VĚDECKÉ SPISY VYSOKÉHO UČENÍ TECHNICKÉHO V BRNĚ
Edice Habilitační a inaugurační spisy, sv. 219
ISSN 1213-418X

Pavel Václavek

ESTIMACE RYCHLOSTI PRO BEZSNÍMAČOVÉ ŘÍZENÍ ELEKTRICKÝCH POHONŮ S ASYNCHRONNÍMI MOTORY

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií
Ústav automatizace a měřicí techniky

Ing. Pavel Václavek, Ph.D.

ESTIMACE RYCHLOSTI PRO BEZSNÍMAČOVÉ ŘÍZENÍ ELEKTRICKÝCH POHONŮ S ASYNCHRONNÍMI MOTORY

SPEED ESTIMATION FOR AC INDUCTION MACHINE SENSORLESS CONTROL

ZKRÁCENÁ VERZE HABILITAČNÍ PRÁCE

VUTIUM

BRNO 2006

KLÍČOVÁ SLOVA

asynchronní motor, vektorové řízení, bezsnímačové řízení, rekonstruktor stavu

KEYWORDS

AC induction machine, vector control, sensorless control, state observer

HABILITAČNÍ PRÁCE JE ULOŽENA:

Ústav automatizace a měřicí techniky
Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií
Kolejní 4
612 00 Brno

ISBN 80-214-3314-0
ISSN 1213-418X

OBSAH

PŘEDSTAVENÍ AUTORA

Pavel Václavek se narodil v roce 1970 v Prostějově. V roce 1993 absolvoval inženýrské studium na fakultě elektrotechniky VUT v Brně, obor technická kybernetika. Následně v roce 1998 absolvoval inženýrské studium na fakultě podnikatelské VUT v Brně, obor ekonomika a řízení průmyslu. V roce 2001 absolvoval doktorské studium na fakultě elektrotechniky a informatiky VUT v Brně, obor kybernetika a informatika, a obhájil disertační práci na téma „Modelování dynamických systémů s použitím ortonormálních bázových funkcí“.

Již 13 let se podílí na výzkumné a pedagogické činnosti Ústavu automatizace a měřicí techniky, Fakulty elektrotechniky a komunikačních technologií, Vysokého učení technického v Brně. Podílel se na řešení projektu GAČR 102/01/1485 *Prostředí pro vývoj, modelování a aplikaci heterogenních systémů*, v rámci kterého prováděl vývoj metod pro modelování dynamických systémů s použitím ortonormálních bázových funkcí.

Od roku 2000 je členem skupiny automatického řízení Centra aplikované kybernetiky, kde se zabývá vývojem algoritmů pro řízení asynchronních motorů. Počínaje rokem 2005 vede laboratoř *řízení elektrických pohonů* a od roku 2006 je řešitelem projektu GAČR 102/06/0949 *Algoritmy inteligentního řízení elektrických pohonů s indukčními a synchronními motory*.

Od roku 2006 je autor členem výboru československé sekce IEEE Control Systems Society.

V rámci pedagogické činnosti autor zajišťuje jako přednášející výuku předmětu *Regulace a řízení II - nelineární systémy* a také se podílí na výuce předmětu *Modelování a simulace*.

1 ÚVOD

S elektrickými pohony se dnes setkáváme v nejrůznějších aplikacích od průmyslu až po malé domácí spotřebiče. V řadě aplikací, které byly dříve doménou především stejnosměrných motorů, se stále více prosazují pohony s třífázovými asynchronními a synchronními motory. Je to způsobeno tím, že pokročilý vývoj výkonové elektroniky a mikroprocesorů pro řídicí systémy umožnil nasazení spolehlivých a cenově dostupných měničů pro třífázové motory, pomocí kterých lze dosáhnout plynulé a přesné regulace otáček a polohy pohonu. V moderních aplikacích elektrických pohonů tak dokážeme spojit výhody třífázových motorů (relativně jednoduchá konstrukce, vysoká spolehlivost) s jedinečnými vlastnostmi stejnosměrných motorů (plynulá regulace otáček a mechanického momentu).

Základní principy dnes používaných algoritmů řízení pohonů s asynchronními motory jsou známé již více než 30 let [1]. Během této doby byly původní algoritmy značně zdokonaleny a byla vytvořena řada jejich modifikací. Jeden rys mají však všechny dnes průmyslově prakticky používané algoritmy pro precizní řízení asynchronních motorů společný – pohon musí být vybaven snímačem mechanických otáček. Oproti stejnosměrnému motoru, jehož otáčky lze při nižších požadavcích na přesnost řídit pouhým monitorováním statorového napětí a případně využít signálů obsažených ve statorovém proudu z důvodu komutace, tento fakt představuje značnou nevýhodu.

Uvážíme-li, že v případě malých pohonů do 1kW cena snímače otáček často odpovídá (a nebo dokonce převyšuje) ceně samotného motoru, je zřejmé, že by bylo velmi výhodné najít takové algoritmy, které umožní řízení asynchronního motoru bez použití mechanického senzoru. A právě o těchto algoritmech pojednává následující text.

2 MODEL ASYNCHRONNÍHO MOTORU

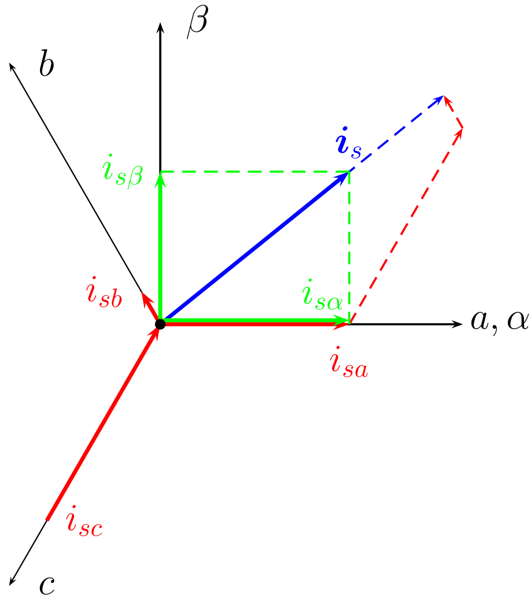
Pro popis asynchronního motoru lze nalézt celou řadu matematických modelů. Z praktického hlediska nejvýznamnější z nich jsou popsány v této kapitole.

2.1 Komplexorové pojetí veličin modelu asynchronního motoru

Při analýze chování asynchronního motoru budeme využívat symbolického komplexního popisu jednotlivých elektrických a magnetických veličin. Tento přístup nám umožní výrazné zjednodušení popisu motoru, vzhledem k tomu, že místo práce s veličinami ve vícefázové soustavě budeme sledovat pouze chování komplexorů jednotlivých veličin.

Vzhledem k tomu, že budeme popisovat symetricky uspořádaný stroj a dále budeme předpokládat, že je vinutí statoru zapojeno do trojúhelníku, případně do hvězdy bez připojeného středu, musí platit pro proudy jednotlivý fází

$$i_{sa} + i_{sb} + i_{sc} = 0 \tag{2.1}$$



Obrázek 2.1: Grafická reprezentace konstrukce komplexoru statorového proudu

Komplexor statorového proudu zavedeme vztahem

$$\boldsymbol{i}_s = \frac{2}{3}(i_{sa} + i_{sb}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi/3} + i_{sc}\mathrm{e}^{\mathrm{j}4\pi/3}) \tag{2.2}$$

Pro proud jednotlivých fází pak můžeme za podmínky (2.1) naopak napsat

$$\begin{aligned} i_{sa} &= \Re\{\boldsymbol{i}_s\} \\ i_{sb} &= \Re\{\boldsymbol{i}_s \mathrm{e}^{\mathrm{j}4\pi/3}\} \\ i_{sc} &= \Re\{\boldsymbol{i}_s \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi/3}\} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Grafický význam konstrukce komplexoru statorového proudu je patrný z obr. 2.1

Uvážíme-li (2.1) dostaneme z (2.2)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}_s &= \frac{2}{3}\left[i_{sa}\left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{j}4\pi/3}\right) + i_{sb}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi/3} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}4\pi/3}\right)\right] = i_{sa} + \mathrm{j}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}i_{sa} + \frac{2}{\sqrt{3}}i_{sb}\right) \\ &= i_{s\alpha} + \mathrm{j}i_{s\beta} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Získali jsme tak transformační vztahy mezi veličinou vyjádřenou v třífázové a dvoufázové soustavě

$$\begin{aligned} i_{s\alpha} &= i_{sa} \\ i_{s\beta} &= \frac{1}{\sqrt{3}}i_{sa} + \frac{2}{\sqrt{3}}i_{sb} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Inverzní transformaci odvodíme z (2.3)

$$
\begin{aligned}
i_{sa} &= i_{s\alpha} \\
i_{sb} &= -\frac{1}{2} i_{s\alpha} + \frac{\sqrt{3}}{2} i_{s\beta} \\
i_{sc} &= -\frac{1}{2} i_{s\alpha} - \frac{\sqrt{3}}{2} i_{s\beta}
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Vztahy (2.5) a (2.6) definují tak zvanou *Clarkovu a inverzní Clarkovu trasnformaci*, která umožňuje vzájemný převod vyjádření veličin mezi tří a dvou fázovou soustavou. Pojmenování *Clarkova transformace* je poněkud chybné. Tuto transformaci zavedla Edith Clarková [3] a správné pojmenování v českém jazyce je tedy spíše *Clarkové transformace*.

V některých případech potřebujeme provést transformaci daného komplexoru do jiného souřadnicového systému, který je pootočen o úhel ϑ^k, jak je ukázáno na obr. 2.2. Je zřejmé, že pro komplexor statorového proudu v novém souřadnicovém systému bude platit

$$
\boldsymbol{i}_s^k = \boldsymbol{i}_s \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vartheta^k} = i_{sx}^k + \mathrm{j} i_{sy}^k \tag{2.7}
$$

a naopak

$$
\boldsymbol{i}_s = \boldsymbol{i}_s^k \mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta^k} = i_{s\alpha} + \mathrm{j} i_{s\beta} \tag{2.8}
$$

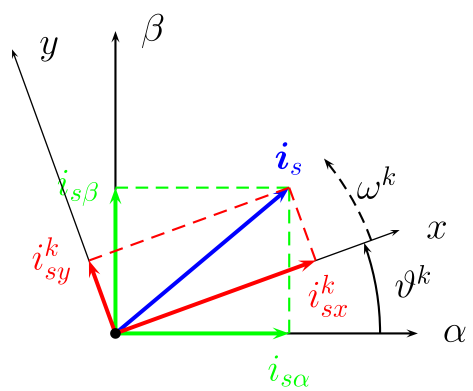
Lehce určíme, že platí

$$
\begin{aligned}
i_{sx}^k &= i_{s\alpha} \cos\vartheta^k + i_{s\beta} \sin\vartheta^k \\
i_{sy}^k &= -i_{s\alpha} \sin\vartheta^k + i_{s\beta} \cos\vartheta^k
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

a

$$
\begin{aligned}
i_{s\alpha} &= i_{sx}^k \cos\vartheta^k - i_{sy}^k \sin\vartheta^k \\
i_{s\beta} &= i_{sx}^k \sin\vartheta^k + i_{sy}^k \cos\vartheta^k
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Transformace definované vztahy (2.9) a (2.10) se nazývají *Parkova a inverzní Parkova transformace*[10] a jsou využívány především v algoritmech vektorového řízení motoru.



Obrázek 2.2: Vyjádření komplexoru v obecném souřadnicovém systému

Analogické vztahy jako pro komplexor statorového proudu platí rovněž pro komplexor statorového napětí $\boldsymbol{u}_s$ a magnetických toků.

2.2 T-model

Klasický tvar modelu asynchronního motoru s kotvou nakrátko byl navržen již v roce 1959 [9] a v řadě aplikací je používán dodnes. Vychází z komplexorového pojetí (kapitola 2.1) jednotlivých veličin motoru.

Za předpokladu, že magnetizační ztráty jsou zanedbatelné, lze s využitím Kirchoffových zákonů pro obvod statoru a rotoru odvodit vztahy pro komplexory magnetického toku statoru $\boldsymbol{\Psi}_s$ a rotoru $\boldsymbol{\Psi}_r$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}_s}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{u}_s - R_s\boldsymbol{i}_s \\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}_r}{\mathrm{d}t} &= \mathrm{j}\omega_e\boldsymbol{\Psi}_r - R_r\boldsymbol{i}_r \end{aligned} \tag{2.11}$$

kde R_s, R_r jsou odpory vinutí statoru a rotoru, $\boldsymbol{i}_r$ je proud vinutí rotoru a ω_e je elektrická úhlová rychlost rotoru, přičemž $\omega_e = z_p\omega$, kde z_p je počet pólových dvojic motoru a ω je mechanická úhlová rychlost rotoru. Magnetické toky jsou svázány s příslušnými proudy rovnicemi

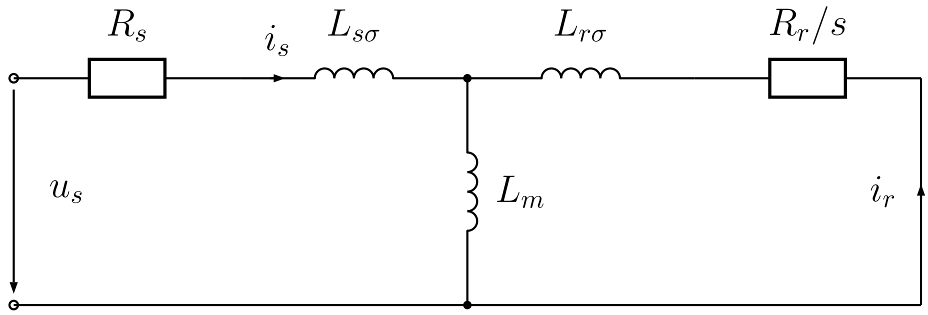
$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi}_s &= L_s\boldsymbol{i}_s + L_m\boldsymbol{i}_r \\ \boldsymbol{\Psi}_r &= L_m\boldsymbol{i}_s + L_r\boldsymbol{i}_r \end{aligned} \tag{2.12}$$

kde L_m je magnetizační indukčnost, $L_s = L_m + L_{s\sigma}$ je indukčnost statoru, $L_r = L_m + L_{r\sigma}$ je indukčnost rotoru, přičemž $L_{s\sigma}$ a $L_{r\sigma}$ jsou rozptylové indukčnosti statoru a rotoru. Mechanický moment T_e vyvolaný na rotoru je možné vyjádřit více způsoby[2], nicméně nejčastěji používaným je tvar

$$T_e = \frac{3}{2}z_p\Im\{\boldsymbol{i}_s\overline{\boldsymbol{\Psi}_s}\} \tag{2.13}$$

Úhlová rychlost rotoru ω je pak určena vztahem

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{J}(T_e - T_L) \tag{2.14}$$



Obrázek 2.3: Náhradní elektrické schema pro T-model asynchronního motoru

Shrneme-li uvedené vztahy, dostaneme model asynchronního motoru ve tvaru

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}_s}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{u}_s - R_s\boldsymbol{i}_s \\
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}_r}{\mathrm{d}t} &= \mathrm{j}\omega_e\boldsymbol{\Psi}_r - R_r\boldsymbol{i}_r \\
\omega_e &= z_p\omega \\
\boldsymbol{\Psi}_s &= L_s\boldsymbol{i}_s + L_m\boldsymbol{i}_r \\
\boldsymbol{\Psi}_r &= L_m\boldsymbol{i}_s + L_r\boldsymbol{i}_r \\
T_e &= \frac{3}{2}z_p\Im\{\boldsymbol{i}_s\overline{\boldsymbol{\Psi}_s}\} \\
\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{J}(T_e - T_L)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Struktuře popsané rovnicemi (2.15) odpovídá v ustáleném stavu náhradní elektrické schema [14], které je uvedeno na obr. 2.3. Vidíme, že náhradní schema má podobu T-článku, což vede k běžně užívanému označení tohoto modelu jako *T-model*.

2.3 Γ-model

Popis asynchronního motoru strukturou (2.15) poměrně věrně reprezentuje elektromagnetické děje probíhající během činnosti motoru. Tento tvar modelu však v sobě skrývá jeden podstatný problém. Snadno lze ukázat [11], že model obsahuje jeden nadbytečný parametr. Z tohoto důvodu neexistuje jednoznačná relace mezi vstupně výstupním chováním modelu z pohledu statorových elektrických veličin a vnitřních parametrů motoru. Tento fakt způsobuje potíže při úlohách identifikace parametrů modelu a rovněž zbytečně komplikuje konstrukci stavových rekonstruktorů.

V řadě případů je pak vhodnější použít model založený na minimálním počtu parametrů [13]. Pokusme se zjednodušit vztah mezi toky a proudy (2.12) tak, aby došlo k eliminaci nadbytečného parametru. Uvažujme substituci

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Psi}_r &= \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{\Psi}_R \\
\boldsymbol{i}_r &= \gamma\boldsymbol{i}_R
\end{aligned} \tag{2.16}$$

kde

$$\gamma = \frac{L_s}{L_m} \tag{2.17}$$

Po dosazení (2.16) do (2.12) dostaneme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Psi}_s &= L_s(\boldsymbol{i}_s + \boldsymbol{i}_R)\\ \boldsymbol{\Psi}_R &= \boldsymbol{\Psi}_s + \left(\frac{L_r L_s^2}{L_m^2} - L_s\right)\boldsymbol{i}_R\end{aligned} \tag{2.18}$$

což snadno upravíme na

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Psi}_s &= L_s(\boldsymbol{i}_s + \boldsymbol{i}_R)\\ \boldsymbol{\Psi}_R &= \boldsymbol{\Psi}_s + (\gamma L_{s\sigma} + \gamma^2 L_{r\sigma})\boldsymbol{i}_R\end{aligned} \tag{2.19}$$

Pokud nyní označíme

$$\begin{aligned}L_M &= \gamma L_m = L_s\\ L_L &= \gamma L_{s\sigma} + \gamma^2 L_{r\sigma}\end{aligned} \tag{2.20}$$

dostaneme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Psi}_s &= L_M(\boldsymbol{i}_s + \boldsymbol{i}_R)\\ \boldsymbol{\Psi}_R &= \boldsymbol{\Psi}_s + L_L\boldsymbol{i}_R\end{aligned} \tag{2.21}$$

kde L_M je nová magnetizační a L_L rozptylová indukčnost.

Dosazením substituce (2.16) do (2.11) dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}_s}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{u}_s - R_s\boldsymbol{i}_s\\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}_R}{\mathrm{d}t} &= \mathrm{j}\omega_e\boldsymbol{\Psi}_R - \gamma^2 R_r\boldsymbol{i}_R\end{aligned} \tag{2.22}$$

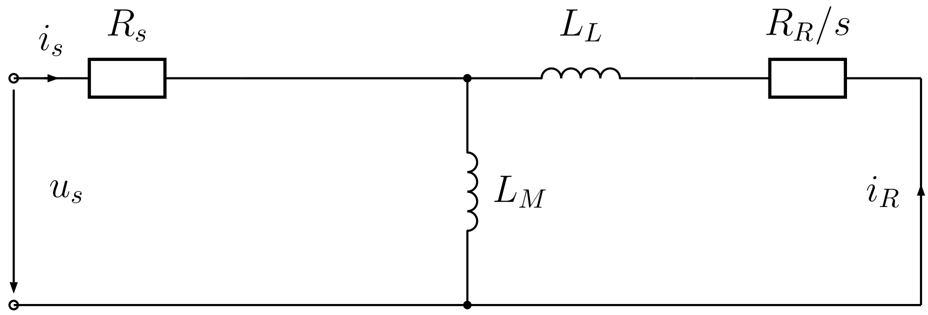
Jestliže položíme

$$R_r = \frac{1}{\gamma^2}R_R \tag{2.23}$$

dospějeme k diferenciálním rovnicím

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}_s}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{u}_s - R_s\boldsymbol{i}_s\\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}_R}{\mathrm{d}t} &= \mathrm{j}\omega_e\boldsymbol{\Psi}_R - R_R\boldsymbol{i}_R\end{aligned} \tag{2.24}$$

jejichž tvar je formálně shodný s T-modelem. Povšimněme si, že nedošlo k žádné transformaci statorového toku $\boldsymbol{\Psi}_s$ a statorového proudu $\boldsymbol{i}_s$. Výpočet mechanického momentu bude tedy rovněž shodný s T-modelem. Vztahy popisující výsledný model



Obrázek 2.4: Náhradní elektrické schema pro Γ-model asynchronního motoru

lze shrnout do tvaru

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}_s}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{u}_s - R_s\boldsymbol{i}_s \\
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}_R}{\mathrm{d}t} &= \mathrm{j}\omega_e\boldsymbol{\Psi}_R - R_R\boldsymbol{i}_R \\
\omega_e &= z_p\omega \\
\boldsymbol{\Psi}_s &= L_M(\boldsymbol{i}_s + \boldsymbol{i}_R) \\
\boldsymbol{\Psi}_R &= \boldsymbol{\Psi}_s + L_L\boldsymbol{i}_R \\
T_e &= \frac{3}{2}z_p\Im\{\boldsymbol{i}_s\overline{\boldsymbol{\Psi}_s}\} \\
\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{J}(T_e - T_L)
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

s převodními vztahy

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \frac{L_s}{L_m} \\
\boldsymbol{\Psi}_R &= \gamma\boldsymbol{\Psi}_r \\
\boldsymbol{i}_R &= \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{i}_r \\
L_M &= \gamma L_m = L_s \\
L_L &= \gamma L_{s\sigma} + \gamma^2 L_{r\sigma} \\
R_R &= \gamma^2 R_r
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

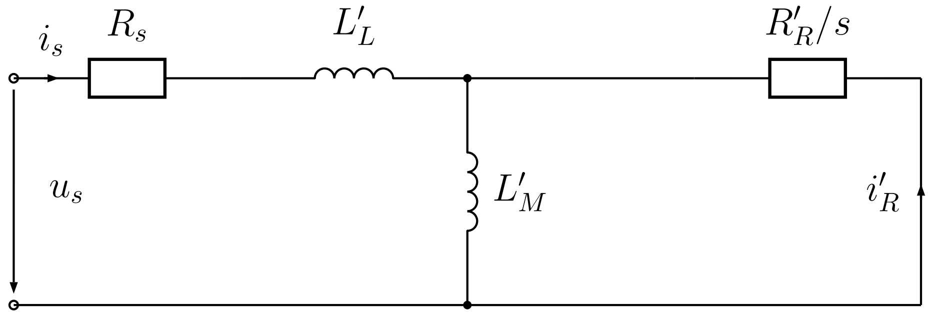
Odpovídající náhradní elektrické schema pro ustálený stav je zobrazeno na obr. 2.4. Vzhledem k tvaru tohoto obvodu se pro uvedený model používá označení Γ-*model*.

Druhou variantou je volba substituce

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Psi}_r &= \frac{1}{\gamma'}\boldsymbol{\Psi}'_R \\
\boldsymbol{i}_r &= \gamma'\boldsymbol{i}'_R
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

kde

$$
\gamma' = \frac{L_m}{L_r} \tag{2.28}
$$



Obrázek 2.5: Náhradní elektrické schema pro inverzní Γ-model asynchronního motoru

Obdobným způsobem, jak bylo ukázáno u Γ-modelu dospějeme k popisu

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}_s}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{u}_s - R_s \boldsymbol{i}_s \\
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}'_R}{\mathrm{d}t} &= \mathrm{j}\omega_e \boldsymbol{\Psi}'_R - R'_R \boldsymbol{i}'_R \\
\omega_e &= z_p \omega \\
\boldsymbol{\Psi}_s &= \boldsymbol{\Psi}'_R + L'_L \boldsymbol{i}_s \\
\boldsymbol{\Psi}'_R &= L'_M (\boldsymbol{i}_s + \boldsymbol{i}'_R) \\
T_e &= \frac{3}{2} z_p \Im\{\boldsymbol{i}_s \overline{\boldsymbol{\Psi}_s}\} \\
\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{J}(T_e - T_L)
\end{aligned} \tag{2.29}$$

s převodními vztahy

$$\begin{aligned}
\gamma' &= \frac{L_m}{L_r} \\
\boldsymbol{\Psi}'_R &= \gamma' \boldsymbol{\Psi}_r \\
\boldsymbol{i}'_R &= \frac{1}{\gamma'} \boldsymbol{i}_r \\
L'_M &= \gamma' L_m \\
L'_L &= L_{s\sigma} + \gamma' L_{r\sigma} \\
R'_R &= \gamma'^2 R_r
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Odpovídající náhradní elektrické schema pro ustálený stav je zobrazeno na obr. 2.5. Vzhledem k tvaru tohoto obvodu se pro uvedený model používá označení *inverzní* Γ-*model* nebo také Γ^{-1}-*model*.

Jak v případě Γ-modelu tak i inverzního Γ-modelu je pochopitelné, že neexistují jednoznačné přepočítací vztahy na příslušný T-model. Při potřebě zpětného převodu musíme použít dodatečnou podmínku, kterou volíme obvykle ve tvaru

$$L_{s\sigma} = L_{r\sigma} \tag{2.31}$$

2.4 Model normalizovaný vzhledem k indukčnostem

Během výzkumu bezsnímačového řízení byl vyvinut model [15], který ukazuje, že charakter dynamiky asynchronního motoru může být popsán modelem, který je dokonce ještě jednodušší, než dříve zmíněný Γ-model. Podstata tohoto modelu spočívá v myšlence, že hodnoty jednotlivých indukčností motoru lze obvykle poměrně přesně identifikovat a považovat je během činnosti motoru za přibližně konstantní.

Při odvození modelu vyjdeme z rovnic T-modelu (2.11) a (2.12). Při řízení motoru je obvykle nutné znát nejen statorový proud, ale také polohu komplexoru rotorového magnetického toku. Z tohoto hlediska je tedy vhodné zvolit uvedené veličiny přímo jako stavové veličiny modelu. Po úpravě pak dostaneme z (2.11) a (2.12)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}_s}{\mathrm{d}t} &= \frac{L_r}{L_s L_r - L_m^2}\left[\boldsymbol{u}_s + \frac{L_m}{L_r}\left(\frac{R_r}{L_r} - \mathrm{j}\omega_e\right)\boldsymbol{\Psi}_r - \left(R_s + \frac{L_m^2 R_r}{L_r^2}\right)\boldsymbol{i}_s\right] \\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}_r}{\mathrm{d}t} &= -\left(\frac{R_r}{L_r} - \mathrm{j}\omega_e\right)\boldsymbol{\Psi}_r + \frac{R_r L_m}{L_r}\boldsymbol{i}_s\end{aligned} \tag{2.32}$$

Z tvaru rovnic (2.32) je patrné, že jejich zjednodušení je možné dosáhnout substitucí

$$\begin{aligned}\boldsymbol{i}_s &= \frac{L_r}{L_s L_r - L_m^2}\boldsymbol{i}_s' \\ \boldsymbol{\Psi}_r &= \frac{L_r}{L_m}\boldsymbol{\Psi}_r'\end{aligned} \tag{2.33}$$

Pokud dosadíme (2.33) do (2.32) dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}_s'}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{u}_s + \left(\frac{R_r}{L_r} - \mathrm{j}\omega_e\right)\boldsymbol{\Psi}_r' - \frac{R_s L_r^2 + L_m^2 R_r}{L_s L_r^2 - L_m^2 L_r}\boldsymbol{i}_s' \\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}_r'}{\mathrm{d}t} &= -\left(\frac{R_r}{L_r} - \mathrm{j}\omega_e\right)\boldsymbol{\Psi}_r' + \frac{R_r L_m^2}{L_s L_r^2 - L_m^2 L_r}\boldsymbol{i}_s'\end{aligned} \tag{2.34}$$

Označme

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{R_s L_r^2 + L_m^2 R_r}{L_s L_r^2 - L_m^2 L_r} \\ \xi_2 &= \frac{R_r}{L_r} \\ \xi_3 &= \frac{R_r L_m^2}{L_s L_r^2 - L_m^2 L_r}\end{aligned} \tag{2.35}$$

Rovnice (2.34) pak můžeme zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}_s'}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{u}_s - \xi_1\boldsymbol{i}_s' + (\xi_2 - \mathrm{j}\omega_e)\,\boldsymbol{\Psi}_r' \\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}_r'}{\mathrm{d}t} &= -(\xi_2 - \mathrm{j}\omega_e)\,\boldsymbol{\Psi}_r' + \xi_3\boldsymbol{i}_s'\end{aligned} \tag{2.36}$$

Vidíme, že jsme získali model, který popisuje dynamické chování elektrické části asynchronního motoru s použitím pouze tří parametrů ξ_1, ξ_2, ξ_3. Této vlastnosti bude využito při návrhu stavového rekonstruktoru v kapitole 3. Pro použití modelu při řízení motoru musíme samozřejmě znát měřítka jednotlivých stavových veličin, která jsou dána vztahy (2.33).

Obdobně jako v případě předchozích tvarů modelu motoru i v tomto případě můžeme vyjádřit elektromechanický moment motoru pomocí stavových veličin motoru.

$$T_e = \frac{3}{2} z_p \Im\{\boldsymbol{i}_s \overline{\boldsymbol{\Psi}_s}\} = \frac{3}{2} z_p \frac{L_m}{L_r} \Im\{\boldsymbol{i}_s \overline{\boldsymbol{\Psi}_r}\} = \frac{3}{2} z_p \frac{L_r}{L_s L_r - L_m^2} \Im\{\boldsymbol{i}'_s \overline{\boldsymbol{\Psi}'_r}\} \tag{2.37}$$

Označíme-li

$$\xi_T = \frac{3}{2} z_p \frac{L_r}{L_s L_r - L_m^2} \tag{2.38}$$

můžeme pro mechanickou část motoru psát

$$\begin{aligned} T_e &= \xi_T \Im\{\boldsymbol{i}'_s \overline{\boldsymbol{\Psi}'_r}\} \\ \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{J}(T_e - T_L) \\ \omega_e &= z_p \omega \end{aligned} \tag{2.39}$$

3 NÁVRH ESTIMÁTORU OTÁČEK A POLOHY KOMPLEXORU MAGNETICKÉHO

3.1 Analýza rekonstruovatelnosti stavových veličin

Dříve, než se budeme věnovat návrhu algoritmu estimátoru otáček, pokusíme se zjistit, zda a za jakých podmínek obsahuje měření statorových elektrických veličin informaci o mechanických otáčkách rotoru a komplexorech magnetických toků. Jedná se v podstatě o zodpovězení otázky, zda jsou stavové veličiny modelu (2.15) $\boldsymbol{\Psi}_s, \boldsymbol{\Psi}_r, \omega$ rekonstruovatelné. I když nebudeme uvažovat nelinearitu magnetizační charakteristiky, je v modelu přítomna nelinearita v podobě součinu stavových veličin.

Otázka pozorovatelnosti a rekonstruovatelnosti stavu nelineárního systému je značně komplexní a metody pro její řešení jsou stále vyvíjeny [4]. Vzhledem k tomu, že naším cílem je výpočet odhadu aktuální hodnoty stavu, měli bychom se zabývat otázkou jeho rekonstruovatelnosti. Pro její posouzení můžeme však použít kritéria pozorovatelnosti nelineárních systémů, vzhledem k tomu, že platí, že každý fyzikální systém splňuje podmínku kauzality – aktuální hodnota stavu $\boldsymbol{x}(t)$ v čase t je funkcí počátečního stavu $\boldsymbol{x}(t_0)$ a průběhu vstupů $\boldsymbol{u}(t_0, t)$ na intervalu (t_0, t). Pokud známe počáteční stav a průběh vstupních signálů, můžeme vždy určit konečný stav systému.

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(\boldsymbol{x}(t_0), \boldsymbol{u}(t_0, t)) \tag{3.1}$$

Z pozorovatelnosti stavu systému tedy plyne jeho rekonstruovatelnost. Vyšetřením pozorovatelnosti tak získáme podmínku postačující pro dosažení rekonstruovatelnosti.

Zatímco pojem pozorovatelnosti a jeho analýza u lineárních systémů se spojitým časem je poměrně jednoduchou záležitostí, v případě nelineárních systémů je situace značně komplikovanější. Problematika pozorovatelnosti nelineárních systémů byla uspokojivě vyřešena až koncem sedmdesátých let minulého století [6], přičemž bylo nutné pojem pozorovatelnosti definovat obecněji, než u lineárních systémů. Uvažujme nelineární dynamický systém Σ popsaný rovnicemi

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{3.2}$$

kde $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ je stavový vektor systému patřící do stavového prostoru $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U} \subset \mathbb{R}^m$ je vektor vstupních hodnot a $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y} \subset \mathbb{R}^r$ je vektor výstupních hodnot.

Definice 3.1 – ***Vstupně – výstupní relace***
Nechť $(\boldsymbol{u}(\tau), \langle t_0, t_1\rangle)$ *je segment průběhu vstupní funkce* $\boldsymbol{u} : \langle t_0, t_1\rangle \mapsto \mathbb{R}^m$ *na intervalu* $\tau \in \langle t_0, t_1\rangle$, $(\boldsymbol{y}(\tau), \langle t_0, t_1\rangle)$ *je segment průběhu výstupní funkce* $\boldsymbol{y} : \langle t_0, t_1\rangle \mapsto \mathbb{R}^r$ *na intervalu* $\tau \in \langle t_0, t_1\rangle$*, který je výsledkem řešení systému* Σ *(3.2) při počáteční podmínce* $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$*. Relaci*

$$\begin{aligned} \Sigma_{\boldsymbol{x}_0} : \boldsymbol{U} \times \langle t_0, t_1\rangle \mapsto \boldsymbol{Y}\langle t_0, t_1\rangle \\ (\boldsymbol{y}(\tau), \langle t_0, t_1\rangle) = \Sigma_{\boldsymbol{x}_0}((\boldsymbol{u}(\tau), \langle t_0, t_1\rangle)) \end{aligned} \tag{3.3}$$

pak nazýváme vstupně–výstupní relací *systému* Σ *v bodě* $\boldsymbol{x}_0$.

Definice 3.2 – ***Definice nerozlišitelnosti stavu***
Stavy $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}_1$ *jsou* nerozlišitelné*, jestliže vedou ke shodné vstupně výstupní relaci*

$$\Sigma_{\boldsymbol{x}_0} = \Sigma_{\boldsymbol{x}_1} \tag{3.4}$$

což je ekvivalentní podmínce

$$\forall(\boldsymbol{u}(\tau), \langle t_0, t_1\rangle) \in \boldsymbol{U} \times \mathbb{R} \quad \Sigma_{\boldsymbol{x}_0}((\boldsymbol{u}(\tau), \langle t_0, t_1\rangle)) = \Sigma_{\boldsymbol{x}_1}((\boldsymbol{u}(\tau), \langle t_0, t_1\rangle)) \tag{3.5}$$

Můžeme pak zavést relaci nerozlišitelnosti *(ekvivalence) stavu*

$$\begin{aligned} I &: \boldsymbol{\Omega} \mapsto \boldsymbol{\Omega} \\ I(\boldsymbol{x}_0) &= \{\boldsymbol{x} | \Sigma_{\boldsymbol{x}_0} = \Sigma_{\boldsymbol{x}}\} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Definice 3.3 – ***Definice pozorovatelnosti***
Stav systému Σ *je* pozorovatelný *v bodě* $\boldsymbol{x}_0$*, právě když platí*

$$I(\boldsymbol{x}_0) = \{\boldsymbol{x}_0\} \tag{3.7}$$

Říkáme, že systém Σ *je* pozorovatelný*, právě když platí*

$$\forall \boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{\Omega} \quad I(\boldsymbol{x}_0) = \{\boldsymbol{x}_0\} \tag{3.8}$$

Všimněme si, že z definice pozorovatelnosti 3.3 vyplývá pouze, že pro pozorovatelný systém existuje takový průběh vstupního signálu, že dojde k rozlišení zvolených bodů stavového prostoru $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1 \in \boldsymbol{\Omega}$

$$\exists(\boldsymbol{u}(\tau), \langle t_0, t_1\rangle) \in \boldsymbol{U} \times \mathbb{R} \quad \Sigma_{\boldsymbol{x}_0}((\boldsymbol{u}(\tau), \langle t_0, t_1\rangle)) \neq \Sigma_{\boldsymbol{x}_1}((\boldsymbol{u}(\tau), \langle t_0, t_1\rangle)) \tag{3.9}$$

Pokud je systém pozorovatelný, víme, že existuje takové řízení, že dojde k rozlišení stavu systému. Není však známo, jaký průběh řízení máme použít, ani délka intervalu pozorování. Taková definice pozorovatelnosti je poněkud problematická, protože rozlišitelnost dvou bodů stavového prostoru může být závislá na intervalu pozorování $\langle t_0, t_1 \rangle$. Řešením je zavedení přísnější definice pozorovatelnosti – lokální pozorovatelnost.

Definice 3.4 – ***Definice nerozlišitelnosti stavu na množině $\boldsymbol{X}$***
Nechť $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1 \in \boldsymbol{x} \subset \boldsymbol{\Omega}$ jsou stavy systému Σ (3.2) a $\Theta_{\boldsymbol{x}_0}((\boldsymbol{u}(\tau), \langle t_0, t_1 \rangle))$ je stavová trajektorie systému Σ při působení vstupního signálu $\boldsymbol{u}(\tau)$ v časovém úseku $\tau \in \langle t_0, t_1 \rangle$ a při počátečním stavu $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$. Stavy $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1$ jsou pak nerozlišitelné *na množině $\boldsymbol{X}$, právě když platí*

$$\begin{aligned} &\forall (\boldsymbol{u}(\tau), \langle t_0, t_1 \rangle) \in \boldsymbol{U} \times \mathbb{R} \\ &\quad \Theta_{\boldsymbol{x}_0}((\boldsymbol{u}(\tau), \langle t_0, t_1 \rangle)) \subset \boldsymbol{X} \times \mathbb{R} \Rightarrow \Sigma_{\boldsymbol{x}_0}((\boldsymbol{u}(\tau), \langle t_0, t_1 \rangle)) = \Sigma_{\boldsymbol{x}_1}((\boldsymbol{u}(\tau), \langle t_0, t_1 \rangle)) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Můžeme pak zavést relaci nerozlišitelnosti *stavu na množině $\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{\Omega}$*

$$\begin{aligned} &I_{\boldsymbol{X}} : \boldsymbol{X} \mapsto \boldsymbol{X} \\ &I_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}_0) = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} \wedge \forall (\boldsymbol{u}(\tau), \langle t_0, t_1 \rangle) \in \boldsymbol{U} \times \mathbb{R} \\ &\quad \Theta_{\boldsymbol{x}}((\boldsymbol{u}(\tau), \langle t_0, t_1 \rangle)) \subset \boldsymbol{X} \times \mathbb{R} \Rightarrow \Sigma_{\boldsymbol{x}_0}((\boldsymbol{u}(\tau), \langle t_0, t_1 \rangle)) = \Sigma_{\boldsymbol{x}}((\boldsymbol{u}(\tau), \langle t_0, t_1 \rangle))\} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Definice 3.5 – ***Definice lokální pozorovatelnosti***
Stav systému Σ je lokálně pozorovatelný *v bodě $\boldsymbol{x}_0$, právě když platí*

$$\forall \boldsymbol{X} \in \mathcal{O}, \boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{X} \quad I_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}_0) = \{\boldsymbol{x}_0\} \tag{3.12}$$

Říkáme, že systém Σ je lokálně pozorovatelný*, právě když platí*

$$\forall \boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{\Omega} \;\; \forall \boldsymbol{X} \in \mathcal{O}, \boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{X} \quad I_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}_0) = \{\boldsymbol{x}_0\} \tag{3.13}$$

Definice lokální pozorovatelnosti je poměrně přísná. Vyplývá z ní, že musí být možné rozlišit stav systému pozorováním po libovolně krátký interval. Vyšetření lokální pozorovatelnosti by bylo v obecném případě značně komplikované, proto podmínky v definici pozorovatelnosti zmírníme, čímž přejdeme k pojmu slabé pozorovatelnosti.

Definice 3.6 – ***Definice slabé pozorovatelnosti***
Stav systému Σ je slabě pozorovatelný *v bodě $\boldsymbol{x}_0$, právě když platí*

$$\exists \boldsymbol{X} \in \mathcal{O}, \boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{X} \quad I(\boldsymbol{x}_0) \cap \boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x}_0\} \tag{3.14}$$

Systém Σ je slabě pozorovatelný*, právě když platí*

$$\forall \boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{\Omega} \;\; \exists \boldsymbol{X} \in \mathcal{O}, \boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{X} \quad I(\boldsymbol{x}_0) \cap \boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x}_0\} \tag{3.15}$$

Pojem slabé pozorovatelnosti je třeba chápat tak, že nám postačuje, pokud dokážeme odlišit stav systému od dalších bodů stavového prostoru v jeho blízkém okolí. Opět však není zřejmé, jak dlouhý musí být interval pozorování, aby došlo k rozlišení stavu. Definici proto upravíme obdobně jako v případě lokální pozorovatelnosti.

Definice 3.7 – ***Definice lokální slabé pozorovatelnosti***
Stav systému Σ *je* lokálně slabě pozorovatelný *v bodě* $\boldsymbol{x}_0$*, právě když platí*

$$\exists \boldsymbol{X} \in \mathcal{O} \;\; \forall \boldsymbol{X'} \in \mathcal{O}, \boldsymbol{X'} \subset \boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{X'} \quad I_{\boldsymbol{X'}}(\boldsymbol{x}_0) = \{\boldsymbol{x}_0\} \tag{3.16}$$

Systém Σ *je* lokálně slabě pozorovatelný*, právě když platí*

$$\forall \boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{\Omega} \;\; \exists \boldsymbol{X} \in \mathcal{O} \;\; \forall \boldsymbol{X'} \in \mathcal{O}, \boldsymbol{X'} \subset \boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{X'} \quad I_{\boldsymbol{X'}}(\boldsymbol{x}_0) = \{\boldsymbol{x}_0\} \tag{3.17}$$

Tuto definici můžeme interpretovat tak, že pokud je systém lokálně slabě pozorovatelný, lze rozlišit jeho stav při libovolném řídicím signálu a během libovolně krátkého intervalu pozorování od bodů stavového prostoru v blízkém okolí. Taková vlastnost je plně postačující pro průběžné sledování stavu systému. I když i posledně uvedená definice je značně komplikovaná, bylo odvozeno [6, 5] relativně jednoduché kritérium pro posouzení lokální slabé pozorovatelnosti.

Definice 3.8 – ***Definice Lieovy derivace***
Nechť $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ *je vektorové pole v* $\mathbb{R}^n$ *a* $\boldsymbol{h} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^r$ *je funkce jejímž výsledkem je vektor v* $\mathbb{R}^r$*. Lieova derivace funkce* $\boldsymbol{h}$ *vzhledem k vektorovému poli* $\boldsymbol{f}$ *je pak definována vztahy*

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{h} = (\nabla \boldsymbol{h})\boldsymbol{f} = \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial x_i} f_i \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^0\boldsymbol{h} &= \boldsymbol{h} \\ \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^k\boldsymbol{h} &= \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}\mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^{k-1}\boldsymbol{h} \end{aligned} \tag{3.19}$$

Teorém 3.1 – ***Teorém o lokální slabé pozorovatelnosti***
Uvažujme systém Σ *popsaný rovnicemi (3.2) a bod stavového prostoru* $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{\Omega}$*. Sestavme matici*

$$\boldsymbol{O} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} \tag{3.20}$$

kde

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^0\boldsymbol{h} \\ \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{h} \\ \vdots \\ \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^{n-1}\boldsymbol{h} \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

Pokud je hodnost kriteriální matice $\boldsymbol{O}$ *rovna* n

$$\operatorname{rank}\{\boldsymbol{O}\} = n \tag{3.22}$$

je stav systému Σ *v bodě* $\boldsymbol{x}_0$ *lokálně slabě pozorovatelný.*

Toto kritérium umožňuje nalezení postačující podmínky pro lokální slabou pozorovatelnost stavu nelineárního systému. Obecně platí i obrácená implikace – pokud je stav systému lokálně slabě pozorovatelný, je hodnost kriteriální matice $\boldsymbol{O}$ rovna n.

Pokusme se nyní aplikovat teorém 3.1 na model asynchronního motoru. Pro analýzu pozorovatelnosti použijeme model motoru (2.36). Vzhledem k tomu, že moment setrvačnosti ani zátěžný moment není znám, není možné určit derivaci úhlové rychlosti. Nezbývá proto jiná možnost, než úhlovou rychlost rotoru považovat za konstantní.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}_s'}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{u}_s - \xi_1 \boldsymbol{i}_s' + (\xi_2 - \mathrm{j}\omega_e)\,\boldsymbol{\Psi}_r' \\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}_r'}{\mathrm{d}t} &= -(\xi_2 - \mathrm{j}\omega_e)\,\boldsymbol{\Psi}_r' + \xi_3 \boldsymbol{i}_s' \\ \frac{\mathrm{d}\omega_e}{\mathrm{d}t} &= 0 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Měřené výstupy systému jsou tvořeny modifikovanými statorovými proudy

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{i}_s' \tag{3.24}$$

Stavové rovnice rozepíšeme do jednotlivých složek

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}i_{s\alpha}'}{\mathrm{d}t} &= u_{s\alpha} - \xi_1 i_{s\alpha}' + \xi_2 \Psi_{r\alpha}' + \xi_2 \omega_e \Psi_{r\beta}' \\ \frac{\mathrm{d}i_{s\beta}'}{\mathrm{d}t} &= u_{s\beta} - \xi_1 i_{s\beta}' + \xi_2 \Psi_{r\beta}' - \xi_2 \omega_e \Psi_{r\alpha}' \\ \frac{\mathrm{d}\Psi_{r\alpha}'}{\mathrm{d}t} &= -\xi_2 \Psi_{r\alpha}' - \xi_2 \omega_e \Psi_{r\beta}' + \xi_3 i_{s\alpha}' \\ \frac{\mathrm{d}\Psi_{r\beta}'}{\mathrm{d}t} &= -\xi_2 \Psi_{r\beta}' + \xi_2 \omega_e \Psi_{r\alpha}' + \xi_3 i_{s\beta}' \\ \frac{\mathrm{d}\omega_e}{\mathrm{d}t} &= 0 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Dostáváme stavové rovnice ve tvaru (3.2), kde

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} i_{s\alpha}' \\ i_{s\beta}' \\ \Psi_{r\alpha}' \\ \Psi_{r\beta}' \\ \omega_e \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_{s\alpha} \\ u_{s\beta} \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} i_{s\alpha}' \\ i_{s\beta}' \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

$$
\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = \left[\begin{array}{c} u_{s\alpha} - \xi_1 i'_{s\alpha} + \xi_2 \Psi'_{r\alpha} + \xi_2 \omega_e \Psi'_{r\beta} \\ u_{s\beta} - \xi_1 i'_{s\beta} + \xi_2 \Psi'_{r\beta} - \xi_2 \omega_e \Psi'_{r\alpha} \\ -\xi_2 \Psi'_{r\alpha} - \xi_2 \omega_e \Psi'_{r\beta} + \xi_3 i'_{s\alpha} \\ -\xi_2 \Psi'_{r\beta} + \xi_2 \omega_e \Psi'_{r\alpha} + \xi_3 i'_{s\beta} \\ 0 \end{array}\right] \tag{3.29}
$$

$$
\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \left[\begin{array}{c} i'_{s\alpha} \\ i'_{s\beta} \end{array}\right] \tag{3.30}
$$

Jedná se o systém pátého řádu, musíme proto vypočítat Lieovy derivace až do čtvrtého řádu. Z důvodu velkého rozsahu výpočtu bude naznačen výpočet jen první a druhé Lieovy derivace.

$$
\mathcal{L}^0_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{h} = \boldsymbol{h} = \left[\begin{array}{c} i'_{s\alpha} \\ i'_{s\beta} \end{array}\right] \tag{3.31}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{h} = \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{f} = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} u_{s\alpha} - \xi_1 i'_{s\alpha} + \xi_2 \Psi'_{r\alpha} + \xi_2 \omega_e \Psi'_{r\beta} \\ u_{s\beta} - \xi_1 i'_{s\beta} + \xi_2 \Psi'_{r\beta} - \xi_2 \omega_e \Psi'_{r\alpha} \\ -\xi_2 \Psi'_{r\alpha} - \xi_2 \omega_e \Psi'_{r\beta} + \xi_3 i'_{s\alpha} \\ -\xi_2 \Psi'_{r\beta} + \xi_2 \omega_e \Psi'_{r\alpha} + \xi_3 i'_{s\beta} \\ 0 \end{array}\right] = \\
= \left[\begin{array}{c} u_{s\alpha} - \xi_1 i'_{s\alpha} + \xi_2 \Psi'_{r\alpha} + \xi_2 \omega_e \Psi'_{r\beta} \\ u_{s\beta} - \xi_1 i'_{s\beta} + \xi_2 \Psi'_{r\beta} - \xi_2 \omega_e \Psi'_{r\alpha} \end{array}\right]
\end{aligned} \tag{3.32}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^2_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{h} = \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}} \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{h} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{h}}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{f} = \\
= \left[\begin{array}{ccccc} -\xi_1 & 0 & \xi_2 & \xi_2 \omega_e & \xi_2 \Psi'_{r\beta} \\ 0 & -\xi_1 & -\xi_2 \omega_e & \xi_2 & -\xi_2 \Psi'_{r\alpha} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} u_{s\alpha} - \xi_1 i'_{s\alpha} + \xi_2 \Psi'_{r\alpha} + \xi_2 \omega_e \Psi'_{r\beta} \\ u_{s\beta} - \xi_1 i'_{s\beta} + \xi_2 \Psi'_{r\beta} - \xi_2 \omega_e \Psi'_{r\alpha} \\ -\xi_2 \Psi'_{r\alpha} - \xi_2 \omega_e \Psi'_{r\beta} + \xi_3 i'_{s\alpha} \\ -\xi_2 \Psi'_{r\beta} + \xi_2 \omega_e \Psi'_{r\alpha} + \xi_3 i'_{s\beta} \\ 0 \end{array}\right]
\end{aligned} \tag{3.33}
$$

Dále postupujeme podle obdobného schematu. Výsledkem Lieovy derivace je sloupcový vektor se dvěma řádky

$$
\mathcal{L}^k_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{h} = \left[\begin{array}{c} \mathcal{L}^k_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{h}_1 \\ \mathcal{L}^k_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{h}_2 \end{array}\right] \tag{3.34}
$$

Kriteriální matice pozorovatelnosti $\boldsymbol{O}$ má pak tvar Jacobiho matice

$$\boldsymbol{O} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^0 \boldsymbol{h}_1}{\partial i'_{s\alpha}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^0 \boldsymbol{h}_1}{\partial i'_{s\beta}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^0 \boldsymbol{h}_1}{\partial \Psi'_{r\alpha}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^0 \boldsymbol{h}_1}{\partial \Psi'_{r\beta}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^0 \boldsymbol{h}_1}{\partial \omega_e} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^0 \boldsymbol{h}_2}{\partial i'_{s\alpha}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^0 \boldsymbol{h}_2}{\partial i'_{s\beta}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^0 \boldsymbol{h}_2}{\partial \Psi'_{r\alpha}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^0 \boldsymbol{h}_2}{\partial \Psi'_{r\beta}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^0 \boldsymbol{h}_2}{\partial \omega_e} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{h}_1}{\partial i'_{s\alpha}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{h}_1}{\partial i'_{s\beta}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{h}_1}{\partial \Psi'_{r\alpha}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{h}_1}{\partial \Psi'_{r\beta}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{h}_1}{\partial \omega_e} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{h}_2}{\partial i'_{s\alpha}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{h}_2}{\partial i'_{s\beta}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{h}_2}{\partial \Psi'_{r\alpha}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{h}_2}{\partial \Psi'_{r\beta}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{h}_2}{\partial \omega_e} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^4 \boldsymbol{h}_1}{\partial i'_{s\alpha}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^4 \boldsymbol{h}_1}{\partial i'_{s\beta}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^4 \boldsymbol{h}_1}{\partial \Psi'_{r\alpha}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^4 \boldsymbol{h}_1}{\partial \Psi'_{r\beta}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^4 \boldsymbol{h}_1}{\partial \omega_e} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^4 \boldsymbol{h}_2}{\partial i'_{s\alpha}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^4 \boldsymbol{h}_2}{\partial i'_{s\beta}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^4 \boldsymbol{h}_2}{\partial \Psi'_{r\alpha}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^4 \boldsymbol{h}_2}{\partial \Psi'_{r\beta}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^4 \boldsymbol{h}_2}{\partial \omega_e} \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

Matice pozorovatelnosti $\boldsymbol{O}$ má v našem případě rozměr 10×5. Vzhledem k tomu, že ověřujeme pozorovatelnost systému pátého řádu, potřebujeme určit, zda je hodnost matice $\boldsymbol{O}$ rovna 5. Lze postupovat tak, že budeme hledat čtvercovou matici složenou z libovolných pěti řádků matice $\boldsymbol{O}$, která bude regulární. Proveďme výběr tak, že budeme uvažovat nejnižší Lieovy derivace, čímž dostáváme dvě možnosti

$$\boldsymbol{O}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^0 \boldsymbol{h}_1}{\partial i'_{s\alpha}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^0 \boldsymbol{h}_1}{\partial i'_{s\beta}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^0 \boldsymbol{h}_1}{\partial \Psi'_{r\alpha}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^0 \boldsymbol{h}_1}{\partial \Psi'_{r\beta}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^0 \boldsymbol{h}_1}{\partial \omega_e} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^0 \boldsymbol{h}_2}{\partial i'_{s\alpha}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^0 \boldsymbol{h}_2}{\partial i'_{s\beta}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^0 \boldsymbol{h}_2}{\partial \Psi'_{r\alpha}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^0 \boldsymbol{h}_2}{\partial \Psi'_{r\beta}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^0 \boldsymbol{h}_2}{\partial \omega_e} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{h}_1}{\partial i'_{s\alpha}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{h}_1}{\partial i'_{s\beta}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{h}_1}{\partial \Psi'_{r\alpha}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{h}_1}{\partial \Psi'_{r\beta}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{h}_1}{\partial \omega_e} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{h}_2}{\partial i'_{s\alpha}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{h}_2}{\partial i'_{s\beta}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{h}_2}{\partial \Psi'_{r\alpha}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{h}_2}{\partial \Psi'_{r\beta}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{h}_2}{\partial \omega_e} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^2 \boldsymbol{h}_1}{\partial i'_{s\alpha}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^2 \boldsymbol{h}_1}{\partial i'_{s\beta}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^2 \boldsymbol{h}_1}{\partial \Psi'_{r\alpha}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^2 \boldsymbol{h}_1}{\partial \Psi'_{r\beta}} & \frac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}^2 \boldsymbol{h}_1}{\partial \omega_e} \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

$$\boldsymbol{O}_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathcal{L}^0_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{h}_1}{\partial i'_{s\alpha}} & \dfrac{\partial \mathcal{L}^0_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{h}_1}{\partial i'_{s\beta}} & \dfrac{\partial \mathcal{L}^0_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{h}_1}{\partial \Psi'_{r\alpha}} & \dfrac{\partial \mathcal{L}^0_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{h}_1}{\partial \Psi'_{r\beta}} & \dfrac{\partial \mathcal{L}^0_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{h}_1}{\partial \omega_e} \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}^0_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{h}_2}{\partial i'_{s\alpha}} & \dfrac{\partial \mathcal{L}^0_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{h}_2}{\partial i'_{s\beta}} & \dfrac{\partial \mathcal{L}^0_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{h}_2}{\partial \Psi'_{r\alpha}} & \dfrac{\partial \mathcal{L}^0_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{h}_2}{\partial \Psi'_{r\beta}} & \dfrac{\partial \mathcal{L}^0_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{h}_2}{\partial \omega_e} \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{h}_1}{\partial i'_{s\alpha}} & \dfrac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{h}_1}{\partial i'_{s\beta}} & \dfrac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{h}_1}{\partial \Psi'_{r\alpha}} & \dfrac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{h}_1}{\partial \Psi'_{r\beta}} & \dfrac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{h}_1}{\partial \omega_e} \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{h}_2}{\partial i'_{s\alpha}} & \dfrac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{h}_2}{\partial i'_{s\beta}} & \dfrac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{h}_2}{\partial \Psi'_{r\alpha}} & \dfrac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{h}_2}{\partial \Psi'_{r\beta}} & \dfrac{\partial \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{h}_2}{\partial \omega_e} \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}^2_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{h}_2}{\partial i'_{s\alpha}} & \dfrac{\partial \mathcal{L}^2_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{h}_2}{\partial i'_{s\beta}} & \dfrac{\partial \mathcal{L}^2_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{h}_2}{\partial \Psi'_{r\alpha}} & \dfrac{\partial \mathcal{L}^2_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{h}_2}{\partial \Psi'_{r\beta}} & \dfrac{\partial \mathcal{L}^2_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{h}_2}{\partial \omega_e} \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

Matice $\boldsymbol{O}_1$ a $\boldsymbol{O}_2$ jsou téměř shodné, liší se pouze volbou posledního řádku. Pro ověření, zda jsou matice regulární, vypočteme jejich determinanty.

$$D_1 = \det\{\boldsymbol{O}_1\} = \xi_2^3(1+\omega_e^2)\frac{\mathrm{d}\Psi'_{r\beta}}{\mathrm{d}t} \tag{3.38}$$

$$D_2 = \det\{\boldsymbol{O}_2\} = \xi_2^3(1+\omega_e^2)\frac{\mathrm{d}\Psi'_{r\alpha}}{\mathrm{d}t} \tag{3.39}$$

Matice $\boldsymbol{O}_1$ je regulární právě když je její determinant nenulový $D_1 \neq 0$, obdobně regulárnost matice $\boldsymbol{O}_2$ je ekvivalentní splnění podmínky $D_2 \neq 0$. Vzhledem k tomu, že parametr ξ_2 je odvozený z fyzikálních parametrů motoru vztahem (2.35), je zřejmé, že $\xi_2 \neq 0$. Platí tedy

$$\begin{aligned} D_1 \neq 0 &\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\Psi'_{r\beta}}{\mathrm{d}t} \neq 0 \\ D_2 \neq 0 &\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\Psi'_{r\alpha}}{\mathrm{d}t} \neq 0 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Postačující podmínkou pro to, aby hodnost matice $\boldsymbol{O}$ byla rovna pěti, je regulárnost některé z matice $\boldsymbol{O}_1, \boldsymbol{O}_2$ a tedy

$$\frac{\mathrm{d}\Psi'_{r\alpha}}{\mathrm{d}t} \neq 0 \vee \frac{\mathrm{d}\Psi'_{r\beta}}{\mathrm{d}t} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rank}\{\boldsymbol{O}\} = 5 \tag{3.41}$$

což lze zapsat v komplexorovém tvaru jako

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}'_r}{\mathrm{d}t} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rank}\{\boldsymbol{O}\} = 5 \tag{3.42}$$

Na základě teorému 3.1 dospějeme k závěru, že stav systému (3.23) je lokálně slabě pozorovatelný při splnění podmínky

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}'_r}{\mathrm{d}t} \neq 0 \tag{3.43}$$

Všimněme si, že ve smyslu definice 3.7 se nám nepodařilo dokázat pozorovatelnost systému, ale pouze jeho stavu v bodech stavového prostoru, pro které je splněna podmínka (3.43). Můžeme se sice pokusit zkoumat hodnost matice $\boldsymbol{O}$ s využitím jejich zbývajících řádků, avšak tento postup nevede k získání mírnější postačující podmínky pro pozorovatelnost stavu, než je vztah (3.43).

Vztah (3.43) interpretujeme tak, že postačující podmínkou pro pozorovatelnost stavu asynchronního motoru je to, že komplexor rotorového magnetického toku $\boldsymbol{\Psi}'_r$ není konstantní. Vzhledem k tomu, že při použití algoritmu vektorového řízení s orientací na rotorový tok je délka komplexoru rotorového magnetického toku udržována konstantní, musí být alespoň úhlová rychlost jeho pohybu nenulová $\omega_f \neq 0$. Skutečnost, že při nulové statorové frekvenci měření statorových elektrických veličin neobsahuje informaci o mechanické úhlové rychlosti rotoru, je dobře známá [12, 16] a způsobuje problémy s odhadem otáček v oblasti nízkých rychlostí. Řešení pak může spočívat v úpravě algoritmu vektorového řízení tak, aby nedošlo k situaci, kdy by byla statorová frekvence nulová (např. odbuzením motoru v oblasti nízkých otáček, čímž dojde k nárůstu statorové frekvence při zachování vyvolaného elektromechanického momentu).

3.2 Estimace otáček a magnetického toku

Přirozenou cestou, jak zajistit stabilitu odhadu, je přímo z požadavku stability při návrhu algoritmu vyjít. Pokusme se tedy v této kapitole provést vlastní návrh estimátoru otáček a magnetického toku na základě analýzy stability [15].

Při návrhu vyjdeme z pokud možno co nejjednoduššího modelu motoru. Tím může být struktura odvozená v kapitole 2.4. Uvažované stavové rovnice mají pak tvar

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}'_s}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{u}_s - \xi_1 \boldsymbol{i}'_s + (\xi_2 - \mathrm{j}\omega_e)\,\boldsymbol{\Psi}'_r \\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}'_r}{\mathrm{d}t} &= -(\xi_2 - \mathrm{j}\omega_e)\,\boldsymbol{\Psi}'_r + \xi_3 \boldsymbol{i}'_s \end{aligned} \tag{3.44}$$

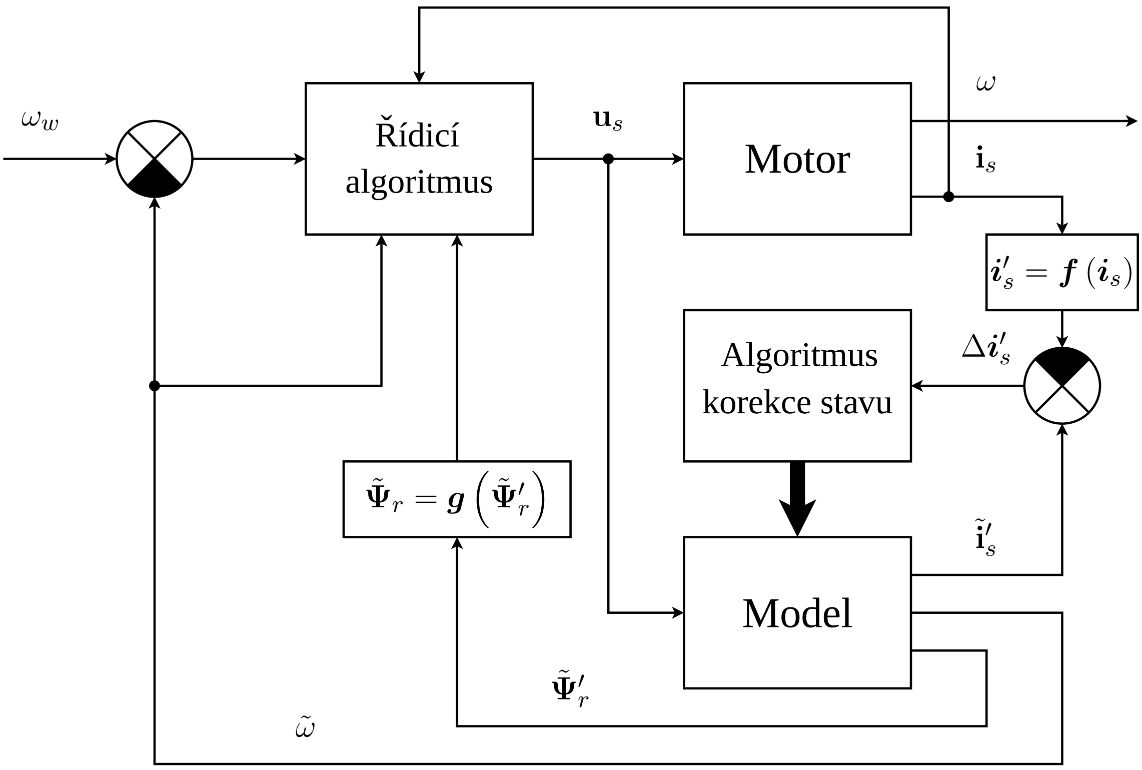
s parametry

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{R_s L_r^2 + L_m^2 R_r}{L_s L_r^2 - L_m^2 L_r} \\ \xi_2 &= \frac{R_r}{L_r} \\ \xi_3 &= \frac{R_r L_m^2}{L_s L_r^2 - L_m^2 L_r} \end{aligned} \tag{3.45}$$

Stavové veličiny modelu jsou se skutečnými elektromagnetickými veličinami vázány vztahy

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}_s &= \frac{L_r}{L_s L_r - L_m^2} \boldsymbol{i}'_s \\ \boldsymbol{\Psi}_r &= \frac{L_r}{L_m} \boldsymbol{\Psi}'_r \end{aligned} \tag{3.46}$$

Budeme předpokládat, že indukčnosti jsou známé, tak aby byly převodní vztahy (3.46) jednoznačně určeny. Estimátor musí vypočítat odhad rotorového toku $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}'_r$, statorových



Obrázek 3.1: Blokové schema regulačního obvodu s rekonstruktorem

proudů $\tilde{\boldsymbol{i}}'_s$ a elektrický otáček $\tilde{\omega}_e$. Vzhledem k tomu, že může docházet ke změnám odporu statoru a rotoru, uvažujme, že neznáme přesné hodnoty parametrů modelu a použijeme jejich odhady $\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3$.

Popis estimátoru budeme hledat ve tvaru, který je podobný svojí strukturou Luenbergerovu rekonstruktoru

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{i}}'_s}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{u}_s - \tilde{\xi}_1\tilde{\boldsymbol{i}}'_s + \left(\tilde{\xi}_2 - \mathrm{j}\tilde{\omega}_e\right)\tilde{\boldsymbol{\Psi}}'_r + \boldsymbol{\delta} \\ \frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{\Psi}}'_r}{\mathrm{d}t} &= -\left(\tilde{\xi}_2 - \mathrm{j}\tilde{\omega}_e\right)\tilde{\boldsymbol{\Psi}}'_r + \tilde{\xi}_3\tilde{\boldsymbol{i}}'_s\end{aligned} \tag{3.47}$$

kde pomocí výrazu $\boldsymbol{\delta}$ zavádíme korekci statorového proudu. Principiální schema systému s rekonstruktorem je zachyceno na obr. 3.1. Vstupem motoru a modelu v estimátoru (3.47) je statorové napětí $\boldsymbol{u}_s$. Za výstup systému budeme považovat statorový proud $\boldsymbol{i}'_s$, přičemž rozdílu mezi jeho skutečnou měřenou hodnotou $\boldsymbol{i}'_s$ a vypočteným odhadem $\tilde{\boldsymbol{i}}'_s$ využijeme pro výpočet korekce jednotlivých stavových veličin modelu.

Porovnáme-li skutečné a odhadované hodnoty jednotlivých veličin, můžeme vyjádřit estimační odchylky

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{i}'_s &= \tilde{\boldsymbol{i}}'_s - \boldsymbol{i}'_s \\ \Delta\boldsymbol{\Psi}'_r &= \tilde{\boldsymbol{\Psi}}'_r - \boldsymbol{\Psi}'_r\end{aligned} \tag{3.48}$$

$$\Delta\omega_e = \tilde{\omega}_e - \omega_e \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned} \Delta\xi_1 &= \tilde{\xi}_1 - \xi_1 \\ \Delta\xi_2 &= \tilde{\xi}_2 - \xi_2 \\ \Delta\xi_3 &= \tilde{\xi}_3 - \xi_3 \end{aligned} \tag{3.50}$$

Derivací (3.48) podle času dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\Delta\boldsymbol{i}'_s}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{i}}'_s}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}'_s}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}\Delta\boldsymbol{\Psi}'_r}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{\Psi}}'_r}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}'_r}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{3.51}$$

což lze upravit dosazením (3.44) a (3.47) na tvar

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\Delta\boldsymbol{i}'_s}{\mathrm{d}t} &= (\Delta\xi_2 - \mathrm{j}\Delta\omega_e)\tilde{\boldsymbol{\Psi}}'_r - \Delta\boldsymbol{i}'_s\tilde{\xi}_1 - \boldsymbol{i}'_s\Delta\xi_1 + \\ &\quad + \left(\mathrm{j}(\Delta\omega_e - \tilde{\omega}_e) - \Delta\xi_2 + \tilde{\xi}_2\right)\Delta\boldsymbol{\Psi}'_r + \boldsymbol{\delta} \\ \frac{\mathrm{d}\Delta\boldsymbol{\Psi}'_r}{\mathrm{d}t} &= -(\Delta\xi_2 - \mathrm{j}\Delta\omega_e)\tilde{\boldsymbol{\Psi}}'_r + \Delta\boldsymbol{i}'_s\tilde{\xi}_3 + \\ &\quad + \boldsymbol{i}'_s\Delta\xi_3 - \left(\mathrm{j}(\Delta\omega_e - \tilde{\omega}_e) - \Delta\xi_2 + \tilde{\xi}_2\right)\Delta\boldsymbol{\Psi}'_r \end{aligned} \tag{3.52}$$

Nutnou podmínkou pro shodu estimovaných hodnot stavů s jejich skutečnými hodnotami je co nejlepší shoda výstupu estimovaného systému a jeho modelu. Budeme se tedy snažit najít takovou korekci $\boldsymbol{\delta}$, aby platilo

$$\Delta\boldsymbol{i}'_s = 0 \tag{3.53}$$

Přímé řešení této podmínky je značně obtížné. Můžeme ji však snadno převést na řešení stability systému prvního řádu. Jak uvidíme dále, tento postup zajistí přibližně exponenciální konvergenci odchylky $\Delta\boldsymbol{i}'_s$ k nule, pokud budou estimační odchylky malé. Zaveďme pomocnou proměnnou $\boldsymbol{x}$, pro kterou platí

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \Delta\boldsymbol{i}'_s \tag{3.54}$$

Je zřejmé, že pokud zajistíme stabilizaci proměnné $\boldsymbol{x}$ (tj. její hodnota se bude s časem blížit nule), dosáhneme platnosti podmínky (3.53). Nejjednodušší možnost stabilizace systému (3.54) jeho převedení na tvar

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = -k_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \tag{3.55}$$

kde $\boldsymbol{y}$ představuje další pomocnou proměnnou a $k_1 > 0$. Pokud zajistíme, že bude platit

$$\boldsymbol{y} = 0 \tag{3.56}$$

bude hodnota proměnné $\boldsymbol{x}$ a tím i $\Delta\boldsymbol{i}'_s$ exponenciálně klesat k nule. Úlohu jsme nyní tedy převedli na problém stabilizace proměnné $\boldsymbol{y}$. Porovnáním pravých stran (3.54) a (3.55) dostaneme

$$\boldsymbol{y} = \Delta\boldsymbol{i}'_s + k_1\boldsymbol{x} \tag{3.57}$$

a následně derivací podle času

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\Delta\boldsymbol{i}'_s}{\mathrm{d}t} + k_1\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} \tag{3.58}$$

Dosazením (3.52) a (3.54) za derivace na pravé straně (3.58) získáme diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t} = & (\Delta\xi_2 - \mathrm{j}\Delta\omega_e)\tilde{\boldsymbol{\Psi}}'_r - \Delta\boldsymbol{i}'_s\tilde{\xi}_1 - \boldsymbol{i}'_s\Delta\xi_1 + \\ & + \left(\mathrm{j}(\Delta\omega_e - \tilde{\omega}_e) - \Delta\xi_2 + \tilde{\xi}_2\right)\Delta\boldsymbol{\Psi}'_r + \boldsymbol{\delta} + k_1\Delta\boldsymbol{i}'_s \end{aligned} \tag{3.59}$$

Uvedený postup je obvykle v literatuře označován jako „integrator back-stepping“ [8] a je často používán pro syntézu řízení složitějších nelineárních systémů.

Estimované hodnoty stavů budou sledovat skutečné hodnoty, pokud velikost estimačních odchylek půjde s časem asymptoticky k nule. Na celý problém se tedy můžeme dívat jako na požadavek dosažení asymptotické stability dynamického systému estimačních odchylek. Tuto stabilitu můžeme vyšetřit druhou Ljapunovovou metodou [17]. Ljapunovovu funkci zvolíme ve tvaru

$$V = \frac{1}{2}|\boldsymbol{y}|^2 + \frac{1}{2}|\Delta\boldsymbol{\Psi}'_r|^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{k_\omega}(\Delta\omega_e)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{k_{\xi_1}}(\Delta\xi_1)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{k_{\xi_2}}(\Delta\xi_2)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{k_{\xi_3}}(\Delta\xi_3)^2 \tag{3.60}$$

kde $k_\omega > 0, k_{\xi_1} > 0, k_{\xi_2} > 0, k_{\xi_3} > 0$ jsou konstanty. Všimněme si, že Ljapunovova funkce zahrnuje i odchylky ve znalosti parametrů motoru. Předpokládaným výsledkem tak budou i pravidla pro adaptaci hodnot parametrů použitých v modelu motoru. Naopak není zde zohledněna odchylka $\Delta\boldsymbol{i}'_s$ ani pomocná proměnná $\boldsymbol{x}$. Z předchozího výkladu je zřejmé, že stabilizace těchto dvou veličin přímo vyplývá ze stabilizace proměnné $\boldsymbol{y}$ a další rozšíření tvaru Ljapunovovy funkce by bylo zbytečné. Základním požadavkem na Ljapunovovu funkci je její pozitivní definitnost. Funkce definovaná vztahem (3.60) je jen pozitivně semidefinitní, protože nezohledňuje jeden stav dynamického systému odchylek ($\Delta\boldsymbol{i}'_s$). Vzhledem k tomu, že asymptotická stabilizace této stavové proměnné vyplývá ze stabilizace proměnné $\boldsymbol{y}$, která je ve funkci (3.60) zahrnuta, můžeme zvolenou funkci považovat za vhodného kandidáta na Ljapunovovu funkci.

Postačující podmínkou pro dosažení asymptotické stability je negativní definitnost derivace Ljapunovovy funkce podle času. Musí tedy platit

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} < 0 \tag{3.61}$$

pro libovolné hodnoty argumentů Ljapunovovy funkce s výjimkou počátku prostoru hodnot, kdy může být derivace nulová. Funkci (3.60) upravíme do tvaru

$$V = \frac{1}{2}\boldsymbol{y}\overline{\boldsymbol{y}} + \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\Psi}'_r\overline{\Delta\boldsymbol{\Psi}'_r} + \frac{1}{2}\frac{1}{k_\omega}(\Delta\omega_e)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{k_{\xi_1}}(\Delta\xi_1)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{k_{\xi_2}}(\Delta\xi_2)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{k_{\xi_3}}(\Delta\xi_3)^2 \tag{3.62}$$

a následně derivujeme podle času

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}\overline{\boldsymbol{y}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{y}\frac{\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{y}}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\Delta\boldsymbol{\Psi}_r'}{\mathrm{d}t}\overline{\Delta\boldsymbol{\Psi}_r'} + \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\Psi}_r'\frac{\mathrm{d}\overline{\Delta\boldsymbol{\Psi}_r'}}{\mathrm{d}t} + \frac{\Delta\omega_e}{k_\omega}\frac{\mathrm{d}\Delta\omega_e}{\mathrm{d}t} + \\ + \frac{\Delta\xi_1}{k_{\xi_1}}\frac{\mathrm{d}\Delta\xi_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\Delta\xi_2}{k_{\xi_2}}\frac{\mathrm{d}\Delta\xi_2}{\mathrm{d}t} + \frac{\Delta\xi_3}{k_{\xi_3}}\frac{\mathrm{d}\Delta\xi_3}{\mathrm{d}t} \tag{3.63}$$

Uvážíme-li, že pro komplexní čísla platí

$$\boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{b}} + \overline{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{b}} + \overline{\boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{b}}} = 2\Re\{\boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{b}}\} \tag{3.64}$$

dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \Re\left\{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}\overline{\boldsymbol{y}}\right\} + \Re\left\{\frac{\mathrm{d}\Delta\boldsymbol{\Psi}_r'}{\mathrm{d}t}\overline{\Delta\boldsymbol{\Psi}_r'}\right\} + \\ + \frac{\Delta\omega_e}{k_\omega}\frac{\mathrm{d}\Delta\omega_e}{\mathrm{d}t} + \frac{\Delta\xi_1}{k_{\xi_1}}\frac{\mathrm{d}\Delta\xi_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\Delta\xi_2}{k_{\xi_2}}\frac{\mathrm{d}\Delta\xi_2}{\mathrm{d}t} + \frac{\Delta\xi_3}{k_{\xi_3}}\frac{\mathrm{d}\Delta\xi_3}{\mathrm{d}t} \tag{3.65}$$

kde

$$\Re\left\{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}\overline{\boldsymbol{y}}\right\} = \Re\left\{\left[(\Delta\xi_2 - \mathrm{j}\Delta\omega_e)\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_r' - \Delta\boldsymbol{i}_s'\tilde{\xi}_1 - \boldsymbol{i}_s'\Delta\xi_1 + \right.\right. \\ \left.\left. + \left(\mathrm{j}(\Delta\omega_e - \tilde{\omega}_e) - \Delta\xi_2 + \tilde{\xi}_2\right)\Delta\boldsymbol{\Psi}_r' + \boldsymbol{\delta} + \Delta\boldsymbol{i}_s'\right]\overline{\boldsymbol{y}}\right\} = \\ = \Delta\xi_2\Re\left\{\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_r'\overline{\boldsymbol{y}}\right\} + \Delta\omega_e\Im\left\{\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_r'\overline{\boldsymbol{y}}\right\} - \Delta\xi_1\Re\left\{\boldsymbol{i}_s'\overline{\boldsymbol{y}}\right\} - \Delta\omega_e\Im\left\{\Delta\boldsymbol{\Psi}_r'\overline{\boldsymbol{y}}\right\} - \\ - \Delta\xi_2\Re\left\{\Delta\boldsymbol{\Psi}_r'\overline{\boldsymbol{y}}\right\} + \Re\left\{\left[-\Delta\boldsymbol{i}_s'\tilde{\xi}_1 + (\tilde{\xi}_2 - \mathrm{j}\tilde{\omega}_e)\Delta\boldsymbol{\Psi}_r' + \boldsymbol{\delta} + k_1\Delta\boldsymbol{i}_s'\right]\overline{\boldsymbol{y}}\right\} \tag{3.66}$$

$$\Re\left\{\frac{\mathrm{d}\Delta\boldsymbol{\Psi}_r'}{\mathrm{d}t}\overline{\Delta\boldsymbol{\Psi}_r'}\right\} = \Re\left\{\left[-(\Delta\xi_2 - \mathrm{j}\Delta\omega_e)\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_r' + \Delta\boldsymbol{i}_s'\tilde{\xi}_3 + \boldsymbol{i}_s'\Delta\xi_3 - \right.\right. \\ \left.\left. - \left(\mathrm{j}(\Delta\omega_e - \tilde{\omega}_e) - \Delta\xi_2 + \tilde{\xi}_2\right)\Delta\boldsymbol{\Psi}_r'\right]\overline{\Delta\boldsymbol{\Psi}_r'}\right\} = \\ = -\Delta\xi_2\Re\left\{\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_r'\overline{\Delta\boldsymbol{\Psi}_r'}\right\} - \Delta\omega_e\Im\left\{\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_r'\overline{\Delta\boldsymbol{\Psi}_r'}\right\} + \Delta\xi_3\Re\left\{\boldsymbol{i}_s'\overline{\Delta\boldsymbol{\Psi}_r'}\right\} + \\ + \Delta\xi_2\Re\left\{\Delta\boldsymbol{\Psi}_r'\overline{\Delta\boldsymbol{\Psi}_r'}\right\} + \Re\left\{\left[\Delta\boldsymbol{i}_s'\tilde{\xi}_3 - \Delta\boldsymbol{\Psi}_r'\tilde{\xi}_2\right]\overline{\Delta\boldsymbol{\Psi}_r'}\right\} \tag{3.67}$$

Po dosazení a úpravě pak dostaneme

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \Delta\omega_e \left(\frac{1}{k_\omega} \frac{\mathrm{d}\Delta\omega_e}{\mathrm{d}t} + \Im \left\{ \overline{(\boldsymbol{y} - \Delta\boldsymbol{\Psi}'_r)} \left(\tilde{\boldsymbol{\Psi}}'_r - \Delta\boldsymbol{\Psi}'_r \right) \right\} \right) + \\
+ \Delta\xi_1 \left(\frac{1}{k_{\xi_1}} \frac{\mathrm{d}\Delta\xi_1}{\mathrm{d}t} - \Re \left\{ \boldsymbol{i}'_s \overline{\boldsymbol{y}} \right\} \right) + \\
+ \Delta\xi_2 \left(\frac{1}{k_{\xi_2}} \frac{\mathrm{d}\Delta\xi_2}{\mathrm{d}t} + \Re \left\{ \overline{(\boldsymbol{y} - \Delta\boldsymbol{\Psi}'_r)} \left(\tilde{\boldsymbol{\Psi}}'_r - \Delta\boldsymbol{\Psi}'_r \right) \right\} \right) + \\
+ \Delta\xi_3 \left(\frac{1}{k_{\xi_3}} \frac{\mathrm{d}\Delta\xi_3}{\mathrm{d}t} + \Re \left\{ \boldsymbol{i}'_s \overline{\Delta\boldsymbol{\Psi}'_r} \right\} \right) + \\
+ \Re \left\{ \left[(k_1 - \tilde{\xi}_1)\Delta\boldsymbol{i}'_s + (\tilde{\xi}_2 - \mathrm{j}\tilde{\omega}_e)\Delta\boldsymbol{\Psi}'_r + \boldsymbol{\delta} \right] \overline{\boldsymbol{y}} \right\} \\
+ \Re \left\{ \left[\Delta\boldsymbol{i}'_s \tilde{\xi}_3 - \Delta\boldsymbol{\Psi}'_r \tilde{\xi}_2 \right] \overline{\Delta\boldsymbol{\Psi}'_r} \right\}
\end{aligned}
\tag{3.68}
$$

Podívejme se nyní detailněji na jednotlivé členy v derivaci Ljapunovovy funkce (3.68). První čtyři členy obsahují neznámou estimační odchylku otáček $\Delta\omega_e$ a parametrů modelu $\Delta\xi_1, \Delta\xi_2, \Delta\xi_3$, přičemž nejsme schopni určit ani znaménko těchto odchylek. Z tohoto důvodu je jedinou možností uvažovat, že tyto členy jsou nulové. Položíme proto

$$
\frac{1}{k_\omega} \frac{\mathrm{d}\Delta\omega_e}{\mathrm{d}t} + \Im \left\{ \overline{(\boldsymbol{y} - \Delta\boldsymbol{\Psi}'_r)} \left(\tilde{\boldsymbol{\Psi}}'_r - \Delta\boldsymbol{\Psi}'_r \right) \right\} = 0 \tag{3.69}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{k_{\xi_1}} \frac{\mathrm{d}\Delta\xi_1}{\mathrm{d}t} - \Re \left\{ \boldsymbol{i}'_s \overline{\boldsymbol{y}} \right\} = 0 \\
\frac{1}{k_{\xi_2}} \frac{\mathrm{d}\Delta\xi_2}{\mathrm{d}t} + \Re \left\{ \overline{(\boldsymbol{y} - \Delta\boldsymbol{\Psi}'_r)} \left(\tilde{\boldsymbol{\Psi}}'_r - \Delta\boldsymbol{\Psi}'_r \right) \right\} = 0 \\
\frac{1}{k_{\xi_3}} \frac{\mathrm{d}\Delta\xi_3}{\mathrm{d}t} + \Re \left\{ \boldsymbol{i}'_s \overline{\Delta\boldsymbol{\Psi}'_r} \right\} = 0
\end{aligned}
\tag{3.70}
$$

čímž dostaneme podmínky

$$
\frac{\mathrm{d}\Delta\omega_e}{\mathrm{d}t} = -k_\omega \Im \left\{ \overline{(\boldsymbol{y} - \Delta\boldsymbol{\Psi}'_r)} \left(\tilde{\boldsymbol{\Psi}}'_r - \Delta\boldsymbol{\Psi}'_r \right) \right\} \tag{3.71}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\Delta\xi_1}{\mathrm{d}t} &= k_{\xi_1} \Re \left\{ \boldsymbol{i}'_s \overline{\boldsymbol{y}} \right\} \\
\frac{\mathrm{d}\Delta\xi_2}{\mathrm{d}t} &= -k_{\xi_2} \Re \left\{ \overline{(\boldsymbol{y} - \Delta\boldsymbol{\Psi}'_r)} \left(\tilde{\boldsymbol{\Psi}}'_r - \Delta\boldsymbol{\Psi}'_r \right) \right\} \\
\frac{\mathrm{d}\Delta\xi_3}{\mathrm{d}t} &= -k_{\xi_3} \Re \left\{ \boldsymbol{i}'_s \overline{\Delta\boldsymbol{\Psi}'_r} \right\}
\end{aligned}
\tag{3.72}
$$

Negativní definitnost pátého členu v zápisu (3.68) lze dosáhnout tak, že položíme

$$
(k_1 - \tilde{\xi}_1)\Delta\boldsymbol{i}'_s + (\tilde{\xi}_2 - \mathrm{j}\tilde{\omega}_e)\Delta\boldsymbol{\Psi}'_r + \boldsymbol{\delta} = -k_2 \boldsymbol{y} \tag{3.73}
$$

kdy diskutovaný člen přejde do tvaru

$$-k_2|\boldsymbol{y}|^2 \tag{3.74}$$

Po dosazení za $\boldsymbol{y}$ z (3.57) a vyjádříme hodnotu korekce $\boldsymbol{\delta}$ jako

$$\boldsymbol{\delta} = (\tilde{\xi}_1 - k_1 - k_2)\Delta\boldsymbol{i}'_s + (\mathrm{j}\tilde{\omega}_e - \tilde{\xi}_2)\Delta\boldsymbol{\Psi}'_r - k_1k_2\boldsymbol{x} \tag{3.75}$$

Vzhledem k tomu, že musí platit $\tilde{\xi}_1 > 0, \tilde{\xi}_2 > 0, \tilde{\xi}_3 > 0$, je zřejmé, že poslední člen v (3.68) bude záporný, pokud bude platit

$$\Delta\boldsymbol{\Psi}'_r = -\Delta\boldsymbol{i}'_s \tag{3.76}$$

kdy přejde na tvar

$$-(\tilde{\xi}_2 + \tilde{\xi}_3)|\boldsymbol{i}'_s|^2 \tag{3.77}$$

Otázkou nyní však zůstává, zda podmínka (3.76) skutečně platí. Předpokládejme, že systém je v ustáleném stavu, kdy estimační odchylky $\Delta\boldsymbol{i}'_s$ a $\Delta\boldsymbol{\Psi}'_r$ mají konstantní velikost a jejich komplexory rotují s úhlovou rychlostí ω_f odpovídající synchronní statorové frekvenci. Pak platí

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Delta\boldsymbol{i}'_s}{\mathrm{d}t} &= \mathrm{j}\omega_f\Delta\boldsymbol{i}'_s \\ \frac{\mathrm{d}\Delta\boldsymbol{\Psi}'_r}{\mathrm{d}t} &= \mathrm{j}\omega_f\Delta\boldsymbol{\Psi}'_r\end{aligned} \tag{3.78}$$

a tedy

$$\frac{\mathrm{d}\Delta\boldsymbol{i}'_s}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\Delta\boldsymbol{\Psi}'_r}{\mathrm{d}t} = \mathrm{j}\omega_f(\Delta\boldsymbol{i}'_s + \Delta\boldsymbol{\Psi}'_r) \tag{3.79}$$

Derivace estimačních odchylek jsou dány vztahy (3.52), jejich dosazením do (3.79) obdržíme

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{i}'_s + \Delta\boldsymbol{\Psi}'_r &= \frac{-\mathrm{j}}{\omega_f}\left[(\tilde{\xi}_3 - \tilde{\xi}_2)\Delta\boldsymbol{i}'_s + (\Delta\xi_3 - \Delta\xi_1)\boldsymbol{i}'_s + \boldsymbol{\delta}\right] = \\ &= \frac{-\mathrm{j}}{\omega_f}\left[(\tilde{\xi}_3 - \tilde{\xi}_2)(\tilde{\boldsymbol{i}}'_s - \boldsymbol{i}'_s) + (\Delta\xi_3 - \Delta\xi_1)\boldsymbol{i}'_s + \boldsymbol{\delta}\right] = \\ &= \frac{-\mathrm{j}}{\omega_f}\left[(\tilde{\xi}_3 - \tilde{\xi}_2)\tilde{\boldsymbol{i}}'_s - (\xi_3 - \xi_1)\boldsymbol{i}'_s + \boldsymbol{\delta}\right]\end{aligned} \tag{3.80}$$

Pokud budou všechny estimační odchylky malé, bude přibližně platit

$$(\tilde{\xi}_3 - \tilde{\xi}_2)\tilde{\boldsymbol{i}}'_s \approx (\xi_3 - \xi_1)\boldsymbol{i}'_s \tag{3.81}$$

a je rovněž zřejmé, že vypočtená korekce $\boldsymbol{\delta}$ bude mít malou hodnotu

$$\boldsymbol{\delta} \approx 0 \tag{3.82}$$

Vztah (3.80) pak přejde na

$$\Delta\boldsymbol{i}'_s + \Delta\boldsymbol{\Psi}'_r \approx 0 \tag{3.83}$$

a platí tedy

$$\Delta\boldsymbol{\Psi}_r' \approx -\Delta\boldsymbol{i}_s' \tag{3.84}$$

V oblasti nízkých otáček, kdy ω_f bude mít malou hodnotu, nelze hodnotu na pravé straně vztahu (3.80) zanedbat (dělení malým číslem) a přibližná rovnost (3.84) nenastane. V oblasti nízkých otáček nelze tedy stabilitu estimátoru jednoznačně dokázat, což je však společný rys algoritmů bezsnímačového řízení, v nichž je odhad otáček založen na modelu motoru [12, 14].

Vztahy (3.71) a (3.72) určují časový vývoj estimačních odchylek otáček rotoru a parametrů modelu. Dokážeme je však využít k výpočtu odhadu jednotlivých veličin? Za předpokladu, že se otáčky a parametry motoru mění pomalu (což ve srovnání s rychlostí změn elektrických veličin je během normální činnosti motoru pravda), lze derivací vztahů (3.49) a (3.50) odvodit

$$\frac{\mathrm{d}\Delta\omega_e}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\tilde{\omega}_e}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\omega_e}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\mathrm{d}\tilde{\omega}_e}{\mathrm{d}t} \tag{3.85}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\Delta\xi_1}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\tilde{\xi}_1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\xi_1}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\mathrm{d}\tilde{\xi}_1}{\mathrm{d}t}\\
\frac{\mathrm{d}\Delta\xi_2}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\tilde{\xi}_2}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\xi_2}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\mathrm{d}\tilde{\xi}_2}{\mathrm{d}t}\\
\frac{\mathrm{d}\Delta\xi_3}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\tilde{\xi}_3}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\xi_3}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\mathrm{d}\tilde{\xi}_3}{\mathrm{d}t}
\end{aligned} \tag{3.86}$$

a po dosazení za derivace estimačních odchylek z (3.71) a (3.72) tedy dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\omega}_e}{\mathrm{d}t} \approx -k_\omega \Im\left\{\overline{(\boldsymbol{y} - \Delta\boldsymbol{\Psi}_r')}\left(\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_r' - \Delta\boldsymbol{\Psi}_r'\right)\right\} \tag{3.87}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\tilde{\xi}_1}{\mathrm{d}t} &\approx k_{\xi_1}\Re\left\{\boldsymbol{i}_s'\overline{\boldsymbol{y}}\right\}\\
\frac{\mathrm{d}\tilde{\xi}_2}{\mathrm{d}t} &\approx -k_{\xi_2}\Re\left\{\overline{(\boldsymbol{y} - \Delta\boldsymbol{\Psi}_r')}\left(\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_r' - \Delta\boldsymbol{\Psi}_r'\right)\right\}\\
\frac{\mathrm{d}\tilde{\xi}_3}{\mathrm{d}t} &\approx -k_{\xi_3}\Re\left\{\boldsymbol{i}_s'\overline{\Delta\boldsymbol{\Psi}_r'}\right\}
\end{aligned} \tag{3.88}$$

Všimněme si, že ve vztazích (3.75),(3.87) a (3.88) vystupuje chyba estimace rotorového toku $\Delta\boldsymbol{\Psi}_r'$, která je však neznámá a nelze ji určit měřením (předpokládáme, že motor není vybaven snímačem magnetického pole, který by umožnil měření skutečné hodnoty $\boldsymbol{\Psi}_r'$). Její přibližnou velikost určíme použitím vztahu (3.84). Celý algoritmus estimátoru pak můžeme shrnout do následujících rovnic:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{i}}_s'}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{u}_s - \tilde{\xi}_1\tilde{\boldsymbol{i}}_s' + \left(\tilde{\xi}_2 - \mathrm{j}\tilde{\omega}_e\right)\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_r' + \boldsymbol{\delta}\\
\frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_r'}{\mathrm{d}t} &= -\left(\tilde{\xi}_2 - \mathrm{j}\tilde{\omega}_e\right)\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_r' + \tilde{\xi}_3\tilde{\boldsymbol{i}}_s'
\end{aligned} \tag{3.89}$$

$$\Delta \boldsymbol{i}'_s = \tilde{\boldsymbol{i}}'_s - \boldsymbol{i}'_s \tag{3.90}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \Delta \boldsymbol{i}'_s \tag{3.91}$$

$$\boldsymbol{y} = \Delta \boldsymbol{i}'_s + k_1 \boldsymbol{x} \tag{3.92}$$

$$\boldsymbol{\delta} = (\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 - k_1 - k_2 - \mathrm{j}\tilde{\omega}_e)\Delta \boldsymbol{i}'_s - k_1 k_2 \boldsymbol{x} \tag{3.93}$$

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\omega}_e}{\mathrm{d}t} = -k_\omega \Im\left\{\overline{(\boldsymbol{y} + \Delta \boldsymbol{i}'_s)}\left(\tilde{\boldsymbol{\Psi}}'_r + \Delta \boldsymbol{i}'_s\right)\right\} \tag{3.94}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\tilde{\xi}_1}{\mathrm{d}t} &= k_{\xi_1} \Re\left\{\boldsymbol{i}'_s \overline{\boldsymbol{y}}\right\} \\ \frac{\mathrm{d}\tilde{\xi}_2}{\mathrm{d}t} &= -k_{\xi_2} \Re\left\{\overline{(\boldsymbol{y} + \Delta \boldsymbol{i}'_s)}\left(\tilde{\boldsymbol{\Psi}}'_r + \Delta \boldsymbol{i}'_s\right)\right\} \\ \frac{\mathrm{d}\tilde{\xi}_3}{\mathrm{d}t} &= k_{\xi_3} \Re\left\{\boldsymbol{i}'_s \overline{\Delta \boldsymbol{i}'_s}\right\} \end{aligned} \tag{3.95}$$

kde všechny konstanty $k_1, k_2, k_\omega, k_{\xi_1}, k_{\xi_2}, k_{\xi_3}$ jsou kladné. Parametry modelu a přepočet stavových veličin je dán vztahy (3.45) a (3.46). Do estimátoru vstupuje statorové napětí $\boldsymbol{u}_s$ a přepočtená hodnota statorového proudu $\boldsymbol{i}'_s$. Estimátor umožňuje odhad statorového proudu $\tilde{\boldsymbol{i}}'_s$ (filtrace), rotorového toku $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}'_r$ a elektrické úhlové rychlosti $\tilde{\omega}_e$. Vztahy (3.95) pak nabízejí možnost současné adaptace parametrů modelu.

3.3 Adaptace parametrů modelu motoru

V předchozí části jsme dospěli k závěru, že je pomocí vztahů (3.95) možné adaptovat parametry modelu motoru. Nyní se zaměříme na zjištění, zda měřené signály obsahují dostatek informací pro odhad parametrů motoru.

Komplexor rotorového magnetického toku je dán rovnicí T-modelu (2.11)

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}_r}{\mathrm{d}t} = \mathrm{j}\omega_e \boldsymbol{\Psi}_r - R_r \boldsymbol{i}_r \tag{3.96}$$

Pokud je pro řízení použit algoritmus vektorového řízení s orientací na rotorový magnetický tok, je velikost komplexoru rotorového toku $|\boldsymbol{\Psi}_r|$ konstantní. V tomto případě musí být komplexor rotorového proudu $\boldsymbol{i}_r$ kolmý na komplexor rotorového magnetického toku $\boldsymbol{\Psi}_r$ a platí

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}_r}{\mathrm{d}t} = \mathrm{j}\boldsymbol{\Psi}_r \left(\omega_e + R_r \frac{|\boldsymbol{i}_r|}{|\boldsymbol{\Psi}_r|}\right) \tag{3.97}$$

Pokud dojde k odchylce mezi estimovaným a skutečným komplexorem rotorového toku, projeví se tato odchylka následně jako odchylka mezi estimovaným a skutečným komplexorem statorového proudu, kterou lze měřit. Nicméně je zřejmé, že vzhledem ke tvaru rovnice (3.97) lze vzniklou odchylku vykompenzovat jak změnou estimované rychlosti $\tilde{\omega}_e$ tak i změnou odhadu rotorového odporu $\tilde{R}_r$. V případě, že je velikost komplexoru rotorového toku udržována konstantní, neobsahuje měření statorového proudu dostatek informací k současnému odhadu otáček rotoru a odporu rotoru.

Stejného závěru je možné dosáhnout komplikovanou analýzou pozorovatelnosti stavu obdobným postupem jako v kapitole 3.1.

Jedinou možností je provedení identifikačního experimentu, během něhož zajistíme, že komplexory rotorového toku $\boldsymbol{\Psi}_r$ a rotorového proudu $\boldsymbol{i}_r$ nebudou na sebe kolmé. Toho lze docílit pouze tak, že budeme periodicky měnit velikost rotorového toku (komplexor rotorového proudu má opačný směr, než okamžitá rychlost koncového bodu komplexoru rotorového toku). Tato jednoduchá myšlenka však v sobě nese dva zásadní problémy. První spočívá v tom, že změny velikosti rotorového toku vyvolají zvlnění mechanického momentu. Druhý problém je mnohem zásadnější a týká se omezení maximálního statorového napětí. Proveďme jednoduchý myšlenkový experiment - předpokládejme, že rozptylové indukčnosti $L_{s\sigma}, L_{r\sigma}$ jsou velmi malé. Pak bude přibližně platit $\boldsymbol{\Psi}_s \approx \boldsymbol{\Psi}_r$. Pokud budeme požadovat, aby se koncový bod komplexoru $\boldsymbol{\Psi}_r$ a tedy i $\boldsymbol{\Psi}_s$ pohyboval s vektorem rychlosti, který se bude co nejvíce odchylovat od vektoru kolmého na komplexor $\boldsymbol{\Psi}_s$ (tak abychom neřešili špatně podmíněnou úlohu, která by byla značně zatížena chybami měření), budeme muset zajistit, aby radiální rychlost tohoto bodu byla srovnatelná s jeho tangenciální rychlostí. Za normálních okolností bude v ustáleném stavu tangenciální rychlost komplexoru statorového toku $\omega_f|\boldsymbol{\Psi}_s|$. Pokud přidáme radiální složku rychlosti o srovnatelné velikosti, bude celková rychlost $\sqrt{2}\omega_f|\boldsymbol{\Psi}_s|$. Bez uvážení rozkmitání velikosti toku přibližně platí v ustáleném stavu

$$|\boldsymbol{u}_s| \approx \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}_s}{\mathrm{d}t}\right| = \omega_f|\boldsymbol{\Psi}_s| \tag{3.98}$$

Pokud přidáme potřebné rozkmitání velikosti toku, dostaneme

$$|\boldsymbol{u}_s| \approx \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}_s}{\mathrm{d}t}\right| = \sqrt{2}\omega_f|\boldsymbol{\Psi}_s| \approx 1{,}41\omega_f|\boldsymbol{\Psi}_s| \tag{3.99}$$

Vidíme, že si uvažovaný experiment vyžádá zvýšení statorového napětí přibližně o 40%, což je ve většině reálných aplikacích, zvláště v případě, kdy motor pracuje v oblasti vysokých otáček, naprosto nereálné.

Uvedený problém je obecně znám (i když jej někteří autoři prací o bezsnímačovém řízení opomíjejí). U algoritmů odhadu otáček, které jsou založeny na modelu motoru není možné dosáhnout současného odhadu rotorového odporu. Vzhledem k tomu, že během činnosti motoru dochází k změnám rotorového odporu v důsledku teplotních změn a povrchového jevu, je nemožnost jeho přímého odhadu poměrně nepříjemná. V praxi se projeví chybou v odhadu otáček rotoru, která je závislá na zatížení motoru (a tedy rovněž na rotorovém proudu $\boldsymbol{i}_r$), což je patrné z rovnice (3.97). I přes toto omezení je však často odhad otáček použitelný v reálných aplikacích za podmínky nižších požadavků na přesnost.

Vzhledem k tomu, že všechny parametry použitého modelu ξ_1, ξ_2, ξ_3 jsou závislé na rotorovém odporu (3.45), nemá vzhledem k uvedeným skutečnostem smysl provádět jejich adaptaci pomocí vztahů (3.95).

4 ZÁVĚR

Zdá se, že řízení asynchronního motoru na základě odhadu otáček z měřených elektrických veličin je zajímavou alternativou k použití nákladného snímače otáček pro jednoduché aplikace. V rámci předložené práce byly popsány základní možnosti pro návrh estimátoru otáček asynchronního motoru.

Během výzkumu bezsnímačového řízení byl navržen algoritmus odhadu otáček, který byl následně implementován na mikroprocesorovém systému pro řízení asynchronního motoru. Základní výhodou navrženého algoritmu je jeho jednoduchost ve srovnání s běžně používanými algoritmy založenými na rozšířeném Kalmanově filtru spolu se zajištěním stability vypočítávaného odhadu.

I když bylo ověření navrženého algoritmu estimátoru otáček pro bezsnímačové řízení pohonu úspěšně provedeno v laboratorních podmínkách, zbývá otevřena řada otázek, které budou řešeny v dalším výzkumu–zejména problém identifikace parametrů pohonu při bezsnímačovém řízení nebo algoritmy bezsnímačového řízení dalších typů motorů. Jedná se o téma, které je pro další výzkum vhodné hned ze dvou důvodů – přináší zajímavé teoretické problémy (rekonstruovatelnost stavu nelineárního systému, identifikace parametrů nelineárního systému), ale rovněž i možnost aplikovatelnosti dosažených výsledků v průmyslových aplikacích.

O tom, že dané téma zůstává i nadále v centru zájmu předních světových výzkumných a vývojových institucí svědčí fakt, že prestižní časopis IEEE Transactions on Industrial Electronics zahájil ročník 2006 vydáním speciálního čísla na téma „Sensorless Control of Induction Motors“.

LITERATURA

[1] BLASCHKE, F. The principle of field orientation as applied to the new transvector closed loop control system for rotating field machines. *Siemens Review*, sv. 39, č. 5, s. 217–220, 1972.

[2] CAHA, Z., ČERNÝ, M. *Elektrické pohony.* SNTL, Praha, 1990.

[3] CLARKE, E. *Circuit Analysis of AC Power Systems.*, sv. 1 Willey, New York, 1943.

[4] GAUTHIER, J.-P., KUPKA, I. *Deterministic Observation Theory and Applications.* Cambridge University Press, 2001.

[5] HEDRICK, J., GIRARD, A. *Control of Nonlinear Dynamic Systems: Theory and Applications.* University of California, 2005.

[6] HERMANN, R., KRENER, A. Nonlinear controllability and observability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, sv. 22, č. 5, s. 728–740, 1977.

[7] KARNOPP, D. Understanding induction motor state equations using bond graphs. In *2003 International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation*, 2003.

[8] KHALLIL, H. K. *Nonlinear Systems.* Prentice Hall, 3 vydání, 2002.

[9] KOVÁCS, K. P., RÁCZ, I. *Transiente Vorgänge in Wechselstrommaschinen.*, sv. I.,II. Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest, 1959.

[10] PARK, R. Two-reaction theory of synchronous machines. *AIEE Transactions*, sv. 48, s. 716–727, 1929.

[11] PETERSON, B. Oscillations in inverter fed induction motor drives. Diplomová práce, Lund Institute of Technology, Lund, 1991.

[12] PETERSON, B. *Induction Machine Speed Estimation, Observations on Observers.* PhD thesis, Lund Institute of Technology, Lund, 1996.

[13] SLEMON, G. Modelling of induction machines for electric drives. *IEEE Transactions on Industry Applications*, sv. 25, č. 6, s. 1126–1131, November 1989.

[14] VAS, P. *Parameter Estimation, Condition Monitoring, and Diagnosis of Electrical Drives.* Clarendon Press, 1993.

[15] VÁCLAVEK, P., BLAHA, P. Ac induction motor sensorless control using lyapunov function based flux and speed observer implemented on motorola dsp. In *Proceedings of 2004 IEEE Conference on Control Applications*, sv. 2, s. 1744–1750, Taipei, 2004.

[16] CANUDAS DE WIT, C., YOUSSEF, A., BARBOT, J., MARTIN, P., MALRAIT, F. Observability conditions of induction motors at low frequencies. In *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, sv. 3, s. 2044–2049, 2000.

[17] ŠOLC, F., VÁCLAVEK, P., VAVŘÍN, P. *Řízení a regulace II – Analýza a řízení nelineárních systémů.* VUT v Brně, 2004.

ABSTRACT

AC induction machine drives become more and more popular in industrial applications even in areas where DC motors were preferred. Algorithms for control of such drives are well known. To achieve high machine performance the machine mechanical and electrical parameters knowledge is needed and the machine have to be equipped with precise rotor speed sensor. In many applications in which small machines of power up to 1kW are used we deal with the problem that the mechanical sensor price is comparable or even higher than the price of the stand alone machine. The main goal of the work is intelligent algorithms development for AC induction machine control without any speed or position sensor – so called sensorless control. Very important reduction of the drive cost can be achieved by omitting mechanical sensor. The proposed algorithm has been proved in simulation as well as in testing on a real AC induction machine.