

VĚDECKÉ SPISY VYSOKÉHO UČENÍ TECHNICKÉHO V BRNĚ

*Edice PhD Thesis, sv. 456*

*ISSN 1213-4198*

*thesis* IS

*Ing. Jaroslav Vrána*

**Kvadraturní zrcadlové banky filtrů  
se sigma-delta modulátory**

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

FAKULTA ELEKTROTECHNIKY  
A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

Ústav telekomunikací

**Ing. Jaroslav Vrána**

**KVADRATURNÍ ZRCADLOVÉ BANKY FILTRŮ SE  
SIGMA-DELTA MODULÁTORY**

**QUADRATURE MIRROR DIGITAL FILTER BANKS WITH  
SIGMA-DELTA MODULATORS**

Zkrácená verze Ph.D. Thesis

Obor: Teleinformatika

Školitel: prof. Ing. Zdeněk Smékal, CSc.

Oponenti: prof. Ing. Radimír Vrba, CSc.  
prof. Ing. Andrej Lúč, CSc.

Datum obhajoby: 20. 3. 2008

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

Kvadrurní zrcadlová banka číslicových filtrů, vlnková transformace, sigma-delta modulace, tvarování šumu, analýza přenosových funkcí

## **KEY WORDS**

Quadrature mirror digital filter bank, wavelet transform, sigma-delta modulation, noise shaping, transfer function analysis

Disertační práce je uložena na oddělení vědy a výzkumu, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Vysoké učení technické v Brně, Údolní 53, Brno

# OBSAH

ÚVOD.....	5
1 SOUČASNÝ STAV PROBLEMATIKY.....	5
1.1 Dvoukanálové kvadrurní zrcadlové banky číslicových filtrů.....	6
1.2 Přenos zkreslení subpásmových signálů kvadrurní zrcadlovou bankou číslicových filtrů.....	7
1.3 Sigma-delta modulace a sigma-delta modulátor.....	9
1.4 Zobecněný číslicový sigma-delta modulátor.....	9
2 CÍLE DISERTAČNÍ PRÁCE.....	10
3 DVOUKANÁLOVÁ KVADRURNÍ ZRCADLOVÁ BANKA ČÍSLICOVÝCH FILTRŮ SE SIGMA-DELTA MODULÁTORY.....	11
3.1 Zobecněný sigma-delta modulátor s následným podvzorkováním dvěma.....	11
3.2 Obecný návrh dvoukanálové kvadrurní zrcadlové banky číslicových filtrů.....	12
3.3 Příklad návrhu dvoukanálové kvadrurní zrcadlové banky číslicových filtrů.....	17
3.4 Návrh dvoukanálové kvadrurní zrcadlové banky číslicových filtrů pomocí korelace....	18
3.5 Příklad návrhu dvoukanálové kvadrurní zrcadlové banky číslicových filtrů pomocí korelace.....	21
ZÁVĚR.....	25
LITERATURA.....	26



## ÚVOD

Obecně se kvadrurní zrcadlové banky číslicových filtrů používají při číslicovém zpracování signálů. Velmi často jsou používány při zpracování obrazů, kde se používají pro výpočet vlnkové transformace nebo mohou být použity při odstraňování šumu ze zašumělých signálů. Kvadrurní zrcadlové banky číslicových filtrů velmi úzce souvisí s vlnkovou transformací a také se používají pro výpočet vlnkové transformace.

Tato práce se zaměřuje na analýzu ovlivnění signálu průchodem kvadrurní zrcadlovou bankou číslicových filtrů. Pokud je kvadrurní zrcadlová banka číslicových filtrů navržena s perfektní rekonstrukcí, potom výstupní signál z rekonstrukční části kvadrurní zrcadlové banky číslicových filtrů by měl být shodný se vstupním signálem do rozkladové kvadrurní zrcadlové banky číslicových filtrů. Pokud rozložené signály nejsou žádným způsobem změněny, potom jsou oba signály skutečně shodné. Jiná situace nastane, pokud jsou tyto signály jakýmkoliv způsobem pozměněny (zkresleny). Způsobené zkreslení se promítne i do výstupního rekonstruovaného signálu. Zde se nabízí možnost upravit strukturu kvadrurní zrcadlové banky číslicových filtrů tak, aby byla více odolná proti zkreslení subpásmových signálů. V této práci je z tohoto důvodu upravena rozkladová část kvadrurní zrcadlové banky číslicových filtrů tak, že filtry byly nahrazeny zobecněnými sigma-delta modulátory, které mají shodné impulzní charakteristiky jako filtry, které nahrazují. Sigma-delta modulátor má tu vlastnost, že má rozdílnou kmitočtovou charakteristiku pro vstupní signál a pro zkreslující signál. Tím je možné dosáhnout jiného rozložení zkreslujícího signálu ve spektru výstupního signálu. Pro dobře navržené přenosové funkce pro zkreslující signály to může znamenat vyšší výkon kódovacích algoritmů.

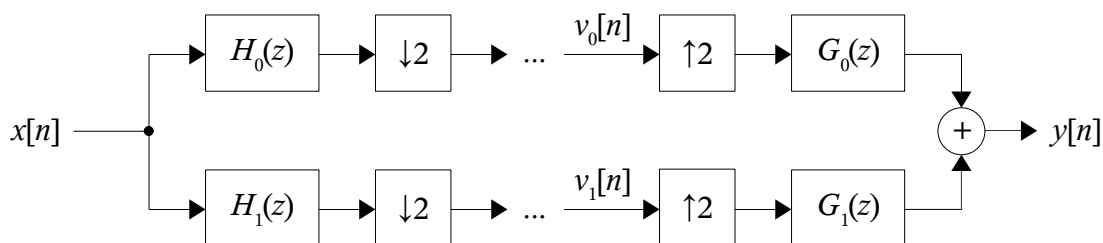
## 1 SOUČASNÝ STAV PROBLEMATIKY

Kvadrurní zrcadlová banka číslicových filtrů je skupina číslicových filtrů, která rozděljuje vstupní signál na několik kmitočtových subpásem a zpětně je skládá do výstupního signálu. Obecně rozkladová kvadrurní zrcadlová banka číslicových filtrů slouží k rozložení signálu na jednotlivá subpásma a rekonstrukční kvadrurní zrcadlová banka číslicových filtrů naopak z jednotlivých subpásem skládá výstupní signál. Základním typem je dvoukanálová kvadrurní zrcadlová banka číslicových filtrů, jejímž výstupem jsou dvě stejně široká subpásma.

Vlastních realizací kvadrurních zrcadlových bank číslicových filtrů je několik. Nejjednodušším typem realizace je výpočet pomocí konvoluce [8, 11], kdy se jedná o výpočet několika filtrů. Další možností realizace banky filtrů je pomocí polyfázových filtrů, [11, 15]. Polyfázové filtry využívá také algoritmus lifting [14] pro výpočet vlnkové transformace, [23]. Podrobný popis jednotlivých metod je v [3]. Žádná ze současných realizací kvadrurních zrcadlových bank číslicových filtrů neobsahuje sigma-delta modulátory. Na jejich použití v kvadrurní zrcadlové bance číslicových filtrů je právě zaměřena tato disertační práce.

## 1.1 DVOUKANÁLOVÉ KVADRATURNÍ ZRCADLOVÉ BANKY ČÍSLICOVÝCH FILTRŮ

Základní struktura rozděluje vstupní signál na dvě kmitočtová subpásma. Blokové schéma typické dvoukanálové kvadraturní zrcadlové banky číslicových filtrů je na obr. 1.1. Skládá se ze dvou částí. Levá polovina blokového schéma obsahuje rozkladovou část a pravá polovina obsahuje rekonstrukční část. V případě dvoukanálové kvadraturní zrcadlové banky číslicových filtrů obsahuje rozkladová část dva filtry. Těmito filtry se vstupní signál rozdělí na signál, který obsahuje pouze nízké kmitočty, a na signál, který obsahuje pouze vysoké kmitočty, a sníží se jejich vzorkovací kmitočet na polovinu, [8]. Při snížení vzorkovacího kmitočtu může nastat, a také obvykle nastává, aliasing. Oba výstupní signály  $v_0[n]$  a  $v_1[n]$  mají poloviční šířku pásma a poloviční vzorkovací kmitočet oproti vstupnímu signálu. S těmito subpásmovými signály se provádí další zpracování. Výstupní signály z rozkladové části po následném zpracování vstupují do rekonstrukční části. Protože oba dva signály mají snížený vzorkovací kmitočet, je nutné nejprve jejich vzorkovací kmitočet zvýšit na původní hodnotu. Protože při nadvzorkování dochází k periodizaci spekter signálů, prochází oba signály filtry, které mají propustné pásmo v požadovaných kmitočtových pásmech. Výsledný signál z rekonstrukční kvadraturní zrcadlové banky číslicových filtrů je součet těchto filtrovaných signálů. Pokud je výstupní signál z kvadraturní zrcadlové banky číslicových filtrů shodný se vstupním signálem, označuje se přívlastkem s perfektní rekonstrukcí, [8, 11]. Samozřejmě kvadraturní zrcadlová banka číslicových filtrů s perfektní rekonstrukcí může zavádět zpoždění mezi vstupním a výstupním signálem.



**Obr. 1.1: Blokové schéma dvoukanálové kvadraturní zrcadlové banky číslicových filtrů**

Vlastní analýza kvadraturní zrcadlové banky číslicových filtrů se provádí pomocí transformace Z, [12]. Pro přenos vstupního signálu dvoukanálovou kvadraturní zrcadlovou bankou číslicových filtrů na její výstup platí vztah (1.1). Z této rovnice vyplývá, že ve výstupním signálu je filtrovaný vstupní signál, ale je zde také filtrovaný vstupní signál se zrcadleným spektrem (aliasing), který je nežádoucí.

$$\begin{aligned}
 Y(z) = & \frac{1}{2} G_0(z) \cdot H_0(z) \cdot X(z) + \frac{1}{2} G_1(z) \cdot H_1(z) \cdot X(z) + \\
 & + \frac{1}{2} G_0(z) \cdot H_0(-z) \cdot X(-z) + \frac{1}{2} G_1(z) \cdot H_1(-z) \cdot X(-z)
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

Aby mohla být dvoukanálová kvadraturní zrcadlová banka číslicových filtrů s perfektní rekonstrukcí, musí být výstupní signál roven vstupnímu signálu. Mohou být pouze vzájemně časově posunuté. Dvoukanálová kvadraturní zrcadlová banka filtrů je s perfektní rekonstrukcí v případě, že splňuje podmínky (1.2) a (1.3), vyplývající z rovnice (1.1). První podmínka vyjadřuje přenos vstupního signálu dvoukanálovou kvadraturní zrcadlovou bankou číslicových filtrů a přiřazuje mu hodnotu dvě libovolně časově posunutou. Druhá podmínka vyjadřuje přenos vstupního signálu se zrcadleným spektrem. Tento signál je na výstupu nežádoucí, a proto je mu přiřazena hodnota 0.

$$G_0(z) \cdot H_0(z) + G_1(z) \cdot H_1(z) = 2z^{-k} \quad (1.2)$$

$$G_0(z) \cdot H_0(-z) + G_1(z) \cdot H_1(-z) = 0 \quad (1.3)$$

Podmínku (1.3) je možné rozepsat do dvou podmínek (1.4) a (1.5), které když jsou splněny, tak je současně splněna podmínka (1.3), [5, 8, 11]. Tyto podmínky vyjadřují situaci, kdy přenosové funkce  $G_0(z)$  a  $H_1(z)$  jsou vzájemně zrcadlové a přenosové funkce  $G_1(z)$  a  $H_0(z)$  jsou také vzájemně zrcadlové, ale navíc ještě mají opačné znaménko.

$$G_0(z) = H_1(-z) \quad (1.4)$$

$$G_1(z) = -H_0(-z) \quad (1.5)$$

Nejjednodušší dvoukanálová kvadraturní zrcadlová banka číslicových filtrů je s přenosovými funkcemi (1.6), (1.7), (1.8) a (1.9), které zároveň splňují podmínky pro ortogonální kvadraturní zrcadlovou banku číslicových filtrů.

$$H_0(z) = \sqrt{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} z^{-1} \right) \quad (1.6)$$

$$H_1(z) = \sqrt{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} z^{-1} \right) \quad (1.7)$$

$$G_0(z) = \sqrt{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} z^{-1} \right) \quad (1.8)$$

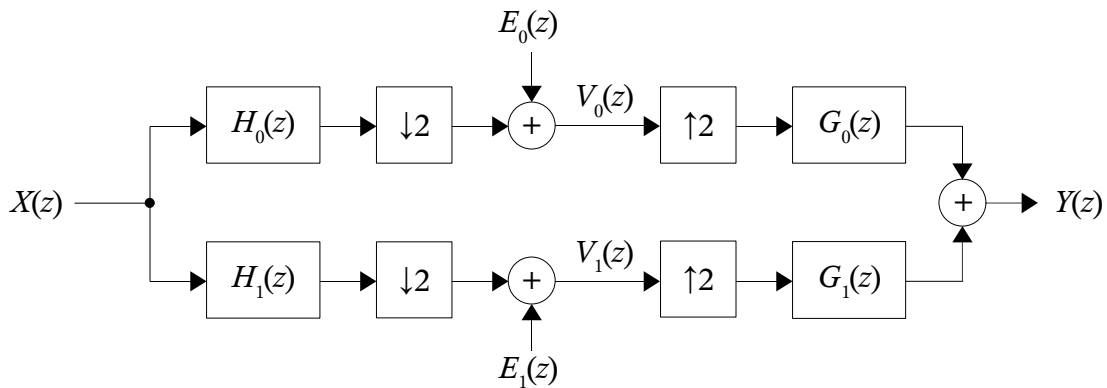
$$G_1(z) = \sqrt{2} \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} z^{-1} \right) \quad (1.9)$$

## 1.2 PŘENOS ZKRESLENÍ SUBPÁSMOVÝCH SIGNÁLŮ KVADRATURNÍ ZRCADLOVOU BANKOU ČÍSLICOVÝCH FILTRŮ

V předchozích kapitole se uvažuje, že rekonstrukční část kvadraturní zrcadlové banky číslicových filtrů je přímo napojena na rozkladovou část kvadraturní zrcadlové banky číslicových filtrů. Prakticky mezi rozkladovou částí a rekonstrukční částí se subpásmové signály nějakým způsobem zpracovávají. Jejich zpracování



může tyto signály ovlivnit, a tím do těchto signálů zavést zkreslení. Tuto situaci vystihuje model na obr. 1.2, kde zkreslení subpásmových signálů je vyjádřeno jako přičtení chybových signálů  $E_m(z)$  k jednotlivým subpásmovým signálům. Tyto chybové signály se také přenášejí do výstupního signálu.



**Obr. 1.2: Blokové schéma dvoukanálové kvadrurní zrcadlové banky číslicových filtrů**

Při předpokladu, že se jedná o dvoukanálovou kvadrurní banku číslicových filtrů s perfektní rekonstrukcí, je možné využít podmínky (1.2) a (1.3), které musí splňovat, aby mohla být s perfektní rekonstrukcí. Po jejich zahrnutí je výstupní signál dán vztahem (1.10). Z něj vyplývá, že výstupní signál je shodný se vstupním, pouze časově posunutý, ale navíc jsou k němu přičteny chybové signály, u kterých je zvýšen vzorkovací kmitočet na dvojnásobek, a následně jsou filtrovány pomocí filtrů v rekonstrukční části.

$$Y(z) = z^{-k} \cdot X(z) + G_0(z) \cdot E_0(z^2) + G_1(z) \cdot E_1(z^2) \quad (1.10)$$

$$E_m(z^2) = \frac{1}{2} E'_m(z) + \frac{1}{2} E'_m(-z) \quad (1.11)$$

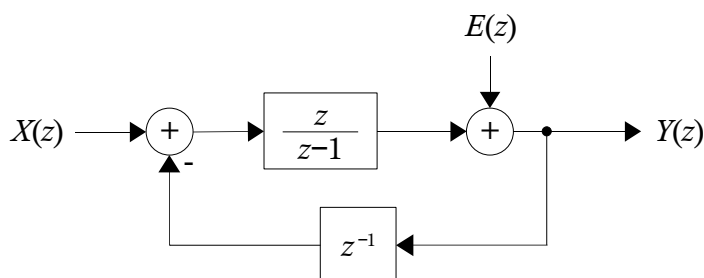
Pokud se vezme v úvahu, že signály  $E_m(z^2)$  je možné přepsat na tvar (1.11), potom je možné výstupní signál z (1.10) přepsat do tvaru (1.12). Zde již vystupují čtyři chybové signály, které vždy po dvojicích mají zrcadlové spektrum. Z toho vyplývá, že do výstupního signálu se vždy dostanou obě poloviny spektra chybových signálů. Pro dolní propust v rekonstrukční části  $G_0(z)$  se část chybového signálu  $E'_0(z)$  s nízkými kmitočty dostane na výstup pomocí druhého členu v rovnici (1.12) a část téhož chybového signálu s vysokými kmitočty se dostane na výstup pomocí třetího členu v rovnici (1.12). Obdobně to platí i pro horní propust  $G_1(z)$  a čtvrtý a pátý člen v rovnici (1.12).

$$Y(z) = z^{-k} \cdot X(z) + \frac{1}{2} G_0(z) \cdot E'_0(z) + \frac{1}{2} G_0(z) \cdot E'_0(-z) + \frac{1}{2} G_1(z) \cdot E'_1(z) + \frac{1}{2} G_1(z) \cdot E'_1(-z) \quad (1.12)$$

### 1.3 SIGMA-DELTA MODULACE A SIGMA-DELTA MODULÁTOR

Sigma-delta modulace a modulátory, označované i  $\Sigma$ - $\Delta$ , jsou známé především z oblasti převodu analogových signálů na číslicové a naopak a jejich první představení bylo v roce 1962, [1, 4, 6, 9]. Oproti jiným převodníkům se převodníky založené na sigma-delta modulaci vyznačují tím, že potřebují minimum přesných součástek a jejich převodní charakteristika je monotónní, [13, 21]. Velkou výhodou sigma-delta modulátoru je, že kvantovací šum, který vzniká ve kvantovači, se nerozloží rovnoměrně přes celé spektrum výstupního signálu, nýbrž šum je tvarován tak, že ve spektru v oblasti nízkých kmitočtů se téměř nevyskytuje a většina výkonu kvantovacího šumu je v oblasti vysokých kmitočtů. Proto je možné kvantovat na nižší počet bitů při zachování stejné velikosti kvantovacího šumu v pásmu užitečných signálů. Zbylou část kvantovacího šumu mimo pásmo užitečného signálu je možné odstranit následnou filtrací dolní propustí.

Sigma-delta modulátor nemusí být použit jenom pro konverzi mezi analogovými a číslicovými signály, ale může být realizován celý číslicově, [1, 6, 9]. Blokové schéma jeho lineárního modelu je na obr. 1.3, [1, 6, 9]. Pro zjednodušení je kvantovač nahrazen součtovým členem, který k užitečnému signálu přičítá kvantovací šum, [1, 6, 9]. Velikost kvantovacího šumu se určí statisticky z počtu bitů kvantovače, [6, 8].



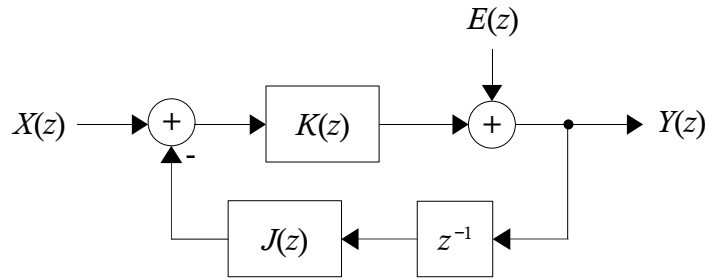
Obr. 1.3: Lineární model číslicového sigma-delta modulátoru

Výstupní signál je vyjádřen pomocí vztahu (1.13). Tento vztah vyjadřuje přenos vstupního signálu  $X(z)$  a přenos kvantovacího šumu  $E(z)$  číslicovým sigma-delta modulátorem. Vstupní signál  $X(z)$  prochází sigma-delta modulátorem bez ovlivnění, ale kvantovací šum  $E(z)$  je tvarován horní propustí tak, že v oblasti nízkých kmitočtů se téměř nevyskytuje, ale vyskytuje se z velké části v oblasti vysokých kmitočtů.

$$Y(z) = X(z) + E(z) \cdot (1 - z^{-1}) \quad (1.13)$$

### 1.4 ZOBECNĚNÝ ČÍSLICOVÝ SIGMA-DELTA MODULÁTOR

Do této chvíle byl uvažován sigma-delta modulátor, který má jednotkový přenos pro vstupní signál a konkrétní přenos pro kvantovací šum, obecně chybový signál. Pokud je třeba, aby sigma-delta modulátor měl jiné přenosové vlastnosti, je možné použít zobecněný sigma-delta modulátor, jehož lineární model je na obr. 1.4. Toto blokové schéma bylo inspirováno [1, 24].



Obr. 1.4: Lineární model zobecněného číslicového sigma-delta modulátoru

Zobecnění sigma-delta modulátoru spočívá v nahrazení číslicového integrátoru blokem s obecnou přenosovou funkcí  $K(z)$  a vložení bloku s obecnou přenosovou funkcí  $J(z)$  do zpětné vazby, ostatní části zůstávají zachovány. Volbou těchto dvou přenosových funkcí je možné měnit jak přenos vstupního signálu  $X(z)$ , tak i přenos chybového signálu  $E(z)$ . Výstupní signál  $Y(z)$  je vyjádřen vztahem (1.14), ze kterého vyplývá, že je možné přenosy obou signálů ovlivňovat a jakým způsobem jsou spřáženy.

$$Y(z) = X(z) \cdot \frac{K(z)}{1 + z^{-1} \cdot J(z) \cdot K(z)} + E(z) \cdot \frac{1}{1 + z^{-1} \cdot J(z) \cdot K(z)} \quad (1.14)$$

Pokud jsou přenosové funkce  $K(z)$  a  $J(z)$  vypočteny pomocí vztahů (1.15) a (1.16), potom má zobecněný sigma-delta modulátor přenosovou funkci  $H(z)$  pro vstupní signál  $X(z)$  a přenosovou funkci  $F(z)$  pro chybový signál  $E(z)$ .

$$K(z) = \frac{H(z)}{F(z)} \quad (1.15)$$

$$J(z) = \frac{K(z) - H(z)}{z^{-1} \cdot H(z) \cdot K(z)} \quad (1.16)$$

## 2 CÍLE DISERTAČNÍ PRÁCE

Cílem disertační práce je zpracovat metodiku návrhu sigma-delta modulátoru tak, aby nahrazoval filtry v rozkladové části dvoukanálové kvadrurní zrcadlové banky číslicových filtrů s následným podvzorkováním dvěma. Pro návrh je důležité, aby byly zachovány impulsní charakteristiky původních filtrů a vložené chybové signály (zkreslení) se nevkládaly rovnoměrně do celého spektra, ale jenom do jeho určité části. Při shodné impulsní charakteristice filtru je možné realizovat sigma-delta modulátor s různými tvary přenosové charakteristiky chybového signálu. A právě na návrhu přenosových charakteristik chybových signálů závisí schopnost dvoukanálové kvadrurní zrcadlové banky číslicových filtrů více potlačovat zkreslení jednotlivých subpásmových signálů oproti klasické realizaci dvoukanálové kvadrurní zrcadlové banky číslicových filtrů.

Cílem disertační práce je:

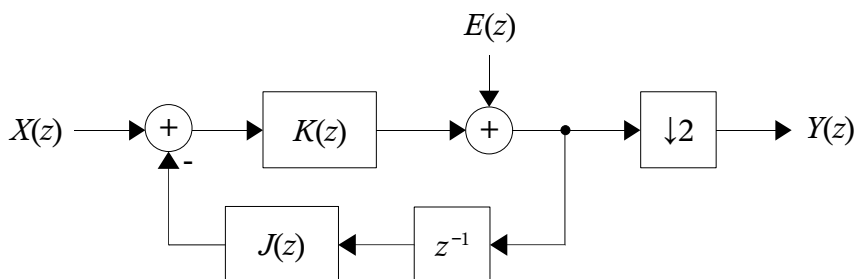
- Analyzovat zobecněný sigma-delta modulátor s následným podvzorkováním dvěma
- Implementovat zobecněný sigma-delta modulátor do dvoukanálové kvadrurní zrcadlové banky číslicových filtrů a analyzovat tuto strukturu
- Vytvořit metodu návrhu dvoukanálové kvadrurní zrcadlové banky číslicových filtrů se sigma-delta modulátory
- Metodu návrhu ověřit na konkrétní dvoukanálové kvadrurní zrcadlové bance číslicových filtrů

### 3 DVOUKANÁLOVÁ KVADRURNÍ ZRCADLOVÁ BANKA ČÍSLICOVÝCH FILTRŮ SE SIGMA-DELTA MODULÁTORY

Sigma-delta modulátor s obecným přenosem signálu, popsany v kapitole 1.4, je možné využít pro vytvoření dvoukanálové kvadrurní zrcadlové banky číslicových filtrů, [7, 16]. Výhoda nahrazení filtrů v rozkladové části pomocí sigma-delta modulátorů je v tom, že lépe potlačuje zkreslení subpásmových signálů. Například při subpásmovém kódování se mohou jednotlivé koeficienty ukládat s nižším počtem bitů a tím zavádět do signálů další kvantovací šum, který se následně potlačí.

#### 3.1 ZOBECNĚNÝ SIGMA-DELTA MODULÁTOR S NÁSLEDNÝM PODVZORKOVÁNÍM DVĚMA

Zvláštním případem pro realizaci sigma-delta modulátoru je sigma-delta modulátor, za kterým následuje blok snižování vzorkovacího kmitočtu. V případě snižování vzorkovacího kmitočtu na polovinu je situace zobrazena na obr. 3.1. Matematicky je možné tuto situaci popsat pomocí vztahu (3.1), ve kterém je ještě využito vztahu pro vyjádření změny vzorkovacího kmitočtu. Spektrum výstupního signálu je tedy dáno součtem filtrovaného vstupního spektra a filtrovaného spektra chybového signálu. Dále se zde objeví zrcadlová spektra obou signálů vzniklé právě díky změně vzorkovacího kmitočtu.



Obr. 3.1: Lineární model zobecněného číslicového sigma-delta modulátoru s následným snížením vzorkovacího kmitočtu na polovinu

$$Y(z) = \frac{1}{2} X(z^{\frac{1}{2}}) \cdot H(z^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2} X(-z^{\frac{1}{2}}) \cdot H(-z^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2} E(z^{\frac{1}{2}}) \cdot F(z^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2} E(-z^{\frac{1}{2}}) \cdot F(-z^{\frac{1}{2}}) \quad (3.1)$$

Protože na výstup sigma-delta modulátoru je připojen blok snižování vzorkovacího kmitočtu dvěma, je každý druhý vzorek výstupního signálu vynechán. Proto je možné uvažovat, že vzorky, které se vynechají, nejsou ovlivněny chybovým signálem. Takový chybový signál po průchodu sigma-delta modulátorem obsahuje každý druhý vzorek nulový. Tato situace nastane v případě, že vlastní chybový signál  $E(z)$  vstupující do sigma-delta modulátoru obsahuje každý druhý vzorek nulový a zároveň impulzní charakteristika přenosové funkce  $F(z)$  obsahuje každý druhý vzorek nulový. Tyto situace lze proto zapsat ekvivalentními výrazy (3.2) a (3.3). Pokud je možné chybový signál  $E(z)$  zapsat pomocí ekvivalentu (3.2), potom to znamená, že spektrum tohoto chybového signálu je symetrické kolem čtvrtiny vzorkovacího kmitočtu. Tatáž symetrie platí i pro přenosovou funkci  $F(z)$ , pokud ji je možné zapsat pomocí ekvivalentu (3.3).

$$E(z) = \frac{1}{2} E'(z^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2} E'(-z^{\frac{1}{2}}) \quad (3.2)$$

$$F(z) = \frac{1}{2} F'(z^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2} F'(-z^{\frac{1}{2}}) \quad (3.3)$$

Pokud existují ekvivalenty (3.2) a (3.3) je možné výstupní signál vypočítat pomocí vztahu (3.4), který je jednodušší než vztah (3.1), a vyplývá z něj, že ve spektru výstupního signálu se objeví i zrcadlové spektrum filtrovaného vstupního signálu, ale zrcadlové spektrum chybového signálu se zde již neuplatní. Pokud tyto ekvivalenty neexistují, snížením vzorkovacího kmitočtu se spektrum chybového signálu symetrizuje kolem čtvrtiny původního vzorkovacího kmitočtu, ale vlastní návrh přenosové funkce  $F(z)$  je komplikovanější.

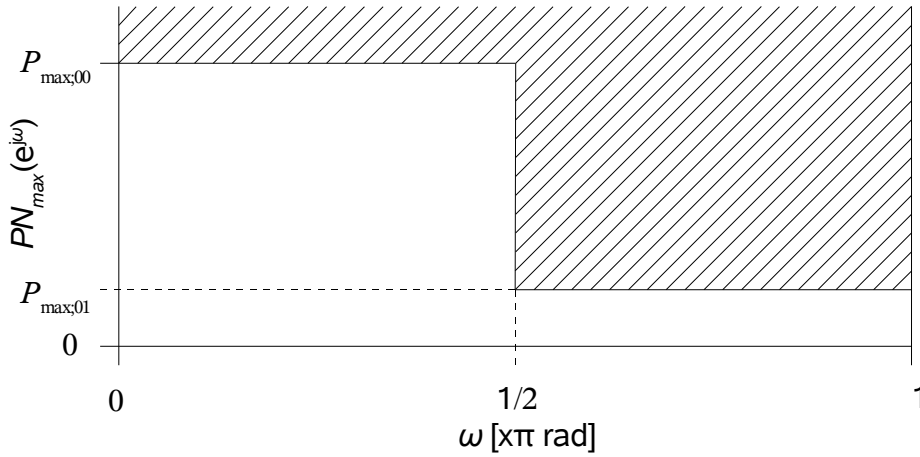
$$Y(z) = \frac{1}{2} X(z^{\frac{1}{2}}) \cdot H(z^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2} X(-z^{\frac{1}{2}}) \cdot H(-z^{\frac{1}{2}}) + E(z^{\frac{1}{2}}) \cdot F(z^{\frac{1}{2}}) \quad (3.4)$$

Pokud přenosová funkce  $F(z)$  splňuje podmínku (3.3), znamená to, že každý druhý vzorek impulzní odezvy je nulový, a proto se nemůže jednat o přenosovou funkci s libovolnými koeficienty. Ale tatáž přenosová funkce se sníženým vzorkovacím kmitočtem na polovinu již může být libovolná kauzální a stabilní přenosová funkce. Protože se jedná pouze o reálné signály, musí přenosová funkce se sníženým vzorkovacím kmitočtem obsahovat nulové body a póly buď ryze reálné, nebo dvojice navzájem komplexně sdružené, [3, 8].

### 3.2 OBECNÝ NÁVRH DVOUKANÁLOVÉ KVADRATURNÍ ZRCADLOVÉ BANKY ČÍSLICOVÝCH FILTRŮ

Pro obecný návrh dvoukanálové kvadraturní zrcadlové banky číslicových filtrů se sigma-delta modulátory je potřeba získat pravidla pro její návrh, [19, 20, 22]. Pro tento návrh je rozhodující výkon šumu vloženého do užitečného signálu. Obecně se

předpokládá, že v každém subpásmu je jiný výkon šumu. Toleranční pole pro výkonový přenos šumu z obou subpásem do výstupního signálu je na obr. 3.2. Zde je znázorněn případ, kdy je větší výkon šumu v oblasti nízkých kmitočtů. V opačném případě bude toleranční pole pouze zrcadlově převrácené, ale na vlastních výpočtech se nic nezmění.



**Obr. 3.2: Toleranční pole pro výkonový přenos šumových signálů dvoukanálovou kvadrurní zrcadlovou bankou číslicových filtrů**

Aby bylo možné nějakým způsobem optimalizovat výkonové přenosové funkce šumových signálů  $PN(e^{j\omega})$ , je nejprve nutné je vyjádřit. Výkonová přenosová funkce se v případě dvoukanálové kvadrurní zrcadlové banky číslicových filtrů skládá ze dvou částí  $PN_m(e^{j\omega})$ , kde každá část odpovídá jedné větvi. Obecně je výkonová přenosová funkce dána vztahem (3.5), [2, 10], a po dosazení přenosových funkcí také vztahem (3.6), kde  $\lambda_m$  značí efektivní hodnotu šumového signálu v dané větvi.

$$PN(e^{j\omega}) = PN_0(e^{j\omega}) + PN_1(e^{j\omega}) \quad (3.5)$$

$$PN(e^{j\omega}) = \lambda_0^2 \cdot |F_0(e^{j\omega}) \cdot G_0(e^{j\omega})|^2 + \lambda_1^2 \cdot |F_1(e^{j\omega}) \cdot G_1(e^{j\omega})|^2 \quad (3.6)$$

Všechny přenosové funkce v tomto vztahu mohou obsahovat nulové body a póly, proto je možné tento vztah přepsat pomocí nulových bodů a pólů na tvar (3.7), kde  $z_{nm;i}$  vyjadřuje  $i$ -tý nulový bod přenosové funkce číslo  $m$  a  $z_{pm;i}$  vyjadřuje  $i$ -tý pól přenosové funkce číslo  $m$ , [17].

$$PN(e^{j\omega}) = \lambda_0^2 \cdot |G_0(e^{j\omega})|^2 \cdot \frac{\prod_{i=1}^{N_0} |e^{j\omega} - z_{n0;i}|^2}{\prod_{i=1}^{M_0} |e^{j\omega} - z_{p0;i}|^2} + \lambda_1^2 \cdot |G_1(e^{j\omega})|^2 \cdot \frac{\prod_{i=1}^{N_1} |e^{j\omega} - z_{n1;i}|^2}{\prod_{i=1}^{M_1} |e^{j\omega} - z_{p1;i}|^2} \quad (3.7)$$

Tento, na první pohled relativně složitý, zápis je možné přepsat díky identitě (3.8), která platí pro čistě reálný nulový bod nebo pól, [17].

$$I_1(e^{j\omega}, z_0) = |e^{j\omega} - z_0|^2 = (z_0 - \cos(\omega))^2 + \sin^2(\omega) = z_0^2 + 1 - 2z_0 \cos(\omega) \quad (3.8)$$

Pro dvojici komplexně sdružených nulových bodů nebo pólů platí identita (3.9), kde  $\Re$  značí reálnou část komplexní proměnné a  $\Im$  značí imaginární část komplexní proměnné.

$$I_2(e^{j\omega}, z_0) = |e^{j\omega} - z_0|^2 \cdot |e^{j\omega} - z_0^*|^2 = \left[ (\Re(z_0) - \cos(\omega))^2 + (\Im(z_0) - \sin(\omega))^2 \right] \cdot \left[ (\Re(z_0) - \cos(\omega))^2 + (\Im(z_0) + \sin(\omega))^2 \right] \quad (3.9)$$

Třetí identita je pro čtveřici nulových bodů nebo pólů, které jsou vzájemně symetrické jak podle reálné osy, tak i podle imaginární osy. Tato identita je vztah (3.10). Tato identita se využije v kvadrurní zrcadlové bance číslicových filtrů s podvzorkováním dvěma.

$$I_4(e^{j\omega}, z_0) = |e^{j\omega} - z_0|^2 \cdot |e^{j\omega} - z_0^*|^2 \cdot |e^{j\omega} + z_0|^2 \cdot |e^{j\omega} + z_0^*|^2 = \left[ (\Re(z_0) - \cos(\omega))^2 + (\Im(z_0) - \sin(\omega))^2 \right] \cdot \left[ (\Re(z_0) - \cos(\omega))^2 + (\Im(z_0) + \sin(\omega))^2 \right] \cdot \left[ (\Re(z_0) + \cos(\omega))^2 + (\Im(z_0) - \sin(\omega))^2 \right] \cdot \left[ (\Re(z_0) + \cos(\omega))^2 + (\Im(z_0) + \sin(\omega))^2 \right] \quad (3.10)$$

Pro doplnění je možné definovat ještě dvě identity, které vyjadřují přenosovou funkci pro dvojici nulových bodů nebo pólů, které jsou ryze reálné nebo ryze imaginární. První (3.11) je pro dvojici ryze imaginárních nulových bodů nebo pólů a druhá identita (3.12) je pro dvojici ryze reálných kořenů symetrických podle imaginární osy.

$$I_{2i}(e^{j\omega}, z_0) = |e^{j\omega} - z_0|^2 \cdot |e^{j\omega} - z_0^*|^2 = \left[ \cos(\omega)^2 + (\Im(z_0) - \sin(\omega))^2 \right] \cdot \left[ \cos(\omega)^2 + (\Im(z_0) + \sin(\omega))^2 \right] \quad (3.11)$$

$$I_{2r}(e^{j\omega}, z_0) = |e^{j\omega} - z_0|^2 \cdot |e^{j\omega} + z_0|^2 = \left[ (\Re(z_0) - \cos(\omega))^2 + \sin(\omega)^2 \right] \cdot \left[ (\Re(z_0) + \cos(\omega))^2 + \sin(\omega)^2 \right] \quad (3.12)$$

Pomocí těchto pěti identit je možné vztah (3.7) přepsat na tvar (3.13), kde  $x$  je číslo použité identity, to znamená 1 pro jednoduchý reálný kořen, 2 pro dvojici komplexně sdružených kořenů nebo dvojici reálných kořenů, 4 pro čtveřici kořenů symetrických podle reálné i podle imaginární osy a  $2i$  nebo  $2r$  pro dvojici ryze imaginárních nebo ryze reálných kořenů.

$$PN(e^{j\omega}) = \lambda_0^2 \cdot |G_0(e^{j\omega})|^2 \cdot \frac{\prod_{i=1}^{N_0} I_x(e^{j\omega}, z_{n0;i})}{\prod_{i=1}^{M_0} I_x(e^{j\omega}, z_{p0;i})} + \lambda_1^2 \cdot |G_1(e^{j\omega})|^2 \cdot \frac{\prod_{i=1}^{N_1} I_x(e^{j\omega}, z_{n1;i})}{\prod_{i=1}^{M_1} I_x(e^{j\omega}, z_{p1;i})} \quad (3.13)$$

Vlastní návrh spočívá ve volbě počtu funkcí  $I_x(e^{j\omega}, z_0)$  jak v čitateli, tak ve jmenovateli přenosové funkce a dále vhodné volbě kořenů  $z_0$ . Vztahy pro jejich volbu jsou (3.14) a (3.15), které jsou odvozeny ze vztahu (3.13). První ze vztahů je pro pásmo nízkých kmitočtů a druhý pro pásmo vysokých kmitočtů. Jak může normovaná maximální přenosová funkce  $PN_{\max;m}(e^{j\omega})$  vypadat, je zobrazeno na obr. 3.3. Zde je zobrazena situace pro dolní propust prvního řádu s Haarovou vlnkou a pravoúhlo maximální přenosovou funkcí s parametry  $PN_{\max;00} = 2$  a  $PN_{\max;01} = 0,5$ . Protože dochází v kvadrurní zrcadlové bance číslicových filtrů ke změně vzorkovacího kmitočtu, potom musí být jednotlivé použité identity symetrické podle čtvrtiny vzorkovacího kmitočtu. Díky této symetrii je možné situaci ještě zjednodušit a původní normovanou maximální přenosovou funkcí zrcadlit podle čtvrtiny vzorkovacího kmitočtu a následně z původní a zrcadlené normované maximální přenosové funkce vzít v úvahu tu s nižší funkční hodnotou. Zrcadlená normovaná přenosová funkce je také na obr. 3.3. Vlastní navržená výkonová přenosová funkce šumu pro tento případ nesmí přesáhnout tuto křivku.

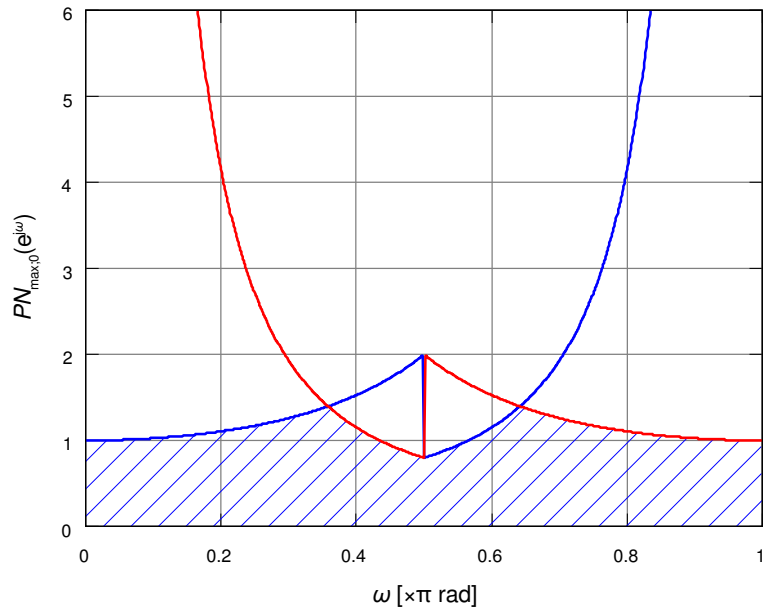
$$\frac{\prod_{i=1}^{N_0} I_x(e^{j\omega}, z_{n0;i})}{\prod_{i=1}^{M_0} I_x(e^{j\omega}, z_{p0;i})} \leq \frac{PN_{\max}(e^{j\omega}) - \lambda_1^2 \cdot |G_1(e^{j\omega})|^2 \cdot \frac{\prod_{i=1}^{N_1} I_x(e^{j\omega}, z_{n1;i})}{\prod_{i=1}^{M_1} I_x(e^{j\omega}, z_{p1;i})}}{\lambda_0^2 \cdot |G_0(e^{j\omega})|^2} = PN_{\max;0}(e^{j\omega}) \quad (3.14)$$

$$\frac{\prod_{i=1}^{N_1} I_x(e^{j\omega}, z_{n1;i})}{\prod_{i=1}^{M_1} I_x(e^{j\omega}, z_{p1;i})} \leq \frac{PN_{\max}(e^{j\omega}) - \lambda_0^2 \cdot |G_0(e^{j\omega})|^2 \cdot \frac{\prod_{i=1}^{N_0} I_x(e^{j\omega}, z_{n0;i})}{\prod_{i=1}^{M_0} I_x(e^{j\omega}, z_{p0;i})}}{\lambda_1^2 \cdot |G_1(e^{j\omega})|^2} = PN_{\max;1}(e^{j\omega}) \quad (3.15)$$

Dalším postupem při návrhu výkonové přenosové funkce šumu je volba jednotlivých funkcí  $I_x(e^{j\omega}, z)$ . Protože každá tato funkce ovlivní výkonovou přenosovou funkcí šumu v celém kmitočtovém pásmu, kromě několika málo bodů, je vhodnější navrhovat tyto funkce po dvojicích. V jedné dvojici je jedna funkce v čitateli a jedna ve jmenovateli a tím se zajistí, že podíl těchto dvou funkcí bude v jedné oblasti téměř konstantní a ve zbylé části bude mít zvlnění. Tyto funkce vzniknou kombinací různých identit, které již byly popsány. Součinem těchto dvojic potom vznikne výsledná výkonová přenosová funkce šumu.

Volba prvních funkcí  $I_x(e^{j\omega}, z)$  do dvojice vychází z tvaru normované maximální přenosové funkce  $PN_{\max;m}(e^{j\omega})$ . Vhodnější je nejprve uvažovat větev kvadrurní zrcadlové banky číslicových filtrů s větším koeficientem  $\lambda_m$ . Pro volbu čitatele je směrodatný kmitočet minima přenosové funkce a k němu se vybere jedno z lokálních maxim. Podle jejich konkrétních poloh se zvolí identita. Volba jednotlivých identit je shrnuta v tab. 3.1 a v tab. 3.2.





**Obr. 3.3: Příklad kmitočtové charakteristiky normované maximální přenosové funkce v kvadrurní zrcadlové bance číslicových filtrů se změnou vzorkovacího kmitočtu**

*Tab. 3.1: Tabulka dvojic identit pro různé polohy extrémů výkonové přenosové funkce v kvadrurní zrcadlové bance číslicových filtrů beze změny vzorkovacího kmitočtu*

podíl identit	kmitočty minima [rad]	kmitočty maxima [rad]	kmitočty jednotkového přenosu [rad]
$\frac{I_1(e^{j\omega}, z_1)}{I_2(e^{j\omega}, z_2)}$	0 nebo $\pi$	libovolný	$\pi$ nebo 0
$\frac{I_2(e^{j\omega}, z_1)}{I_1(e^{j\omega}, z_2)}$	libovolný	0 nebo $\pi$	$\pi$ nebo 0
$\frac{I_2(e^{j\omega}, z_1)}{I_2(e^{j\omega}, z_2)}$	libovolný	libovolný	libovolný

Pro vhodně zvolené dvojice funkcí je dále nutné zvolit jejich kořeny. Jejich volba závisí na konkrétní poloze maxima a minima požadované přenosové funkce a také na jejich velikosti. Návrh vychází z požadavku jednotkového přenosu pro konkrétní kmitočty. Zde musí být funkční hodnoty obou funkcí z dvojice sobě rovny. Tímto požadavkem vznikne vztah mezi polohou maxima a minima a tím také vztah mezi kořenem čitatele a kořenem jmenovatele. Pro každou dvojici funkcí se volba konkrétních kořenů liší.

Tab. 3.2: Tabulka dvojic identit pro různé polohy extrémů výkonové přenosové funkce v kvadraturní zrcadlové bance číslicových filtrů se změnou vzorkovacího kmitočtu

podíl identit	kmitočet minima [rad]	kmitočet maxima [rad]	kmitočet jednotkového přenosu [rad]
$\frac{I_{2r}(e^{j\omega}, z_1)}{I_{2i}(e^{j\omega}, z_2)}$	0 a $\pi$	$\pi/2$	pevně daný
$\frac{I_{2r}(e^{j\omega}, z_1)}{I_4(e^{j\omega}, z_2)}$	0 a $\pi$	libovolný	$\pi/2$
$\frac{I_{2i}(e^{j\omega}, z_1)}{I_{2r}(e^{j\omega}, z_2)}$	$\pi/2$	0 a $\pi$	pevně daný
$\frac{I_{2i}(e^{j\omega}, z_1)}{I_4(e^{j\omega}, z_2)}$	$\pi/2$	libovolný	0 a $\pi$
$\frac{I_4(e^{j\omega}, z_1)}{I_{2r}(e^{j\omega}, z_2)}$	libovolný	0 a $\pi$	$\pi/2$
$\frac{I_4(e^{j\omega}, z_1)}{I_{2i}(e^{j\omega}, z_2)}$	libovolný	$\pi/2$	0 a $\pi$
$\frac{I_4(e^{j\omega}, z_1)}{I_4(e^{j\omega}, z_2)}$	libovolný	libovolný	libovolný

### 3.3 PŘÍKLAD NÁVRHU DVOUKANÁLOVÉ KVADRATURNÍ ZRCADLOVÉ BANKY ČÍSLICOVÝCH FILTRŮ

Pro ukázkou návrhu dvoukanálové kvadraturní zrcadlové banky číslicových filtrů byla zvolena dvojice dvoukanálových kvadraturních zrcadlových bank číslicových filtrů s impulzními charakteristikami (1.6), (1.7), (1.8) a (1.9) pro ortogonální vlnkovou transformaci. Požadavky na maximální výkonový přenos šumových signálů do výstupního signálu a výkony šumu v jednotlivých subpásmech pro první kvadraturní zrcadlovou banku filtrů byly zvoleny (3.16), (3.17), (3.18) a (3.19).

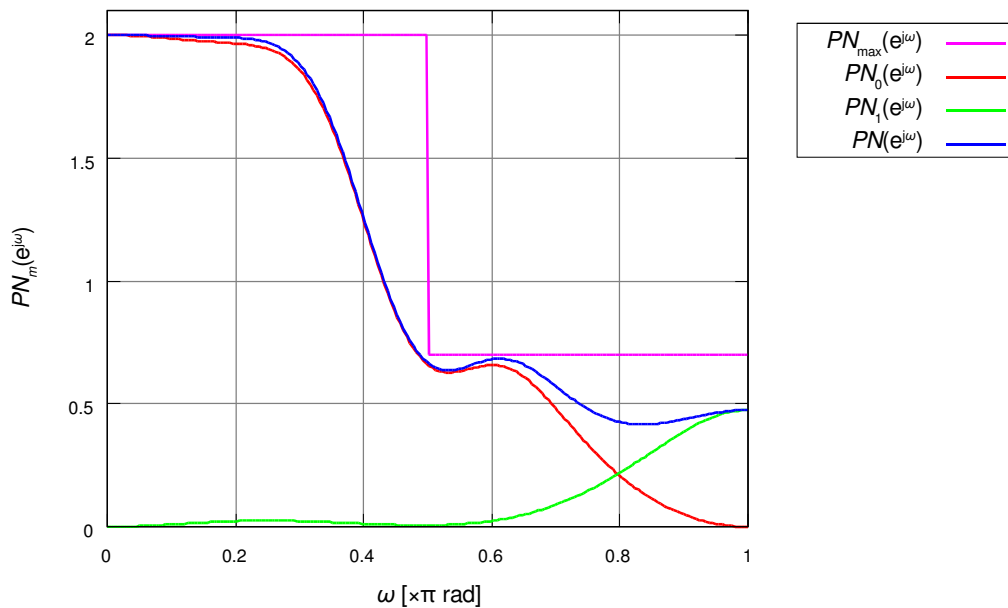
$$\lambda_0 = 1 \quad (3.16)$$

$$\lambda_1 = 0,25 \quad (3.17)$$

$$PN_{\max;0} = 2 \quad (3.18)$$

$$PN_{\max;1} = 0,7 \quad (3.19)$$

Po třech krocích návrhu jsou výsledné přenosové charakteristiky na obr. 3.4. Z něj je také vidět, že navržená přenosová funkce se nachází v zadaném tolerančním poli a návrh je správný.



Obr. 3.4: Navržené výkonové přenosy šumových signálů podle zadání (3.16), (3.17), (3.18) a (3.19)

### 3.4 NÁVRH DVOUKANÁLOVÉ KVADRURNÍ ZRCADLOVÉ BANKY ČÍSLICOVÝCH FILTRŮ POMOCÍ KORELACE

Návrh pomocí dvojic identit je vhodný spíše pro ruční návrh dvoukanalové kvadrurní zrcadlové banky číslicových filtrů. Z tohoto důvodu byla vypracována ještě jedna metoda, která je více vhodná pro počítačový návrh. Pro návrh by bylo vhodné najít takovou matematickou operaci, ze které by bylo možné určit směr posunutí nulového bodu nebo pólu funkce tak, aby pokud možno co největší část funkce klesla. Změny funkce v závislosti na poloze nulových bodů nebo pólů vyjadřuje její derivace. Proto stačí najít takovou funkci, která vyjadřuje míru podobnosti mezi chybou minimalizované funkce a derivacemi minimalizované funkce podle polohy jednotlivých nulových bodů nebo pólů. Touto funkcí je korelační funkce, [10]. A na této matematické funkci je založena následující návrhová metoda, [18].

První předpoklad je, že jsou zvoleny vhodné identity v hledaných výkonových přenosových funkcích  $|F_0(z)|^2$  a  $|F_1(z)|^2$  a počáteční polohy všech jejich kořenů. Dále ještě musí být zvoleny konstanty  $\lambda_0$  a  $\lambda_1$ , které vyjadřují velikost šumu v jednotlivých větvích. Z těchto zvolených hodnot je možné vypočítat podle vztahu (3.7) výkonovou přenosovou funkci pro šumy z obou větví. Pro další výpočet je důležitá míra překročení požadované maximální výkonové přenosové funkce  $PN_{\max}(e^{j\omega})$ . Tato míra  $\Delta PN(e^{j\omega})$  je dána vztahem (3.20). Ve výsledku by měla funkce  $\Delta PN(e^{j\omega})$  být záporná nebo rovna nule. Rozhodně nesmí být kladná.

$$\Delta PN(e^{j\omega}) = PN(e^{j\omega}) - PN_{\max}(e^{j\omega}) \quad (3.20)$$

V dalším kroku je třeba posunout kořeny identit tak, aby nastalo snížení funkce  $\Delta PN(e^{j\omega})$  pokud možno v co nejširší kmitočtové oblasti, případně aby v co nejužší kmitočtové oblasti narostla jen minimálně. Obecně změny funkce v konkrétním bodě a v závislosti na konkrétní proměnné vyjadřuje derivace funkce. Proto by se měly kořeny identit posunout takovým směrem, kde derivace výkonové přenosové funkce šumu je nejvíce podobná funkci  $\Delta PN(e^{j\omega})$ . Pro jejich porovnání se použije korelace s nulovým vzájemným posunutím jednotlivých korelovaných funkcí. Matematicky je situace zapsána vztahem (3.21), kde index  $a$  značí konkrétní pól nebo nulový bod přenosové charakteristiky  $PN(e^{j\omega})$ .

$$R_a(0) = \int \Delta PN(e^{j\omega}) \cdot \frac{\partial P(e^{j\omega})}{\partial z_a} d\omega \quad (3.21)$$

V základní navržené metodě se tento výpočet provede pro všechny kořeny všech identit. Tím se pro každý kořen získá míra podobnosti odpovídající identity k rozdílové funkci  $\Delta PN(e^{j\omega})$  a podle něj se upraví kořen identity, zjednodušeně matematicky popsáno pomocí (3.22), kde horní index neznačí mocninu, ale pořadí iterace, a  $\mu$  určuje velikost iteračního kroku, a pokračuje se novým výpočtem výkonové přenosové funkce šumu podle vztahu (3.7). Výpočet se opakuje do té doby, dokud není celá funkce  $\Delta PN(e^{j\omega})$  záporná nebo rovna nule. To indikuje stav nalezení požadovaného rozložení pólů a nulových bodů ve výkonové přenosové funkci šumu. Proměnná  $S$  je míra podobnosti mezi funkcí  $\Delta PN(e^{j\omega})$  a parciálními derivacemi funkce  $PN(e^{j\omega})$  a její přesný význam je popsán dále v textu. V této proměnné je skrytá korelace ze vztahu (3.21).

$$z_a^{n+1} = z_a^n - \mu_a^n \cdot S_a^n \quad (3.22)$$

Pro vlastní výpočet jsou nutné první derivace identit. Obecně je možné derivace výkonové přenosové funkce podle polohy jednotlivých nulových bodů a pólů vyjádřit vztahy (3.23) pro nulový bod a (3.24) pro pól. Vždy se jedná pouze o derivaci jedné identity násobenou ostatními nederivovanými identitami a přenosovou funkcí v rekonstrukční části dané větve  $m$ .

$$\frac{\partial PN(e^{j\omega})}{\partial z_{ny;i}} = \lambda_m^2 \cdot |G_m(e^{j\omega})|^2 \cdot \frac{\prod_{k=1, k \neq i}^{N_0} I_x(z_{ny;k})}{\prod_{k=1}^{M_0} I_x(z_{py;k})} \cdot \frac{\partial I_x(z_{ny;i})}{\partial z_{ny;i}} \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial PN(e^{j\omega})}{\partial z_{py;i}} = \lambda_m^2 \cdot |G_m(e^{j\omega})|^2 \cdot \frac{\prod_{k=1}^{N_0} I_x(z_{ny;k})}{\prod_{k=1, k \neq i}^{M_0} I_x(z_{py;k})} \cdot \frac{-1}{I_x(z_{py;i})^2} \cdot \frac{\partial I_x(z_{py;i})}{\partial z_{py;i}} \quad (3.24)$$

Pro funkci navrženého algoritmu je potřeba také určit míru podobnosti mezi rozdílovou funkcí  $\Delta PN(e^{j\omega})$  a derivací identity. Základem pro její určení je korelační koeficient  $r$  vypočtený podle vztahu (3.25), [10, 25]. Jedná se o vzájemnou korelaci ze vztahu (3.21), která je podělena součinem směrodatných odchylek funkcí

(efektivních hodnot) a doplněna váhovou funkcí  $W(\omega)$ . Hodnota 1 korelačního koeficientu znamená shodnost signálů, co se týče tvaru, hodnota 0 znamená naprostou odlišnost signálů a hodnota  $-1$  opět znamená shodnost signálů, ale s tím, že jeden se signálů je třeba invertovat. Vlastní váhová funkce je definována vztahem (3.26). Tato váhová funkce je zavedena z důvodu, aby se v korelačním koeficientu uvažovala pouze ta část rozdílové funkce  $\Delta PN(e^{j\omega})$ , která je kladná a tudíž je potřebné ji potlačit. Díky váhové funkci se záporná část rozdílové funkce  $\Delta PN(e^{j\omega})$  nebere v úvahu.

$$r_a = \frac{\int \Delta PN(e^{j\omega}) \cdot \frac{\partial PN(e^{j\omega})}{\partial z_a} \cdot W(\omega) d\omega}{\sqrt{\int \Delta PN(e^{j\omega})^2 \cdot W(\omega)^2 d\omega} \cdot \sqrt{\int \left( \frac{\partial PN(e^{j\omega})}{\partial z_a} \right)^2 W(\omega)^2 d\omega}} \quad (3.25)$$

$$W(\omega) = \{ \Delta PN(e^{j\omega}) > 0 \} \quad (3.26)$$

Bohužel korelační koeficient přímo neudává podíl prvního signálu v druhém. Sice čím je její velikost větší, tím jsou si více podobné, ale tato závislost není lineární. Z tohoto důvodu je zavedena míra podobnosti  $S_{xy}$ , která přímo udává podíl prvního signálu v druhém. Výsledný vztah pro výpočet míry podobnosti z korelačního koeficientu  $r_{xy}$  je (3.27).

$$S_{xy} = \frac{r_{xy} \cdot |r_{xy}| - r_{xy} \cdot \sqrt{1 - r_{xy}^2}}{2r_{xy}^2 - 1} \quad (3.27)$$

Nyní jsou známé všechny proměnné ve vztahu (3.22), kromě iterační konstanty  $\mu$ . Při praktické realizaci tohoto algoritmu se ukázalo, že není vhodné, aby konstanta  $\mu$  nebyla konstantou, ale proměnnou, která se v každém iteračním kroku mění. Pokud by zůstala konstantou, tak se iterační krok postupně snižuje s tím, jak se snižuje míra podobnosti  $S$ . Obecně by snižování nebylo na závalu, ale ukazuje se, že toto snižování je mnohem rychlejší, než blížení se ke správnému řešení. Proto byla proměnná  $\mu$  definována vztahem (3.28). V jeho čitateli je konstanta  $\mu_0$ , která určuje velikost iteračního kroku a v jeho jmenovateli je modul míry podobnosti  $S$  náležící jednomu kořenu, ale podobnosti s parciální derivací podle reálné části kořene  $S_r$  a s parciální derivací podle imaginární části kořene  $S_i$ . Prakticky to znamená, že každý kořen se v každém iteračním kroku posune o konstantu  $\mu_0$ , ale jeho směr v komplexní rovině závisí na míře podobnosti  $S$  parciálních derivací s funkcí  $\Delta PN(e^{j\omega})$ .

$$\mu = \frac{\mu_0}{\sqrt{S_{r,a}^2 + S_{i,b}^2}} \quad (3.28)$$

Při dalších testech se objevil další problém, který silně zpomaluje přibližování se ke správnému řešení, [18]. Tím je vzájemná korelovanost jednotlivých parciálních derivací. To znamená, že jednotlivé parciální derivace si mohou být do jisté míry podobné. Jejich podobnost má za následek, že směry změn poloh jednotlivých

kořenů náhle mění svůj směr v prakticky každé iteraci a nepohybují se ustáleným směrem ke správnému řešení. Jeví se to jako kmitání kořenů kolem ustálených poloh, které se pomalu přesouvají směrem ke správnému řešení. Možným řešením je odstranit „kmitání“ změn polohy v jednotlivých iteračních krocích. Pro jeho odstranění stačí použít jednoduchou kumulační techniku s exponenciálním oknem, [3]. Tato metoda se použije na všechny vypočtené míry podobnosti  $S$ . Její výpočet je dán vztahem (3.29). Zde opět horní index neznámá mocninu, ale pořadí iteračního kroku, a koeficient  $\alpha$  určuje konkrétní tvar exponenciálního okna a tím i míru odstranění „kmitání“ z trajektorií jednotlivých kořenů identit během iteračního procesu.

$$S_a^n = \alpha \cdot S_a^n + (1 - \alpha) \cdot S_a^{n-1} \quad (3.29)$$

Poslední úpravou musela projít volba funkce  $PN_{\max}(e^{j\omega})$ . Původně navržený algoritmus s výše uvedenými úpravami již konverguje ke správnému řešení, ale bohužel blíží se k této hranici shora a čím více se blíží, tím je váhová funkce  $W(\omega)$  jednotková v menším intervalu a také to ovlivňuje schopnost iteračního algoritmu konvergovat. Tento nedostatek lze napravit zavedením další přenosové funkce  $PN'_{\max}(e^{j\omega})$ , která je přísnější než přenosové funkce  $PN_{\max}(e^{j\omega})$ . Také je vhodné v okolí nespojitostí přenosové funkce  $PN_{\max}(e^{j\omega})$ , případně v okolí vysokých derivací této funkce, přenosovou funkci  $PN'_{\max}(e^{j\omega})$  ještě více zpřísnit. Tímto způsobem se konvergence metody zřetelně zlepšuje. Konečné blokové schéma algoritmu je na obr. 3.5.

$$\Delta PN'(e^{j\omega}) = PN(e^{j\omega}) - PN'_{\max}(e^{j\omega}) \quad (3.30)$$

### 3.5 PŘÍKLAD NÁVRHU DVOUKANÁLOVÉ KVADRATURNÍ ZRCADLOVÉ BANKY ČÍSLICOVÝCH FILTRŮ POMOCÍ KORELACE

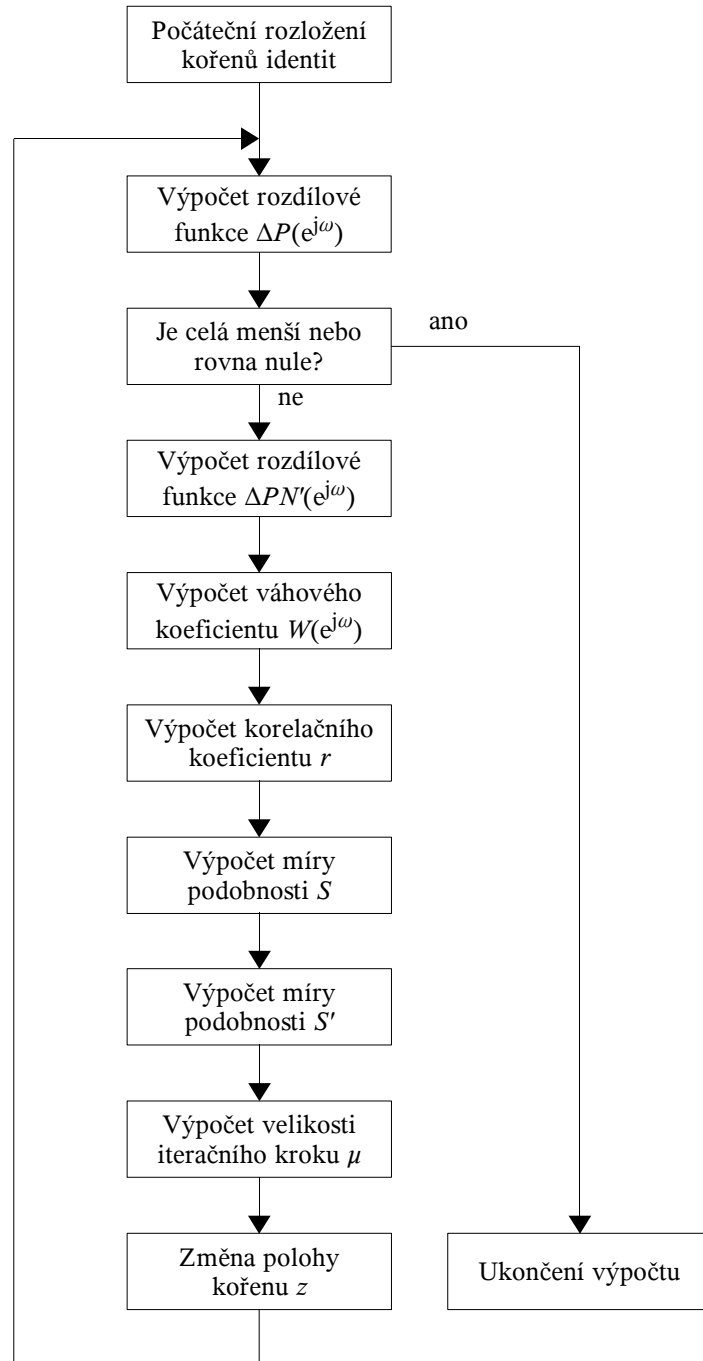
Pro ukázkou návrhu dvoukanálové kvadrurní zrcadlové banky číslicových filtrů pomocí korelace byly zvoleny stejné kvadrurní zrcadlové banky číslicových filtrů jako v kapitole 3.3. Jednotlivé konstanty návrhové metody byly experimentálně určeny a jako vhodné se jeví (3.31) a (3.32).

$$\alpha = 0,5 \quad (3.31)$$

$$\mu = 0,005 \quad (3.32)$$

První z navrhovaných kvadrurních zrcadlových bank číslicových filtrů je s impulzními charakteristikami (1.6), (1.7), (1.8) a (1.9) a s požadavky na maximální výkonový přenos šumových signálů do výstupního signálu a výkony šumu v jednotlivých subpásmech (3.16), (3.17), (3.18) a (3.19). Jedná se o stejné zadání jako v kapitole 3.3. Pro tuto metodu je nutné zvolit počáteční polohy kořenů identit. Počáteční přenosová funkce pro šumové signály byla zvolena (3.33). Zvolená přenosová funkce nespĺňuje požadované podmínky.

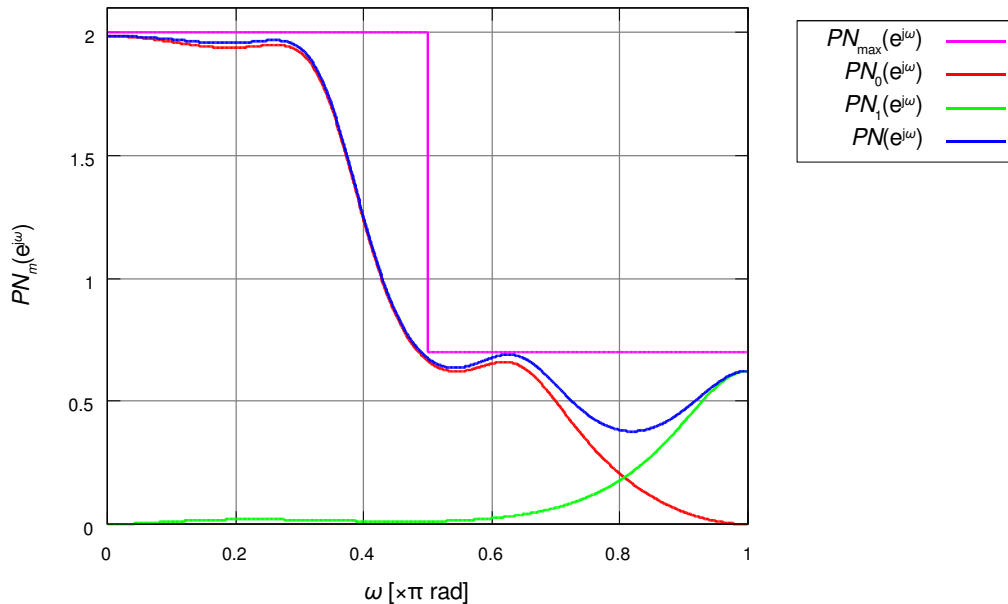
$$\begin{aligned}
 PN(e^{j\omega}) = & \lambda_0^2 \cdot |G_0(e^{j\omega})|^2 \cdot \frac{I_{2i}(e^{j\omega}, 0,5j) \cdot I_4(e^{j\omega}, 0,1+0,6j)}{I_4(e^{j\omega}, 0,3+0,4j) \cdot I_{2i}(e^{j\omega}, 0,2j)} + \\
 & + \lambda_1^2 \cdot |G_1(e^{j\omega})|^2 \cdot \frac{I_{2i}(e^{j\omega}, 0,3j)}{I_{2r}(e^{j\omega}, 0,3)}
 \end{aligned}
 \tag{3.33}$$



Obr. 3.5: Konečné blokové schéma iteračního algoritmu pro minimalizaci funkce  $\Delta PN(e^{j\omega})$

Z těchto zvolených podmínek navržený algoritmus upravil polohy kořenů tak, aby byly splněny požadované podmínky. Výsledná přenosová funkce je dána vztahem (3.34) a její průběh je zobrazen na obr. 3.6. Toto řešení bylo nalezeno po 207 krocích algoritmu.

$$PN(e^{j\omega}) = \lambda_0^2 \cdot |G_0(e^{j\omega})|^2 \cdot \frac{I_{2i}(e^{j\omega}, 0,42500 j) \cdot I_4(e^{j\omega}, 0,16853 + 0,52306 j)}{I_4(e^{j\omega}, 0,29264 + 0,62002 j) \cdot I_{2i}(e^{j\omega}, 0,17500 j)} + \lambda_1^2 \cdot |G_1(e^{j\omega})|^2 \cdot \frac{I_{2i}(e^{j\omega}, 0,64500 j)}{I_{2r}(e^{j\omega}, 0,60500)} \quad (3.34)$$



**Obr. 3.6: Výkonové přenosy šumových signálů podle zadání (3.16), (3.17), (3.18) a (3.19) pro nalezené rozložení kořenů identit**

Pro kvadrurní zrcadlovou banku číslicových filtrů s impulzními charakteristikami (1.6), (1.7), (1.8) a (1.9) jsou navržené přenosové funkce pro šumové signály dány vztahy (3.35) a (3.36). Z těchto vztahů byly vypočteny přenosové funkce  $K_m(z)$  a  $J_m(z)$  pro sigma-delta modulátory podle vztahů (1.15) a (1.16) a jsou dány vztahy (3.37), (3.38), (3.39) a (3.40). Zobecněné sigma-delta modulátory s takto zvolenými přenosovými funkcemi mi jsou kauzální a tudíž prakticky realizovatelné.

$$F_0(z) = \frac{(z - 0,42500 j) \cdot (z + 0,42500 j) \cdot (z - 0,16853 + 0,52306 j)}{(z - 0,17500 j) \cdot (z + 0,17500 j) \cdot (z - 0,29264 + 0,62002 j)} \cdot \frac{(z - 0,16853 - 0,52306 j) \cdot (z + 0,16853 - 0,52306 j) \cdot (z + 0,16853 + 0,52306 j)}{(z - 0,29264 - 0,62002 j) \cdot (z + 0,29264 - 0,62002 j) \cdot (z + 0,29264 + 0,62002 j)} \quad (3.35)$$

$$F_1(z) = \frac{(z - 0,64500 j) \cdot (z + 0,64500 j)}{(z - 0,60500) \cdot (z + 0,60500)} \quad (3.36)$$



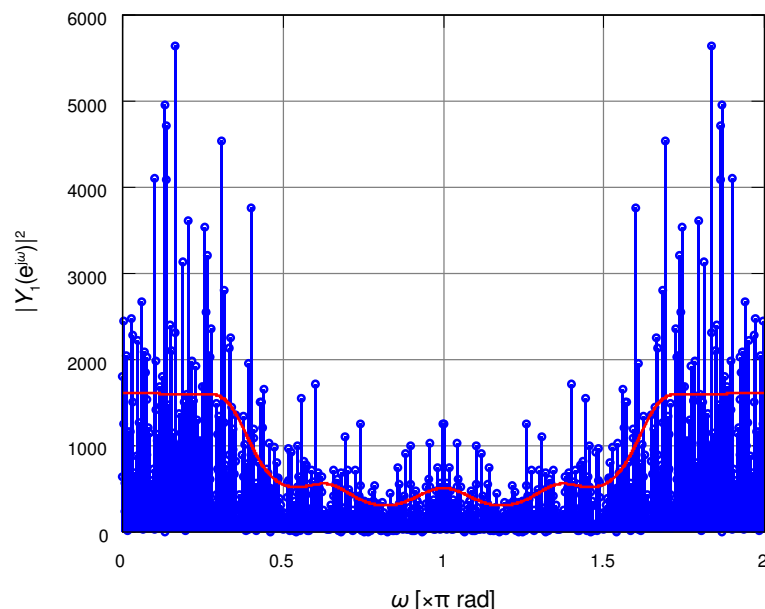
$$K_0(z) = \frac{0,7071068 + 0,7071068 z^{-1} + 0,4442033 z^{-2} + 0,4442033 z^{-3} + 1 + 0,67100 z^{-2} + 0,17978 z^{-4} + 0,001647 z^{-6} + 0,1691823 z^{-4} + 0,1691823 z^{-5} + 0,0047849 z^{-6} + 0,0047849 z^{-7}}{\quad} \quad (3.37)$$

$$J_0(z) = \frac{-0,042806 z^{-1} + 0,059485 z^{-3} - 0,009706 z^{-5}}{0,7071068 + 0,7071068 z^{-1} + 0,4442033 z^{-2} + 0,4442033 z^{-3} + 0,1691823 z^{-4} + 0,1691823 z^{-5} + 0,0047849 z^{-6} + 0,0047849 z^{-7}} \quad (3.38)$$

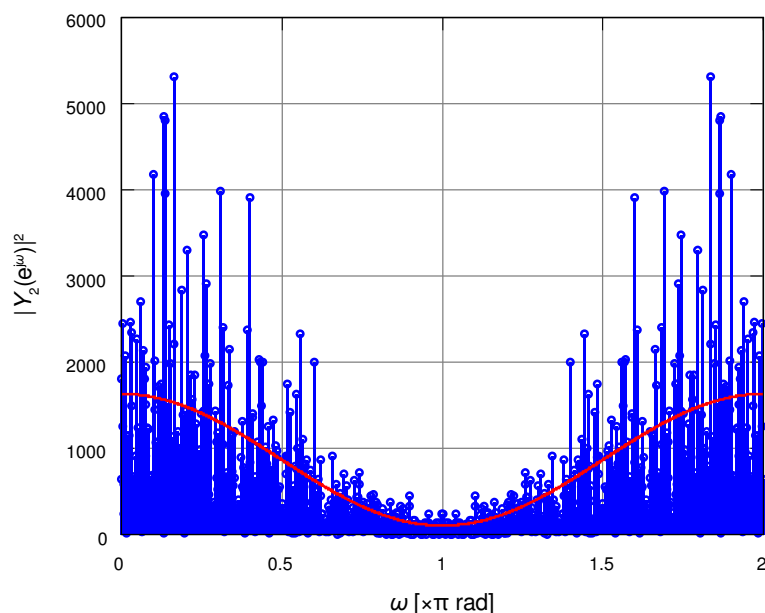
$$K_1(z) = \frac{0,70711 - 0,70711 z^{-1} - 0,25882 z^{-2} + 0,25882 z^{-3}}{1 + 0,41603 z^{-2}} \quad (3.39)$$

$$J_1(z) = \frac{-0,78205 z^{-1}}{0,70711 - 0,70711 z^{-1} - 0,25882 z^{-2} + 0,25882 z^{-3}} \quad (3.40)$$

Pro takto realizovanou kvadraturní zrcadlovou banku číslicových filtrů byl použit jako vstupní signál součet dvou harmonických kmitočtů. První s amplitudou 1 a kmitočtem  $\pi/256$  a druhý s amplitudou 0,5 a kmitočtem  $7\pi/8$ . Šumové signály byly generovány jako bílý šum. Výstupní signál z kvadraturní zrcadlové banky číslicových filtrů  $Y_1(z)$  bez harmonických složek je na obr. 3.7. Jedná se o tvarovaný šumový signál. Výkonová přenosová funkce pro šumové signály je zobrazena červeně. Pro porovnání je ještě na obr. 3.8 zobrazen výstupní signál  $Y_2(z)$  z klasické realizace kvadraturní zrcadlové banky číslicových filtrů také se zakreslením výkonové přenosové funkce pro šumové signály červenou čarou.



**Obr. 3.7: Spektrum výstupního signálu z kvadraturní zrcadlové banky číslicových filtrů se sigma-delta modulátory bez harmonických složek**



**Obr. 3.8: Spektrum výstupního signálu z klasické kvadraturní zrcadlové banky číslicových filtrů bez harmonických složek**

## ZÁVĚR

Autorova myšlenka využití sigma-delta modulátoru v kvadraturních zrcadlových bankách číslicových filtrů je další možností její realizace. Tato myšlenka vznikla při absolvování přednášek prof. Ing. Radimíra Vrby, CSc. doktorského předmětu Vzájemný převod analogových a digitálních signálů. Její výhodou je ve tvarování šumu, který se přičítá k subpásmovým signálům. Právě tvarování šumu je způsobeno sigma-delta modulátorem. V této struktuře je možné přenos přičteného šumu k subpásmovým signálům volit.

Aby mohla být využita struktura kvadraturní zrcadlové banky číslicových filtrů se sigma-delta modulátory, je nutné ji správně navrhnout. Pro návrh výkonových přenosových funkcí šumových signálů byly vytvořeny dvě metody. První z nich je použitelná pro ruční návrh. Při návrhu se postupně vybírá z předem vypočtených identit a určují se k nim parametry. Další metoda byla vyvinuta za účelem počítačového návrhu. Jedná se o iterační metodu, kde směr změny polohy jednotlivých kořenů určují právě korelace rozdílových funkcí s derivacemi jim odpovídajících identit. Pro tuto metodu je nutný počáteční odhad kořenů všech identit a pomocí této metody se pouze zpřesňují polohy kořenů. Tato metoda má ještě výhodou v tom, že celkem jednoduše navrhuje výkonové přenosové funkce šumů pro téměř libovolně zadané toleranční pole, nejen pro pravoúhlé.

Funkčnost obou návrhových metod i vlastní kvadraturní zrcadlové banky číslicových filtrů se sigma-delta modulátory je demonstrována na příkladu. Obě návrhové metody jsou pro tento příklad použitelné a navržené kvadraturní zrcadlové banky číslicových filtrů se sigma-delta modulátory splňují zadané požadavky.

## LITERATURA

- [1] HÁZE, J., VRBA, R., FUJCIK, L., SAJDL, O.: Teorie vzájemného převodu analogového a číslicového signálu, elektronické skriptum VUT v Brně, Brno, FEKT VUT, 2000
- [2] HSU, HWEI, P.: Probability, Random Variables, and random processes, McGraw-Hill Companies, Inc., United States of America, 1997, ISBN 0-07-030644-3
- [3] JAN, J.: Číslicová filtrace, analýza a restaurace signálů, VUT Brno, 1997, ISBN 80-214-0816-2
- [4] JARMAN, D.: A Brief Introduction to Sigma Delta Conversion, Application Note AN9504, Intersil, May 1995, <http://www.intersil.com/data/an/AN9504.pdf>, dostupné 15.2.2005
- [5] NGUYEN, T., Q.: A Tutorial on Filter Banks and Wavelets, University of Wisconsin, ECE Department, <http://citeseer.ist.psu.edu/nguyen95tutorial.html>, dostupné 11.1.2007
- [6] PARK, S.: Principles of sigma-delta modulation for analog-to-digital converters, Motorola Application Notes APR8, 1999
- [7] SMÉKAL, Z. a kol.: Non-linear Methods of Speech Enhancement, Projekt COST, No. OC277.002, Brno, The European Cooperation in Scientific and Technical Research, 2004, s. 1-107
- [8] SMÉKAL, Z., VÍCH, R.: Číslicové filtry, Academia, Praha, 2000, ISBN 80-200-0761-X
- [9] STEWART, R., W., HOFFMAN, M., W.: Digital Signal Processing An „A“ to „Z“, BlueBox Multimedia, R. W. Stewart, 1998
- [10] ŠEBESTA, V.: Systémy, procesy a signály I, skriptum VUT v Brně, VUTIUM, Brno, 2001, ISBN 80-214-1925-3
- [11] VAIDYANATHAN, P. P.: Multirate Systems and Filter Banks, Prentice hall P T R, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993, ISBN 0-13-605718-7
- [12] VÍCH, R.: Transformace Z a některá její použití, SNTL, Praha, 1979
- [13] VRÁNA, J., BERKA, P., HUCZALA, M.: Realizace číslicově analogového převodníku pomocí sigma-delta modulace, Elektrevue - Internetový časopis (<http://www.elektrevue.cz>), 2005, roč. 2005, č. 1, s. 1-9, ISSN 1213-1539
- [14] VRÁNA, J., ČERMÁK, J., ZEZULA, R.: Výpočet vlnkové transformace pomocí algoritmu "lifting", Elektrevue - Internetový časopis (<http://www.elektrevue.cz>), 2004, č. 34, s. 1-11, ISSN 1213-1539
- [15] VRÁNA, J., FILKA, M.: The Lossless Compression by Polyphase Filtering, In Electronics ET'2005. Sofia, TU-Sofia, 2006, s. 31-36, ISBN 9544385177

- [16] VRÁNA, J., LUKL, T.: Dual Channel Quadrature Mirror Filter Bank Containing Sigma-Delta Modulators, In XLI International Scientific Conference on Information, Communication and Energy Systems and Technologier, Sofie, Bulharsko, KING Ltd., 2006, s. 136-139, ISBN 978-954-9518-37-5
- [17] VRÁNA, J.: Analysis of Transfer Functions in Quadrature Mirror Filter Bank with Sigma-Delta Modulators In Telecommunications and Signal Processing TSP – 2007, Telecommunications and Signal Processing TSP – 2007, Brno: SEI-UTKO, 2007, s. 59-62, ISBN 978-80-214-3445-5
- [18] VRÁNA, J.: Design of Unconventional Quadrature Mirror Filter Bank by Using Correlation, Speech processing In 17<sup>th</sup> Czech-German Workshop Speech Processing, Prague: UFE, 2007
- [19] VRÁNA, J.: Quadrature Mirror Filter Bank and Sigma-Delta Modulation, In Proceedings of the 12th conference Student EEICT 2006, Brno, Ing. Zdeněk Novotný CSc., 2006. s. 346-350, ISBN 80-214-3163-6
- [20] VRÁNA, J.: Quadrature Mirror Filter Bank with Noise Shaping, In TRANSCOM 2007, 7-th European Conference of Young Research and Science Workers, Žilina, EIDS – Žilina University Publisher, 2007, s. 211-214, ISBN 978-80-8070-694-4
- [21] VRÁNA, J.: Simple D/A Converter with Microcontroller, In Proceedings of the 11th conference Student EEICT 2005, Brno, 2005, s. 472-476, ISBN 80-214-2890-2
- [22] VRÁNA, J.: Unconventional Structure of Filter Bank, In POSTER 2006, Praha, ČVUT Praha, 2006, s. 1-3
- [23] VRÁNA, J.: Using the wavelet transform in lossless data compression, In Telecommunications and signal processing TSP - 2005, Brno, VUT Brno, 2005, s. 70-73, ISBN 80-214-2972-0
- [24] VRBA, R.: Interní studijní materiály doktorského předmětu Vzájemný převod analogových a digitálních signálů
- [25] WEISSTEIN, E., W.: "Correlation Coefficient." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/CorrelationCoefficient.html>, dostupné 23.2.2007

## CURRICULUM VITAE

Jméno: Ing. Jaroslav Vrána  
Narozen: 28. dubna 1979 v Ledči nad Sázavou  
Kontakt: xvrana02@stud.feec.vutbr.cz

### Vzdělání

- 2003 – dosud VUT v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, postgraduální doktorské studium, obor Teleinformatika. Téma disertační práce Kvadrurní zrcadlové banky filtrů se sigma-delta modulátory.
- 1998 – 2003 VUT v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, obor Elektronika a sdělovací technika. Státní závěrečná zkouška s vyznamenáním, cena děkana za diplomovou práci, téma diplomové práce Metoda komprese zvukových signálů pomocí vlnkové transformace.
- 1996 – 1998 Integrovaná střední škola elektrotechnická – centrum odborné přípravy v Pardubicích, obor Provozní elektrotechnika. Maturitní zkouška s vyznamenáním.
- 1997 Výuční list holandské elektrotechnické asociace VEV International EMIE – první montér průmyslové elektroniky.
- 1996 Výuční list holandské elektrotechnické asociace VEV International MIE – montér průmyslové elektroniky.
- 1993 – 1996 Střední odborné učiliště elektrotechnické v Pardubicích, obor Elektrikář – slaboproud. Výuční list. Závěrečná zkouška s vyznamenáním.
- 1985 – 1993 Základní škola ve Světlé nad Sázavou.

### Praxe

- 2006 – dosud AŽD Praha s.r.o., Žirovnická 2/3146, 106 17 Praha 10  
Samostatný vývojový pracovník, Správce linuxového serveru

### Účast na řešení projektů

- 2005 Bezeztrátová komprese dat pomocí vlnkové transformace, IS1534

2005	Zavedení předmětu Číslicové zpracování signálů do výuky studijního programu Telekomunikační a informační technika, IS985
2006	Inovace a multimediální podpora výuky předmětu zaměřeného na počítače a programování, IS3169
2004 – 2006	Zvýrazňování řečového signálu zamaskovaného v šumu, GA102/04/1097
2004 – 2005	Non-linear Methods of Speech Enhancement, OC 277
2005 – 2007	Sofistikované potlačovače hluku a poruch při přenosu řečových signálů pro pevné a mobilní sítě nové generace, 1ET301710509
2007	Nelineární metody zvýrazňování řeči, GA102/07/1303

### **Odborný životopis**

Ing. Jaroslav Vrána vystudoval Fakultu elektrotechniky a komunikačních technologií VUT v Brně. Na téže fakultě na Ústavu telekomunikací studoval postgraduální doktorské studium v prezenční formě. Podílel se na výuce kurzů *Analýza signálů a soustav*, *Číslicové zpracování signálů* a *Počítače a programování 2* bakalářského studijního programu Teleinformatika. Po třech letech doktorského studia změnil formu studia na studium kombinované a zároveň nastoupil do firmy AŽD Praha s.r.o. jako samostatný vývojový pracovník. V současné době se zabývá programováním mikrokontrolerů pro účely mobilních částí železničních zabezpečovacích zařízení a dále se věnuje implementaci číslicových systémů v zabezpečovacích zařízeních a prokazováním jejich bezpečnosti. Také je správcem lokálního linuxového serveru.

## ABSTRAKT

Disertační práce je zaměřena na zpracování reálných číslicových signálů pomocí kvadrurních zrcadlových bank číslicových filtrů. V první části je stručně popsána dvoukanálová kvadrurní zrcadlová banka číslicových filtrů. Hlavně jsou popsány přenosové funkce pro zkreslené subpásmové signály. V další části je popsán zobecněný sigma-delta modulátor a jeho lineární model. Tento zobecněný sigma-delta modulátor je následně použit v rozkladové části kvadrurní zrcadlové banky číslicových filtrů. Navržená struktura je matematicky analyzována. Na základě výsledků analýzy jsou navrženy dvě metody pro návrh přenosových funkcí pro tuto strukturu. První metoda je vhodná pro ruční návrh pomocí intuitivního rozložení pólů a nul. Druhá metoda je vhodnější pro počítačový návrh. Jedná se o iterativní metodu založenou na korelaci. Součástí práce jsou ukázky návrhu přenosových funkcí pro jednoduchou kvadrurní zrcadlovou banku číslicových filtrů se sigma-delta modulátory. Použití navržené struktury kvadrurní zrcadlové banky číslicových filtrů může vést k větším kompresním poměrům při ztrátové kompresi dat.

## ABSTRACT

Dissertation thesis is focused on real digital signal processing by quadrature mirror digital filter banks. In the first part a dual channel quadrature mirror digital filter bank is described briefly. Mainly transfer functions for distorted subband signals are described. In the next part generalized sigma-delta modulator and its linear model are described. Subsequently the generalized sigma-delta modulator is used in decomposition part of quadrature mirror digital filter bank. Designed structure is analyzed. Two design method of transfer functions are designed for the structure on the basis of analysis results. The first method is suitable for hand-made design by intuitive distribution of zeros and poles. The second method is more suitable for computer design. It is iterative method based on correlation. Transfer functions for quadrature mirror digital filter bank with sigma-delta modulators design examples are also part of thesis. Application of designed structure of quadrature mirror digital filter bank can lead to bigger compression ration in lossy data compression.