

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Mgr. Jana Hoderová

**SEMIREGULÁRNÍ SIMPLEXY
V METODĚ KONEČNÝCH PRVKŮ**

**SEMIREGULAR SIMPLEXES IN THE FINITE ELEMENT
METHOD**

Zkrácená verze Ph.D. Thesis

Obor: Matematické inženýrství
Školitel: Prof. RNDr. Alexander Ženíšek, DrSc.
Oponenti: Prof. RNDr. Ivanka Horová, CSc.
Prof. Ing. Jiří Kratochvíl, CSc.
Prof. RNDr. Miloslav Feistauer, DrSc.
Datum obhajoby: 9. března 2005

KLÍČOVÁ SLOVA

metoda konečných prvků, semiregulární prvky, podmínka maximálního úhlu

KEYWORDS

finite element method, semiregular elements, maximum angle condition

Disertační práce je uložena na oddělení vědy a výzkumu FSI VUT v Brně, Technická 2,
616 69 Brno

© Jana Hoderová, 2005

ISBN 80-214-2926-7

ISSN 1213-4198

OBSAH

1	ÚVOD	5
2	ŘEŠENÍ NĚKTERÝCH NELINEÁRNÍCH PROBLÉMŮ POMOCÍ SEMIREGULÁRNÍCH KONEČNÝCH PRVKŮ	6
2.1	Formulace problému	6
2.2	Diskrétní Friedrichsova nerovnost	8
2.3	Abstraktní odhad chyby	9
2.4	Maximální rychlost konvergence	10
2.5	Obecná věta o konvergenci	11
2.6	Numerické výsledky - 2D	11
3	SEMIREGULÁRNÍ HERMITEOVSKÉ TETRAHEDRÁLNÍ KUBICKÉ KONEČNÉ PRVKY	12
3.1	Úvod	12
3.2	Základní odhady	13
3.3	Aplikace základních odhadů	14
3.4	Numerické výsledky - 3D	17
4	CURRICULUM VITAE	20
5	SUMMARY	21

1 ÚVOD

Matematická teorie metody konečných prvků je důkladně zpracována pro *regulární* konečné prvky. Pro *semiregulární* konečné prvky však dosud systematicky vytvořena není.

Tato disertační práce je zaměřena na dva samostatné problémy, které se semiregulárními konečnými prvky zabývají.

V části I disertační práce je metodou konečných prvků analyzován variační problém, který je formálně ekvivalentní dvojrozměrnému eliptickému okrajovému problému se smíšenými nehomogenními podmínkami na hranici (tj. na $\Gamma_1 \subset \partial\Omega$ je předepsána Dirichletova podmínka a na zbývající části $\Gamma_2 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1$ Neumannova okrajová podmínka).

Daný problém je řešen pro případ ohraničené oblasti Ω , jejíž hranice $\partial\Omega$ je tvořena dvěma kružnicemi Γ_1, Γ_2 se stejným středem S_0 . Tyto kružnice mají poloměry $R_1, R_2 = R_1 + \varrho$, kde $\varrho \ll R_1$. Eliptický problém řešený na takové oblasti má mnoho praktických aplikací (např. chrupavka kyčelního kloubu, vzduchová štěrbinová mezera mezi rotorem a statorem v elektromotoru).

Analýza tohoto problému je omezena na případ semiregulárních konečných prvků s lineárním polynomem, které jsou jednoznačně určeny funkčními hodnotami ve vrcholech trojúhelníka. Podobná analýza pro případ lineárního eliptického problému na stejné oblasti Ω je provedena v článku [12]. Výsledky této disertační práce jsou zobecněním [12] a [3] a byly v ucelené formě publikovány v [21]. V disertační práci jsou všechny použité věty dokázány, a proto je část I disertační práce možno číst bez použití odkazů na další literaturu.

V závěru části I disertační práce jsou uvedeny numerické výsledky, které jsou v dobré shodě s teorií.

Hlavním důvodem toho, že analýza regulárních konečných prvků (tj. prvků, které splňují podmínku minimálního úhlu) je symetrická a relativně snadná, vyplývá z následujícího faktu: Jakobián J_T transformace daného trojúhelníka T na referenční trojúhelník T_0 splňuje

$$C_1 h_T^2 \leq |J_T| = 2 \text{meas}_2 T \leq C_2 h_T^2,$$

kde h_T je délka nejdelší strany trojúhelníka T . Taková oboustranná nerovnost v teorii pro semiregulární trojúhelníkové konečné prvky neexistuje, protože míra $\text{meas}_2 T$ může být libovolně malá.

Část II disertační práce se zabývá konstrukcí *semiregulárních* kubických čtyřstěnných konečných prvků Hermiteova typu a důkazem odpovídajících interpolačních teorémů. Tato část je modifikací publikované práce [18] a je doplněna numerickými výpočty, které jsou uvedeny a diskutovány v kapitolách 14 a 15 disertační práce.

Zatímco v případě semiregulárních konečných prvků Dirichletova typu byly některé výsledky již publikovány, případ dvoj i trojrozměrných jednoduchých koneč-

ných prvků Hermiteova typu je prakticky nezmapován. Výjimkou ve dvou dimenzích je článek [14] a ve třech dimenzích článek [18].

Vzhledem k rychlosti výpočtu jsou konečné prvky s lineárním polynomem, který je určen funkčními hodnotami ve vrcholech, velice oblíbené v aplikacích. Nicméně kubické dvoj a trojrozměrné konečné prvky Hermiteova typu jsou velice zajímavé z teoretického hlediska. Zaručují totiž spojitost parciálních derivací v uzlech dané triangulace nebo tetragonalizace. Takový přímý výpočet parciálních derivací v uzlech je vždy přesvědčivější, než jejich pozdější výpočet z hodnot v uzlech, jak je obvyklé.

První teoretický krok (po sestrojení konečného prvku) spočíval v důkazu odpovídajícího interpolačního teorému. Tento teorém nám umožňuje dokázat konvergenci metody konečných prvků v nejjednodušším případě, kdy uvažovaná oblast Ω je tvaru polyedru a numerická integrace není použita.

V závěrečných kapitolách 14 a 15 části II disertační práce jsou uvedeny numerické výsledky. Jejich získání bylo mnohem náročnější než ve dvou dimenzích.

2 ŘEŠENÍ NĚKTERÝCH NELINEÁRNÍCH PROBLÉMŮ POMOCÍ SEMIREGULÁRNÍCH KONEČNÝCH PRVKŮ

První část disertační práce zobecňuje výsledky článků [3] a [12]. V [3] je stejný problém formulován na libovolné oblasti s lipschitzovsky spojitou hranicí a metoda konečných prvků je analyzována za podmínky minimálního úhlu. V [12] je metoda konečných prvků zkoumána pro lineární silně eliptický smíšený okrajový problém na úzkém mezikruží za podmínky maximálního úhlu. V disertační práci je uvažována stejná oblast jako v [12], ale za podmínky maximálního úhlu je analyzován nelineární problém.

V kapitole 4 disertační práce je v podobě věty 19 formulován abstraktní odhad chyby, který má dva důležité důsledky uvedené v kapitole 8 a 9.

První část práce je uzavřena kapitolou 10, kde jsou uvedeny numerické výsledky. Značení Sobolevových prostorů, jejich norem a seminorem je stejné jako v [5].

2.1 FORMULACE PROBLÉMU

V kapitole 2 disertační práce je formulován tento okrajový problém

$$(2.1) \quad - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial b_i}{\partial x_i}(\cdot, u, \nabla u) + b_0(\cdot, u, \nabla u) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

$$(2.2) \quad u = 0 \quad \text{na } \Gamma_1,$$

$$(2.3) \quad \sum_{i=1}^2 b_i(\cdot, u, \nabla u) n_i(\Omega) = q \quad \text{na } \Gamma_2$$

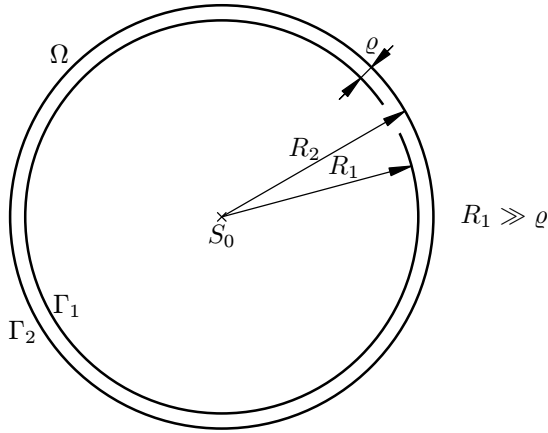
kde Ω (viz Obr. 2.1) je dvojrozměrná ohraničená oblast s hranicí $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, kde Γ_1 a Γ_2 jsou kružnice s poloměry R_1 a $R_2 = R_1 + \rho$. Předpokládejme, že kružnice Γ_1 , Γ_2 mají stejný střed S_0 a že

$$(2.4) \quad R_1 \gg \rho.$$

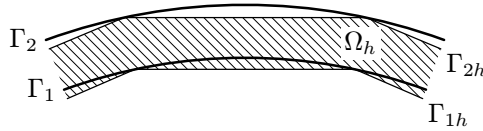
Je zřejmé, že $\partial\Omega$ je lipschitzovsky spojitá. Symboly $n_i(\Omega)$ ($i = 1, 2$) označují složky jednotkové vnější normály hranice $\partial\Omega$. Dále $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$, $b_i : \Omega \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^1$ (tj. $b_i = b_i(x, \xi) = b_i(\cdot, u, \nabla u)$, kde $x = (x_1, x_2) \in \Omega$, $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2) = (u(x), \nabla u(x)) \in \mathbf{R}^3$, $i = 0, 1, 2$) jsou dané funkce splňující určité předpoklady (viz Assumptions 1 disertační práce) a $\nabla u = (\partial u / \partial x_1, \partial u / \partial x_2)$.

Tento typ eliptického okrajového problému je řešen standardně metodou konečných prvků, kdy se postupně přejde od řešení okrajového problému (2.1)–(2.3) k problému variačnímu (viz Continuous Problem 3 disertační práce).

Aby bylo možno přistoupit k řešení variačního problému metodou konečných prvků, je oblast Ω aproximována polygonální oblastí Ω_h s polygonální hranicí $\partial\Omega_h$. Vrcholy této oblasti $\partial\Omega_h$ leží na $\partial\Omega$. Symboly Γ_{1h} a Γ_{2h} označují části hranice $\partial\Omega_h$, které aproximovaly Γ_1 a Γ_2 , viz Obr. 2.2.



Obr. 2.1: Oblast Ω



Obr. 2.2: Oblast Ω_h

1. Definice.

- a) Řekneme, že množina triangulací $\{\mathcal{T}_h\}$, $h \rightarrow 0$ splňuje *podmínku maximálního úhlu*, pokud existuje kladná konstanta $\gamma_0 < \pi$ taková, že

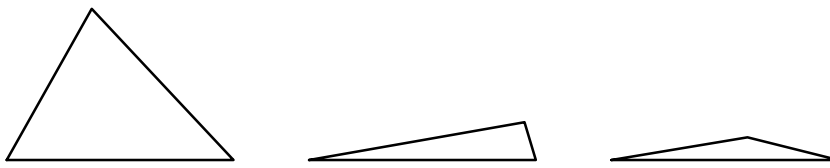
$$(2.5) \quad \gamma_T \leq \gamma_0 < \pi \quad \forall \bar{T} \in \mathcal{T}_h, \quad \forall \mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\},$$

kde γ_T je velikost největšího úhlu trojúhelníku T .

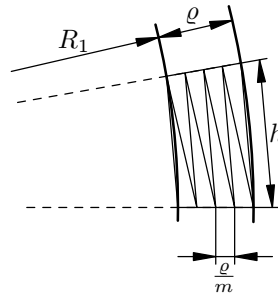
- b) Řekneme, že množina triangulací $\{\mathcal{T}_h\}$, $h \rightarrow 0$ splňuje *podmínku minimálního úhlu*, pokud existuje kladná konstanta $\vartheta_0 > 0$ taková, že

$$(2.6) \quad \vartheta_T \geq \vartheta_0 > 0 \quad \forall \bar{T} \in \mathcal{T}_h, \quad \forall \mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\},$$

kde ϑ_T je velikost nejmenšího úhlu trojúhelníku T .



Obr. 2.3: Regulární, semiregulární a iregulární trojúhelník



Obr. 2.4: Dělení oblasti Ω_h

Je třeba poznamenat, že pokud daná triangulace splňuje podmínku minimálního úhlu, pak automaticky splňuje i podmínku maximálního úhlu.

Nyní bude oblast Ω_h pokryta semiregulárními trojúhelníky, tj. „úzkými“ trojúhelníky splňujícími podmínku maximálního úhlu (viz Obr. 2.3 a definice 1). To znamená, že v našich úvahách bude vystupovat nerovnost

$$(2.7) \quad \frac{\rho}{m} \ll h,$$

kde h je délka nejdelší strany a ρ/m je délka nejkratší v daném dělení oblasti Ω_h (viz Obr. 2.4).

V kapitole 2.3 disertační práce je zaveden prostor X_h , resp. V_h , který je konečněprvkovou aproximací prostoru $H^1(\Omega)$, resp. V . Symboly $a_h(w, v)$, $L_h^\Omega(v)$ a $L_h^\Gamma(v)$, kde $w, v \in X_h$, označují aproximace forem $\tilde{a}_h(w, v)$, $\tilde{L}_h^\Omega(v)$, $\tilde{L}_h^\Gamma(v)$ ve smyslu numerické integrace.

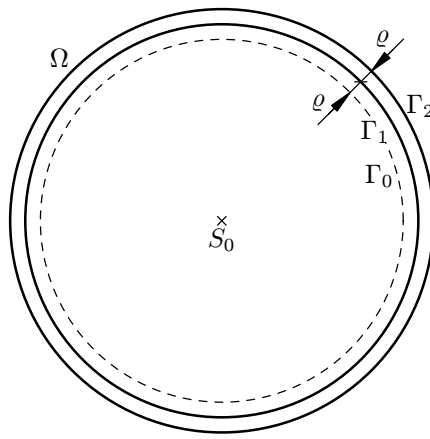
Chyby, způsobené těmito „variačními zločiny“, v sobě zahrnuje abstraktní odhad chyby, který je formulován v kapitole 4 disertační práce.

2.2 DISKRÉTNÍ FRIEDRICHSOVA NEROVNOST

V kapitole 3 disertační práce je odvozena diskrétní Friedrichsova nerovnost pro případ úzkých trojúhelníků, které splňují podmínku maximálního úhlu (viz rovněž [21, Lemma 3.1]). Tento tvar Friedrichsovy nerovnosti je potřebný k důkazu abstraktního odhadu chyby.

2. Lemma (Diskrétní Friedrichsova nerovnost). *Platí*

$$(2.8) \quad \|v\|_{1,\Omega_h} \leq C|v|_{1,\Omega_h} \quad \forall v \in V_h, \quad \forall h < h_0,$$



Obr. 2.5: Oblast $\tilde{\Omega}$

kde konstanta C nezávisí na h a v .

2.3 ABSTRAKTNÍ ODHAD CHYBY

Vzhledem k tomu, že oblast Ω je aproximována polygonální oblastí Ω_h , je třeba zavést vhodné prodloužení funkce z $H^2(\Omega)$ do $H^2(\tilde{\Omega})$ (viz Obr. 2.5) dříve, než je formulován samotný abstraktní odhad chyby. Důkaz následujícího lemmatu 3 lze rovněž najít v [15].

3. Lemma. *Necht' Ω je uvažovaná ohraničená oblast s hranicí $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, kde Γ_1 a Γ_2 jsou kružnice s poloměry R_1 a $R_2 = R_1 + \varrho_0$. Předpokládejme, že tyto kružnice mají stejný střed S_0 a že platí*

$$(2.9) \quad R_1 \gg \varrho_0 .$$

Necht' Γ_0 je kružnice se středem S_0 a poloměrem $R_0 = R_1 - \varrho$ a necht' $\tilde{\Omega}$ je ohraničená oblast taková, že $\partial\tilde{\Omega} = \Gamma_0 \cup \Gamma_2$ (viz Obr. 2.5). Pak existuje lineární ohraničený operátor prodloužení (Nikolského-Hestenesova typu) $\varepsilon_2 : H^2(\Omega) \rightarrow H^2(\tilde{\Omega})$ s vlastností $\varepsilon_2 : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\tilde{\Omega})$ a takový, že konstanta C vystupující v nerovnosti

$$(2.10) \quad \|\varepsilon_2(v)\|_{2,\tilde{\Omega}} \leq C\|v\|_{2,\Omega} \quad \forall v \in H^2(\Omega)$$

nezávisí na R_1/ϱ .

Nyní je možné formulovat abstraktní odhad chyby ve formě této věty:

4. Věta (Abstraktní odhad chyby). *Necht' jsou splněny předpoklady Assumptions 1 disertační práce. Pak jsou formy $a_h(v, w)$ stejnoměrně X_h -silně monotonní vzhledem*

k seminormám $|\cdot|_{1,\Omega_h}$ a stejnoměrně X_h -lipschitzovsky spojité a formy $\tilde{a}_h(v, w)$ jsou stejnoměrně $H^1(\Omega_h)$ -lipschitzovsky spojité, přičemž pro všechna $h \in (0, h_0)$ platí (2.11)

$$C^{-1} \|\tilde{u} - u_h\|_{1,\Omega_h} \leq \inf_{v \in V_h} \|v - \tilde{u}\|_{1,\Omega_h} + \inf_{v \in V_h} \sup_{\substack{w \in V_h \\ w \neq 0}} \frac{|a_h(v, w) - \tilde{a}_h(v, w)|}{\|w\|_{1,\Omega_h}} + \\ + \sup_{\substack{w \in V_h \\ w \neq 0}} \frac{|\tilde{L}_h^\Omega(w) - L_h^\Omega(w)|}{\|w\|_{1,\Omega_h}} + \sup_{\substack{w \in V_h \\ w \neq 0}} \frac{|\tilde{L}_h^\Gamma(w) - L_h^\Gamma(w)|}{\|w\|_{1,\Omega_h}} + \sup_{\substack{w \in V_h \\ w \neq 0}} \frac{|\tilde{a}_h(\tilde{u}, w) - \tilde{L}_h(w)|}{\|w\|_{1,\Omega_h}},$$

kde C je kladná konstanta, která nezávisí na přesném řešení $u \in H^k(\Omega)$ (kde $k = 1$ nebo 2) variačního problému, $u_h \in V_h$ je přibližné řešení diskrétního problému a $\tilde{u} = \varepsilon_2(u)$, kde ε_2 je prodloužení z lemmatu 3.

Následující kapitoly 5, 6 a 7 disertační práce obsahují odhady jednotlivých členů abstraktního odhadu chyby (2.11).

Hlavním výsledkem kapitoly 5 je důkaz interpolačního teorému, ze kterého vyplývá odhad prvního členu na pravé straně (2.11).

V kapitole 6 jsou odhadnuty prostřední tři členy pravé strany abstraktního odhadu chyby (2.11) vyjadřující chybu numerické integrace, která na tvaru použitých prvků nezávisí. Tyto odhady je možné najít také v [21].

V kapitole 7 je odhadnut poslední člen pravé strany (2.11), který vyjadřuje chybu při aproximaci hranice $\partial\Omega$ polygonální hranicí $\partial\Omega_h$. V tomto odhadu vystupuje veličina $h^2 \sqrt{\frac{m}{\varrho}}$, která závisí na parametrech použitých trojúhelníků a tudíž odhad nemůže být dále zlepšen. Proto, pokud je potřeba získat řád konvergence $O(h)$, nezbyvá než předpokládat

$$(2.12) \quad C_1 h^2 \leq \frac{\varrho}{m} \quad (C_1 > 0).$$

Předpoklad (2.12) je pro semiregulární trojúhelníky omezující, neboť $\frac{\varrho}{m}$ je délka nejkratší strany trojúhelníků triangulace \mathcal{T}_h (viz Obr. 2.4). Tedy nejkratší strana trojúhelníka nemůže být libovolně malá, jak to dovoluje podmínka maximálního úhlu.

2.4 MAXIMÁLNÍ RYCHLOST KONVERGENCE

Důsledkem abstraktního odhadu chyby je věta o maximální rychlosti konvergence, která je uvedena v kapitole 8 disertační práce. Tato věta 5 shrnuje výsledky z předchozích kapitol, týkajících se interpolace, numerické integrace a aproximace hranice.

5. Věta. *Nechť $u \in H^2(\Omega)$, $f \in W^{1,\infty}(\tilde{\Omega})$. Nechť předpoklad (2.12) a předpoklady zahrnující stupeň přesnosti kvadraturních formulí jsou splněny. Potom*

$$(2.13) \quad \|\tilde{u} - u_h\|_{1,\Omega_h} \leq \frac{C}{\sqrt{\varrho}} h,$$

kde konstanta C nezávisí na ϱ , m , h a triangulaci \mathcal{T}_h .

Pokud je navíc splněna podmínka $u \in H^2(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$, potom

$$(2.14) \quad \|\tilde{u} - u_h\|_{1,\Omega_h} \leq Ch$$

kde opět konstanta C nezávisí na ϱ , m , h a triangulaci \mathcal{T}_h .

2.5 OBECNÁ VĚTA O KONVERGENCI

V kapitole 9 disertační práce je uvedena obecná věta o konvergenci, která je dalším důsledkem abstraktního odhadu chyby. Věta je formulována za předpokladu, že $u \in H^1(\Omega)$ a konvergence dokázána za silnějšího předpokladu než (2.12), konkrétně

$$(2.15) \quad C_1 h^{2-\delta} \leq \frac{\varrho}{m} \leq C_2 h^{2-\delta},$$

kde

$$(2.16) \quad 0 < \delta < 1$$

je daná hodnota, která může být libovolně malá a C_1, C_2 jsou kladné konstanty.

6. Věta. *Necht' funkce splňují předpoklady uvedené v Assumptions 1 disertační práce a necht' jsou splněny i předpoklady zahrnující stupeň přesnosti kvadraturních formulí. Potom*

$$(2.17) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|\tilde{u} - u_h\|_{1,\Omega_h} = 0,$$

kde u_h je přibližné řešení diskrétního problému, $u \in H^1(\Omega)$ je přesné řešení variačního problému a $\tilde{u} = \varepsilon_2(u) \in H^1(\tilde{\Omega})$ je jeho prodloužení ve smyslu lemmatu 3 pro $k = 1$.

2.6 NUMERICKÉ VÝSLEDKY - 2D

V kapitole 10 disertační práce jsou uvedeny numerické výsledky získané při naprogramování daného problému pro konkrétní zvolené přesné řešení

$$u(x, y) = \ln(x^2 + y^2).$$

Program je vytvořen v programovacím jazyce FORTRAN a výsledky jsou v dobré shodě s teorií. Vzhledem k tomu, že šlo o situaci v rovině, nebyl výpočet příliš náročný a experimentálně byl potvrzen řád konvergence $O(h)$.

3 SEMIREGULÁRNÍ HERMITEOVSKÉ TETRAHEDRÁLNÍ KUBICKÉ KONEČNÉ PRVKY

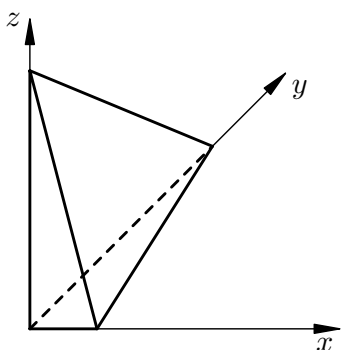
3.1 ÚVOD

Část II disertační práce zobecňuje některé věty z [14] a [20] na trojrozměrný případ čtyřstěnných konečných prvků, který se od trojúhelníkových prvků podstatně liší: V případě dvojrozměrného kubického prvku je devět parametrů pevných (jsou to funkční hodnoty a první parciální derivace ve vrcholech trojúhelníka) a těchto devět parametrů zaručuje globální C^0 -spojitost v dané triangulaci. Desátý parametr je možno zvolit relativně volně, protože na C^0 -spojitost nemá vliv. V [14] jsou zkoumány různé možnosti tohoto desátého parametru. V trojrozměrném případě je všech dvacet parametrů kubického polynomu na čtyřstěnu potřeba pro zaručení C^0 -spojitosti, přičemž šestnáct parametrů je pevných (jsou to funkční hodnoty a první parciální derivace ve vrcholech čtyřstěnu). Vyplývá to z faktu, že pokud mají dva čtyřstěny společnou stěnu, potřebujeme k zaručení C^0 -spojitosti deset parametrů na této stěně. Pouze devět z nich je získáno jako lineární kombinace parametrů předepsaných ve vrcholech této společné stěny. Také proto je problém jak zvolit zbývající čtyři parametry na semiregulárním čtyřstěnu mnohem komplikovanější než v dvojrozměrném případě. Nicméně se dá očekávat, že trojrozměrný případ bude jistým zobecněním případu dvojrozměrného. Toto očekávání je potvrzeno v části II disertační práce.

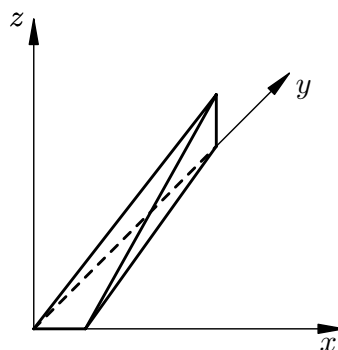
Na začátku je uvedena definice semiregulárního čtyřstěnu, která je zobecněním dvojrozměrného případu:

7. Definice. Čtyřstěn je *semiregulární*, pokud největší úhel mezi libovolnými stěnami je menší nebo roven $\omega_0 < \pi$.

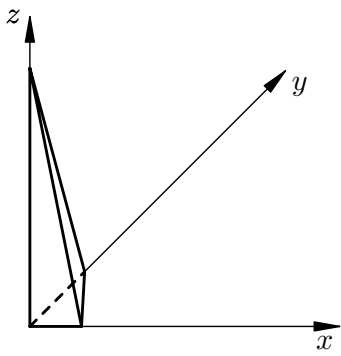
Uvažujme tři základní typy semiregulárních čtyřstěňů, viz Obr. 3.1-3.3. Poznamenejme, že v tomto textu je označení *semiregulární čtyřstěn* užíváno pro čtyřstěn, který má nejvýše dva malé úhly mezi rovinami stěn a nejméně jednu krátkou hranu.



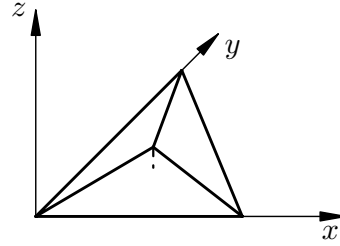
Obr. 3.1: Semiregulární čtyřstěn typu K1



Obr. 3.2: Semiregulární čtyřstěn typu K2



Obr. 3.3: Semiregulární čtyřstěn typu $K3$



Obr. 3.4: Neregulární čtyřstěn

3.2 ZÁKLADNÍ ODHADY

Kapitola 12 disertační práce obsahuje známé výsledky ze dvou dimenzí (viz lemma A, B, C, 49 a 50 disertační práce), která jsou převzata z [20] a větu 47, která je z nich odvozena a dokázána v [14]. Tyto poznatky z roviny jsou následně zobecněny do trojrozměrného prostoru a přímo aplikovány na hermiteovské čtyřstěny.

Dříve než budou uvedeny výsledné odhady kapitoly 12, je třeba zavést označení:

Nechť $\overline{K1}$ je čtyřstěn s jednou krátkou hranou P_2P_3 (viz Obr. 3.5; uvažujeme čtyřstěn se třemi navzájem kolmými stěnami; obecný případ je popsán v disertační práci). Symbol $K1$ bude znamenat jeho vnitřek a $\partial K1$ jeho hranici. Uvažujme funkci $\varphi \in C^4(\overline{K1})$ s následujícími vlastnostmi:

$$(3.1) \quad D^\alpha \varphi(P_j) = 0 \quad |\alpha| \leq 1 \quad (j = 1, \dots, 4, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)),$$

$$(3.2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n_1}(Q_{23}) = \frac{\partial \varphi}{\partial n_2}(Q_{14}) = \frac{\partial \varphi}{\partial n_3}(Q_{14}) = \frac{\partial \varphi}{\partial n_4}(Q_{23}) = 0,$$

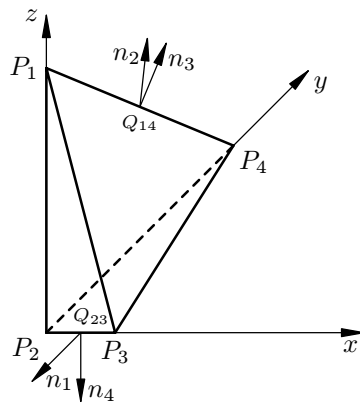
$$(3.3) \quad |D^\alpha \varphi(P)| \leq M_4 \quad \forall |\alpha| = 4 \quad \forall P \in \overline{K1},$$

kde P_1, \dots, P_4 jsou vrcholy čtyřstěnu $\overline{K1}$ a Q_{ij} je střed hrany P_iP_j . Symbol ϱ_i bude označovat rovinu, která obsahuje trojúhelníkovou stěnu \overline{T}_i ležící proti vrcholu P_i . Symbol n_i vystupující ve vztahu (3.2) označuje jednotkovou normálu k hranici $\partial \overline{T}_i$ trojúhelníka \overline{T}_i ; tato normála leží v rovině ϱ_i .

Symbole α_i ($i = 2, 3, 4$) označují tři úhly ve vrcholu P_1 ležící v trojúhelníkových stěnách $\overline{T}_2, \overline{T}_3, \overline{T}_4$. Podobně β_i ($i = 1, 3, 4$) označují úhly ve vrcholu P_2 , γ_i ($i = 1, 2, 4$) označují úhly ve vrcholu P_3 a δ_i ($i = 1, 2, 3$) úhly ve vrcholu P_4 . Symbol ω_{ij} označuje ostrý úhel mezi rovinami ϱ_i a ϱ_j .

V každé rovině ϱ_i můžeme zvolit kartézský souřadný systém x_i, y_i, z_i . Osa z_i je orientována ve směru vnější normály k trojúhelníkové stěně \overline{T}_i (z hlediska čtyřstěnu).

Hlavním výsledkem kapitoly 12 disertační práce je lemma 48, které nám poskytuje odhad pro derivace $\frac{\partial \varphi}{\partial z_i}$ ve středech hran Q_{ij} a následující věta 8, která nám dává



Obr. 3.5: Volba normál pro čtyřstěn $K1$

odhad derivací $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ a funkčních hodnot φ v libovolném bodě semiregulárního čtyřstěnu.

8. Věta. Necht' \overline{K} je jeden ze semiregulárních čtyřstěňů $\overline{K1}$, $\overline{K2}$, $\overline{K3}$. Necht' $\varphi \in C^4(\overline{K})$ a necht' platí (3.1) a (3.3), kde P_1, \dots, P_4 jsou vrcholy \overline{K} uspořádané jako na Obr. 3.5. Necht' v případech $\overline{K1}$ a $\overline{K2}$ mají zbývající čtyři podmínky tvar (3.2) a v případě $\overline{K3}$ tvar

$$(3.4) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n_1}(Q_{34}) = \frac{\partial \varphi}{\partial n_2}(Q_{34}) = \frac{\partial \varphi}{\partial n_3}(Q_{24}) = \frac{\partial \varphi}{\partial n_4}(Q_{23}) = 0.$$

Pak platí tyto odhady

$$(3.5) \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(A) \right|, \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y}(A) \right|, \left| \frac{\partial \varphi}{\partial z}(A) \right| \leq \frac{CM_4 h^3}{\sin \omega \sin \sigma} \quad \forall A \in \overline{K},$$

$$(3.6) \quad |\varphi(A)| \leq \frac{CM_4 h^4}{\sin \omega \sin \sigma} \quad \forall A \in \overline{K},$$

úhly ω a σ jsou pro $\overline{K1}$ a $\overline{K2}$ definovány vztahy

$$(3.7) \quad \omega = \min(\omega_{12}, \omega_{24}), \quad \sigma = \min(\alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \gamma_4, \delta_2, \delta_3);$$

pro $\overline{K3}$ vztahy

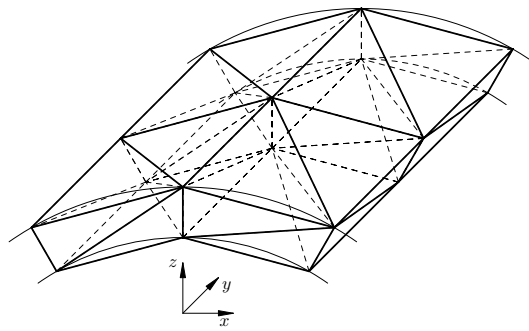
$$(3.8) \quad \omega = \min(\omega_{12}, \omega_{23}, \omega_{24}), \quad \sigma = \min(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_4, \delta_2, \delta_3).$$

3.3 APLIKACE ZÁKLADNÍCH ODHADŮ

Věta 8 má dva důležité důsledky:

- a) Interpolační polynom $u_I \in \mathcal{P}_3(3)$, kde $\mathcal{P}_3(3)$ je množina všech polynomů tří proměnných, jejichž stupeň není vyšší než tři, funkce $u \in C^1(\overline{K})$ je jednoznačně určen podmínkami (uvádíme pro $K1$ a $K2$) (viz též [18, Theorem 3.1]):

$$(3.9) \quad D^\alpha u_I(P_j) \quad |\alpha| \leq 1, \quad (j = 1, \dots, 4),$$

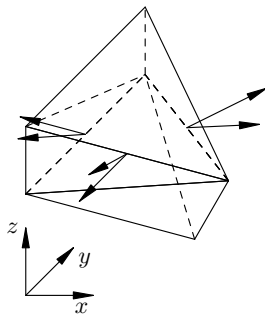


Obr. 3.6: Příklad použití semiregulárních prvků

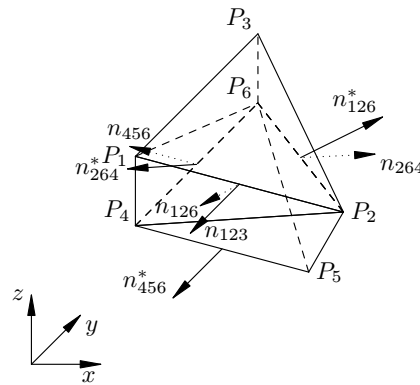
$$(3.10) \quad \frac{\partial u_I}{\partial n_1}(Q_{23}), \frac{\partial u_I}{\partial n_2}(Q_{14}), \frac{\partial u_I}{\partial n_3}(Q_{14}), \frac{\partial u_I}{\partial n_4}(Q_{23}).$$

- b) Interpolační teorém na semiregulárním čtyřstěnu (viz též [18, Theorem 3.2]): stačí položit $\varphi = u - u_I$, kde $u \in C^4(\overline{K})$.

Dále se kapitola 13 disertační práce zabývá následujícím problémem: Dokud je uvažován pouze jediný čtyřstěn s předepsanými funkčními hodnotami, hodnotami derivací ve vrcholech a zbývajících čtyřmi parametry jako derivace podle normál ve středu nejkratší hrany a ve středu hrany proti nejkratší hraně, tak pro něj vybudovaná teorie zdánlivě bez problémů platí. Jakmile však dojde na samotnou tetrahedralizaci (viz Obr. 3.6) a tím i na požadavek spojitosti globální funkce, tak jsme zavedeni do slepé uličky. Z Obr. 3.7 je zřejmé, že na společné stěně dvou čtyřstěnu leží nomála v různých rovinách. Tím pádem není zaručena spojitost globální funkce.



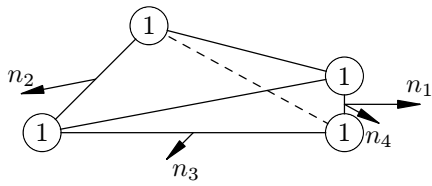
Obr. 3.7: Špatná volba normál



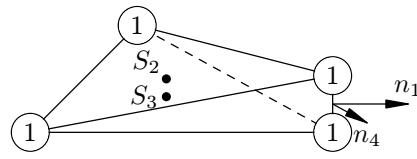
Obr. 3.8: Jedna z možností nápravy

Hlavním výsledkem kapitoly 13 je uvedení tří variant, jak je možné předepsat zbývajících čtyři parametry pro kubický polynom pro zaručení spojitosti globální funkce (pevných šestnáct parametrů je dáno funkčními hodnotami a hodnotami prvních derivací ve vrcholech).

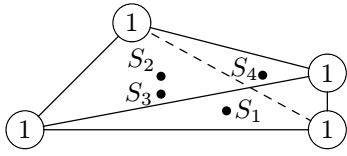
První z nich je naznačena na Obr. 3.8, kde došlo k přemístění „problematických“ derivací podle normál. Podmínky určující kubický polynom jsou pak lépe vidět na



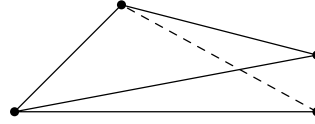
Obr. 3.9: Čtyři normály



Obr. 3.10: Dvě normály a dvě těžiště



Obr. 3.11: Čtyři těžiště



Obr. 3.12: Jednoduchý čtyřstěn

Obr. 3.9. (Jednička v kroužku znamená, že v tomto vrcholu je předepsána funkční hodnota a první parciální derivace.)

Druhou variantou je, že místo dvou „problematických“ normálových derivací předepíšeme funkční hodnoty v těžištích dvou stěn a zachováme derivace podle normál ve středu nejkratší hrany čtyřstěnu, viz Obr. 3.10. (Černý puntík znamená, že v tomto bodě je předepsána funkční hodnota.)

Třetí uvažovanou variantou je, že místo čtyř normálových derivací předepíšeme funkční hodnoty v těžištích stěn, viz Obr. 3.11. (Toto je klasický čtyřstěn.)

Za každou z těchto změn (zaručujících spojitost globální funkce v tetrahedralizaci) musíme platit: nyní nemůže úzký čtyřstěn mít nejkratší hranu libovolně malou; musíme předpokládat (viz Obr. 3.5)

$$\text{dist}(P_2, P_3) = O(h^{1+\varepsilon}), \quad 0 < \varepsilon < 3$$

a

$$(3.11) \quad \sin \omega_{23} = \frac{O(h^{1+\varepsilon})}{O(h)} \geq Ch^\varepsilon \quad (0 < \varepsilon < 3).$$

V aplikacích se obvykle kvůli odhadům a přiměřené semiregularitě volí $\varepsilon = 1$.

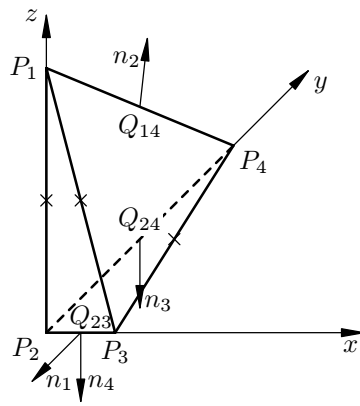
Kritickým bodem u úzkých čtyřstěněů je bod Q_{14} (viz Obr. 3.5), ve kterém nezískáme optimální odhad, ale jen

$$(3.12) \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial z_2}(Q_{14}) \right|, \left| \frac{\partial \varphi}{\partial z_3}(Q_{14}) \right| \leq C^* h^{3-\varepsilon}.$$

Tudíž místo odhadů (3.5), (3.6) platí

$$(3.13) \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(A) \right|, \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y}(A) \right|, \left| \frac{\partial \varphi}{\partial z}(A) \right| \leq \frac{CM_4 h^{3-\varepsilon}}{\sin \omega \sin \sigma} \quad \forall A \in \overline{K1},$$

$$(3.14) \quad |\varphi(A)| \leq \frac{CM_4 h^{4-\varepsilon}}{\sin \omega \sin \sigma} \quad \forall A \in \overline{K1},$$



Obr. 3.13: To the estimates (3.13), (3.14)

kde $0 < \varepsilon < 3$.

Tyto odhady platí i v případě dalších dvou variant. Jen poznamenejme, že při nahrazení dvou derivací podle normál funkčními hodnotami v těžištích máme opět kritický bod Q_{14} a v případě klasického čtyřstěnu, tj. při předepsání funkčních hodnot ve čtyřech těžištích, je kritických všech šest středů hran.

Teprve numerické výsledky kapitoly 14 disertační práce a následná diskuse v kapitole 15 ukazují, která volba se jeví jako nejsprávnější.

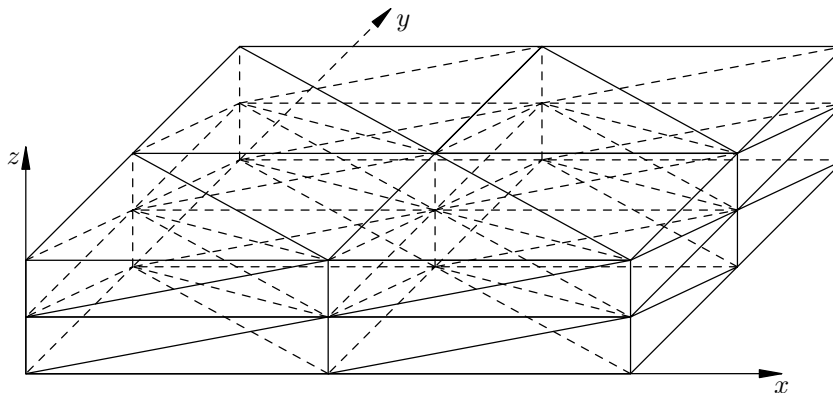
V závěru kapitoly 13 disertační práce je formulován lineární problém odpovídající smíšenému okrajovému problému Poissonovy rovnice s homogenní Dirichletovou podmínkou na části hranice $\Gamma_1 \subset \partial\Omega$, $\text{meas}_2\Gamma_1 > 0$ pro ohraničenou polyedrickou oblast Ω (bez použití numerické integrace) a dokázána obecná věta o konvergenci.

3.4 NUMERICKÉ VÝSLEDKY - 3D

V kapitole 14 disertační práce jsou uvedeny numerické výsledky pro zvolenou oblast Ω tvaru kvádru o rozměrech $0,2 \times 0,2 \times 0,04$ (viz Obr. 3.14). Bylo zvoleno pět různých přesných řešení $u(x, y, z)$ a dvě tetrahedralizace dané oblasti Ω . Výpočet byl naprogramován ve FORTRANu za pomoci MAPLE. Kapitola 14 obsahuje tabulky s relativními chybami funkčních hodnot a relativními chybami derivací $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ a $\frac{\partial u}{\partial z}$ ve vrcholech. Bohužel vzhledem k paměťové náročnosti výpočtu nebylo možno pracovat s hustší tetrahedralizací a pokusit se o získání experimentálního řádu konvergence.

Pro srovnání byl uvažován i nejjednodušší případ čtyřstěnu s předepsanými funkčními hodnotami ve vrcholech, které jednoznačně určují lineární polynom, viz Obr. 3.12.

V závěrečné kapitole 15 disertační práce jsou z numerických výpočtů vyvozeny závěry. Ukázalo se, že nejlepší výsledky dává použití nejjednoduššího čtyřstěnu s předepsanými funkčními hodnotami ve vrcholech, které jednoznačně určují lineární polynom. (Viz Obr. 3.12.) Vzhledem k vybudované teorii je nutno vybírat z uvažovaných třech variant pro čtyřstěn Hermiteova typu. Objektivní rozhodnutí je obtížné, ale nejrozmumnější se zdá být varianta s předepsanými funkčními hodnotami v těžištích stěn (viz Obr. 3.11), tedy „semiregulární“ čtyřstěn s klasickými parametry. Výraz semiregulární



Obr. 3.14: Oblast Ω , síť 3 – 3 – 3

dáváme do uvozovek, protože je zde omezení typu (3.11) a $\text{dist}(P_2, P_3) = O(h^{1+\varepsilon})$, kde $0 < \varepsilon < 3$. Jak již bylo zmíněno, pro maximální rychlost konvergence tak platí

$$(3.15) \quad \|u_h - u\|_{1,\Omega} \leq \frac{C}{\sin \omega_0 \sin \sigma_0} M_4(u) h^{3-\varepsilon}.$$

Aby byla tato konvergence alespoň $O(h^2)$, z uvedeného plyne volba $\varepsilon = 1$.

Při programování tohoto 3D problému se ukázalo, že jde o mnohem náročnější úkol, než se zdálo být na začátku. Původně byl program vytvářen jen pro případy 1–3. Teprve když se začaly objevovat problémy, byl program doplněn o případ 4, tj. klasický čtyřstěn. Vzhledem ke složitosti soustavy rovnic, nebylo možné případy 1–3 testovat na hustších sítích. Proto není možné ze získaných výsledků udělat jednoznačný závěr.

Dalším krokem v programování tohoto problému bude snaha snížit počet neznámých, které nejsou ve vrcholech. To znamená, že je nutno parametry předeliminovat, abychom snížili náročnost výpočtu.

LITERATURA

- [1] Ciarlet, P. G.: The Finite Element Method for Elliptic Problems. Amsterdam: North-Holland, 1978.
- [2] Feistauer, M., Sobotíková, V.: Finite element approximation of nonlinear elliptic problems with discontinuous coefficients. Math. Model. Numer. Anal. 24 (1990), 457–500.
- [3] Feistauer, M., Ženíšek, A.: Finite element solution of nonlinear elliptic problems. Numer. Math. 50 (1987), 451–475.
- [4] Křížek, M.: On semiregular families of triangulations and linear interpolation. Appl. Math. 36 (1991), 223–232.
- [5] Kufner, A., John, O., Fučík, S.: Function Spaces. Akademia, Praha, 1977.
- [6] Melkes, F., Zlámal, M.: Numerical solution of nonlinear quasistationary magnetic fields. Int. J. Numer. Meth. Engng. 19 (1983), 1053–1062.

- [7] Nečas, J.: *Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques*. Academia-Masson, Prague-Paris, 1967.
- [8] Nečas, J.: *Introduction to the Theory of Nonlinear Elliptic Equations*. Teubner Texte Zur Mathematik, Band 52, Leipzig, 1983.
- [9] Oganessian, L. A., Rukhovec, L. A.: *Variational-Difference Methods for the Solution of Elliptic Problems*. Izd. Akad. Nauk ArSSSR, Jerevan, 1979. (In Russian)
- [10] Ženíšek, A.: *Nonlinear Elliptic and Evolution Problems and Their Finite Element Approximations*. Academic Press, London, 1990.
- [11] Ženíšek, A.: The maximum angle condition in the finite element method for monotone problems with applications in magnetostatics. *Numer. Math.* 71 (1995), 399–417.
- [12] Ženíšek, A.: Finite element variational crimes in the case of semiregular elements. *Applications of Math.* 41 (1996), 367–398.
- [13] Ženíšek, A.: The use of semiregular finite elements. *Proceedings of Equadiff, Conference on differential equations and their applications* (R. P. Agarwal, F. Neuman, J. Vosmanský), Masaryk University Brno, Electronic publishing house Stony Brook, NY, (1998), 201–251.
- [14] Ženíšek, A.: Maximum-angle condition and triangular finite elements of Hermite type. *Math. Comp.* 64 (1995), 929–941.
- [15] Ženíšek, A.: On a generalization of Nikolskij’s extension theorem in the case of two variables. *Applications of Math.* 48 (2003), 367–404.
- [16] Ženíšek, A.: *Matematické základy metody konečných prvků*, PC-DIR Real, s.r.o., Brno 1997.
- [17] Ženíšek, A.: *Sobolevovy prostory*, VUTIUM, Brno 2001.
- [18] Ženíšek, A., Hoderová-Zlámalová, J.: Semiregular Hermite tetrahedral finite elements. *Applications of Math.* 40 (2001), 295–315.
- [19] Zlámal, M.: Curved elements in the finite element method I., *SIAM J. Numer. Anal.* 10 (1973), 229–240.
- [20] Zlámal, M.: On the finite element method. *Numer. Math.* 12 (1968), 394–409.
- [21] Zlámalová, J.: Semiregular finite elements in solving some nonlinear problems. *Appl. Math.* 46 (2001), 53–77.

4 CURRICULUM VITAE

Jméno: Jana Hoderová
Rodné příjmení: Zlámalová
Datum a místo narození: 10. 9. 1975, Boskovice
Bydliště: Sloupečnick 58, 678 01 Blansko
Stav: vdaná
E-mail: hoderova@fme.vutbr.cz

Vzdělání:

- květen 1993 maturita na Gymnáziu v Blansku
- červen 1998 státní zkouška na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně, obor učitelství pro střední školy kombinace matematika - deskriptivní geometrie
- květen 2001 státní doktorská zkouška na Ústavu matematiky, FSI VUT v Brně

Dosavadní zaměstnání:

- srpen 1998 - dosud asistentka na Ústavu matematiky, FSI VUT v Brně
- srpen 1998 - dosud externí doktorandka na Ústavu matematiky, FSI VUT v Brně;
téma disertační práce:
Semiregulární simplex v metodě konečných prvků;
školitel: Prof. RNDr. Alexander Ženíšek, DrSc.
- září 2001 - září 2004 rodičovská dovolená

Publikované práce:

- Zlámalová, J.: Semiregular finite element method in solving some nonlinear problems.
Appl. Math. 46 (2001), 53–57.
- Ženíšek, A., Hoderová-Zlámalová, J.: Semiregular Hermite tetrahedral finite elements.
Appl. Math. 46 (2001), 295–315.

V Brně 7. ledna 2005

Jana Hoderová

5 SUMMARY

Contrary to the case of *regular* finite elements the mathematical theory of the finite element method for *semiregular* finite elements has not yet been till nowadays systematically developed. This Ph. D. Thesis is devoted to the following two problems:

1. The finite element analysis of the variational problem which is formally equivalent to a two-dimensional nonlinear elliptic boundary value problem with mixed nonhomogeneous boundary conditions.

The given problem is solved in the case of a bounded domain Ω whose boundary $\partial\Omega$ consists of two circles Γ_1, Γ_2 of the same centre S_0 . These circles have the radii $R_1, R_2 = R_1 + \varrho$, where $\varrho \ll R_1$. An elliptic problem given on such a domain has many practical applications (let us mention, for example, the cartilage between a joint and hip, or an air-crevice between a rotor and stator in an electromachine).

The finite element analysis of this problem is restricted to the case of semiregular triangular finite elements with polynomials of the first degree, which are uniquely determined by function values at the vertices of a triangle. At the end some numerical results are introduced which are in a good correspondence with the theory.

2. Constructions of various *semiregular* cubic tetrahedral finite elements of the Hermite type and proofs of the corresponding interpolation theorems.

While in the case of semiregular tetrahedral finite elements of the Dirichlet type some results have been published, constructions of both two- and three-dimensional simplicial finite elements of the Hermite type are almost *taboo* for finite element men. The only exception is the “two-dimensional” paper [14] and “three-dimensional” paper [18].

Owing to the fast computers, the simplicial finite elements with a polynomial of the first degree uniquely determined by function values at the vertices of a given simplex are the most popular in applications. However, from the theoretical viewpoint cubic two- and three-dimensional simplicial finite elements of the Hermite type are very interesting because they guarantee continuous partial derivatives at the nodal points of a given triangulation or tetrahedralization. Such a straightforward computation of partial derivatives at the nodal points is always much more convincing than to compute the arithmetical mean of derivatives obtained on finite elements having a nodal point common.

The first theoretical step (after constructing a finite element) consists in proving a corresponding interpolation theorem. Such a theorem enables us to prove the convergence of the finite element method in the simplest case: a given domain Ω is polyhedral and numerical integration is not used.

At the end the numerical results obtained in the three-dimensional case are discussed.