gamma_u \qquad\qquad \mathbf{t}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{T} \quad \text{na } \Gamma_t . \tag{27}$$

Vyloučíme-li tenzor napětí $\mathbf{t}^\varepsilon$ jeho dosazením z (25) do (26), dostáváme tzv. úlohu v primární formulaci, tj. formulaci v posunutích, která má tvar soustavy tří lineárních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu. Jedná se o speciální případ eliptické soustavy parciálních diferenciálních rovnic, která už byla „homogenizována“ v [4].

Použijeme-li inverzní Hookeův zákon vyjadřující závislost deformace na napětí $\mathbf{e} = \mathrm{B} : \mathbf{t}$ s čtyřrozměrnou maticí B^ε koeficientů $b^\varepsilon_{ijk\ell}$ inverzní k matici A^ε, můžeme přejít k tzv. duální formulaci, tj. formulaci v napětích, ve které hledáme tentor napětí jakožto řešení pohybových rovnic na podmnožině, tzv. poli staticky přípustných tenzorů napětí. Tato formulace, ač složitější, má tu přednost, že počítá přímo napětí, které obvykle zajímá statiky v prvé řadě. V primární formulaci napětí získáme až derivací posunutí, čímž se snižuje řád přesnosti.

V našem případě nespojitých koeficientů $a_{ijk\ell}$ a $b_{ijk\ell}$ musíme ovšem uvažovat v obou případech zobecněnou, tzv. slabou formulaci rovnic. Vedle již zmíněné primární a duální formulace ve tvaru rovnic uvažujeme také příslušné variační formulace, které vedou na minimalizaci funkcionálu potenciální energie při primární úloze a na minimalizaci funkcionálu doplňkové energie, viz např. [8].

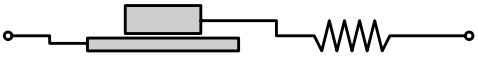
V práci jsou metodou asymptotického rozvoje odvozeny homogenizované rovnice a vzorce pro příslušné koeficienty $a^*_{ijk\ell}$ a $b^*_{ijk\ell}$ a dokázána konvergence řešení $\mathbf{u}^\varepsilon$ a $\mathbf{t}^\varepsilon$ k příslušným homogenizovaným řešením $\mathbf{u}^*$ a $\mathbf{t}^*$.

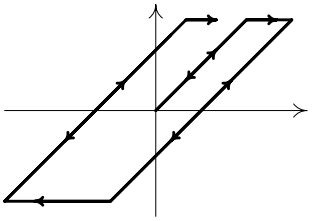
6.2 Homogenizace rovnic s hysterézním operátorem

V tomto odstavci přiblížíme problematiku studovanou v pracech [19, 20, 21, 24].

Podle svého názvu hystereze znamená takové chování materiálu, při kterém se následky opožďují za svojí příčinou. Vyskytuje se například v magnetických jevech, při fázových přeměnách a v mechanice je to plastické deformaci. Hystérézní operátor popisuje zvláštní nelineární závislost například napětí na deformaci, při které současná hodnota napětí závisí na předchozí historii deformace do současnosti, přitom ale závisí pouze na hodnotách této deformace bez ohledu jejich rychlost, viz například [10].

Základem pro budování operátorů pružně-plastického chování je tzv. „stop operátor“, který lze mechanicky interpretovat jako pružinu sériově spojenou s tzv. třecím prvkem. Při natahování soustavy se nejprve natahuje pružina a napětí roste. Když napětí dosáhne prahu tření, napětí se už dále nezvyšuje, pružina se už nenatahuje, místo toho třecí prvek „prokluzuje“. Pokud soustavu nyní začneme stlačovat, nejprve se zkracuje pružina a třecí prvek se projeví až po dosažení opačné hodnoty prahu tření.





V diagramu závislosti napětí na deformaci se objeví tzv. hysterezní smyčka s konkávními rostoucími větvemi a konvexními klesajícími větvemi, přičemž tyto křivky mají jenom dva „sklony“. Paralelní kombinací těchto „stop operátorů“ $\mathscr{S}_r$ s různými hodnotami parametru r získáme lomené hysterézní smyčky; infinitezimální paralelní kombinací můžeme dosáhnout „oblé“ symetrické hysterézní smyčky s konkávními rostoucími větvemi a konvexními klesajícími větvemi. Dostali jsme tak tzv. Prandtlův-Ishlinského operátor, který označíme $\mathscr{F}$. Kombinaci „stop operátorů“ v něm charakterizuje tzv. distribuční funkcí $\xi(r)$, která tímto operátor jednoznačně určuje.

Při modelování heterogenního materiálu tyto distribuční funkce jsou navíc závislé na místě x, tj. $\xi(x,r)$. Při homogenizaci definujeme posloupnost operátorů $\mathscr{F}^\varepsilon$ pomocí ε-periodických funkcí $\xi^\varepsilon(x,r) = \xi(x/\varepsilon, r)$.

V práci [20] je vyřešena homogenizace jednorozměrné vlnové rovnice

$$\rho^\varepsilon \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathscr{F}^\varepsilon\left[\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}\right]\right) + f^\varepsilon\,,$$

kterou lze fyzikálně interpretovat jako podélné kmity pružně-plastické tyče. V práci [21] je provedena homogenizace jednorozměrné rovnice difúze

$$c^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathscr{F}^\varepsilon\left[\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}\right]\right) + f^\varepsilon\,,$$

a konečně v [24] je vyřešena úloha homogenizace vícerozměrné rovnice vedení tepla s fázovými přechody

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathscr{G}^\varepsilon\left[u^\varepsilon\right]\right) = \operatorname{div}(A^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon) + f^\varepsilon\,,$$

kde $\mathscr{G}^\varepsilon$ je hysterézní operátor inverzní k $\mathscr{F}^\varepsilon$ a A^ε je matice ε-periodických koeficientů.

Ve všech případech je odvozen tvar homogenizované rovnice a homogenizovaného operátoru a dokázána konvergence řešení u^ε k řešení u^* homogenizované úlohy.

7 Problémy modelování reálných materiálů

Jak už bylo zmíněno v první části, modelování reálných materiálů přináší celou řadu problémů. Struktura materiálu není zcela periodická, složky se neřídí lineárním Hookeovým zákonem, mohou v nich vznikat trhliny a problémem jsou i jevy na rozhraní jednotlivých složek. Navíc všechna data jsou získávány experimentálně a jsou proto zatíženy chybou a mají náhodný charakter. Tyto oblasti jsou většinou „pole neoraná“.

Zmíním ještě dvě témata, kterými se pod mým vedením zabývají moji mladší kolegové.

7.1 Metoda spolehlivého řešení

Hodnoty všech parametrů určující vlastnosti materiálů jsou známy pouze v určitém rozmezí, protože byly získány měřením, která jsou vždy zatížena chybou. Otázku, jak tyto nepřesnosti ovlivňují výsledek, řeší tzv. metoda spolehlivého řešení, kterou navrhl Ivo Babuška a teoreticky rozpracoval Ivan Hlaváček [6].

Podstata metody spočívá v tom, že zavedeme tzv. množinu přípustných dat, která jsou vymezena pomocí možných nepřesností měření. Místo jedné rovnice tak máme celou třídu přípustných rovnic s daty, tj. koeficienty, z této množiny. Podle povahy úlohy potom zvolíme vhodný funkcionál, který hodnotí „kritičnost“ situace a hledáme jeho maximum. Přitom je možné využívat metod optimalizace, protože se také jedná o hledání extrému, i když ne „nejlepší“ ale „nejhorší“ situace. Proto se metodě říká také metoda nejhoršího scénáře.

Práce [28, 29] se zabývají homogenizací modelové úlohy (4), přičemž hodnoty koeficientu $a(\mathrm{y})$ na obou složkách se pohybují v jistém rozmezí. Metodou spolehlivého řešení jsou spočítána rozmezí, ve kterých se pohybují jednotlivé homogenizované koeficienty a^*_{ij}, i které koeficienty $a(\mathrm{y})$ dávají tyto mezní hodnoty. Dále jsou spočítány mezní hodnoty zobecněného gradientu v kritických místech, tj. v místech rozhraní složek.

7.2 Materiály s náhodnou strukturou

Metoda homogenizace vychází z předpokladu, že struktura materiálu je periodická. Reálný kompozitní materiál však zcela periodický není, poloha vlákna může být náhodně vychýlena ze středu periody, také průměr vlákna se náhodně mění. Vzniká tu důležitá otázka, jakých chyb se můžeme dopustit, jestliže metodou homogenizace modelujeme materiál, který není zcela periodický.

Práce [31, 32] řeší tuto otázku. Bylo vygenerováno 20 náhodných struktur průřezu kompozitního materiálu. Všechny vzorky měly stejnou střední hodnotu průměru vláken i stejný poměr obsahu vlákna i matrice jako vzorek s periodickou strukturou. Pro všechny vzorky bylo spočítáno řešení modelové úlohy (4) a výsledky srovnány. Ukázalo se, že hodnota koeficientu spočítaná pomocí homogenizace se příliš neliší od hodnoty spočítané z náhodných vzorků.

Protože řešení přímo srovnávat nelze, byly srovnány histogramy gradientu řešení. Ukázalo se, že gradienty řešení z náhodných vzorků dosahují podstatně vyšších hodnot než gradient řešení vzorku s periodickou strukturou, který se dobře shodoval s gradientem homogenizovaného řešení s korektorem. Tyto špičky se objevily v místech, kde se vlákna k sobě přiblížila. Ukazuje se tak, že zanedbat náhodnost struktury materiálu může vést k významným chybám.

Závěr

Matematické modelování materiálů s periodickou strukturou může přinést velké úspory finanční i časové při navrhování nových kompozitních materiálů. Experimentům se sice zcela nevyhneme, ale můžeme podstatně omezit jejich množství. Lze vytvořit stovky různých hypotetických variant materiálů a numericky spočítat jejich vlastnosti. To umožňuje optimalizovat jejich vlastnosti a pak experimentálně ověřovat až optimální varianty.

Významnou roli při matematickém modelování materiálů s periodickou strukturou přitom hraje matematická metoda zvaná homogenizace. Metoda umožňuje ze znalosti vlastností jednotlivých složek a jejich prostorového uspořádání spočítat globální vlastnosti výsledného materiálu. Metoda je zcela objektivní, vhodná pro libovolné uspořádání složek.

Při matematickém modelování vycházíme z příslušného modelu chování dané složky. V případě, že použijeme rovnice lineární pružnosti, dostáváme soustavu lineárních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu. Výpočet vlastností kompozitního materiálů pomocí homogenizace potom spočívá v řešení pomocné úlohy na základní periodě a následného výpočtu efektivních parametrů. Přitom navíc získáme i korektory pro aproximaci lokálního chování materiálu. Tyto rovnice jsou současnými numerickými metodami již dnes řešitelné s dostatečnou přesností.

Teorie homogenizace mnoha lineárních i řady dalších rovnic byla již vytvořena. Modelování reálných kompozitních materiálů však naráží na řadu obtíží. Všechny vlastnosti materiálů jsou zatíženy chybou, struktura reálného materiálu není zcela periodická. Navíc reálný materiál se nechová podle lineárního Hookeova zákona a zvláštní problémy vznikají na rozhraní složek. K řešení těchto problémů přispěly i práce autora a jeho mladších kolegů.

Přes řadu svých úspěchů matematické modelování reálných kompozitních materiálů představuje pro aplikovanou (i čistou) matematiku obrovskou výzvu a další výzkum v této oblasti jistě přinese spoustu nových zajímavých výsledků a také přínos pro technickou praxi. V současné době se autor se svými mladšími kolegy zabývá především zahrnutím náhodných faktorů do modelu materiálu, které vedou na stochastické diferenciální rovnice. Tím se tyto modely více přibližují reálným materiálům.

Poděkování

Tento výzkum byl v průběhu let postupně podporován několika granty Grantové agentury České republiky, posledním z nich je Grant č. 201/03/0570.

Na tomto místě musím vzpomenout své vynikající učitele, kterým vděčím za mnohé. Z celé řady zmíním učitelky matematiky Matyldu Zíkovou na základní a Kornélii Kropilákovou na střední škole, které mne získaly pro studium matematiky. Dále pak učitele Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, zejména vedoucího diplomové práce docenta Oldřicha Johna a profesora Jindřicha Nečase, který byl mým školitelem během mé vědecké přípravy a také mne přivedl k matematickému modelování materiálů s periodickou strukturou.

Literatura

[1] G. ALLAIRE: *Homogenization and two-scale convergence,* SIAM J. Math. Anal. 23 (1992), 1482-1518.

[2] I. BABUŠKA: *Homogenization approach in engineering,* Computing methods in applied sciences and engineering, Lecture notes in Econ. and Math. Systems 134, Springer, Berlin 1976, pp. 137-153.

[3] N. S. BACHVALOV, G. P. PANASENKO: *Averaging of processes in periodic media,* (Russian), Nauka, Moscow 1984..

[4] A. BENSOUSSAN, J. L. LIONS, G. PAPANICOLAOU: *Asymptotic analysis for periodic structure,* North Holland, Amsterdam, 1978.

[5] A. BRAIDES, A. DEFRANCESCHI: *Homogenization of multiple integrals,* Clarendon Press, Oxford 1998.

[6] I. HLAVÁČEK: *Reliable solutions of the elliptic boundary value problems with respect to uncertain data,* Nonlinear Anal. 30 (1997), 3879-3890.

[7] A. PANKOV: *G-convergence and homogenization of nonlinear partial differential operators,* Kluwer, Dordrecht 1997.

[8] J. NEČAS, I. HLAVÁČEK: *Úvod do matematické teorie pružných a pružně plastických těles,* SNTL, Praha 1983.

[9] E. SANCHEZ PALENCIA: *Non-homogeneous media and vibration theory,* Lecture Notes in Physics 127, Springer, Berlin 1980.

[10] A. VISINTIN: *Differential models of hysteresis,* Springer, Berlin 1994.

Vybrané práce autora týkající se studované problematiky

[11] J. FRANCŮ: *Homogenizace rovnic lineární pružnosti,* Kandidátská disertační práce, Katedra matematické fyziky Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy v Praze, 1980, 76 stran.

[12] J. FRANCŮ: *Homogenization of linear elasticity equations,* Aplikace matematiky 27 (1982), 96–117.

[13] J. FRANCŮ: *Homogenizace,* Sborník přednášek z 6. semináře z parciálních diferenciálních rovnic, Manětín 1981, JČSMF-VŠSE, Plzeň 1982, 21–63.

[14] J. FRANCŮ: *Homogenizace – matematická metoda výpočtu materiálů s periodickou strukturou,* Stavebnícky časopis 31 (1983), 789–814.

[15] J. FRANCŮ, A. K. SCHIERWAGEN: *Wave transmission in cable structure of tree type,* Appl. Math. Lett. 2 (1989), 131–133.

[16] J. FRANCŮ, A. K. SCHIERWAGEN: *A continuum description of membrane potential changes in branching dendrites of neurons,* SAMS 9 (1992), 57–68.

[17] J. FRANCŮ: *Homogenization,* in Mathematical Methods in Computed Aided Optimal Design, July 12-16, 1993, MFF UK, Prague 1993, 12 pages.

[18] J. FRANCŮ: *Weak convergence in infinite dimensional spaces,* Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis 2 (1994), 45–60.

[19] J. FRANCŮ: *Homogenization of scalar hysteresis operators,* EQUADIFF 9 (Brno 1997). CD ROM, Masaryk University, Brno, 1998, 111–122.

[20] J. FRANCŮ, P. KREJČÍ: *Homogenization of scalar wave equations with hysteresis,* Continuum Mech. Thermodyn. 11 (1999), 371–390.

[21] J. FRANCŮ: *Homogenization of diffusion equation with scalar hysteresis operator,* Mathematica Bohemica 126 (2001), 363–377.

[22] J. FRANCŮ: *Homogenizace rovnic s hysterézním operátorem,* Sborník z 10. semináře Moderní matematické metody v inženýrství, VŠB-TU Ostrava, 66–70.

[23] J. FRANCŮ: *Slabá a dvouškálová konvergence,* Sborník ze semináře Matematika na vysokých školách, Herbertov 2001, JČMF, Praha 65–68.

[24] J. FRANCŮ: *Homogenization of heat equation with hysteresis,* Mathematics and Computers in Simulation 61 (2003), 591-597.

Vybrané autorem vedené práce diplomantů a doktorandů

[25] M. JANDERKOVÁ: *Výpočet koeficientů a korektorů homogenizované rovnice,* Diplomová práce, Katedra matematické analýzy, Přírodovědecká fakulta Univerzity J. E. Purkyně v Brně, 1984, 21 stran.

[26] L. NECHVÁTAL: *Homogenizace parabolických operátorů,* Diplomová práce, Ústav matematiky FSI VUT v Brně, 1999, 53 stran.

[27] L. NECHVÁTAL: *Alternative approaches to the two-scale convergence,* Applications of Mathematics 49 (2004), 97–110.

[28] L. NECHVÁTAL: *Homogenizace úloh s neurčitými koeficienty,* Disertační práce, Ústav matematiky FSI VUT v Brně 2003, 52 stran.

[29] L. NECHVÁTAL: *Worst Scenario Method in Homogenization - Linear Case,* Applications of mathematics, 25 stran, v recenzním řízení.

[30] M. NESRSTA: *Modelování mikroskopické deformace kompozitních materiálů metodou homogenizace,* Diplomová práce, Ústav matematiky FSI VUT v Brně, 1998.

[31] T. POSPÍŠIL: *Matematické modelování kompozitních materiálů,* Diplomová práce, Ústav matematiky FSI VUT v Brně, 2003, 41 stran.

[32] T. POSPÍŠIL: *On Mathematical Modelling of Composite Material with Random Structure,* Mathematics and Computers in Simulation, 13 stran, v recenzním řízení.

[33] T. POZDÍŠEK: *Výpočet efektivních parametrů kompozitních materiálů metodou homogenizace,* Diplomová práce, Ústav matematiky FSI VUT v Brně, 1998.

English summary

Media with periodic structure namely composite materials are widely used in industry for its exclusive properties. Combination of components with different properties enables to achieve special properties. Since there are plenty of hypothetical different composites with various volume contents and namely spatial distribution of the components their mathematical modeling is desirable. It enables to lower the number of experimental measurements and thus to save money and time during project preparation.

Mathematical method called homogenization enables effective computation of these materials. From the physical point of view it means replacing the material with periodic structure by an "equivalent" one, in the mathematical setting it replaces differential equation with periodic coefficients by an constant coefficient equation giving globally the same solution. The mathematical approach proposed in 1973 by Ivo Babuška considers a sequence of equations with coefficients with diminishing period. The corresponding sequence of solutions converges to the so called homogenized solution of the so called homogenized equation, which serves as an approximation of the original problem. In frame of linear elasticity the current computers are able to compute the parameters of the homogenized material with sufficient accuracy even for 3D problems.

The homogenization theory is carried out for most of linear equations and for some nonlinear problems. Modeling of real composite materials nevertheless brings several further problems. Properties of the components of the composite are not known exactly but in an extent only. The problem can be solved by the method of reliable solution. Moreover, real materials do not have exactly periodic structure, the problem leads to stochastic differential equations. We can conclude that the modeling of real composites means a great challenge for applied (and even for pure) mathematics and it also helps technology.

In the thesis the homogenization method including its history is described in Section 1. It is demonstrated in Section 2 on a model problem for equation

$$-\mathrm{div}\left[a\left(\frac{\mathrm{x}}{\varepsilon}\right)\nabla u^{\varepsilon}\right] = f$$

on a domain Ω with boundary condition $u = g$ and illustrated on examples in Section 3.

Method of asymptotic expansion in Section 4 gives a powerful tool for derivation the formulae for computing the coefficients of the homogenized equation. Section 5 explains the sources of mathematical difficulties connected with homogenization. Last two sections contains a brief description of results obtained by the author and his younger colleagues.