

VĚDECKÉ SPISY VYSOKÉHO UČENÍ TECHNICKÉHO V BRNĚ

*Edice Habilitační a inaugurační spisy, sv. 183*

*ISSN 1213-418X*

**Jiří Kozumplík**

**VLNKOVÉ TRANSFORMACE  
A JEJICH VYUŽITÍ  
PRO FILTRACI SIGNÁLŮ EKG**

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
**Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií**  
**Ústav biomedicínského inženýrství**

Jiří Kozumplík

**Vlnkové transformace a jejich využití pro filtraci signálů EKG**

Wavelet Transforms and Their Use for Filtering of ECG Signals

Zkrácená verze habilitační práce



BRNO 2005

**Klíčová slova:**

vlnková transformace, vlnková filtrace, wienerovská vlnková filtrace, signál EKG

**Key Words:**

wavelet transform, wavelet filtering, Wiener filtering in wavelet domain, ECG signal

Originál habilitační práce je dostupný na Vědeckém oddělení děkanátu FEKT VUT v Brně,  
Údolní 53, 602 00 Brno

**Autor:**

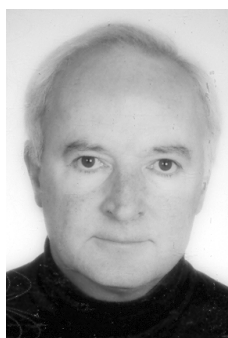
Jiří Kozumplík  
Ústav biomedicínského inženýrství  
Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií  
Vysoké učení technické v Brně  
Kolejní 2906/4, 612 00 Brno

**Poděkování:**

Publikace byla podporována projektem GAČR 102/04/0472 a výzkumným záměrem MSM 021630513.

## Obsah

1	ÚVOD .....	5
2	VLNKOVÁ TRANSFORMACE S DISKRÉTNÍM ČASEM .....	5
2.1	FILTRY pro biortogonální DTWT .....	9
2.2	FILTRY pro ortogonální DTWT .....	10
2.3	Redundantní DTWT .....	13
3	FILTRACE SIGNÁLŮ S VYUŽITÍM DTWT .....	14
3.1	Prahování koeficientů DTWT .....	14
3.2	Stanovení prahových hodnot pro vlnkovou filtraci .....	15
3.3	Wienerovská filtrace v časově-měřítkové oblasti .....	16
3.3.1	<i>Hybridní prahování</i> .....	17
3.3.2	<i>Metoda pilotního odhadu</i> .....	17
4	VLNKOVÁ FILTRACE SIGNÁLŮ EKG .....	19
4.1	Výběr typu DTWT A KOREKCE KOEFICIENTŮ .....	19
4.1.1	<i>Testované signály a model rušení</i> .....	20
4.1.2	<i>Odhad rozptylu šumu</i> .....	21
4.1.3	<i>Výběr testovacích signálů a metody vlnkové filtrace</i> .....	21
4.2	Dosažené výsledky .....	21
5	ZÁVĚR .....	24
	LITERATURA .....	25
	ABSTRACT .....	27



**Jiří Kozumplík** absolvoval studium na Fakultě elektrotechnické Vysokého učení technického (VUT) v Brně v roce 1973. Studoval obor Sdělovací technika, zaměření Lékařská elektronika.

Od roku 1974 působil na Katedře lékařské elektroniky – nyníšším Ústavu biomedicínského inženýrství (ÚBMI), kde pracuje doposud. Do roku 1990 byl odborným asistentem-neučitelem, od roku 1990 působí na ÚBMI jako učitelský pracovník.

V roce 1992 obhájil na FEI VUT v Brně disertační práci na téma *Lineární číslicové úzkopásmové filtry pro zpracování signálů EKG* a získal titul CSc. V červnu 2005 obhájil na Fakultě elektrotechniky a komunikačních technologií (FEKT) VUT v Brně habilitační práci na téma *Vlnkové transformace a jejich využití pro filtraci signálů EKG* a byl jmenován docentem v oboru Elektrotechnika a sdělovací technika.

Jeho odborné i pedagogické působení je zaměřeno zejména na oblast číslicového zpracování signálů. Je garantem předmětů *Multitaktní systémy*, *Bionika* a *Analýza a interpretace biologických dat* v navazujícím magisterském studijním programu v oboru Elektronika a sdělovací technika na FEKT VUT v Brně, dále předmětu *Spektrální analýza signálů* v doktorském studijním programu ve stejném oboru.

Od roku 1979 se ve své výzkumné činnosti zabývá problematikou číslicového zpracování signálů, zejména biosignálů. V posledních letech jsou jeho odborné aktivity zaměřeny především na oblast praktického využití vlnkových transformací pro ztrátovou kompresi a pro filtraci medicínských obrazů a biologických signálů.

V posledních letech byl členem řešitelského týmu v 7 významnějších vědeckých projektech. Od roku 1994 se podílel na praktických realizacích v 5 inženýrských projektech, ve kterých byl spoluautorem systémového řešení a autorem programových bloků pro předzpracování, automatickou analýzu a interpretaci elektrokardiogramů. Výstupy těchto projektů byly určeny vesměs pro komerční využití. Spolupracoval s firmami MEDITRONIK Brno (systémy Medicard, Medicard Ergo), Chirana-Prema Stará Turá, Slovensko (elektrokardiograf Chirastar 34), Deltro Medics – L.E.T. NV, Deinze, Belgie (elektrokardiograf CardioCompact CSC200), Medical Technologies Praha (elektrokardiograf BTL-08 MT).

# 1 ÚVOD

Tato práce je studií zaměřenou na filtraci elektrokardiografických signálů s využitím vlnkové transformace s diskretním časem (DTWT – Discrete-Time Wavelet Transform).

Sejmutý signál EKG je směsí signálu a rušení. Zatímco úzkopásmové rušivé signály (drift a brum) jsou potlačitelné lineární filtrací, pro potlačení širokopásmových myopotenciálů lineární filtrace vhodná není, protože vede k výraznému ořezání extrémů kmitů v komplexech QRS a k porušení náhlých změn strmosti signálu v začátcích a koncích komplexů QRS.

Spektrum signálu EKG zaujímá pásmo přibližně od 1 do 125 Hz (dolní mez je dána tepovou frekvencí). Se spektrem signálu EKG se výrazně překrývá spektrum rušivých myopotenciálů – málo významné bývá v dolní části spektra, narůstat začíná přibližně od 10 Hz. U klidových signálů EKG bývá úroveň rušení nízká, která při vizuálním hodnocení signálu EKG většinou nevadí, avšak může komplikovat počítačovou analýzu signálu. Velmi nepříjemné bývá rušení myopotenciálů u zátěžových signálů, případně u klidových signálů velmi malých dětí.

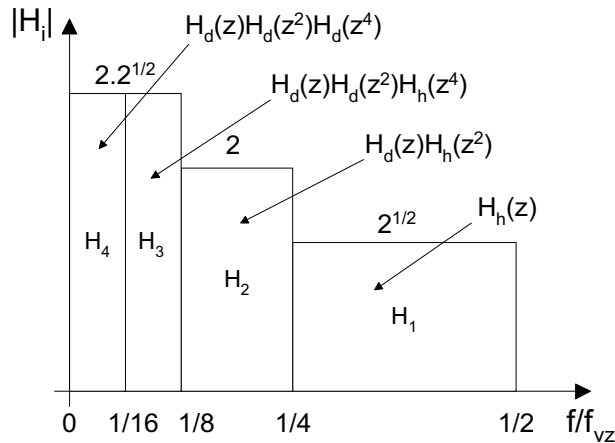
Zajímavou možností pro potlačení myopotenciálů je využití DTWT, kdy lze filtrovat signál vhodnou úpravou koeficientů transformace v závislosti na odhadnuté úrovni rušení. Ve srovnání s filtrací dolní propusti může vlnková filtrace vést k podstatně menšímu zkreslení signálu [16]. Důležitá je přitom volba strategie úpravy koeficientů vlnkové transformace signálu. Při použití tvrdého prahování je nevýhodou především výskyt vysokých artefaktů způsobených nadprahovými koeficienty DTWT šumu, které je nepříjemné zejména v oblastech na začátcích nebo na koncích komplexů QRS. Hlavní nevýhodou měkkého prahování je snižování extrémů kmitů v komplexech QRS a ve zmenšené podobě také výskyt zmíněných artefaktů. U prahování hybridního nehrozí výrazné snižování extrémů vyšších kmitů uvnitř QRS, ale zůstává nevýhoda výskytu menších artefaktů.

Kvalitnější výsledky než vlnkovou filtrací s měkkým, tvrdým či hybridním prahováním lze získat využitím wienerovské vlnkové filtrace s pilotním odhadem signálu. Tato metoda podstatně méně zkresluje extrémy kmitů v komplexech QRS a při vhodné realizaci pilotního odhadu signálu může téměř vyloučit vznik artefaktů.

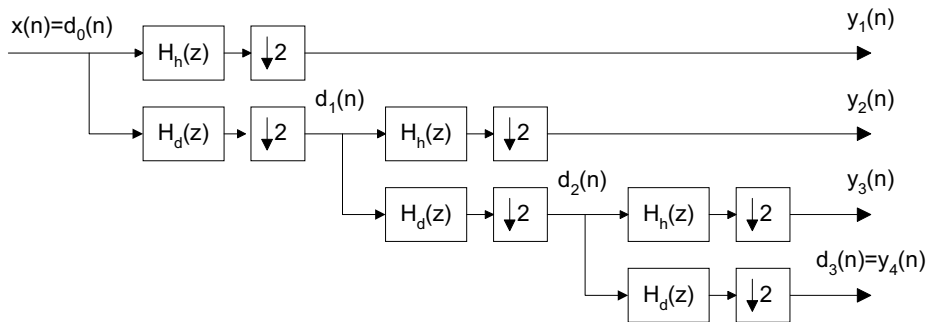
V našich experimentech jsme se zaměřili na vlnkovou wienerovskou filtraci s pilotním odhadem signálu, ve kterém jsme použili vlnkový filtr s hybridním prahováním. Ve wienerovském filtru i v pilotním odhadu jsme aplikovali redundantní dyadickou DTWT se čtyřmi stupni rozkladu (při vzorkovací frekvenci  $f_{vz}=500$  Hz).

## 2 VLNKOVÁ TRANSFORMACE S DISKRÉTNÍM ČASEM

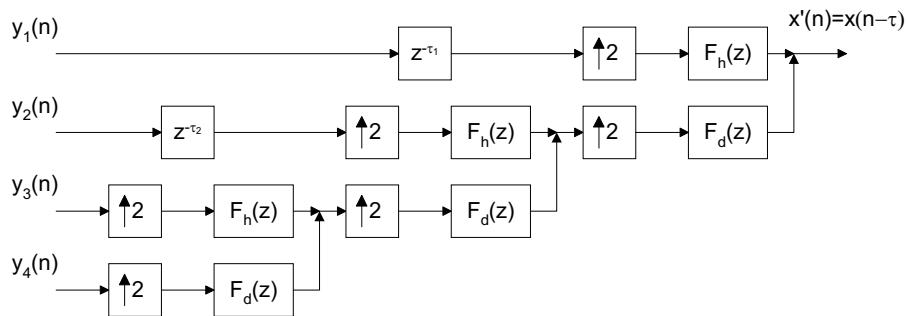
Dyadická DTWT signálu  $x(n)$  je realizovatelná rozkladem signálu bankou diskretních oktávových filtrů, které jsou odvozeny ze základní dvojice filtrů: dolní propusti propouštějící pásmo od 0 do  $f_{vz}/4$  a horní propusti propouštějící pásmo od  $f_{vz}/4$  do  $f_{vz}/2$ . Modulové frekvenční charakteristiky ideálních oktávových filtrů jsou (pro transformaci s třístupňovým rozkladem signálu) uvedeny na Obr. 1. Schéma nejčastěji používané (tzv. rychlé) DTWT je na Obr. 2. Vzorkovací frekvence signálu  $y_m(n)$  na výstupu  $m$ -tého filtru je  $2^m$ -krát nižší než vzorkovací frekvence  $f_{vz}$  vstupního signálu  $x(n)$ . Koeficienty dyadické DTWT jsou tedy tvořeny výstupními vzorky uvedené banky filtrů. Vzhledem k tomu, že jsou výstupy filtrů podvzorkovány, je počet koeficientů transformace shodný s počtem vzorků vstupního signálu  $x(n)$ .



Obr. 1 Modulové frekvenční charakteristiky ideálních oktavových filtrů.



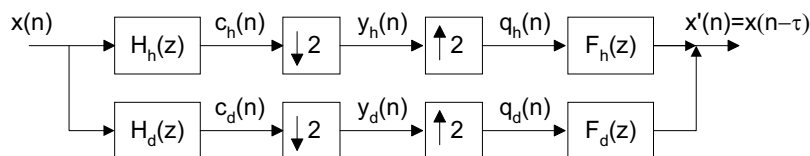
Obr. 2 Třístupňová rychlá dyadická DTWT s rozkladovými dolními propustmi  $H_d$  a horními propustmi  $H_h$ .



Obr. 3 Inverzní transformace pro třístupňovou DTWT. Blok  $\uparrow 2$  realizuje expanzi posloupnosti,  $F_d$  (resp.  $F_h$ ) je rekonstrukční dolní (resp. horní) propust.

Princip inverzní transformace (pro třístupňovou dyadickou DTWT na Obr. 2) je zachycen na Obr. 3. Podvzorkované posloupnosti (koeficienty transformace) je nutné interpolovat. Každý interpolátor je tvořen expanderem  $\uparrow 2$  (vložením nulového vzorku mezi sousední vzorky signálu) a interpolačním (rekonstrukčním) filtrem, kterým je buď dolní nebo horní propust. Příslušný rekonstrukční filtr musí být vhodným protějškem korespondujícího filtru rozkladového. Uvažujeme-li pouze kauzální filtry, je nutné použít zpožďovací členy, jak je ukázáno na Obr. 3.

Z transformace na Obr. 2 a inverzní transformace na Obr. 3 je zřejmé, že základem je dvoukanálová banka rozkladových ( $H_h, H_d$ ) a rekonstrukčních ( $F_h, F_d$ ) filtrů na Obr. 4.



Obr. 4 Dvoukanálová banka rozkladových ( $H_h, H_d$ ) a rekonstrukčních ( $F_h, F_d$ ) filtrů.

Podmínky věrné rekonstrukce vstupního signálu (kdy  $x'(n)=x(n-\tau)$ ), jejichž odvození vyplývá z Obr. 4 a lze jej nalézt např. v [17] nebo [27], jsou

$$F_d(z)H_d(z) + F_h(z)H_h(z) = 2z^{-\tau} \quad (2.1)$$

a

$$F_d(z)H_d(-z) + F_h(z)H_h(-z) = 0, \quad (2.2)$$

když  $\tau$  je fázové zpoždění filtrů  $H_d(z)F_d(z)$  a  $H_h(z)F_h(z)$ . Podmínka (2.2) vede k výběru antialiasingových filtrů

$$F_d(z) = H_h(-z) \quad \text{a} \quad F_h(z) = -H_d(-z) \quad (2.3)$$

nebo

$$F_d(z) = -H_h(-z) \quad \text{a} \quad F_h(z) = H_d(-z) \quad (2.4)$$

Podmínku (2.1) lze po zavedení antialiasingových filtrů (2.3) nebo (2.4) upravit do tvaru

$$F_d(z)H_d(z) - F_d(-z)H_d(-z) = P_d(z) - P_d(-z) = 2z^{-\tau}. \quad (2.5)$$

Filtry  $P_d(z)$  a  $P_d(-z)$  jsou zrcadlovými filtry, když  $P_d(z)$  je dolní propust a  $P_d(-z)=P_h(z)$  je horní propust. Podívejme se nyní na vlastnosti a vhodný výběr těchto důležitých filtrů.

Předpokládejme dolní propust  $P_d(z)$  s impulsní charakteristikou s lichým počtem vzorků,

$$p_d(n) = \{p_d(0), p_d(1), p_d(2), p_d(3), p_d(4), p_d(5), p_d(6)\}. \quad (2.6)$$

Zrcadlová horní propust  $P_d(-z)=P_h(z)$  musí mít samozřejmě impulsní charakteristiku s opačnými znaménky u vzorků s lichými indexy,

$$p_h(n) = \{p_d(0), -p_d(1), p_d(2), -p_d(3), p_d(4), -p_d(5), p_d(6)\}. \quad (2.7)$$

Má-li být splněna podmínka (2.5), musí být vzorky s lichými indexy s výjimkou prostředního vzorku  $p_d(3)$  nulové, abychom po odečtení přenosových funkcí  $P_d(z)$  a  $P_d(-z)$  obdrželi výraz  $2z^{-3}$ . Prostřední vzorek by měl být  $p_d(3)=1$ . Má-li být fázové zpoždění obou zrcadlových filtrů konstantní (v našem případě 3), musí být jejich impulsní charakteristiky symetrické. Filtry, které uvedeným podmínkám vyhovují, nazveme **půlpásmovými filtry** (z angl. halfband filters).

Návrh dvoukanálové banky filtrů (na Obr. 4) s možností přesné rekonstrukce signálu pak může být následující.

- Vybereme vhodnou dolní propust  $P_d(z)$ , která vyhovuje podmínce (2.5). Systém  $P_d(z)$  je dolní propust a systém  $P_d(-z)$  horní propust, filtry mají zrcadlově symetrické frekvenční charakteristiky kolem relativní úhlové frekvence  $\omega=\pi/2$ . Filtr  $P_d(z)$  je půlpásmový filtr, který má na  $\omega=\pi/2$  přenos poloviční oproti (maximálnímu) přenosu na  $\omega=0$ .



- Systém  $P_d(z)$  převedeme na sériové spojení dvou filtrů  $H_d(z)F_d(z)$ , přenosové funkce  $H_h(z)$  a  $F_h(z)$  odvodíme z (2.3) nebo (2.4).

### Návrh půlpásmového filtru

Při návrhu půlpásmového filtru lze vyjít z Lagrangeova interpolačního vzorce, který lze nalézt např. v [12],

$$\alpha\left(k + \frac{1-\tau}{2}\right) = \prod_{i=-\tau, i \neq k}^{\tau} \frac{\frac{\tau}{2} - i}{k - i}; \quad k = -\frac{\tau-1}{2}, \dots, \frac{\tau-1}{2} \quad (2.8)$$

(pro liché  $\tau$ ), odkud vyplývají pro výpočet interpolované hodnoty následující váhy pro  $(\tau+1)/2$  vzorků z každé strany od hledané hodnoty:

- pro  $\tau=1$ :  $\{1/2, 1/2\}$  ... interpolovaná hodnota jako průměr dvou sousedních hodnot;
- pro  $\tau=3$ :  $\{-1/16, 9/16, 9/16, -1/16\}$  ... výpočet ze čtyř nejbližších hodnot;
- pro  $\tau=5$ :  $\{3/256, -25/256, 150/256, 150/256, -25/256, 3/256\}$  ... výpočet ze šesti hodnot atd.

S uvedenými vahami korespondují první tři (pro  $\tau=1, 3, 5$ ) nejjednodušší půlpásmové dolní propusti  ${}^{\tau}P_d$ , které by se aplikovaly na posloupnost expandovanou s faktorem 2 (tj. na diskretní signál se zdvojnásobenou vzorkovací frekvencí proložením vzorky nulových hodnot):

$${}^1P_d(z) = \frac{1}{2}(1 + 2z^{-1} + z^{-2}), \quad (2.9)$$

$${}^3P_d(z) = \frac{1}{16}(-1 + 9z^{-2} + 16z^{-3} + 9z^{-4} - z^{-6}), \quad (2.10)$$

$${}^5P_d(z) = \frac{1}{256}(3 - 25z^{-2} + 150z^{-4} + 256z^{-5} + 150z^{-6} - 25z^{-8} + 3z^{-10}). \quad (2.11)$$

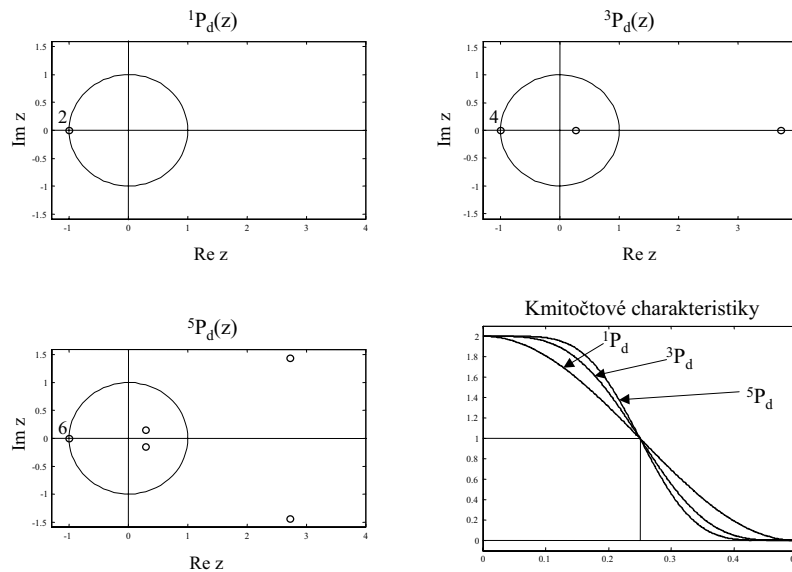
K významu indexu  $\tau$  u přenosové funkce  ${}^{\tau}P_d(z)$  půlpásmové dolní propusti můžeme také uvést, že udává velikost fázového zpoždění  $\tau=(N-1)/2$ , kde  $N$  je počet vzorků impulsní charakteristiky.

Obecný vzorec pro vyjádření přenosové funkce půlpásmové dolní propusti, který lze nalézt např. v [6] [23], má tvar

$$P_d(z) = 2 \left(\frac{1+z}{2}\right)^p \left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^p \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+k-1}{k} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k \left(\frac{1-z^{-1}}{2}\right)^k, \quad (2.12)$$

odkud je zřejmé, že počet nulových bodů v  $z=-1$  je  $2p$ .

Na Obr. 5 jsou zobrazena rozložení nulových bodů v rovině „ $z$ “ (všechny póly filtrů FIR jsou vždy v počátku) a modulové frekvenční charakteristiky uvedených půlpásmových dolních propustí (2.9), (2.10) a (2.11). Se strmostí přechodové části charakteristiky samozřejmě roste i délka impulsní charakteristiky filtru. Za zmínku stojí, že jsou uvedené charakteristiky monotónní. Plochá modulová charakteristika v oblasti kmitočtů pod  $\omega=\pi$  je zajištěna násobným nulovým bodem v  $z=-1$ , monotónní tvar charakteristiky nepřipouští žádné jiné nulové body na jednotkové kružnici, všechny zbylé nulové body se nacházejí v pravé polorovině „ $z$ “ a jejich poloha zajišťuje plochou modulovou charakteristiku v oblasti kmitočtů těsně nad  $\omega=0$ .



Obr. 5 Rozložení nulových bodů a modulové frekvenční charakteristiky půlpásmových dolních propustí  ${}^1P_d$ ,  ${}^3P_d$  a  ${}^5P_d$ .

## 2.1 FILTRY PRO BIORTOGONÁLNÍ DTWT

Jak již bylo uvedeno dříve, základem DTWT je čtveřice filtrů – dva rozkladové filtry  $H_d(z)$ ,  $H_h(z)$  a dva rekonstrukční filtry  $F_d(z)$ ,  $F_h(z)$ , viz schéma dvoukanálové banky filtrů na Obr. 4. Navrženou půlpásmovou dolní propust  $P_d(z)$  převedeme na sériové spojení dolních propustí  $H_d(z)F_d(z)$ , korespondující horní propusti  $H_h(z)$  a  $F_h(z)$  odvodíme z podmínek (2.3) nebo (2.4), které jsou nutné a zároveň postačující pro realizaci **biortogonální** DTWT.

Podívejme se nyní na čtveřice hledaných filtrů pro  $\tau=1$  a  $\tau=3$ , které vyhovují podmínkám (2.3), resp. (2.4).

### A) $\tau=1$ :

Převedme filtr (2.9) do tvaru

$${}^1P_d(z) = \frac{1}{2}(1 + 2z^{-1} + z^{-2}) = \frac{1}{2}(1 + z^{-1})(1 + z^{-1}) = {}^1H_d(z){}^1F_d(z), \quad (2.13)$$

kde  ${}^1H_d(z)$  (resp.  ${}^1F_d(z)$ ) je rozkladová (resp. rekonstrukční) dolní propust,

$${}^1H_d(z) = {}^1F_d(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + z^{-1}). \quad (2.14)$$

Poznamenejme, že z množiny přenosových funkcí  $\{{}^\tau P_d(z) | \tau = 1, 3, 5, \dots\}$  je pouze jediná  ${}^1P_d(z)$  vyjádřitelná jako druhá mocnina polynomu, tj. pouze pro  $\tau=1$  je rozkladová dolní propust shodná s rekonstrukční dolní propustí.

Aplikujeme-li podmínku (2.4), získáme čtveřici filtrů uvedenou v Tab. 1. Jedná se o nejjednodušší filtry, které bývají někdy nazývány filtry typu haar a výsledná transformace bývá nazývána jako DTWT Haarova typu. Jedná se o zvláštní případ filtrů, které vyhovují nejen podmínkám pro

biortogonální transformaci, ale i přísnějším podmínkám pro ortogonální transformaci, které uvedeme v kap. 2.2.

${}^1H_d(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+z^{-1})$	${}^1F_d(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+z^{-1})$
${}^1H_h(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+z^{-1})$	${}^1F_h(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-z^{-1})$

Tab. 1 Rozkladové a rekonstrukční filtry pro DTWT Haarova typu.

Obecně mohou mít rozkladové a korespondující rekonstrukční filtry pro biortogonální transformaci různě dlouhé impulsní charakteristiky, jak ukážeme dále.

### B) $\tau=3$ :

Z půlpásmového filtru (2.10) se dají odvodit 4 varianty dvojic rozkladových a rekonstrukčních dolních propustí: rozkladová dolní propust s jedním nulovým bodem v  $z=-1$  (resp. dvěma, třemi nebo čtyřmi nulovými body v  $z=-1$ ) a rekonstrukční dolní propust, která obsahuje zbývající nulové body (filtry použité jako rozkladové a rekonstrukční mohou být případně zaměněny).

Jako příklad odvodíme čtveřici filtrů pro realizaci biortogonální DTWT z přenosové funkce

$${}^3P_d(z) = \frac{1}{16}(1+z^{-1})^2(-1+2z^{-1}+6z^{-2}+2z^{-3}-z^{-4}) = {}^3H_{d,2}(z) {}^3F_{d,2}(z), \quad (2.15)$$

kde indexy  ${}_{d,2}$  značí dolní propust se dvěma nulovými body v  $z=-1$ . (Pozn.: právě podle počtu těchto nulových bodů v rozkladové a rekonstrukční dolní propusti se označuje uvedený typ biortogonální DTWT v Matlabu jako `biort2.2`). Aplikujeme-li podmínku (2.3), získáme čtveřici rozkladových a rekonstrukčních filtrů v Tab. 2.

${}^3H_{d,2}(z) = \frac{1}{4\sqrt{2}}(-1+2z^{-1}+6z^{-2}+2z^{-3}-z^{-4})$	${}^3F_{d,2}(z) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+2z^{-1}+z^{-2})$
${}^3H_{h,2}(z) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-2z^{-1}+z^{-2})$	${}^3F_{h,2}(z) = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1+2z^{-1}-6z^{-2}+2z^{-3}+z^{-4})$

Tab. 2 Filtry pro biortogonální DTWT (`biort2.2`) odvozené z  ${}^3H_{d,2}(z)$  a  ${}^3F_{d,2}(z)$ , viz (2.15).

Pro biortogonální DTWT je typické, že obvykle nebývají modulové frekvenční charakteristiky jejich dolních a horních propustí symetrické kolem  $\omega_{vz}/4$ , výhodou však mohou být lineární fázové frekvenční charakteristiky všech čtyř filtrů.

## 2.2 FILTRY PRO ORTOGONÁLNÍ DTWT

Rozkladové a rekonstrukční filtry pro ortogonální DTWT musí mít stejně dlouhé impulsní charakteristiky, které nejsou korelované,

$$r_{dh}(0) = \sum_n h_d(n)h_h(n) = \sum_n f_d(n)f_h(n) = 0. \quad (2.16)$$

Podmínka (2.16) také vyjadřuje ortogonalitu impulsních charakteristik dvojic rozkladových, resp. rekonstrukčních filtrů. Z filtrů pro DTWT uvedených výše splňují tuto podmínku filtry Haarova typu (Tab. 1), pro jejichž konstrukci jsme vystačili pouze s podmínkami (2.3) nebo (2.4).

K odvození podmínek, které musí splňovat filtry pro realizaci ortogonální DTWT, se zaměříme na vlastnosti půlpásmových filtrů. Vyjděme přitom z přenosové funkce kauzálního filtru FIR se symetrickou impulsní charakteristikou, kdy  $p_d(n) = p_d(N-n)$ ,

$$P_d(z) = z^{-\frac{N-1}{2}} \left[ p_d\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} p_d(n) \left[ z^{-\left(n-\frac{N-1}{2}\right)} + z^{\left(n-\frac{N-1}{2}\right)} \right] \right]. \quad (2.17)$$

Po transformaci  $z \rightarrow z^{-1}$  dojde k reverzi impulsní charakteristiky  $p_d(n) \rightarrow p_d(-n)$ . Násobný pól v počátku se po této transformaci změní na násobný nulový bod, druhý činitel v hranatých závorkách se nezmění. Fázová frekvenční charakteristika změní znaménko, zatímco modulová frekvenční charakteristika zůstane zachována – konfigurace nulových bodů se tedy nezmění. Pro  $i$ -tý nulový bod uvedená transformace znamená

$$n_i = |n_i| e^{j\varphi_i} \xrightarrow{z \rightarrow z^{-1}} \frac{1}{n_i} = \frac{1}{|n_i|} e^{-j\varphi_i}. \quad (2.18)$$

Z uvedeného vyplývá, že se nulové body ležící mimo jednotkovou kružnici mohou vyskytovat pouze ve dvojicích (leží-li na reálné ose) nebo ve čtveřicích (mimo reálnou osu) se dvěma komplexně sdruženými dvojicemi a současně se dvěma těmito dvojicemi ve vzdálenosti  $|n_i|$  a dvěma ve vzdálenosti  $|1/n_i|$  od počátku roviny „ $z$ “, viz Obr. 5.

Přenosovou funkci (2.17) lze potom obecně vyjádřit jako

$$P_d(z) = z^{-\frac{N-1}{2}} G_d(z) G_d(z^{-1}), \quad (2.19)$$

kde  $G_d(z)$  i  $G_d(z^{-1})$  mají po  $(N-1)/2$  nulových bodech, tj.  $1, 3, 5, 7, \dots$ , které jsou rozloženy následujícím způsobem (když  $I$  je počet nulových bodů filtru  $P_d(z)$  v  $z=-1$ ):

- $G_d(z)$  obsahuje  $I/2$  nulových bodů v  $z=-1$  a všechny nulové body v pravé polorovině, které leží uvnitř jednotkové kružnice,  $|n_i| < 1$ ,
- $G_d(z^{-1})$  obsahuje  $I/2$  nulových bodů v  $z=-1$  a všechny nulové body v pravé polorovině, které leží vně jednotkové kružnice,  $|n_i| > 1$ .

Oba filtry z (2.19) mají shodné modulové frekvenční charakteristiky a opačná znaménka fázových charakteristik,

$$G_d(e^{j\omega}) = |G_d(e^{j\omega})| e^{j \arg G_d(e^{j\omega})}, \quad G_d(e^{-j\omega}) = |G_d(e^{j\omega})| e^{-j \arg G_d(e^{j\omega})}, \quad (2.20)$$

když zřejmě platí

$$|G_d(e^{j\omega})| = \sqrt{|P_d(e^{j\omega})|}. \quad (2.21)$$

Nyní se podívejme na podmínky, které musí splňovat banky rozkladových a rekonstrukčních filtrů pro realizaci ortogonální DTWT. Kauzální dolní propusti (rozkladová  $H_d(z)$  a rekonstrukční  $F_d(z)$ ) budou vycházet z (2.19),

$$H_d(z) = G_d(z), \quad (2.22)$$

$$F_d(z) = z^{-\frac{N-1}{2}} G_d(z^{-1}) = z^{-\frac{N-1}{2}} H_d(z^{-1}). \quad (2.23)$$

Vyvodíme-li z (2.4) podmínku  $H_h(z) = -F_d(-z)$ , získáme

$$H_h(z) = -(-1)^{\frac{N-1}{2}} z^{-\frac{N-1}{2}} H_d(-z^{-1}) = z^{-\frac{N-1}{2}} H_d(-z^{-1}), \quad (2.24)$$

protože je  $(N-1)/2$  vždy liché. Analogicky k půlpásmové dolní propusti (2.19) lze vyjádřit přenosovou funkci půlpásmové horní propusti jako

$$P_h(z) = z^{-\frac{N-1}{2}} G_h(z) G_h(z^{-1}) = P_d(-z), \quad (2.25)$$

kde pro rozložení nulových bodů a pro kmitočtové charakteristiky horních propustí  $G_h(z)$  a  $G_h(z^{-1})$  lze snadno doplnit úvahu podobnou jako pro dolní propusti  $G_d(z)$  a  $G_d(z^{-1})$ . Impulsní charakteristiku rekonstrukční horní propusti tedy získáme reverzí impulsní charakteristiky rozkladové horní propusti,

$$F_h(z) = z^{-\frac{N-1}{2}} H_h(z^{-1}). \quad (2.26)$$

Zřejmě platí (analogicky k (2.21)), že

$$|G_h(e^{j\omega})| = \sqrt{|P_h(e^{j\omega})|}. \quad (2.27)$$

Jak již bylo uvedeno, půlpásmové filtry  $P_d$  a  $P_h$  jsou zrcadlové; připomeneme-li podmínku věrné rekonstrukce (2.5), pak výchozí půlpásmové filtry splňují podmínky

$$|P_d(e^{j\omega})| = \begin{cases} 2 & \text{pro } \omega \in \langle 0, \pi/2 \rangle \\ 1 & \text{pro } \omega = \pi/2 \\ 0 & \text{pro } \omega \in \langle \pi/2, \pi \rangle \end{cases} \quad a \quad |P_h(e^{j\omega})| = \begin{cases} 0 & \text{pro } \omega \in \langle 0, \pi/2 \rangle \\ 1 & \text{pro } \omega = \pi/2 \\ 2 & \text{pro } \omega \in \langle \pi/2, \pi \rangle \end{cases}. \quad (2.28)$$

Z podmínek (2.21) a (2.27) pak vyplývá pro dvojice rozkladových i rekonstrukčních filtrů, že

$$|H_d(e^{j\omega})| = |F_d(e^{j\omega})| = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{pro } \omega \in \langle 0, \pi/2 \rangle \\ 1 & \text{pro } \omega = \pi/2 \\ 0 & \text{pro } \omega \in \langle \pi/2, \pi \rangle \end{cases} \quad (2.29)$$

$$|H_h(e^{j\omega})| = |F_h(e^{j\omega})| = \begin{cases} 0 & \text{pro } \omega \in \langle 0, \pi/2 \rangle \\ 1 & \text{pro } \omega = \pi/2 \\ \sqrt{2} & \text{pro } \omega \in \langle \pi/2, \pi \rangle \end{cases}.$$

Dvojice rozkladových filtrů  $H_d$  a  $H_h$  (resp. rekonstrukčních filtrů  $F_d$  a  $F_h$ ) jsou dvojicemi tzv. **kvadraturních zrcadlových filtrů (QMF)**. Jejich modulové frekvenční charakteristiky jsou monotónní a protínají se na čtvrtině vzorkovacího kmitočtu při poklesu zisku o 3dB.

Filtry pro realizaci ortogonální DTWT mají sice zrcadlově symetrické, monotónní a v propustných pásmech ploché modulové frekvenční charakteristiky, ale jejich fázové charakteristiky nejsou díky nesymetrickým impulsním charakteristikám lineární, což lze považovat do jisté míry za jejich nevýhodu.

## Filtry pro ortogonální DTWT podle Daubechiesové

V Matlabu jsou tyto filtry obecně označovány jako  $dbD$ , kde  $D=I/2$  značí počet nulových bodů každého z filtrů v  $z=-1$ .

- Filtry  $db1$

Vycházejí z půlpásmové dolní propusti  ${}^1P_d(z)$  s přenosovou funkcí (2.13) a už jsme se s nimi setkali jako se zvláštním případem označeným jako Haarovy filtry, které jsme uvedli v Tab. 1. Snadno ověříme, že kromě podmínek (2.3) nebo (2.4) vyhovují i náročnějším podmínkám pro ortogonální DTWT.

- Filtry  $db2$

Vycházejí z půlpásmové dolní propusti  ${}^3P_d(z)$  s přenosovou funkcí (2.10) a s  $N-1=6$  nulovými body, z toho  $I=2D=4$  nulovými body v  $z=-1$ . Jak rozkladová, tak i rekonstrukční dolní propust obsahuje  $(N-1)/2=3$  nulové body: z toho  $D=2$  nulové body leží v  $z=-1$  a zbylý 1 nulový bod leží v pravé polorovině „ $z$ “ mimo jednotkovou kružnici (u jednoho filtru uvnitř a u druhého vně jednotkové kružnice).

- Filtry  $dbD$  pro  $D>2$

Filtry  $dbD$  jsou odvozeny z půlpásmové dolní propusti  ${}^{2D-1}P_d(z)$  s celkem  $N-1$  nulovými body, z toho  $I=2D$  nulovými body v  $z=-1$ . Jak rozkladová, tak i rekonstrukční dolní propust obsahuje  $(N-1)/2$  nulových bodů: z toho  $D$  nulových bodů leží v  $z=-1$  a zbylých  $(N-1)/2 \bmod D$  nulových bodů leží v pravé polorovině „ $z$ “ mimo jednotkovou kružnici (u jednoho filtru všechny uvnitř a u druhého všechny vně jednotkové kružnice).

## 2.3 REDUNDANTNÍ DTWT

Redundantní DTWT je varianta transformace, která nemá podvzorkované výstupy filtrů, jak je patrné z Obr. 6. Počet koeficientů redundantní transformace narůstá úměrně s počtem pásem, na která je signál rozkládán. Podívejme se nyní na podmínky, které musí splňovat rozkladové a rekonstrukční filtry, aby byl po zpětné transformaci přesně rekonstruován vstupní signál.

Ze schématu na Obr. 6d vyplývá, že

$$Y(z) = [F_d(z)H_d(z) + F_h(z)H_h(z)]X(z), \quad (2.30)$$

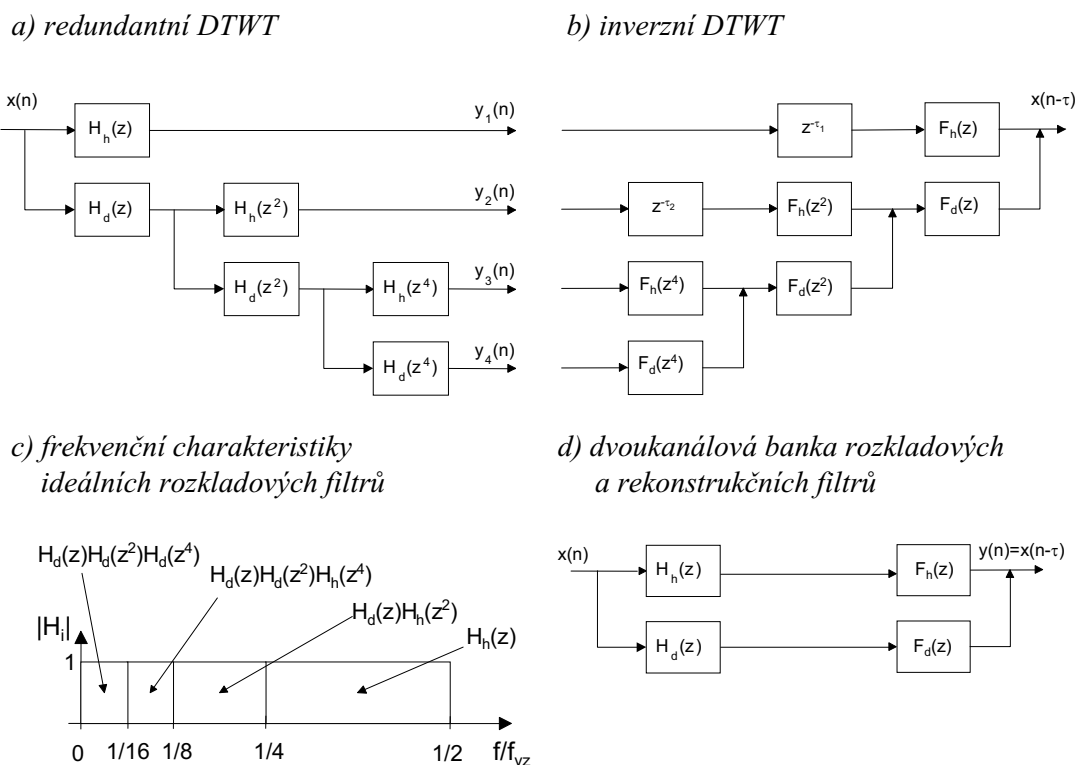
odkud

$$F_d(z)H_d(z) + F_h(z)H_h(z) = z^{-\tau}. \quad (2.31)$$

Ponecháme-li v platnosti podmínky rekonstrukce u DTWT s decimací (2.3) nebo (2.4), pak pro půlpásmové filtry platí

$$P_d(z) - P_h(z) = z^{-\tau}. \quad (2.32)$$

Srovnáme (2.32) s (2.5) pro DTWT s decimací – podmínka pro věrnou rekonstrukci vstupního signálu je až na konstantu 2 na pravé straně (2.32) stejná jako u DTWT s decimací (2.5). Z toho vyplývá, že modul přenosu dolních propustí na  $\omega=0$  (resp. horních propustí na  $\omega=\pi$ ) musí být 1 a nikoliv  $2^{1/2}$  jako u DTWT s decimací. Rozkladové a rekonstrukční filtry jsou pro oba tyto typy DTWT stejné, až na konstantu ovlivňující přenos – modulové frekvenční charakteristiky rozkladových filtrů jsou naznačeny na Obr. 6c.



Obr. 6 Přímá redundantní DTWT se třemi stupni rozkladu (a), zpětná DTWT (b), frekvenční charakteristiky ideálních rozkladových filtrů (c), DTWT s jedním stupněm rozkladu (d).

Na rozdíl od DTWT s podvzorkováním koeficientů nezávisí koeficienty redundantní DTWT na posunutí vstupního signálu (resp. na volbě počátku filtrace). Proto bývá redundantní DTWT vhodnější pro filtraci signálů nebo pro detekci charakteristických útvarů v signálech.

Více podrobností k problematice uvedené v této kapitole čtenář nalezne v habilitační práci [17], ještě více pak v knižních publikacích [6], [9], [19], [23], [27], [28].

### 3 FILTRACE SIGNÁLŮ S VYUŽITÍM DTWT

Cílem vlnkové filtrace je taková úprava koeficientů DTWT signálu, při které jsou v nejvyšší možné míře potlačeny šumové koeficienty a minimálně poškozeny koeficienty užitečného signálu. Pokud se spektra užitečného signálu a rušení výrazně překrývají, bývá vlnková filtrace k užitečnému signálu šetrnější než filtrace lineární. Při návrhu vlnkového filtru se musíme zabývat dvěma okruhy problémů: výběrem vhodného typu DTWT a hledáním vhodné strategie úpravy koeficientů DTWT. Podívejme se nyní na úpravy koeficientů transformovaného signálu.

#### 3.1 PRAHOVÁNÍ KOEFICIENTŮ DTWT

Základními typy prahování koeficientů DTWT jsou tvrdé a měkké prahování [14]. Označme vstupní hodnotu jako  $x$ , práh jako  $\lambda$  a výstupní hodnotu jako  ${}^\lambda x$ . Pak pro tvrdé prahování platí

$${}^\lambda x = \begin{cases} x & \text{pro } |x| > \lambda \\ 0 & \text{pro } |x| \leq \lambda \end{cases} \quad (3.1)$$

a pro měkké prahování

$$\lambda_x = \begin{cases} \text{sign}(x)(|x| - \lambda) & \text{pro } |x| > \lambda \\ 0 & \text{pro } |x| \leq \lambda \end{cases} . \quad (3.2)$$

Uvedené typy prahování nejsou jediné, ale jsou používány nejčastěji. Vedle nich ještě existují jiné typy, jako např. hybridní (viz kap. 3.3.1).

### 3.2 STANOVENÍ PRAHOVÝCH HODNOT PRO VLNKOVOU FILTRACI

Prahy pro úpravu koeficientů při vlnkové filtraci je žádoucí nastavit s ohledem na úroveň (směrodatnou odchylku  $\sigma_w$  či rozptyl  $\sigma_w^2$ ) šumu  $w$ . Je-li úroveň šumu nižší, jsou také prahové hodnoty menší a snižuje se i míra poškození užitečného signálu.

Předpokládejme aditivní směs  $x(n)$  užitečného signálu  $s(n)$  a šumu  $w(n)$ ,

$$x(n) = s(n) + w(n). \quad (3.3)$$

Označíme-li koeficienty DTWT vstupního signálu  $x(n)$  jako  $y_m(n)$ , užitečného signálu jako  $u_m(n)$  a šumu jako  $v_m(n)$ , kde  $n$  je index koeficientu  $m$ -té úrovně rozkladu, můžeme díky linearitě DTWT psát

$$y_m(n) = u_m(n) + v_m(n). \quad (3.4)$$

#### Univerzální a empirický práh

Pro bílý šum s Gaussovým rozložením byla odvozena hodnota prahu [14],

$$\lambda = \sigma_w \sqrt{2 \ln(N)}, \quad (3.5)$$

která minimalizuje riziko, že se liší od optimální, ale neznámé prahové hodnoty.  $N$  je počet vzorků signálu, což znamená, že práh roste (i když velmi pomalu) s délkou signálu. Původně byla tato hodnota odvozena pro dyadickou DTWT s decimací jako univerzální, tj. stejná pro všechna pásma rozkladu. Při jejím odvození bylo sledováno spíše vyhlazení signálu než minimalizace střední kvadratické odchylky filtrovaného signálu od signálu užitečného. Obvykle bývá tato hodnota prahu považována za příliš vysokou i při potlačení barevného šumu, kdy práh nastavujeme pro každé pásmo zvlášť. Jako nejjednodušší náhrada se nabízí možnost násobit směrodatnou odchylku šumu empirickou konstantou  $K$ . Při potlačování barevného šumu pak volíme prahové hodnoty pro každé  $m$ -té pásmo jako

$$\lambda_m = K_m \sigma_{v_m}. \quad (3.6)$$

#### Práh vycházející ze zobecněného Gaussova rozložení koeficientů

Metoda byla odvozena původně pro filtraci 2D dat [11] [13]. Autoři vyšli z poznatku, že rozložení koeficientů DTWT v jednotlivých pásmech lze u obecných obrazů popsat zobecněným Gaussovým rozložením. Vytvořili statistický model, na jeho základě minimalizovali podmíněnou střední kvadratickou odchylku filtrovaného signálu od signálu užitečného a po zjednodušení došli k vyjádření prahové hodnoty pro jednotlivá pásma v podobě

$$\lambda_m = \frac{\sigma_{v_m}^2}{\sigma_{u_m}}, \quad (3.7)$$

tedy jako podíl rozptylu šumu a směrodatné odchylky užitečného signálu v  $m$ -tém pásmu.

Práh podle (3.7) lze intuitivně komentovat následujícím způsobem: převažuje-li v  $m$ -tém pásmu směrodatná odchylka užitečného signálu nad směrodatnou odchylkou šumu, bude práh  $\lambda_m < \sigma_{v_m}$ ; v opačném případě, kdy bude převažovat směrodatná odchylka šumu, bude  $\lambda_m > \sigma_{v_m}$ .



### 3.3 WIENEROVSKÁ FILTRACE V ČASOVĚ-MĚŘÍTKOVÉ OBLASTI

Pro potlačení šumu  $w(n)$ , jehož spektrum se výrazně prolíná se spektrem užitečného signálu  $s(n)$ , se někdy používá Wienerova filtru. Za předpokladu, že je vstupní signál  $x(n)=s(n)+w(n)$ , tj. aditivní směsí obou (nekorelovaných) složek, Wienerův filtr je ve frekvenční oblasti optimálním korekčním faktorem  $H_{opt}(\omega)$  pro korekci spektra  $X(\omega)$  vstupu, aby spektrum

$$Y(\omega) = X(\omega)H_{opt}(\omega) \quad (3.8)$$

bylo optimální aproximací spektra  $S(\omega)$  užitečného signálu ve smyslu nejmenší střední kvadratické odchylky výstupu  $y(n)$  od  $s(n)$ , tedy:  $y(n)=s(n)+e(n)$ , kde  $E\{e^2(n)\} \rightarrow \min$ . Wienerův korekční faktor má podobu

$$H_{opt}(\omega) = \frac{R_{ss}(\omega)}{R_{ss}(\omega) + R_{ww}(\omega)}, \quad (3.9)$$

kde  $R_{ss}(\omega)$  je výkonové spektrum užitečného signálu a  $R_{ww}(\omega)$  je výkonové spektrum šumu. Pro každou konkrétní hodnotu kmitočtu  $\omega$  nabývá korekční faktor vždy hodnotu z intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ .

V některých publikacích ([10], [15], [18], [21]) lze nalézt analogii k výše uvedenému principu filtrace, při které se vhodnými korekčními faktory násobí jednotlivé koeficienty DTWT. Připomeňme vztah (3.4) a definujme analogicky k (3.8), že hledáme korekční faktory  $g_m(n)$  takové, aby upravené hodnoty koeficientů DTWT,

$${}^\lambda y_m(n) = y_m(n)g_m(n) = g_m(n)[u_m(n) + v_m(n)], \quad (3.10)$$

byly optimální aproximací koeficientů  $u_m(n)$  užitečného signálu ve smyslu nejmenší střední kvadratické odchylky výstupu  ${}^\lambda y_m(n)$  od  $s(n)$ , tedy:  ${}^\lambda y_m(n)=s(n)+e(n)$ , kde  $E\{e^2(n)\} \rightarrow \min$ . Vzhledem k tomu, že i pro reverzibilní DTWT platí obdoba Parsevalova teorému [15], kdy  $E\{e^2(n)\} = E\{e_m^2(n)\}$ , tj.

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |e(n)|^2 = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{1}{N_m} \sum_{n=0}^{N_m-1} |e_m(n)|^2, \quad (3.11)$$

měly by být upravené koeficienty  ${}^\lambda y_m(n)$  optimální aproximací koeficientů  $u_m(n)$  užitečného signálu i ve smyslu nejmenší střední kvadratické odchylky výstupu  ${}^\lambda y_m(n)$  od  $u_m(n)$ , tedy

$${}^\lambda y_m(n) = u_m(n) + e_m(n), \quad \text{kde } E\{e_m^2(n)\} \rightarrow \min. \quad (3.12)$$

Poznamenejme, že v  $e_m(n)$  je zahrnuto zkreslení užitečného signálu  ${}^u e_m(n)$  a zbylý šum  ${}^v e_m(n)$ . Pro nekorelované  $u_m(n)$  a  $v_m(n)$  můžeme psát, že

$$E\{e_m^2(n)\} = E\{{}^u e_m^2(n)\} + E\{{}^v e_m^2(n)\}. \quad (3.13)$$

Střední výkon zkreslení užitečného signálu můžeme s přihlédnutím k (3.10) vyjádřit jako

$$E\{{}^u e_m^2(n)\} = E\{[g_m(n)u_m(n) - u_m(n)]^2\} = E\{(g_m(n) - 1)^2 u_m^2(n)\} \quad (3.14)$$

a zbytkový šum jako

$$E\{{}^v e_m^2(n)\} = E\{g_m^2(n)v_m^2(n)\}. \quad (3.15)$$

Hledáme  $g_m(n)$ , při kterém je minimální střední výkon chybových koeficientů (3.13),

$$E\{e_m^2(n)\} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{1}{N_m} \sum_{n=0}^{N_m-1} |e_m(n)|^2 = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{1}{N_m} \sum_{n=0}^{N_m-1} [(g_m(n) - 1)^2 u_m^2(n) + g_m^2(n)v_m^2(n)]. \quad (3.16)$$

Podmínka minima pro  $m=m'$  a  $n=n'$  je

$$\frac{\partial}{\partial g_{m'}(n')} E\{{}^v e_m^2(n)\} = 0, \quad (3.17)$$

odtud

$$0 = 2(g_{m'}(n') - 1)u_{m'}^2(n') + 2g_{m'}(n')v_{m'}^2(n') \quad (3.18)$$

a po úpravě a dosazení za  $m'=m$  a  $n'=n$  získáme korekční faktor (všimněme si analogie s (3.9))

$$g_m(n) = \frac{u_m^2(n)}{u_m^2(n) + v_m^2(n)} \approx \frac{u_m^2(n)}{u_m^2(n) + \sigma_{v_m}^2}, \quad (3.19)$$

kde neznáme hodnoty šumových koeficientů  $v_m(n)$ , proto jejich kvadrát nahrazujeme rozptylem šumu  $\sigma_{v_m}^2$ . Pro  $u_m^2(n) \gg \sigma_{v_m}^2$  bude  $g_m(n)$  blízké k 1 a koeficient  $y_m(n)$  zůstane prakticky beze změny, naopak pro  $u_m^2(n) \ll \sigma_{v_m}^2$  bude  $g_m(n) \ll 1$  a absolutní hodnota koeficientu  $y_m(n)$  se výrazně sníží. Koeficienty  $u_m(n)$  užitečného signálu také nejsou známy, možnosti jejich odhadu uvádíme dále.

### 3.3.1 Hybridní prahování

Odhad  $u_m(n)$  z koeficientů  $y_m(n)$  a rozptylu šumu v podobě  $u_m^2(n) = \max[ky_m^2(n) - \sigma_{v_m}^2, 0]$  je použit v [21], kde autor odůvodňuje výběr optimální hodnoty konstanty  $k=1/3$ , což vede ke korekčnímu faktoru

$$g_m(n) = \max\left[\frac{y_m^2(n) - 3\sigma_{v_m}^2}{y_m^2(n)}, 0\right] = \max\left[1 - 3\frac{\sigma_{v_m}^2}{y_m^2(n)}, 0\right]. \quad (3.20)$$

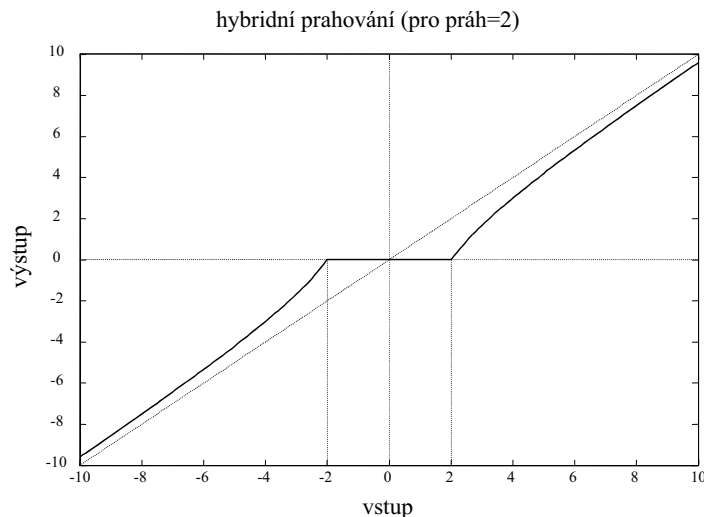
Vyjádříme upravenou hodnotu koeficientu jako

$$\lambda y_m(n) = y_m(n)g_m(n) = \max\left[y_m(n) - 3\frac{\sigma_{v_m}^2}{y_m(n)}, 0\right] \quad (3.21)$$

a můžeme konstatovat, že se vlastně jedná o prahování koeficientů  $y_m(n)$  s použitím prahu

$$\lambda_m = \sqrt{3}\sigma_{v_m} \Rightarrow \lambda y_m(n) = \begin{cases} y_m(n) - \frac{\lambda_m^2}{y_m(n)} & \text{pro } |y_m(n)| > \lambda_m \\ 0 & \text{pro } |y_m(n)| \leq \lambda_m \end{cases}. \quad (3.22)$$

Z kresby na Obr. 7 vidíme, že se pro hodnoty těsně nad prahem blížíme k měkkému a pro výrazněji nadprahové hodnoty naopak k tvrdému prahování, v obou případech s prahem  $\lambda_m = \sqrt{3}\sigma_{v_m}$ . Proto jsme nazvali tuto metodu **hybridním prahováním**.

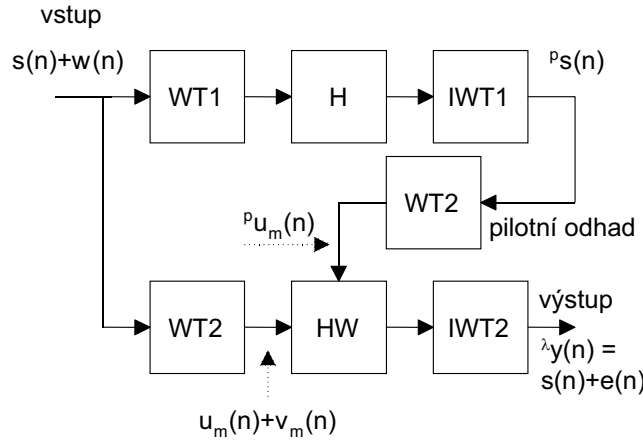


Obr. 7 Prahování podle (3.22) pro  $\lambda_m=2$ .

### 3.3.2 Metoda pilotního odhadu

Jinou možností je metoda pilotního odhadu  $^P s(n)$  užitečného signálu  $s(n)$ , po jehož DTWT získáme odhady  $^P u_m(n)$  koeficientů užitečného signálu [10]. Princip je naznačen na Obr. 8. V horní větvi

schématu je realizována vlnková transformace WT1, následuje úprava koeficientů (prahováním) v bloku H a zpětná transformace IWT1. Výsledkem je pilotní signál, který odpovídá přibližně užitečnému signálu bez šumu. Transformaci WT2, která je základem wienerovské vlnkové filtrace, je podroben jak vstupní signál, tak i výstup horní větve a oba výstupy jsou zpracovány blokem HW, ve kterém je aplikován korekční faktor podle (3.19), kde je nahrazena hodnota  $u_m(n)$  pilotním odhadem  ${}^p u_m(n)$ . Výsledkem jsou upravené koeficienty  ${}^\lambda y_m(n)$ , po zpětné transformaci IWT2 získáme výstup  ${}^\lambda y(n) = s(n) + e(n)$ .



Obr. 8 Princip wienerovského vlnkového filtru s pilotním odhadem užitečného signálu.

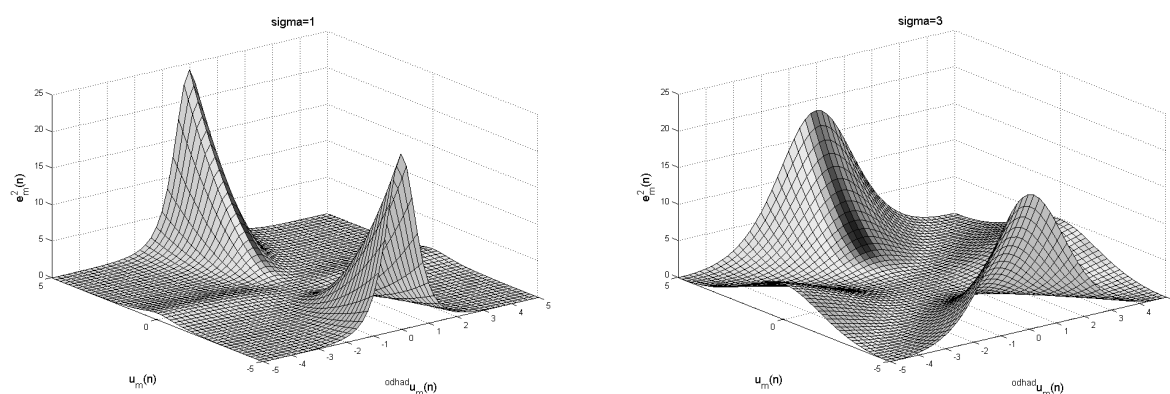
Střední kvadratická chyba  $\varepsilon_y^2$  způsobená nesouhlasem mezi koeficienty  ${}^\lambda y_m(n)$  (odvozenými z (3.19) s ideálními hodnotami  $u_m(n)$ ) a odhadnutými koeficienty  ${}^\lambda y_m(n)$  (z pilotního odhadu  ${}^p u_m(n)$ ) může být vyjádřena jako

$$\begin{aligned} \varepsilon_y^2 &= E\left\{\left({}^\lambda y_m(n) - {}^\lambda y_m(n)\right)^2\right\} = E\left\{\left(\frac{u_m^2(n)}{u_m^2(n) + \sigma_{v_m}^2} y_m(n) - \frac{{}^p u_m^2(n)}{{}^p u_m^2(n) + \sigma_{v_m}^2} y_m(n)\right)^2\right\} = \\ &= E\left\{y_m^2(n) \left(\frac{u_m^2(n)}{u_m^2(n) + \sigma_{v_m}^2} - \frac{{}^p u_m^2(n)}{{}^p u_m^2(n) + \sigma_{v_m}^2}\right)^2\right\}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

kde  $y_m(n) = u_m(n) + v_m(n)$ . Uvážíme-li, že posloupnosti  $u_m(n)$  a  $v_m(n)$  nejsou korelované, pak můžeme psát, že  $E\{y_m^2(n)\} = E\{u_m^2(n)\} + \sigma_{v_m}^2$  a odtud

$$E\left\{\left({}^\lambda y_m(n) - {}^\lambda y_m(n)\right)^2\right\} = E\left\{\left(u_m^2(n) + \sigma_{v_m}^2\right) \left(\frac{u_m^2(n)}{u_m^2(n) + \sigma_{v_m}^2} - \frac{{}^p u_m^2(n)}{{}^p u_m^2(n) + \sigma_{v_m}^2}\right)^2\right\}. \quad (3.24)$$

Na Obr. 9 jsou naznačeny hodnoty jednotlivých členů sumy pro výpočet střední kvadratické chyby podle (3.24) pro hodnoty  $u_m(n) \in \langle -5, 5 \rangle$ ,  ${}^p u_m(n) \in \langle -5, 5 \rangle$  a  $\sigma_{v_m} = 1$  (vlevo), resp.  $\sigma_{v_m} = 3$  (vpravo). Z Obr. 9 vyplývají pro  $|{}^p u_m(n)| < |u_m(n)|$  větší příspěvky k celkové chybě  $\varepsilon_y^2$  a pro  $|{}^p u_m(n)| > |u_m(n)|$  příspěvky menší (citlivost na tyto odchylky narůstá s rostoucím rozptylem koeficientů šumu). V případě, kdy jsou hodnoty  $|u_m(n)|$  výrazně vyšší než směrodatná odchylka šumových koeficientů, dosáhneme menších odchylek  $|{}^p u_m(n)|$  od  $|u_m(n)|$  tvrdým prahováním v pilotním odhadu. V místech, kde jsou hodnoty  $|u_m(n)|$  srovnatelné se směrodatnou odchylkou šumu, můžeme po tvrdém prahování očekávat zachování nadprahových hodnot s výrazným podílem šumu a tyto hodnoty pilotního odhadu pak budou po transformaci IWT2 zatíženy velkou chybou  $e(n) = {}^\lambda y(n) - s(n)$ . V těchto případech je vhodnější měkké prahování. Kompromisem je použití (v bloku H) hybridního prahování podle (3.22).



Obr. 9 Zobrazení hodnot jednotlivých členů sumy pro výpočet střední kvadratické chyby podle (3.24). Vlevo pro  $\sigma_{v_m} = 1$ , vpravo pro  $\sigma_{v_m} = 3$ . (Hodnoty  $^p u_m(n)$  jsou označeny jako  $^{odhad} u_m(n)$ .)

## 4 VLNKOVÁ FILTRACE SIGNÁLŮ EKG

Možnosti vlnkové filtrace se otevírají zejména u signálů nestacionárního charakteru, kdy se v užitečném signálu střídají dlouhé nízkofrekvenční úseky s krátkými úseky vysokofrekvenčními. Uvedené vlastnosti má signál EKG, jehož cyklus je asi jen z 10 % tvořen relativně vysokofrekvenčními komplexy QRS, zbytek cyklu užitečného signálu obsahuje složky o výrazně nižších kmitočtech. Nejvýraznější frekvenční složky komplexů QRS leží v pásmu od 3 do 40 Hz [24], nicméně spektra těchto komplexů sahají přibližně do 125 Hz. Z jejich frekvenčního obsahu vychází doporučený vzorkovací kmitočet – obvykle 500 Hz [22]. Zbývá část, tj. asi 90 % délky cyklu signálu EKG, tvořená vlnami T a P obsahuje dominantní frekvenční složky v dolní části spektra asi do 10 Hz [24], jejich nejvyšší složky sahají zhruba ke 30 až 40 Hz.

V nejvyšších frekvenčních pásmech časově-frekvenčního rozkladu signálu EKG je tedy užitečná informace lokalizována v krátkých úsecích, které korespondují s komplexy QRS. Koeficienty DTWT nejvyšších frekvenčních pásem pak tvoří dlouhé úseky, které obsahují pouze šum a krátké úseky tvořené součtem šumových koeficientů s koeficienty užitečného signálu.

### 4.1 VÝBĚR TYPU DTWT A KOREKCE KOEFICIENTŮ

Při návrhu vlnkového filtru je samozřejmou podmínkou reverzibilita DTWT, transformace může tedy být biortogonální nebo ortogonální. Pro vlnkovou filtraci je jednoznačně vhodnější použití redundantní DTWT, která má oproti použití DTWT s decimací důležité výhody: výsledek není nezávislý na volbě počátku filtrace a při zpětné DTWT se neprovádí interpolace, což vede ke kvalitnějším výsledkům a také k mnohem menší citlivosti na použité banky filtrů [17]. Poznamenejme, že v publikacích je použití DTWT s decimací až překvapivě časté [1], [2], [15], [26].

Naše předchozí experimenty s DTWT s filtry s reálnými impulsními charakteristikami a filtry s komplexními impulsními charakteristikami ukázaly, že komplikovanější korekce komplexních koeficientů DTWT u druhé skupiny bank filtrů nevede ke kvalitnějším výsledkům, proto považujeme za postačující banky filtrů s reálnými impulsními charakteristikami [16].

Pokud jde o rozkladový strom, v publikacích převládá využití dyadické DTWT, ale objevuje se i transformace paketová [25], [26]. Ve studii uveřejněné v [30] jsme porovnávali výsledky získané

s dyadickou, paketovou a optimalizovanou paketovou transformací spočívající v rozkladu signálu neúplným stromem, jehož tvar byl podmíněn minimální entropií [3], [4]. Z našich výsledků vyplývá, že dyadická DTWT poskytuje výsledky, které jsou kvalitnější než výsledky s paketovou DTWT a srovnatelné s výsledky získanými pomocí komplikovanějšího optimálního rozkladu neúplným stromem. Rozhodli jsme se pro běžnější dyadickou DTWT.

Dalším problémem je výběr bank filtrů (který ovšem značně závisí na tom, je-li použita transformace s decimací nebo redundantní), použity byly biortogonální filtry [1], [16], [26], filtry podle Daubechiesové [1], [15], [16], splajnové filtry [2], [29], filtry typu Coiflet [1], [26], typu Symlet [20], nebo také typu Haar [20]. V našich experimentech jsme testovali filtry biortogonální i ortogonální, s krátkými i delšími impulsními charakteristikami.

Dalším problémem je korekce koeficientů DTWT. Prakticky všichni autoři doporučují prahování s využitím měkkého prahu, v nastavení úrovně prahu jsou však značné odlišnosti. Někteří autoři [1], [29] vycházejí z modelu gaussovského šumu a nastavení univerzálního prahu, jiní kombinují DTWT s Wienerovými filtry [15], [20], existují i jiné (empirické) přístupy [2], [26]. Při použití tvrdého prahování je nevýhodou především výskyt vysokých artefaktů způsobených nadprahovými koeficienty DTWT šumu, které je nepříjemné zejména v oblastech na začátcích nebo na koncích komplexů QRS. Hlavní nevýhodou měkkého prahování je snižování extrémů kmitů v komplexech QRS a ve zmenšené podobě také výskyt zmíněných artefaktů. U prahování hybridního nehrozí výrazné snižování extrémů vyšších kmitů uvnitř QRS, ale zůstává nevýhoda výskytu menších artefaktů. Nezkoušeli jsme (mj. kvůli zachování možnosti zpracování signálů v reálném čase) ani teoreticky značně rozpracované prahovací metody typu SURE nebo GCV [14], jejichž využití pro potlačení barevného šumu může být navíc sporné.

Kvalitnější výsledky než vlnkovou filtrací s měkkým, tvrdým či hybridním prahováním lze získat využitím wienerovské vlnkové filtrace s pilotním odhadem signálu. Tato metoda podstatně méně zkresluje extrémy kmitů v komplexech QRS a při vhodné realizaci pilotního odhadu signálu může téměř vyloučit vznik artefaktů. V [15] byla použita wienerovská filtrace s DTWT s decimací, ale s velmi zjednodušeným a málo vyhovujícím odhadem koeficientů DTWT signálu. V [20] byla použita wienerovská filtrace s pilotním odhadem, který byl realizován s DTWT s decimací a s tvrdým prahováním, které vedlo k výskytu četných artefaktů ve filtrovaném signálu.

#### 4.1.1 Testované signály a model rušení

Do testovacího souboru byly vybírány signály z knihovny CSE ( $f_{vz}=500$  Hz) [5]. Zastoupeny byly signály s malými kmitů Q, s vysokými kmitů R a s náhlými změnami strmosti signálu v začátcích a koncích komplexu QRS. Protože signály obsahovaly kromě kvantizačního šumu ( $q=5\mu\text{V}$ ) i rušení síťovým brumem a myopotenciály, vybírali jsme pouze signály s nejmenším rušením. Signály jsme předzpracovali wienerovskou vlnkovou filtrací a poté jsme je znehodnocovali umělým rušením zvolené úrovně. Předzpracování jsme věnovali velkou pozornost, výsledek filtrace byl kontrolován a teprve po kontrole byl signál zařazen do testovací množiny.

Při tvorbě umělého rušení jsme vyšli z generovaného bílého gaussovského šumu, který jsme kmitočtově omezili v souladu s typickým tvarem výkonového spektra povrchového signálu EMG nad pažním bicipsem [8]. Bílý gaussovský šum jsme obarvili kmitočtovým omezením číslicovou horní propustí (Butterworthova typu 4. řádu s mezní frekvencí 40 Hz) v sérii s jednoduchou dolní propustí s impulsní charakteristikou  $\{0.25, 0.5, 0.25\}$ .

### 4.1.2 Odhad rozptylu šumu

Před samotnou filtrací vlnkovým filtrem je nutný odhad rozptylu (resp. směrodatné odchylky) šumu v jednotlivých pásmech rozkladu. Součástí každého zpracování signálu EKG bývá detektor komplexů QRS, který může být doplněn o alespoň hrubý odhad jejich začátků a konců. Odhad rozptylu šumu v pásmech rozkladu, kde je prováděna korekce koeficientů DTWT, nepředstavuje v případě signálu EKG vážný problém. Jak již bylo uvedeno dříve, relativně vysokofrekvenční komplexy QRS zabírají zhruba desetinu délky celého cyklu signálu a v nejvyšších třech pásmech rozkladu (tj. v pásmu přibližně 32 až 250 Hz) lze očekávat mezi komplexy pouze příspěvky šumu, většinou ani v pásmu čtvrtém (asi 16 až 32 Hz) nenacházíme významnější příspěvky vln T a P užitečného signálu. Rozptyl šumu v jednotlivých (třech až čtyřech) pásmech rozkladu lze tedy odhadovat z úseků mezi komplexy QRS.

### 4.1.3 Výběr testovacích signálů a metody vlnkové filtrace

Při hodnocení výsledků jsme přihlíželi k dosaženému poměru signál/šum podle vzorce

$$SNR_{vyst} = 10 \log_{10} \frac{\sum_{n=1}^{N-1} [s(n)]^2}{\sum_{n=1}^{N-1} [\lambda y(n) - s(n)]^2} \quad [dB], \quad (4.1)$$

kde  $\lambda y(n)$  je výstup filtru a  $s(n)$  je užitečný signál, který byl před filtrací zbaven stejnosměrné složky. Hodnota  $SNR_{vyst}$  měla ve jmenovateli rozptyl (předem nastaveného) šumu. Kromě  $SNR_{vyst}$  jsme sledovali také zkreslení kmitů v komplexech QRS, případné rozšiřování těchto komplexů a zachování malých kmitů Q.

Pro pilotní odhad jsme použili hybridní prahování s úrovní prahu  $\lambda_m = 3\sigma_{v_m}$ . Práh jsme použili empirický a záměrně vyšší než v (3.22), aby se předcházelo v pilotním odhadu vzniku artefaktů. Následující wienerovský filtr vedl k nápravě (v pilotním odhadu) snížených hodnot v extrémech komplexů QRS. U nižších prahových hodnot použitých při pilotním odhadu signálu hrozí nebezpečí, že wienerovský filtr zbylé šumové artefakty ještě zvýrazní – představme si v (3.19) pilotní odhad  $^p u_m(n)$  s výrazným podílem šumu.

## 4.2 DOSAŽENÉ VÝSLEDKY

Testy jsme prováděli pro různé banky filtrů ve WT1 a WT2. Použili jsme jednoduché filtry typu `haar`, biortogonální filtry `bior2.2` s krátkými impulsními charakteristikami a `bior6.8` s delšími charakteristikami, z ortogonálních filtrů jsme vybrali také filtry s kratšími a delšími charakteristikami – `db2` a `db5`. Dosažené výsledky pro vstupní  $SNR_{vst}$  10 a 14 dB jsou zachyceny v Tab. 3. V tabulce jsou uvedeny hodnoty průměrných  $SNR_{vyst}$  po filtraci pro vybrané kombinace bank filtrů ve WT1 a WT2, které vedly k nejlepším výsledkům. V Tab. 4 uvádíme pro porovnání také méně příznivé výsledky dosažené vlnkovou filtrací se samotným hybridním prahováním koeficientů DTWT (3.22) ve čtyřech nejvyšších pásmech rozkladu signálu.

U wienerovské filtrace s pilotním odhadem užitečného signálu byly kvalitnější výsledky dosaženy v případech, kdy byly banky filtrů ve WT1 a WT2 shodné. V případě různých bank filtrů jsme kvalitní výsledky pozorovali v případech, kdy byly použity banky filtrů s velmi krátkými impulsními charakteristikami (`haar`, `bior2.2`, `db2`). Naopak nejméně kvalitních výsledků bylo dosaženo v případech, kdy byla použita (zejména ve WT2) banka filtrů s delší impulsními charakteristikou (`bior6.8`, `db5`).

Banky filtrů pro transformace WT1 / WT2	SNR <sub>vst</sub> = 10 dB	SNR <sub>vst</sub> = 14 dB
	průměrný SNR <sub>výst</sub> [dB]	průměrný SNR <sub>výst</sub> [dB]
haar/haar	21.4	24.3
bior2.2/bior2.2	22.8	26.0
bior6.8/bior6.8	22.8	25.9
db2/db2	22.6	25.5
db5/db5	21.9	24.9
haar/db2	22.1	24.8
bior2.2/haar	21.1	25.2
bior2.2/db2	21.2	25.5
db2/haar	20.6	24.9
db2/bior2.2	22.5	24.9

Tab. 3 Výsledné SNR<sub>výst</sub> po vlnkové wienerovské filtraci s pilotním odhadem signálu.

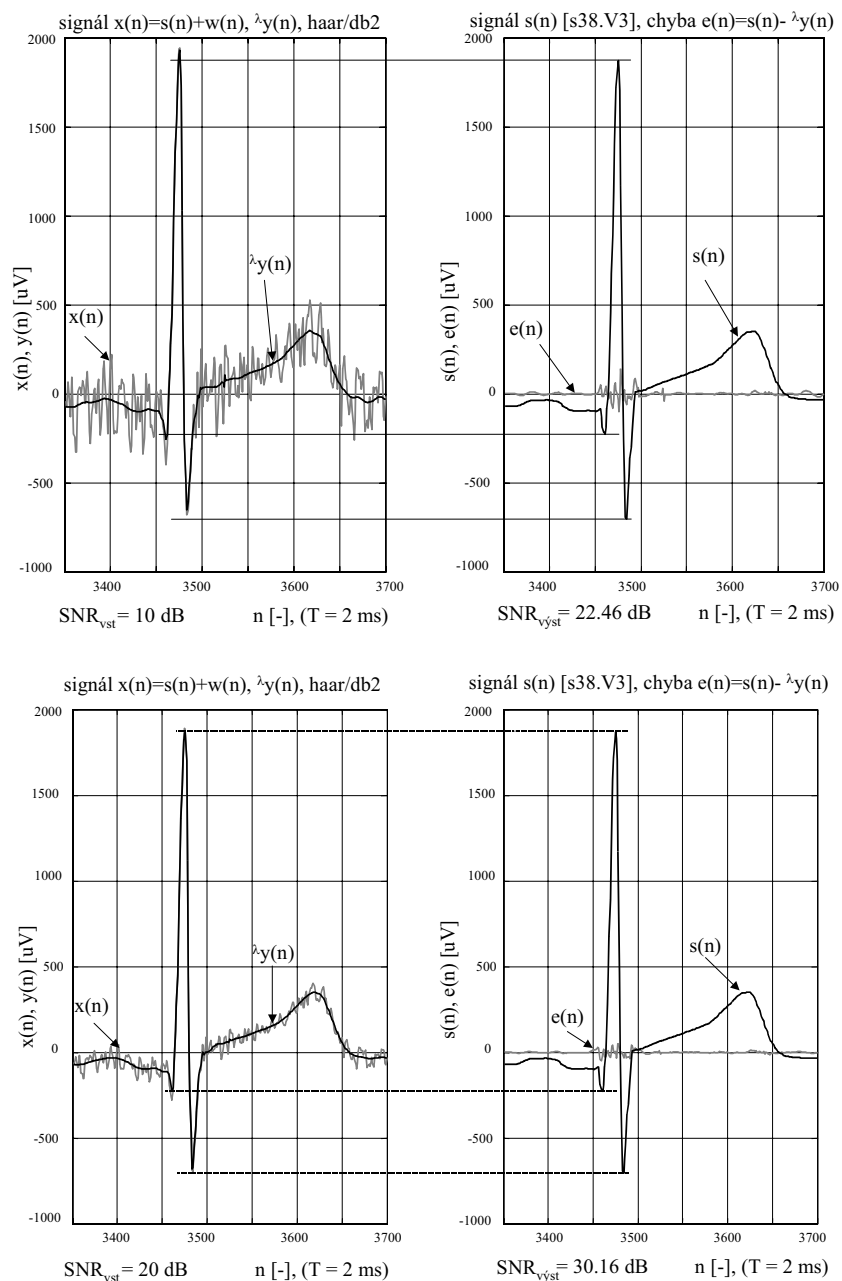
Banky filtrů pro filtraci s hybridním prahováním	SNR <sub>vst</sub> = 10 dB	SNR <sub>vst</sub> = 14 dB
	průměrný SNR <sub>výst</sub> [dB]	průměrný SNR <sub>výst</sub> [dB]
haar	19.7	22.7
bior2.2	18.8	22.5
bior6.8	20.5	24.1
db2	21.3	24.4
db5	20.4	23.7

Tab. 4 Výsledné SNR<sub>výst</sub> po vlnkové filtraci s hybridním prahováním koeficientů DTWT.

Na Obr. 10 jsou dvě ukázky filtrace uvedenou metodou, pro SNR<sub>vst</sub>=10 dB (horní kresba) a 20 dB (dolní kresba) s bankami filtrů typu haar v pilotním odhadu a typu db2 ve wienerovském filtru. Vstup filtru je aditivní směsí signálu  $s(n)$  a umělého šumu  $w(n)$ ,  $x(n)=s(n)+w(n)$ , výstup filtru označený jako  $\hat{y}(n)$  je s chybou  $e(n)=\hat{y}(n)-s(n)$ .

V testované množině signálů záviselo zkreslení velikostí vysokých extrémů v komplexech QRS na jejich výšce vztažené k úrovni šumu a kolísalo i v průběhu jednoho záznamu. Chyba se běžně pohybovala v rozumném rozsahu desítek  $\mu\text{V}$  a nečistota docházelo i ke zvýšení původní hodnoty, jak můžeme pozorovat i na Obr. 10 pro SNR<sub>vst</sub>=10 dB.

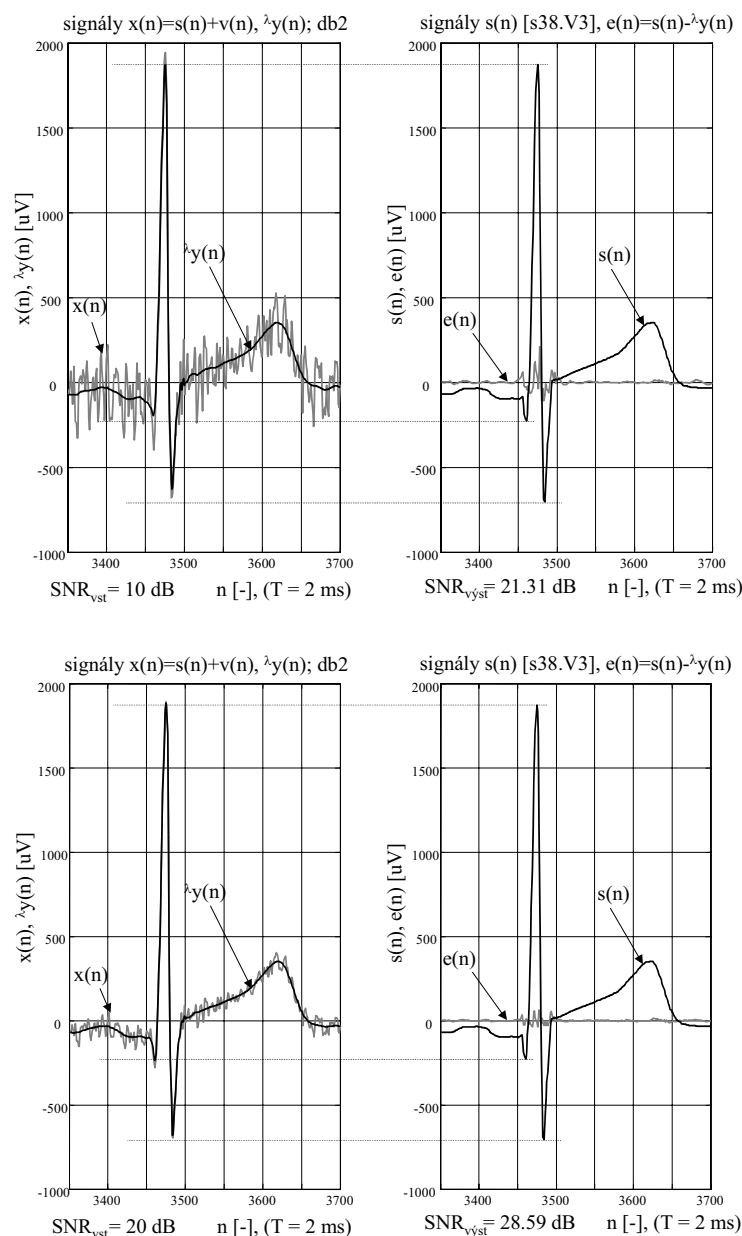
Větším problémem bylo poškozování malých kmitů v QRS a rozšiřování komplexů QRS. S těmito zkresleními je patrně nutné počítat, jejich velikost roste s úrovní šumu (Obr. 10). Také z tohoto hlediska byly nejkvalitnější výsledky dosahovány, když byly banky filtrů ve WT1 a WT2 shodné a navíc s krátkými impulsními charakteristikami. Pro dvojice bank shodných filtrů s delšími impulsními charakteristikami (bior6.8/bior6.8 nebo db5/db5) byly typické vzniklé zákmity před a za komplexy QRS. Poznamenejme, že se při použití bank filtrů bior6.8 a db5 uvedené zákmity objevovaly také u filtrace se samotným hybridním prahováním.



Obr. 10 Vlnková wienerovská filtrace s pilotním odhadem signálu pro  $SNR_{vst}=10$  dB (nahore) a 20 dB (dole) s bankami filtrů haar/db2.

Na Obr. 11 jsou pro srovnání dvě ukázky filtrace s hybridním prahováním koeficientů DTWT pro  $SNR_{vst}=10$  dB (horní kresba) a 20 dB (dolní kresba) s bankami filtrů typu db2. Vedle nižších hodnot  $SNR_{vyst}$  ve srovnání s wienerovskou filtrací s pilotním odhadem si všimněme, že při vyšší úrovni šumu dochází k oříznutí menších kmitů Q i S v komplexu QRS (zejména kmitu Q, který je skryt v šumu přítomném ve vstupním signálu  $x(n)$ ). Patrné je i rozšíření komplexu QRS způsobené zejména rozšířením kmitu Q.





Obr. 11 Vlnková filtrace s hybridním prahováním koeficientů DTWT pro  $SNR_{vst}=10$  dB (nahore) a 20 dB (dole) s bankou filtrů db2.

## 5 ZÁVĚR

Naše experimenty potvrdily, že je pro potlačení rušení širokopásmovými myopotenciály v signálech EKG vlnková filtrace vhodnější než filtrace lineární dolní propustí. Dále se jednoznačně potvrdila vhodnost využití redundantní DTWT.

Zkoušeli jsme vlnkovou filtraci s hybridním prahováním koeficientů DTWT a vlnkovou wienerovskou filtraci s pilotním odhadem užitečného signálu. Druhá metoda vedla ke kvalitnějším výsledkům. Pro pilotní odhad jsme zkoušeli jak měkké prahování, tak i hybridní prahování (obě s empirickou úrovní prahu), v textu jsme prezentovali jen výsledky s hybridním prahováním, které se ukázalo jako vhodnější. Prahová hodnota byla záměrně navýšena, aby se předcházelo vzniku artefaktů; následující wienerovský filtr totiž vedl k úspěšné nápravě hodnot v extrémech komplexů QRS, které výrazněji převyšovaly úroveň šumu. Pokud se k navýšení prahu nesáhne, hrozí nebez-

pečí, že wienerovský filtr zmíněné artefakty ještě zdůrazní (určitou pomocí by pak mohla být mediánová filtrace pilotního signálu).

Pokud by se uvedená metoda použila pro filtraci klidových signálů EKG, které obsahují myopotenciály velmi nízké úrovně, nemusí při vhodném výběru filtrů (tj. filtrů s krátkými impulsními charakteristikami) hrozit tvarové zkreslení signálu a výsledek by měl mít příznivý dopad na kvalitu následného automatického rozměření signálu. Výhodou vlnkové filtrace ve srovnání s filtrací lineární je větší šetrnost vůči filtrovanému signálu, účinnost filtrace (a tím i negativní dopad na užitečný signál) klesá s klesající úrovní rušení.

Při zpracování zátěžových signálů EKG musíme se zkreslením signálu počítat. Uplatnění naší metody považujeme za možné i pro předzpracování těchto signálů. Během filtrace by však měl být rozptýl šumu neustále aktualizován, což nemusí být v praxi vážným problémem, protože při každém zpracování signálu EKG je používán detektor komplexů QRS a oblast mezi komplexy lze bez problémů nalézt.

## LITERATURA

- [1] AGANTE, P. M. – MARQUES DE SA, J. P.: ECG noise filtering using wavelets with soft-thresholding methods. *Computers in Cardiology* 1999, pp. 535–538.
- [2] BEZERIANOS, A. – POPESCU, M. – LASKARIS, N. – MANOLIS, A. – HOLADAKIS, I. – STATHOPOULOS, C. – CRISTEA, P.: Selective noise filtering of high resolution ECG through wavelet transform. *Computers in Cardiology* 1996, pp. 637–640.
- [3] COHEN, I. – RAZ, S. – MALAH, D.: Orthogonal Shift-Invariant Wavelet Packet Decomposition and Representation. *Signal Processing*, Vol. 57, 1997, pp. 251–270.
- [4] COIFMAN, R. R. – WICKERHAUSER, M. V.: Entropy-Based Algorithms for Best-Basis Selection. *IEEE Trans. on Inf. Theory*, Vol. 38, March 1992, pp. 713–718.
- [5] CSE Multilead Atlas (Common Standards for Quantitative Electrocardiography). European Concerted Action Project II.2.2 of the Sectoral Research Programme in the Field of Medical and Public Health Research 82/616/EEC (Project Leader Jos L. Willems), Leuven, 1988.
- [6] DAUBECHIES, I.: Ten Lectures on Wavelets. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), CBMS Series, April 1992, 357 p.
- [7] DONOHO, D. L. – JOHNSTONE, I. M.: Ideal Spatial Adaptation via Wavelet Shrinkage. *Biometrika*, Vol. 81, 1994, pp. 425–455.
- [8] FARINA, D. – MERLETTI, R.: Comparison of Algorithms for Estimation of EMG Variables during Voluntary Isometric Contractions. *J. Electromyogr. Kinesiol*, Vol. 10, 2000, pp. 337–350.
- [9] FLIEGE, N. J.: Multirate Digital Signal Processing: Multirate Systems, Filter Banks, Wavelets. John Wiley & Sons, 1994, 340 p. ISBN 0-471-93976-5.
- [10] GHAEL, S. P. – SAYEED, A. M. – BARANIUK, R. G.: Improved Wavelet Denoising via Empirical Wiener Filtering. *Proc. of SPIE*, vol. 3169, San Diego, July 1997, pp. 389–399.
- [11] GUPTA, S. – CHAUHAN, R. C. – SEXANA, S. C.: Wavelet-Based Statistical Approach for Speckle Reduction in Medical Ultrasound Images. *Medical & Biological Engineering & Computing*, Vol. 42, 2004, pp. 198–192.
- [12] HOLSCHNEIDER, M.: Wavelets. An Analysis Tool. Clarendon Press, Oxford, New York, 1995, 420 p. Oxford Mathematical Monographs, ISBN 0-19-853481-7.
- [13] CHANG, S. G. – YU, B. – VETTERLI, M.: Adaptive Wavelet Thresholding for Image Denoising and Compression. *IEEE Trans. on Image Proc.*, Vol. 9, No. 9, September 2000, pp. 1532–1546.

- [14] JANSEN, M.: Noise Reduction by Wavelet Thresholding. Lecture Notes in Statistics 161. Springer-Verlag, New York Inc., 2001, 191 p. Lecture Notes in Statistics 161, ISBN 0-387-95244-6.
- [15] KESTLER, H. A. – HASCHKA, M. – KRATZ, W. – SCHWENKER, F. – PALM, G. – HOMBACH, V. – HOHER, M.: De-Noising of High Resolution ECG Signals by Combining the Discrete Wavelet Transform with the Wiener Filter. *Computers in Cardiology* 1998, pp. 233–236.
- [16] KOZUMPLÍK, J. – KOLÁŘ, R.: Wavelet Denoising of Electrocardiograms. In: *Analysis of Biomedical Signals and Images*, 16<sup>th</sup> International EURASIP Conference BIOSIGNAL 2002. Brno, Vutium Press, 2002, pp. 220–222.
- [17] KOZUMPLÍK, J.: Vlnkové transformace a jejich využití pro filtraci signálů EKG. Habilitační práce, ÚBMI FEKT VUT v Brně, listopad 2004.
- [18] LANDER, P. – BERBARI, E. J.: Time Frequency Plane Wiener Filtering of the High-Resolution ECG: Background and Time-Frequency Representations. *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*, Vol. 44, No. 4, April 1997, pp. 247–255.
- [19] MALAT, S.: *A Wavelet Tour of Signal Processing* (2<sup>nd</sup> Ed.). Academic Press, UK, 2001, 637 p., ISBN 0-12-466606-X.
- [20] NIKOLAEV, N. – NIKOLOV, Z. – GOTCHEV, A. – EGIASARIAN, K.: Wavelet domain Wiener filtering for ECG denoising using improved signal estimate. In: *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 2000, ICASSP'00, Vol. 6, pp. 3578–3581.
- [21] NOWAK, R. D.: Wavelet-Based Rician Noise Removal for Magnetic Resonance Imaging. *IEEE Trans. on Image Processing*, Vol. 8, No. 10, October 1999, pp. 1408–1419.
- [22] Recommendations for Standardization and Specifications in Automated Electrocardiography: Bandwidth and Digital Signal Processing. (Bailey, J. J. at al., Special Report of the Council on Clinical Cardiology, American Heart Association). *Circulation*, Vol. 81, No. 2, February 1990, pp. 730–739.
- [23] STRANG, G. – NGUYEN, T.: *Wavelets and Filter Banks*. Wellesley-Cambridge Press, 1996, 490 p. ISBN 0-9614088-7-1.
- [24] THAKOR, N. V. – WEBSTER, J. G. – TOMPKINS, W. J.: Estimation of QRS-Complex Power Spectra for Design of a QRS Filter. *IEEE Trans. BME*, Vol. 31, No. 11, November 1984, pp. 702–705.
- [25] TIKKANEN, P. E.: Nonlinear wavelet and wavelet packet denoising of electrocardiogram signal. *Biol. Cybern.*, Vol. 80, 1999, pp. 259–267.
- [26] TOHUMOGLU, G.: (ECG) signal denoising by wavelets and Wavelet packets. In: *Proceedings IFMBE 2002, EMBEC'02*, pp. 350–351.
- [27] VAIDYANATHAN, P. P.: *Multirate Systems and Filter Banks*. Prentice Hall, 1993, 911 p., ISBN 0-13-605718-7.
- [28] VETERLI, M. – KOVAČEVIC, J.: *Wavelets and Subband Coding*. Prentice Hall, 1995, 488 p., ISBN 0-13-097080-8.
- [29] WEI-WEN DAI – ZHEN YANG – SOON LEE LIM – MIKHAILOVA, O. – CHEE, J.: Processing and analysis of ECG signal using nonorthogonal wavelet transform. In: *Engineering in Medicine and Biology Society, Proceedings of the 20<sup>th</sup> Annual International Conference of the IEEE*, 1998, Vol. 1, pp. 139–142.
- [30] ZADRAŽIL, M. – KOZUMPLÍK, J.: ECG Denoising by Wiener Packet Decomposition and Wiener Shrink Threshold. In: *Analysis of Biomedical Signals and Images*, 17<sup>th</sup> International EURASIP Conference BIOSIGNAL 2004. Brno, Vutium Press, 2004, pp. 220–222.

## ABSTRACT

An ECG signal is a superposition of a signal and a noise. Occurrence of the noise complicates a computer analysis. Linear filtering is not suitable for wideband myopotentials suppression because it leads to strong cut off the local extremes in the QRS complexes and to disturbance the significant variations of signal slope in onset and offset of the QRS complexes.

Frequency spectrum of the ECG signal includes frequency components from approximately 1 to 125 Hz. The frequency spectrum of myopotentials is sharply overlapped with the spectrum of the ECG signal (approximately from 10 Hz). The amplitude of the noise is low in the case of the rest ECG signal and does not influence visual analysis. On the other hand, the computer analysis may be complicated. More troublesome is the analysis of the stress ECG where the noise level is much higher than in the case of the rest ECG.

Discrete-time wavelet transform (DTWT) appears as a useful tool for myopotentials suppression. The filtering is based on a modification of wavelet transform (DTWT) coefficients based on estimated noise level. It can lead to lower distortion of the signal than in linear filtering. Important is the choice of threshold strategy. The main disadvantage of hard thresholding is occurrence of high artefacts caused by overthresholding values of DTWT coefficients of noise. It is distinct mainly around the onsets and offsets of the QRS complexes. On the other hand, the main disadvantage of soft thresholding is decreasing the values of local extremes in QRS complexes and occurrence of the mentioned artefacts although smaller. Smaller decreasing of the local extremes and occurrence of the smaller artefacts is the property of a hybrid thresholding.

Wavelet domain Wiener filtering with pilot estimation of the signal gives better results than wavelet filtering with using some of the mentioned type of thresholding. This method does not significantly distort extremes around QRS complexes and it is without the artefacts by suitable realization of the pilot estimation.

Our experiments were oriented to the wavelet domain Wiener filtering with the signal pilot estimation realized by the shift invariant dyadic DTWT. The signal pilot estimation was realized as wavelet filtering (also with the shift invariant dyadic DTWT) with the hybrid thresholding. Our method was compared with the wavelet filtering only with hybrid thresholding of the DTWT coefficients. Results of filtering of ECG signals by Wavelet Wiener filters with pilot estimation of signal were better than those obtained by previous method.