

VĚDECKÉ SPISY VYSOKÉHO UČENÍ TECHNICKÉHO V BRNĚ

Edice Habilitační a inaugurační spisy, sv. 196

ISSN 1213-418X

Jiří Burša

**VÝPOČTOVÉ MODELOVÁNÍ
PROBLÉMŮ MECHANIKY ŽIVÝCH
A NEŽIVÝCH TĚLES
Z KOMPOZITNÍCH MATERIÁLŮ
UMOŽŇUJÍCÍCH VELKÉ DEFORMACE**

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

Ing. Jiří Burša, Ph.D.

**Výpočtové modelování problémů
mechaniky živých a neživých těles
z kompozitních materiálů
umožňujících velké deformace**

**COMPUTATIONAL MODELLING IN MECHANICS
OF LIVING AND NON-LIVING BODIES
OF COMPOSITE MATERIALS
SHOWING LARGE DEFORMATIONS**

Zkrácená verze habilitační práce



BRNO 2006

KLÍČOVÁ SLOVA

výpočtové modelování, měkké tkáně, vláknový kompozit, velké deformace

KEYWORDS

computational modelling, soft tissues, fibre composite, large strain

MÍSTO ULOŽENÍ PRÁCE

Oddělení pro vědu a výzkum Fakulty strojního inženýrství Vysokého učení technického v Brně

OBSAH

PŘEDSTAVENÍ AUTORA HABILITAČNÍ PRÁCE	4
1 ÚVOD	5
1.1 Cíle práce	6
2 TECHNICKÉ KOMPOZITY S HYPERELASTICKOU MATRICÍ	6
2.1 Vlastnosti vláken.....	7
3 BIOLOGICKÉ KOMPOZITNÍ MATERIÁLY	7
3.1 Konstitutivní modely měkkých tkání.....	7
• Konstitutivní modely pasivního chování.....	7
• Konstitutivní modely zohledňující svalový tonus.....	8
• Konstitutivní modely zohledňující strukturu tkáně.....	8
3.2 Reziduální napjatost.....	8
4 VÝPOČTOVÉ MODEL Y CHOVÁNÍ TECHNICKÝCH KOMPOZITŮ	8
4.1 Axisymetrický model pneumatiky	8
4.2 Trojrozměrný model pneumatiky	9
4.3 Výpočtové modelování nárazníkové vrstvy	10
5 POSUZOVÁNÍ PEVNOSTI SPOJE DVOU MATERIÁLŮ.....	12
5.1 Provedené experimenty a jejich výpočtové modelování	12
6 NÁVRH ZKOUŠKY KRUTEM.....	13
6.1 Výsledky experimentů a jejich výpočtové modelování	13
6.2 Vliv normálového napětí na rozhraní materiálů	15
6.3 Zhodnocení zkoušky krutem.....	16
7 FORMULACE MEZNÍ PODMÍNKY PORUŠOVÁNÍ ELASTOMERŮ	17
7.1 Předpoklady navržení mezní podmínky	17
7.2 Výpočtové modelování chování kavity	18
7.3 Aproximace mezní plochy	18
7.4 Implementace mezní podmínky do programu MKP.....	19
8 VÝPOČTOVÉ MODELOVÁNÍ NAPJATOSTI V ARTERIÍCH.....	20
8.1 Výpočtové modelování spojení tepen a cévních protéz.....	20
8.2 Výpočtové modelování tepny postižené aterosklerózou	21
9 VÝPOČTOVÉ MODELOVÁNÍ HLADKÉ SVALOVÉ BUŇKY	22
9.1 Analýza možností výpočtového modelování buňky	23
10 PERSPEKTIVY VÝPOČTOVÉHO MODELOVÁNÍ	24
10.1 Technické kompozitní materiály.....	24
10.2 Biologické kompozitní materiály – měkké tkáně	25
11 ZÁVĚR.....	26
12 LITERATURA.....	27
ABSTRACT	30

PŘEDSTAVENÍ AUTORA HABILITAČNÍ PRÁCE

Jiří Burša se narodil roku 1954 v Brně v rodině lékařů. Po maturitě byl přijat ke studiu na Strojní fakultě VUT v Brně. Svůj zájem o aplikace techniky v lékařství chtěl realizovat studiem lékařské elektroniky, proto se zapsal současně k mimořádnému externímu studiu Fakulty elektrotechniky, kde absolvoval podstatnou část prvních dvou ročníků studia. Protože další pokračování obou oborů nebyl schopen zvládat a přestup na studium lékařské elektroniky mu nebyl umožněn, pokračoval ve studiu na Strojní fakultě, obor „Přístrojová, regulační a automatizační technika“, který v roce 1978 ukončil obhajobou diplomové práce na téma *Šíření tlakové vlny v poddajném potrubí-aortě*.



Do roku 1984 pak pracoval ve Výzkumném ústavu zdravotnické techniky Chirana, kde se podílel na návrhu prvků umělé ledviny, konstrukci rentgenového nářadí a forem pro vstřikování plastů. V letech 1984-1990 se ve Výzkumném ústavu energetických zařízení zabýval výpočty teplotních napětí a přípustných teplotních gradientů v tlustostěnných nádobách parních kotlů a výměnících tepla a výpočty jejich únavové životnosti. V té době absolvoval postgraduální studium oboru Teplárenství, zakončené prací *Rozbor přípustných teplotních spádů u vybraných teplárenských výměníků*. Aktivně i pasivně ovládá několik jazyků, řadu let pracoval i jako překladatel.

Od roku 1990 pracuje jako odborný asistent na dnešním Ústavu mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky FSI VUT v Brně. Za tuto dobu vedl přednášky a cvičení z předmětů Statika, Pružnost a pevnost (v bakalářském i magisterském studiu, PPI i II), Biomechanika srdečně-cévní soustavy (tento předmět v oboru Aplikovaná mechanika sám zaváděl, kromě toho jej opakovaně přednáší i v univerzitě třetího věku), Nelineární mechanika (na zavedení tohoto předmětu se rovněž podílel), Mechanika kompozitů. Ve své vědecké práci se zaměřuje na problémy deformačně-napěťové analýzy živých tkání a implantátů, jakož i deformačně-napěťovou analýzu netradičních konstrukčních materiálů, jako jsou např. plasty, elastomery nebo vláknové kompozity. Věnuje se tedy především problémům neizotropního, viskoelastického a hyperelastického chování materiálů a mezních stavů součástí z těchto materiálů. Podílel se na řešení 5 grantů z oblasti biomechaniky a mechaniky kompozitů a na řešení výzkumného záměru MSM 262100001.

Je autorem nebo spoluautorem 12 článků ve vědeckých časopisech, 4 příspěvků na světových nebo evropských kongresech a konferencích, 53 příspěvků na mezinárodních a národních vědeckých konferencích, sympoziích a seminářích a rovněž několika článků v odborných a populárně-naučných časopisech. V pedagogické oblasti je spoluautorem 1 skript, 1 interaktivního učebního textu (a současně autorem jeho překladu do angličtiny) a 1 odborné příručky. Čtyři roky působí rovněž jako školitel doktorandů, z nichž dva již úspěšně ukončili studium obhájením disertační práce.

1 ÚVOD

Předkládaná práce se zabývá výpočtovým modelováním mechanického chování těles z materiálů, pro něž nelze použít metody lineárně elastické mechaniky těles, tedy model homogenního (izotropního nebo anizotropního) lineárně pružného kontinua. Jedná se na jedné straně o technické vláknové kompozity, které se vyznačují **řádivým rozdílem mezi rozměry těles** (konstruovaných součástí) a **příčnými rozměry vláken**, která navíc ještě často **nebývají tvořena kontinuem** (např. předená vlákna, splétaná nebo kroucená lanka apod.). Pokud u takového kompozitu nastávají pouze malá přetvoření (<0.01), je možno použít model lineárně elastického anizotropního kontinua. Ten je založený na homogenizaci vlastností kompozitu a umožňuje matematický popis deformačně-napěťových závislostí těchto materiálů pomocí dvou (pro izotropní) až jednadvaceti (pro obecně anizotropní materiál) nezávislých elastických konstant.

Daleko obtížnější je výpočtové modelování deformačně-napjatostních stavů struktur tvořených takovými kompozitními materiály, které jsou charakterizovány **velkými deformacemi** (ve smyslu posuvů i přetvoření) a obvykle i výrazným **rozdílem (několika řádů) mezi materiálovými parametry vláken a matrice**. Jejich matrice je obvykle schopna velkých pseudoelastických přetvoření, což vede na nelineární chování materiálu, které lze popsat různými hyperelastickými modely konstitutivních závislostí. Proto budu nadále pro tyto materiály používat název **hyperelastické kompozity**. Jejich relativně velmi tuhá vlákna se obvykle nechovají ani podle předpokladů mechaniky kontinua. Pro efektivní výpočtové modelování praktických konstrukcí je nutné víceúrovňové modelování. Nejběžnějším praktickým příkladem kompozitu popisovaného typu je **pryž vyztužená** ocelovými, aramidovými, polyamidovými, polyesterovými nebo jinými **vláknami**. Nejrozšířenější oblastí použití těchto kompozitů je výroba **pneumatik**.

V oblasti biologických materiálů patří do této kategorie kompozitů prakticky všechny **měkké tkáně**, tedy i tkáň cévní stěny, vyztužená elastinovými¹, kolagenními a svalovými vláknami, příp. elastinovými membránami, uloženými v poddajném vazivu. Navíc jsou u biologických materiálů podstatné i další vlastnosti, které se u technických materiálů nevyskytují: změna mechanických vlastností vlivem podráždění (nervového, elektrického, chemického), růst tkáně a její remodelace jako odezva na vnější podmínky, kterým je vystavena, obnova poškozené tkáně hojením atd. Některé procesy probíhající v živých tkáních naopak mají analogii i u běžných technických materiálů (změna vlastností s teplotou a časem – stárnutí, degradační procesy, kumulace poškození atd.).

Význam věrohodného výpočtového modelování při tvorbě technických objektů není třeba zdůvodňovat, u biologických objektů jde o prevenci poranění, zlepšení diagnostických a léčebných postupů, snižování rizik chirurgických zákroků a optimální návrh inženýrských výrobků (implantátů apod.). Patologické procesy, které probíhají v tkáních cévní stěny, jsou významně ovlivňovány jejími deformačně-napěťovými stavy, resp. stavy jejích jednotlivých komponent a mohou vést k ryze **mechanickým mezním stavům**, souvisejícím s nadměrnou napjatostí a deformací (např. ruptura výdutě tepny), změnami v proudění krve (omezování průtoku, turbulence), ale i k podstatně složitějším mezním stavům tkání (**nekróza tkáně** vlivem nepřiměřeného zatížení nebo nedostatku výživy) či organismu jako celku (smrt či závažné postižení v důsledku trombembolie). Významné jsou i problémy mechanického charakteru při intervenčních zákrocích (např. angioplastika, příp. i s aplikací arteriálních stentů).

Výpočtové modelování deformačně-napěťových a mezních stavů hyperelastických vláknových kompozitů je tedy velmi důležitou a aktuální problematikou. Možnosti jejich výpočtového modelování jsou však přes veškerý rozvoj matematických teorií i výpočetní techniky omezené. Přehledu a prohloubení možností výpočtového modelování je věnována předkládaná práce.

¹ Obvykle používané termíny „elastická vlákna“ a „elastické membrány“ jsou z pohledu mechaniky nepřesné, protože ani struktury tvořené elastinem nejsou ideálně pružné.

Současně je jejím cílem specifikovat analogie i odlišnosti mezi chováním technických a biologických materiálů.

1.1 CÍLE PRÁCE

Předkládaná práce si neklade za cíl vyřešení nějakého konkrétního praktického problému, ale rozpracování metodiky výpočtového modelování deformačně-napjatostního chování těles z hyperelastických kompozitních materiálů. Problematika je natolik složitá, že ji v rámci jedné práce nelze vyřešit ani pro oblast technických materiálů, natož pak materiálů biologických.

Práce zpracovává nejprve přehled vlastností a konstitutivních modelů pro jednotlivé komponenty, z nichž se vyšetřované kompozity skládají. Na příkladech zdůvodňuje, proč zde není možná homogenizace vlastností založená na jednoduchých modelech, používaných v teorii lineární elasticity vláknových kompozitů. Na základě vlastností složek, jejich struktury a topologie je třeba vymezit několik hierarchických úrovní modelování, a to od makroúrovně – globálního modelu tělesa, který není schopen postihnout jemné detaily jeho struktury, až po nejjemnější rozlišovací úroveň potřebnou pro věrohodné výpočtové modelování. Tato úroveň je dána rozměry základních strukturních jednotek, které je třeba v modelu zohlednit.

Ani u technických látek, ať už krystalických nebo amorfních, resp. makromolekulárních, dosud nebylo dosaženo přímého propojení mezi makroskopickou úrovní a úrovní molekulární, resp. krystalickou. Řádový rozdíl v dimenzích prvků jednotlivých úrovní i při současném výkonu počítačů neumožňuje ve výpočtových modelech celých těles modelovat detaily jejich struktury. Dosažení přijatelného počtu prvků konečnoprvkového modelu vyžaduje u všech typů materiálů homogenizaci jejich vlastností. Podobná propast se rozevírá při modelování biologických materiálů, s tím rozdílem, že podstatné ovlivnění a stimulace procesů probíhajících ve tkáních se děje na úrovni buňky. Proto je třeba zabývat se i procesy probíhajícími na buněčné úrovni (např. tvorba extracelulární matrix²) a vlivem mechanických veličin na tyto procesy.

Podstatou práce je analýza možností výpočtového modelování a praktické příklady propojení různých úrovní modelů. Jedině přenosem poznatků z modelů s vyšší rozlišovací úrovní do modelů nižších úrovní a důslednou verifikací výsledků těchto přenosů lze zatím dosáhnout kompromisu, kterým má být model výpočtově zvládnutelný za použití aktuálně dostupného hardwaru i softwaru a přitom dostatečně věrohodný.

2 TECHNICKÉ KOMPOZITY S HYPERELASTICKOU MATRICÍ

Pro kompozitní materiály, u nichž matrice (nejčastěji pryž) vykazuje velká elastická přetvoření, je typický rozdíl několika řádů mezi elastickými parametry vláken a matrice. Chování takových kompozitů je silně **nelineární** a homogenizace jejich vlastností přináší zásadní problémy. Důležitá je míra jejich objemové stlačitelnosti, pro jejíž posouzení lze formulovat následující pravidlo:

*Materiál lze považovat za **objemově přibližně nestlačitelný** tehdy, je-li jeho objemový modul pružnosti o několik řádů vyšší než jeho modul pružnosti ve smyku, takže změna tvaru při zatížení naprosto převažuje nad změnou objemovou.*

Pro popis konstitutivního chování hyperelastických materiálů se používají různé tvary **funkce hustoty deformační energie**; pro identifikaci jejich parametrů je třeba kromě obvyklé zkoušky tahem a zkoušky objemové stlačitelnosti provádět zkoušku v **ekvibiaxiální napjatosti** a nějakou zkoušku ekvivalentní **smyskové napjatosti**. Nejčastěji se hustota deformační energie vyjadřuje jako funkce invariantů pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace nebo jeho hlavních souřadnic (poměrná protažení $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$).

Při hodnocení pevnosti tahovou zkouškou jsou obvykle používány hodnoty smluvní, zatímco MKP dává hodnoty skutečné, tj. vztažené k deformované geometrii, která musí být při přírůstkové metodě řešení společně se sítí konečných prvků během výpočtu opakovaně přepočítávána

² Hmota vyplňující mezibuněčný prostor, která může být vyztužená vlákny.

a aktualizována. Napětí na mezi pevnosti může být u pryže při smluvním vyjádření i více než sedmkrát (!) nižší než skutečné (Cauchyho) napětí a podobný je dopad i na deformačně-napěťovou křivku.

Při extrémně velkých deformacích (stovky procent) však již ani chování elastomerů včetně pryže není zcela elastické, ale vykazuje cyklické změkčení, trvalé deformace, stárnutí, viskoelasticitu a Mullinsův efekt (viz [2]). Záleží pak na konkrétním řešeném problému, které z uvedených vlivů jsou více či méně podstatné.

2.1 VLASTNOSTI VLÁKEN

U hyperelastických kompozitních materiálů plní funkci matrice elastomer (nejčastěji přírodní či umělá pryž), vlákna bývají nejčastěji **ocelová, aramidová, polyamidová, nylonová** nebo **polyesterová** (viz [3]). V práci se zabývám především vlákny ocelovými, u nichž je největší rozdíl ve vlastnostech oproti elastomerové matici a jejichž geometrie a struktura jsou jednoznačně definovány. Vlastnosti oceli jsou obecně známé, u ocelí používaných pro dráty a lanka do pneumatik je vhodné zdůraznit mimořádně vysokou mez kluzu i mez úměrnosti (řádu 10^3 MPa). Pro výsledné mechanické vlastnosti kompozitu je dále rozhodující kvalita vazby mezi oběma složkami, pryží a ocelí, které je dosaženo vznikem chemických vazeb mezi sírou obsaženou v pryži a zinkem, který se obvykle ve formě mosazi používá k pokovení ocelových komponent.

Vlákna (ocelová i jiná) v kompozitních materiálech často **nesplňují předpoklady kontinua** – jsou tvořena z několika spletených nebo smotaných pramenů (drátků), což nutně znamená změnu jejich chování oproti spojitému materiálu a podstatně obtížnější výpočtové modelování. To je ztíženo i obtížně definovatelnou vazbou mezi jednotlivými prameny vlákna, kterou může tvořit matrice zateklá do těchto prostor velmi malé a proměnlivé tloušťky. Proto lze očekávat významné rozdíly mezi jejich tahovou a ohybovou tuhostí.

3 BIOLOGICKÉ KOMPOZITNÍ MATERIÁLY

Biologické kompozitní materiály vykazující velké deformace se označují jako **měkké tkáně**; z nich se ve své práci se zabývám tkáněmi, tvořícími stěny tepen. Jedná se o tkáně vykazující makroskopicky nehomogenní, neizotropní, nelineární a ne zcela elastické vlastnosti a chování, které jsou důsledkem jejich složité mnohoúrovňové struktury, která vyžaduje také víceúrovňové modelování. Řešené výpočtové modely odpovídají jednak makroskopické úrovni (céva se zohledněním základních vrstev), jednak mikroskopické úrovni (buňka s jistým zohledněním cytoskeletu).

3.1 KONSTITUTIVNÍ MODELY MĚKKÝCH TKÁNÍ

Konstitutivní modely vytvořené speciálně pro měkké tkáně lze rozdělit do několika kategorií.

- **Konstitutivní modely pasivního chování**

- **logaritmický** [5] je dán rovnicí pro měrnou energii napjatosti

$$W = -c \cdot \ln(1 - Q) \quad , \quad \text{kde} \quad Q = \frac{1}{2} c_1 \Xi_t^2 + \frac{1}{2} c_2 \Xi_z^2 + c_3 \Xi_t \Xi_z \quad . \quad (1)$$

- **polynomický** [6]

$$W = b_1 \Xi_t^4 + b_2 \Xi_t \Xi_z + b_3 \Xi_z^2 \quad , \quad (2)$$

- **exponenciální** [7], [8], [9], jehož nejobecnější tvar je

$$W = \frac{1}{2} c_0 [e^Q - 1] - p(J - 1)$$

$$Q = c_1 \Xi_t^2 + c_2 \Xi_z^2 + c_3 \Xi_r^2 + 2c_4 \Xi_t \Xi_z + 2c_5 \Xi_t \Xi_r + 2c_6 \Xi_r \Xi_z + c_7 \Xi_{rt}^2 + c_8 \Xi_{tz}^2 + c_9 \Xi_{rz}^2 \quad . \quad (3)$$

- **poroelastický** ([10], [11]) uvažuje stěnu cévy jako složený materiál tvořený tuhou a kapalnou fází (bere v úvahu vytlačování kapalné fáze z tkáně).

Ve všech uvedených modelech jsou $\Xi_i = \frac{1}{2}(\lambda_i^2 - 1)$ složky Green-Lagrangeova tenzoru přetvoření ve směru i , J je třetí invariant Cauchy-Greenova tenzoru deformace, b_i , c_i materiálové parametry.

- **Konstitutivní modely zohledňující svalový tonus**

Pro popis chování arterií svalového typu s významnou rolí **aktiveace hladké svaloviny** byly navrženy modely, které Cauchyho tenzor napětí rozkládají na **pasivní** část, určenou ze vztahu pro měrnou energii napjatosti při pasivním chování (ovlivněném hlavně elastinem a kolagenem), a na část **aktivní**, vyjadřující vliv hladké svaloviny (např. Rachev a Hayashi [12] nebo Zulliger et al. [13]) pomocí proměnné souvisící např. s koncentrací iontů (Ca^{2+}).

- **Konstitutivní modely zohledňující strukturu tkáně**

Tyto modely jsou částečně **založeny na histologických informacích** o struktuře příslušné vrstvy a rozdělují měrnou energii napjatosti na **složku izotropní** a **složku neizotropní**, v jejíž definici figurují kromě složek tenzoru deformace také dva směry vláken kompozitu. S jejich pomocí jsou pak definovány další dva tenzory charakterizující strukturu materiálu a jejich celkem devět invariantů. Pro anizotropní část měrné energie napjatosti byl v [14] navržen tvar

$$W_{aniso}(I_4, I_6) = \frac{k_1}{2k_2} \sum_{i=4,6} \left\{ \exp \left[k_2 (I_i - 1)^2 \right] - 1 \right\}. \quad (4)$$

Obecně platí, že **predikční schopnost** je lepší u konstitutivních modelů vycházejících ze struktury materiálu, než u modelů ryze fenomenologických.

3.2 REZIDUÁLNÍ NAPJATOST

Reziduální napjatost v tepnách je známa již cca 20 let ([15], [16]), autor se jí podrobně věnoval v [4]. Některé konstitutivní vztahy umožňují zohlednit ji přímo v jejich parametrech tím, že jako výchozí stav pro popis tenzoru gradientu deformace F je zvolen stav beznapěťový. Zvládnutí techniky separace základních vrstev cévní stěny, medie a adventitie, ukázalo (viz [17], [18]) **další zbytková napětí**, projevující se rozdílnou zbytkovou deformací adventitie a medie. Práce [19] a [20] dokumentují dokonce, že v samotné medii existují zbytková napětí řádově vyšší než ta, která vyvolávají rozevření arteriálního segmentu. Jsou dána strukturou medie, sestávající z řady (až několika desítek) elastických membrán, střídajících se s vrstvami obsahujícími hladké svalové buňky v extracelulární hmotě. Model spojující tato zbytková napětí s napětími od základního zatížení cévní stěny (tlak krve, podélné předpětí) však nebyl zřejmě dosud publikován.

4 VÝPOČTOVÉ MODEL CHOVÁNÍ TECHNICKÝCH KOMPOZITŮ

V této kapitole je prezentováno na různých strukturních úrovních několik výpočtových modelů pneumatiky a jejích částí. Rozdíl mezi rozměry komponent a celého modelu neumožňuje popis detailů struktury kompozitních materiálů tvořících nárazníkovou nebo kostrovou vložku. Proto je tato kapitola pokusem o homogenizaci vlastností těchto materiálů; takový model principiálně nemůže určit skutečná napětí ve složkách kompozitu, což vylučuje možnost hodnocení mezních stavů. V oblasti hyperelastických materiálů navíc dosud stále **chybí obecně použitelné kritérium porušení**.

4.1 AXISYMETRICKÝ MODEL PNEUMATIKY

Použitý výpočtový model pneumatiky vychází z její reálné geometrie, včetně vymezení oblastí s použitými odlišnými druhy materiálů (pryží nebo kompozitů na bázi pryže) v jejím meridiánovém řezu. Ve 2D variantě nezahrnuje vlastní běhoun pneumatiky s dezénem, aby bylo možné použít rotačně symetrického modelu. Ten lze použít pro modelování **zatížení tlakem vzduchu** v pneumatice a **odstředivými silami**. Materiál nárazníkové vrstvy byl modelován jako **ortotropní**, ostatní materiály jako **izotropní**.

Pro **verifikaci modelu**, resp. identifikaci některých jeho konstitutivních parametrů byly výsledné deformační posuvy porovnávány se skutečnými, naměřenými na pneumatice značky MATADOR rozměru 165/65 R13, podle které byl výpočtový model vytvářen. Výsledné změny

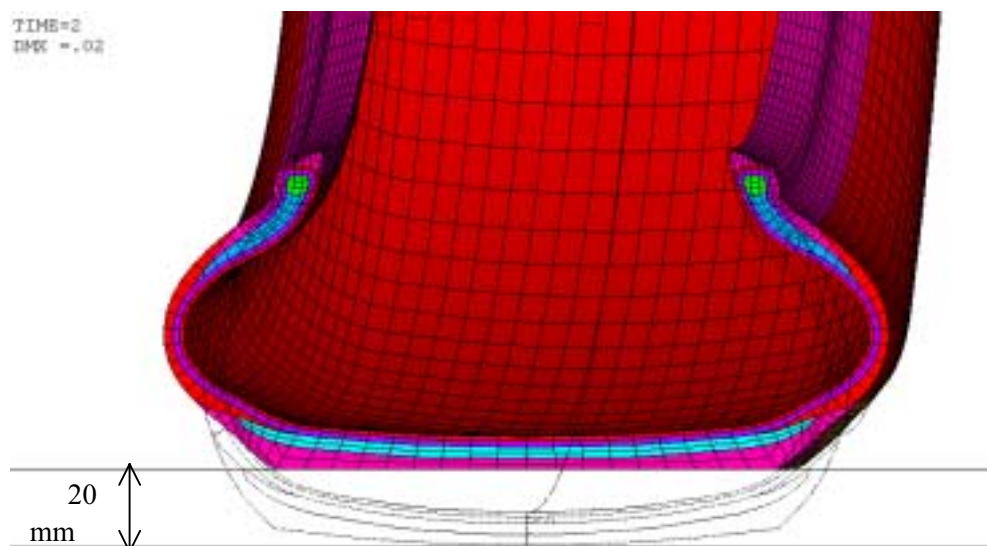
poloměru a šířky pneumatiky včetně experimentálních výsledků změřených při nahuštění tlakem 180 kPa jsou uvedeny v tab. 1. Z nich je zřejmá kvalitativní shoda, kvantitativní rozdíl je řádu desítek procent. Možným vysvětlením může být rozdílná tuhost v tahu a v ohybu kompozitní vrstvy.

tab. 1 : Porovnání deformací pláště pneumatiky Matador 165/65 R13 při zatížení vnitřním tlakem, případně odstředivými silami

	Experiment bez rotace	Výpočtový model					
		bez rotace		s rotací (~180 km/h)			
Tlak v plášti [kPa]	180	180	220	0	150	180	220
Změna max. radiusu [mm]	0,55	0,595	0,723	0,65	1,154	1,252	1,382
Změna šířky pláště [mm]	2,82	3,806	4,562	-0,87	2,494	3,152	3,992

4.2 TROJROZMĚRNÝ MODEL PNEUMATIKY

Pro simulaci deformace pláště při styku s vozovkou byl nutný již 3D model. Všechny druhy pryží použité v pneumatice jsou modelovány **dvouparametrickým Money-Rivlinovým** hyperelastickým konstitutivním modelem. Vrstvy s kordovou výztuží (nárazník, kostrová vložka) jsou uvažovány jako **lineárně elastické ortotropní**. Deformace (statická prostorová kontaktní úloha) pláště pneumatiky nahuštěného tlakem 180 kPa v interakci s rovnou vozovkou je znázorněna na obr. 1 (tenkými čarami znázorněn nedeformovaný tvar). Odchylka reakčních sil v modelu oproti skutečné pneumatice činí několik desítek procent. Vypočtené rozložení kontaktního tlaku má pak pouze význam kvalitativní a srovnávací, nebo může být použito k verifikaci modelu porovnáním s experimentem. Porovnání však bylo prováděno opět jen pro zatížení vnitřním tlakem, při němž se výsledné hodnoty deformací především v radiálním směru několikanásobně lišily od experimentu. Proto byly **citlivostní analýzou** hledány veličiny, které mohou takovou chybu způsobit.



obr. 1 : Deformace pneumatiky přitlačované na vozovku

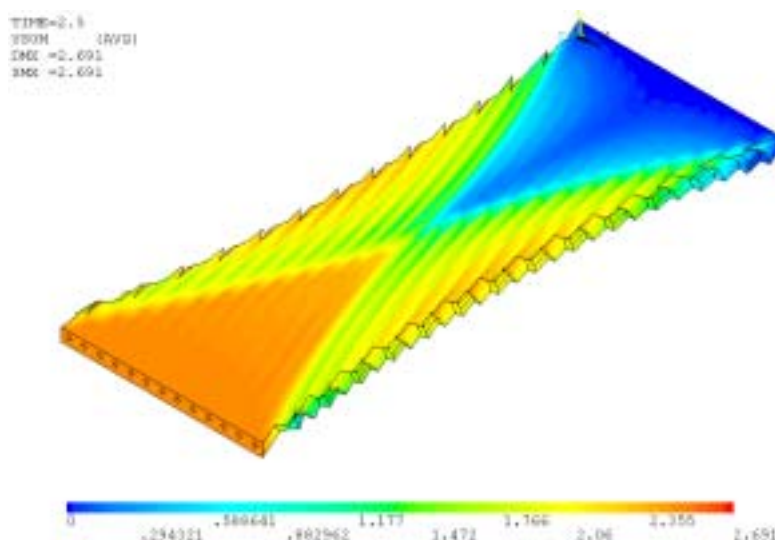
Ani provedená analýza citlivosti na jednotlivé parametry konstitutivních vztahů neodhalila jednoznačně příčinu tohoto rozporu, kterou je zřejmě třeba hledat v chování kompozitní struktury pryž-vlákno. Ta vzhledem k několikařádrovým rozdílům v modulech pružnosti komponent může vykazovat chování silně odlišné od lineárně elastického ortotropního modelu, takže pro

věrohodnější popis deformačně-napěťových stavů je třeba modelovat strukturu jednotlivých vrstev, což v modelu celé pneumatiky není možné.

4.3 VÝPOČTOVÉ MODELOVÁNÍ NÁRAZNÍKOVÉ VRSTVY

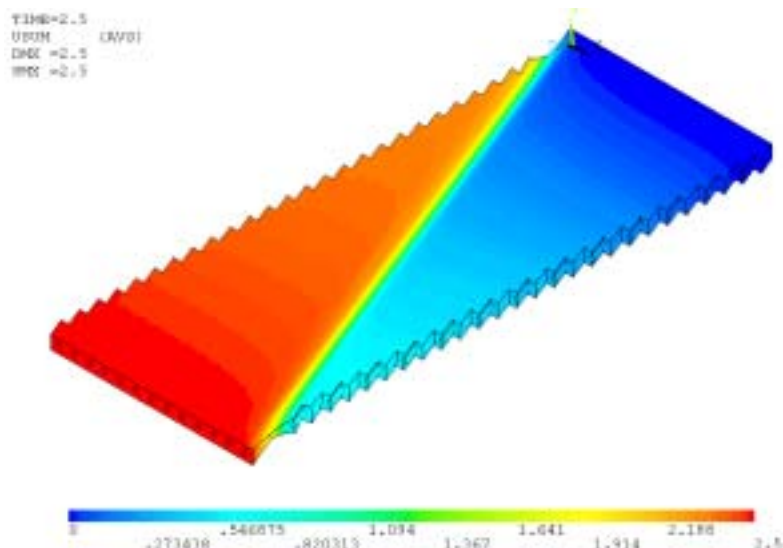
<i>tab. 2 : Změřené hodnoty počátečních (do $\varepsilon = 1\%$) Youngových modulů vzorků ocelokordového nárazníku určené ze zkoušek v tahu a ohybu</i>		
<i>E [MPa] (tah/ohyb)</i>	<i>Podélná orientace (23°)</i>	<i>Příčná orientace (67°)</i>
<i>Jednovrstvý vzorek</i>	31,3 / 1149,5	11,3 / ~20
<i>Dvouvrstvý vzorek</i>	368,4 / 402,0	16,8 / 62,0

Nárazníková vrstva vyšetřované pneumatiky je tvořena pryží se dvěma osnovami výztužných ocelových kordů odkloněných od obvodového směru o $\pm 23^\circ$. Na vzorcích této nárazníkové dvouvrstvy byly provedeny zkoušky tahem a trojbodovým ohybem. Jak bylo vzhledem ke struktuře předpokládáno, výsledné moduly pružnosti určené z těchto zkoušek (viz tab. 2) se vzájemně významně liší. Pro porovnání a verifikaci výpočtového modelu byly měřeny i vrstvy pouze s jedinou osnovou vláken ocelokordu. Pro vysvětlení značných rozdílů ve výsledcích těchto zkoušek bylo přikročeno k jejich výpočtovému modelování. Je zřejmé, že obvyklá homogenizace vlastností kompozitu zde selhává. Proto byla dále nárazníková dvouvrstva modelována jako složený materiál pomocí 3D prvků. Protože však ani výztužná vlákna nesplňují předpoklady kontinua (splétaná lanka), i zde mohlo docházet k podstatným simplifikacím.



obr. 2 : Celkové posuvy na spodní vrstvě dvouvrstvého vzorku 37x15 s orientací 23° (tah)

Výsledky simulace jednoosé tahové zkoušky na obr. 2 a obr. 3 ukazují, že vzhledem k relativně velmi vysoké tuhosti vláken se podstatná část deformace realizuje v té oblasti vzorku, která není výztužnými vlákny spojena s čelistí trhačického stroje; to platí jak pro dvouvrstvý, tak pro jednovrstvý vzorek. Na vzorcích se šikmou orientací vláken lze tedy vymezit dvě oblasti. V částech vzorku spojených kordovými vlákny s jednou z čelistí je zatížení přenášeno převážně vlákny a vzorek má vysokou tuhost. Části vzorku, ze kterých vlákna nezasahují do žádné z čelistí, jsou podstatně poddajnější, protože se vlákna mnohem méně podílejí na přenosu zatížení. Z uvedeného je zřejmé, že u těchto vzorků **záleží deformačně-napěťová závislost podstatně na rozměrech vzorku a na vymezení oblasti pro měření deformací.**



obr. 3 : Celkové posuvy u jednovrstvého vzorku 37x15 s orientací 23° (tah)

Otevřenou otázkou zůstává, která z uvedených závislostí dá věrohodné výsledky pro použití ve výpočtovém modelování pneumatiky. Dá se očekávat, že pro vlákna ukotvená v oblasti patky (vlákna kostrové vložky, vlákna diagonální pneumatiky) se chování kompozitní struktury blíží tužší křivce. Rozhodnutí o této otázce pro ocelokordový nárazník radiální pneumatiky, jehož vlákna nejsou ukotvena k nějakému tužšímu elementu, vyžaduje další rozbor podložený zevrubným výpočtovým a experimentálním modelováním.

Z uvedených důvodů bylo pro dosažení souladu výpočtu s experimentem nutné modelovat vzorek s geometrií odpovídající realitě, tj. 100x25 mm, čímž se výpočty staly časově náročnějšími. Výsledky přehledně uvádí tab. 3. Z výsledků je zřejmé, že nejlepší shody bylo dosaženo pro vzorky s příčnou orientací kordů, pro podélnou orientaci vláken je chyba výpočtového modelu již kolem 30 %.

tab. 3 : Výsledky simulování tahových zkoušek vzorků s ocelokordem. Podélná orientace znamená úhel vláken 23° od podélné osy vzorku, příčná orientace odpovídá 67°.

Typ vzorku	Δl [mm]	Přetvoření [%]	F výpočet [N]	F experiment [N]
2 vrstvý, podélný	2,5	5	680	930
2 vrstvý, příčný	15	30	78	81
1 vrstvý, podélný	3	10	41	58
1 vrstvý, příčný	3	10	16	19

Pro zkrácení výpočtového času byl v některých případech testován výpočtový model, v němž **výztužná vlákna** byla modelována **pomocí prutových prvků** Beam. Protože však o deformaci vzorku rozhoduje především deformace pryže, bylo třeba zachovat rozměry pryžové matrice. Proto objem vláken byl navíc vyplněn materiálem podstatně (o 2 řády) tužším než pryž a současně podstatně (o 2 řády) poddajnějším než ocel. Pro tento náhradní materiál byla zvolena hodnota $E=1200$ MPa a citlivostní analýzou bylo ověřeno, že ani změna této hodnoty o 1 řád nahoru nebo dolů nemá významný vliv na výsledky. **Výsledky obou výpočtových modelů se dostatečně shodovaly**, takže výpočtový model s prutovými prvky umožnil podstatné zkrácení výpočtových časů. S využitím tohoto modelu byly simulovány také zkoušky ohybem.

U **zkoušek ohybem** nastávaly podstatně větší rozpory mezi experimentem a výpočtovým modelem. Pro podélnou orientaci vláken byla tuhost modelu cca poloviční v porovnání se skutečností, u příčné orientace vláken dokonce sedmkrát. Tento rozpor lze pro vzorek s podélnou orientací vláken vysvětlit nedokonalým modelováním ohybové tuhosti vláken, ne však už u příčné

orientace. Existuje tedy ještě nějaký **další faktor**, který se nepodařilo nalézt, protože modelování šroubovitých vláken je vždy zatíženo velkou řadou zjednodušení, aby bylo výpočtově zvládnutelné. Pro ověření bude nutné vyrobit vzorky s dráty (nikoli lanky) a u nich porovnat experimenty s výpočtovou simulací.

5 POSUZOVÁNÍ PEVNOSTI SPOJE DVOU MATERIÁLŮ

Porušení soudržnosti na rozhraní materiálů je frekventovaným a nebezpečným mezním stavem. Postup stanovení soudržnosti pryže s ocelovým kordem definuje v současnosti norma ČSN ISO 5603, podle níž se soudržnost hodnotí tzv. "pull-out" testem na základě velikosti tahové síly potřebné k vytržení kordového vlákna z pryže. Norma výslovně upozorňuje na fakt, že pro **porovnatelnost výsledků** je třeba použít stejnou zkušební metodu i geometrii vzorků. Pevnost spoje se totiž hodnotí jen **střední hodnotou smykové liniové síly** na stykové ploše mezi ocelí a pryží, aniž by se brala v úvahu lokální koncentrace napětí v pryži v blízkosti konce ocelokordového vlákna, kde má rozložení napětí charakter singularity.

5.1 PROVEDENÉ EXPERIMENTY A JEJICH VÝPOČTOVÉ MODELOVÁNÍ

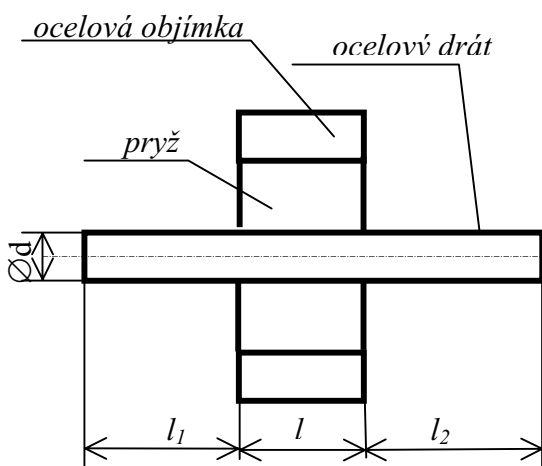
Posouzení adheze mezi pryží a ocelovým kordem bylo prováděno měřením vytrhovací síly při "pull-out" testu. Vzorky byly vyrobeny v pěti sériích, lišících se vzájemně typem použitého drátu nebo lanka, každá série po devíti kusech. Výpočtové modelování ukázalo, že k **přenosu zatížení** mezi ocelí a pryží dochází v poměrně **krátké části spoje (méně než 10 mm) poblíž konce vlákna**. **Analýza** výsledků experimentů tento fakt potvrzuje a umožňuje vyslovení následujících **závěrů**:

- Vytrhovací síla lanka je podstatně nižší oproti drátu srovnatelných rozměrů.
- K iniciaci trhliny dochází na hraně konce drátu, kde je maximální koncentrace napětí. Trhlina se pak šíří podél vlákna až k okraji vzorku.

Výpočtovým modelováním bylo dále zjištěno, že vypočtená napjatost v gumě v okolí konce drátu, kde dochází k nejvyšší koncentraci napětí, se blíží **trojosé rovnoměrné tahové napjatosti**. Taková napjatost je u kovových strojírenských materiálů je považována za velmi nebezpečnou, protože významně zvyšuje sklon materiálu k porušení křehkým lomem, u pryže pak může vyvolat porušení kavitací [30]. Proto byla provedena citlivostní analýza, která posuzovala vliv elastických parametrů matrice na charakter napjatosti v okolí konce vlákna. K hodnocení charakteru napjatosti byl zaveden **součinitel trojososti napětí** σ_3/σ_1 , tedy poměr nejmenšího a největšího hlavního napětí v daném bodě. Na rozdíl od lineárně elastických materiálů se při výpočtech ukázal **významný vliv velikosti zatížení**. Proto jsou všechny výsledky uváděny pro stejnou relativní velikost zatížení, pro niž nominální napětí v ocelovém vlákně dosahuje asi 50% hodnoty modulu pružnosti matrice. Z výsledků lze učinit následující závěry:

- Rozhodujícím faktorem pro nárůst součinitele σ_3/σ_1 je **nestlačitelnost matrice** ($\mu > 0,49$).
- K nárůstu hodnoty σ_3/σ_1 dochází pouze u materiálů s poměrem modulů pružnosti vlákna a matrice **aspoň sto (dva řády)**.
- K výraznému zvýšení součinitele σ_3/σ_1 dochází pouze tehdy, jestliže matrice přes svůj výrazně nižší modul pružnosti v tahu (aspoň o dva řády) má objemový modul pružnosti vyšší než vlákna.
- Vzhledem k výrazné koncentraci napětí v okolí konce vlákna **nelze** touto zkouškou **určit mezní hodnotu napětí** při porušení. Navíc není možné hodnotit vliv víceosé napjatosti na mezní stavy, protože dosud **nebyla formulována použitelná mezní podmínka**.

6 NÁVRH ZKOUŠKY KRUTEM



obr. 4 : Navržený vzorek pro zkoušku krutem adhezní pevnosti mezi ocelí a pryží

Pro určení mezní hodnoty napětí při porušení adhezního spoje jsem se pokusil navrhnout takovou zkoušku, při níž nedochází k výrazné koncentraci napětí a tudíž lze výpočtem určit mezní hodnotu napětí při porušení spoje mezi pryží a ocelovým kordem. Takovou zkouškou může být zkouška krutem podle obr. 4. Výpočtové modely ukazují, že **napětí** je po stykové ploše **rozloženo téměř rovnoměrně** a navíc na konstantním poloměru, což umožňuje velmi jednoduché určení mezní hodnoty smykového napětí, při níž dochází k porušení soudržnosti ve spoji, z hodnoty přenášeného momentu M_k , a to pomocí vztahu

$$\tau = \frac{2M_k}{\pi d^2 l} \quad (5)$$

Přitom vycházíme z pracovní hypotézy, že veličinou rozhodující o vzniku mezního stavu na rozhraní obou materiálů bude smykové napětí na tomto povrchu.

Velikost smykového napětí určená touto zkouškou by mohla být materiálovou charakteristikou rozhodující o vzniku mezního stavu dekoheze, minimálně pro materiály nevykazující velké deformace, protože všechny ostatní složky tenzoru napětí jsou za těchto podmínek nulové. Pro použitelnost této zkoušky pro hodnocení adheze **pryže** a kovu by bylo třeba **zohlednit vliv normálových napětí**, která vzniknou v kontaktní ploše při velkých deformacích pryže, což vyžaduje formulaci obecnější mezní podmínky.

6.1 VÝSLEDKY EXPERIMENTŮ A JEJICH VÝPOČTOVÉ MODELOVÁNÍ

K potvrzení použitelnosti zkoušky krutem pro stanovení objektivní hodnoty soudržnosti spoje je nutné experimentálně ověřit nezávislost mezní hodnoty napětí na rozměrech vzorku. Výroba speciálních zkušebních vzorků z pryže je technologicky velmi náročná a nepodařilo se ji zajistit. Proto byly první zkoušky provedeny na vzorcích poněkud odlišného tvaru s neprůchozím ocelovým válcem, zalitým do **epoxidové pryskyřice** (tj. pro malé deformace). Výsledky zkoušek byly přepočítány na mezní smykové napětí podle vztahu (5), střední hodnoty uvádí tab. 4.

tab. 4 : Hodnoty soudržnosti spoje naměřené pro různé délky spoje

Délka spoje l [mm]	10	20	30	Celkově	Směrodatná odchylka [MPa]
Mezní krouticí moment [Nm]	19,3	45,6	62,2	-	-
Mezní smykové napětí [MPa]	12,3	14,5	13,2	13,0	1,4

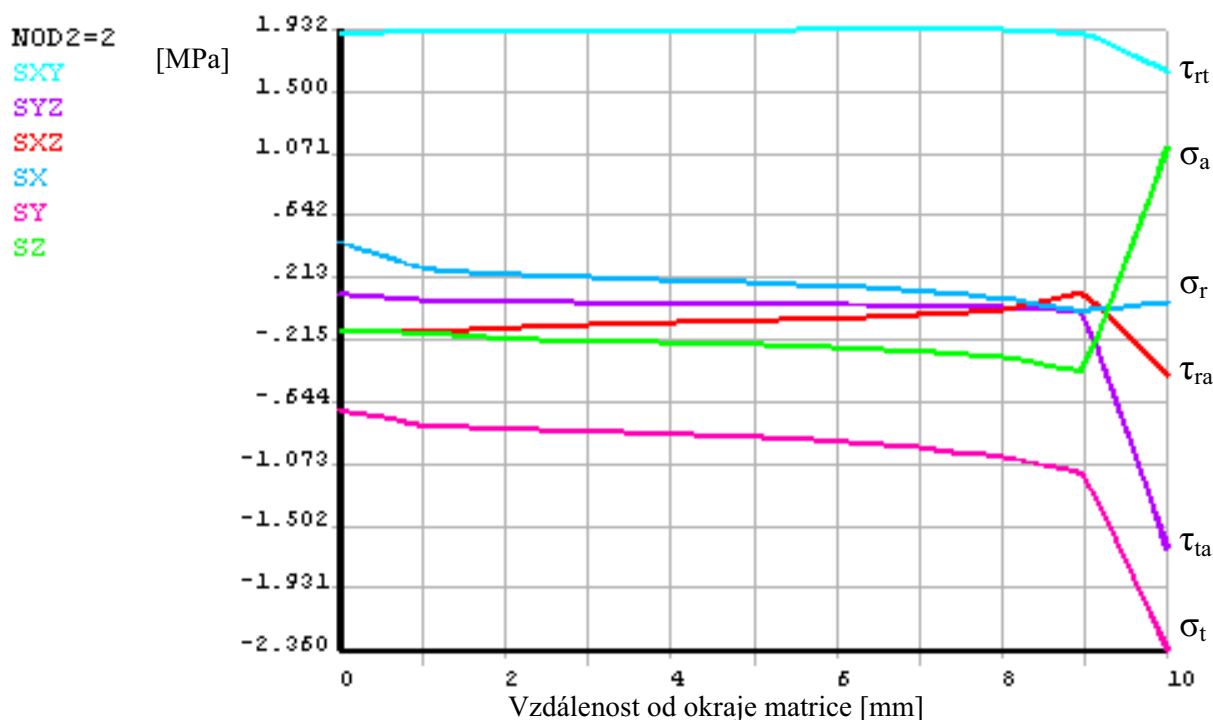
Při zkoušce krutem mezní hodnota zátěžného momentu s délkou spoje zjevně roste (na rozdíl od „pull-out“ testu), a to zhruba přímo úměrně. To ukazuje na jednoznačnou souvislost mezi porušením spoje a smykovým napětím, což přes nezanedbatelný rozptyl potvrzují hodnoty mezního smykového napětí v tab. 4. Pro vysvětlení příčin rozptylu byla mj. provedena výpočtová analýza rozložení napětí na stykové ploše pro různá provedení vzorků, včetně tvaru a okrajových podmínek použitých v experimentu.

Pro epoxidovou matici ($E_m = 1800$ MPa) již rozdíl v poddajnosti oproti oceli není tak výrazný, což má za následek větší nerovnoměrnost rozložení napětí na kontaktní ploše obou materiálů.

Relativně rovnoměrné rozložení napětí na stykové ploše obou materiálů pak dostaneme jedině tehdy, pokud je ocelový válec zatížen momentem k jeho ose na obou koncích vzorku (rozdíl napětí menší než 8%). I tehdy však extrémní napětí na kontaktní ploše budou záviset na modulu pružnosti matrice, jak udává tab. 5.

<i>tab. 5 : Poměr extrémních hodnot smykových napětí v kontaktní ploše mezi ocelovým válcem a matricí v závislosti na modulu pružnosti matrice</i>					
Modul pružnosti matrice [MPa]	8	80	800	1800	8000
τ_{\max}/τ_{\min} pro zatížení momenty na obou koncích ocelového válce	1,000	1,003	1,033	1,076	1,341
τ_{\max}/τ_{\min} pro zatížení momentem na jednom konci průchozího ocelového válce	1,001	1,010	1,105	1,241	2,167
τ_{\max}/τ_{\min} pro neprůchozí válec	1,23	1,22	1,21	1,24	2,37

Z jejich vyhodnocení je zřejmé, že u zkoušeného vzorku se poměr maximálního a minimálního smykového napětí v kontaktní ploše pro $E_m \leq 1800$ MPa příliš neliší od hodnoty 1,2. **Rozptyl výsledků experimentu** by tedy bylo možné vysvětlit **nerovnoměrností napětí** na kontaktní ploše a přesnost výsledků zlepšit používáním vzorků podle obr. 4. Tato domněnka však nebyla ověřena pro potíže s realizací experimentu se zatížením momentem na obou koncích a pro špatnou reprodukovatelnost výsledků při neprofesionální výrobě vzorků.



obr. 5 : Průběh všech složek tenzoru napětí v matrici ($E=8$ MPa, velké deformace) podél kontaktní plochy s neprůchozím ocelovým válcem

Z modelování vyplynuly dva protichůdné trendy. Čím je matrice tužší, tím je méně rovnoměrné rozložení napětí na kontaktní ploše, což snižuje vypovídací schopnost výsledků experimentů. U velmi poddajné matrice z pryže je sice rozložení napětí téměř rovnoměrné (s výjimkou blízkého okolí ukončení ocelového válce, viz obr. 5), před porušením však dochází k velkým deformacím, což má za následek vznik dalších nenulových složek napětí. Tyto složky napětí, především **normálové napětí v kontaktní ploše**, zřejmě budou ovlivňovat vznik mezního stavu. Smykové

napětí ve stykové ploše obou materiálů pak již pravděpodobně nebude jediným parametrem rozhodujícím o vzniku mezního stavu dekoheze. Vliv normálového napětí na rozhraní materiálů byl proto ověřován experimentálně.

6.2 VLIV NORMÁLOVÉHO NAPĚTÍ NA ROZHRANÍ MATERIÁLŮ

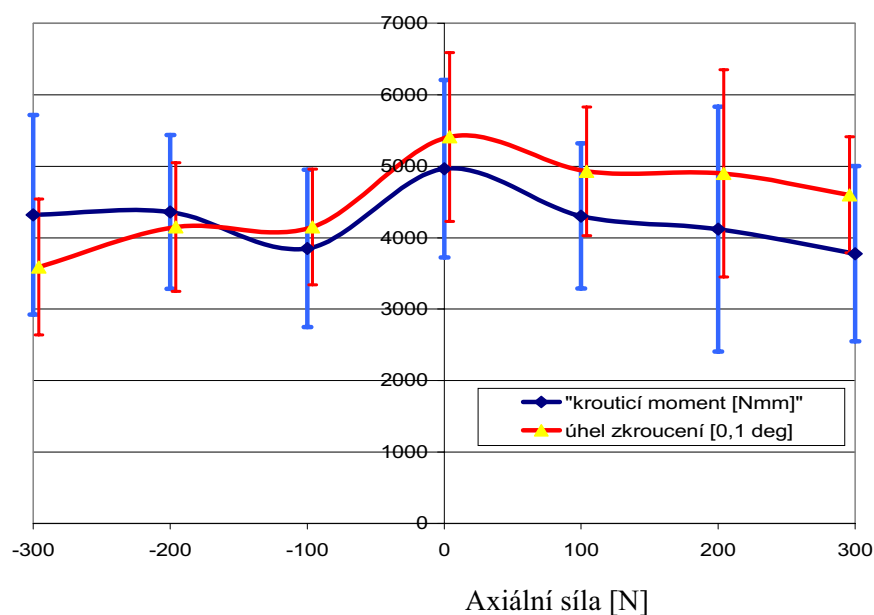
Posouzení vlivu normálového napětí na rozhraní materiálů na velikost mezního smykového napětí na tomto rozhraní (při porušení) bylo realizováno na sériově vyráběných součástech podle obr. 6. Tyto součásti sestávají z pryžového válce s ocelovými destičkami a centrickými upínacími šrouby na obou čelních plochách.

Vzorky byly nejprve předzatíženy axiální silou v rozmezí $\langle -300\text{N}; 300\text{N} \rangle$, která je po dobu experimentu udržována konstantní. Tato hodnota byla zvolena tak, aby byla řádově srovnatelná s pevností vzorku v tahu a přitom nehrozilo riziko porušení samotným tahovým namáháním. Poté byly vzorky zatěžovány **krutem až do porušení**. Závislost mezního krouticího momentu a mezního celkového úhlu zkroucení na axiální síle působící na zkušební těleso uvádí obr. 7. Pro každou hodnotu axiální síly bylo testováno cca 10 vzorků.

Pokud metodami lineární pružnosti (prut namáhaný krutem) vypočteme hodnotu smykového napětí na vnějším obvodu kontaktní plochy mezi ocelí a pryží, kterou nazveme **nominálním smykovým napětím** (modul průřezu v krutu je $W_k = 1145 \text{ mm}^3$), pak mezní hodnota tohoto napětí při porušení se pohybuje v rozmezí 2,7–5,7 MPa. Pevnost v tahu (nominální hodnota normálového napětí) byla 2–6 MPa. Hodnoty nominálních normálových a smykových napětí při porušení jsou tedy řádově srovnatelné (v obou případech jde smluvní napětí). Bez modelování metodou konečných prvků nelze však mezní hodnoty momentu a úhlu zkroucení v obr. 7 převést na odpovídající skutečné hodnoty napětí či přetvoření.



obr. 6 : Vzorek použitý pro krutovou zkoušku adheze pryž-ocel

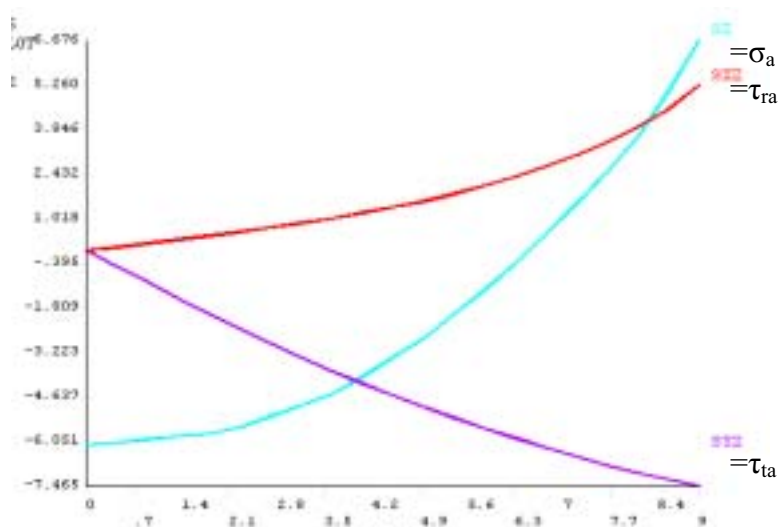


obr. 7 : Závislost mezních hodnot torzní pevnosti spoje na axiální síle působící na vzorek. Svislé úsečky definují směrodatné odchylky hodnot.

Z výsledků lze vyvodit následující závěry:

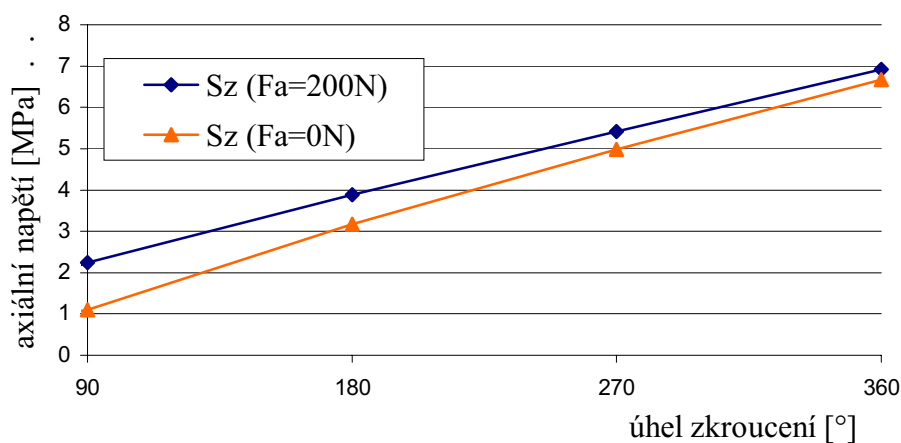
- Kladná i záporná síla působící ve směru normály k rozhraní materiálů snižuje mezní hodnoty torzní pevnosti spoje (jak napětí, tak deformaci), ale pokles je poměrně mírný.
- Rozptyl hodnot mezního úhlu zkroucení je menší než rozptyl hodnot mezního nominálního smykového napětí (krouticího momentu).

Pro podrobnější analýzu bylo provedeno výpočtové modelování s Ogdenovým konstitutivním modelem 2. řádu; nebyly však známy mechanické vlastnosti použité pryže, takže výsledky lze hodnotit pouze kvalitativně. Výsledky ukazují, že v případě zabráněných axiálních posuvů vzniká na čelech pryžového válce tlaková axiální síla, což bylo potvrzeno i experimentálně. V případě volných axiálních posuvů čel je axiální síla F_a sice nulová, ale nerovnoměrně rozložená axiální normálová napětí dosahují extrémních hodnot srovnatelných s napětími smykovými (obr. 8). S rostoucím



obr. 8 : Závislost jednotlivých složek napětí [MPa] na radiální souřadnici [mm] – pro úhel zkroucení 360° , volný posuv čel, $F_a = 0$ N.

úhlem zkroucení tato napětí rostou rychleji než při nenulové axiální síle (viz obr. 9), čímž se vliv axiální síly na napjatost v nebezpečném místě a tím i na riziko porušení vzorku stává méně podstatným. Tato skutečnost dostatečně vysvětluje experimentálně zjištěnou malou závislost mezních hodnot porušení na axiální síle působící na vzorek.



obr. 9 : Vliv osové síly F_a na průběh závislosti axiálního napětí S_z (na vnějším obvodu modelu) na úhlu zkroucení.

6.3 ZHODNOCENÍ ZKOUŠKY KRUTEM

Výsledky výpočtového modelování a experimentů naznačují, že zkouška krutem by mohla být schopna při vhodném uspořádání poskytnout poměrně věrohodnou mezní hodnotu soudržnosti

spoje některých materiálů. Omezení plynoucí pro tuto zkoušku z výpočtového modelování jsou následující:

- Je-li rozdíl v modulech pružnosti obou materiálů příliš nízký, zvyšuje se nerovnoměrnost rozložení napětí v kontaktní ploše.
- Jsou-li vlákna z materiálu, který nemá charakter kontinua (pletená nebo kroucená lanka, příze apod.), lze očekávat problémy s realizací krutové zkoušky i její simulací pomocí MKP.
- Vykazuje-li materiál matrice před porušením **velké deformace**, nelze již navodit podmínky, aby v kontaktní ploše obou materiálů působilo jen smykové napětí.

Pokud se materiálové vlastnosti matrice pohybují v rozmezí, kdy se neuplatní žádná z uvedených omezujících podmínek (bude to spíše u pryskyřic než u elastomerů), je hodnota mezního smykového napětí určená ze zkoušky krutem velmi málo závislá na rozměrech vzorku a mohla by být **materiálovou charakteristikou**. Další samostatnou kapitolou je ovšem použitelnost těchto výsledků ve výpočtovém modelování. Vzhledem k tomu, že mezní hodnota napětí je určována na vzorcích bez koncentrátoru napětí, praktickou použitelnost výsledků lze očekávat jen u těles, u nichž se na stykové ploše materiálů nevyskytují singularity napětí.

Při správném provedení je však kohezní vazba mezi pryží a ocelí tak pevná, že k **porušení obvykle dochází v pryži v těsné blízkosti rozhraní**. Podmínkou mezního stavu porušení spoje těchto materiálů by tedy mohla být obecná podmínka porušení pryže. Této problematice je věnována následující kapitola 7.

7 FORMULACE MEZNÍ PODMÍNKY PORUŠOVÁNÍ ELASTOMERŮ

Lze považovat za experimentálně prokázané, že při optimálním provedení spoje mezi elastomerem (pryží) a kovem (ocelí) dochází k porušování tohoto kompozitního materiálu v elastomeru v těsné blízkosti materiálového rozhraní. Dosud však nebyla formulována obecná mezní podmínka porušování elastomerů. Vědecké práce se v poměrně značné míře zabývají šířením trhlin v elastomerech (např. [21], [22], [23], [24]) nebo jejich porušováním kavitací (např. [25], [26], [27], [28], [29]). Nejdále v tomto směru zřejmě dospěla práce [30], která formuluje podmínky, za nichž v elastomeru dochází ke kavitaci. Vyplývá z ní mimo jiné, že ke kavitaci dochází při charakteru napjatosti blízcím se trojosé rovnoměrné tahové napjatosti. Tuto mezní podmínku budu dále nazývat **podmínkou HA**. Protože však k porušení při jiných typech napjatostí dochází odlišným mechanismem, nelze ji použít jako obecnou podmínku porušení pryže. Obecná podmínka porušení soudržnosti byla formulována na základě velmi rozsáhlého výpočtového modelování uvedeného v práci [1].

7.1 PŘEDPOKLADY NAVRŽENÍ MEZNÍ PODMÍNKY

Formulace **hypotézy mezního stavu porušení elastomeru** vycházela z výpočtového modelování chování sférické kavity v elastomeru. Jejím cílem je na základě **mikroskopické** napjatosti v blízkém okolí kavity, která rozhoduje o jejím chování, formulovat podmínky pro hodnoty **makroskopické**³ napjatosti ve vyšetřovaném objemu materiálu, za nichž v tomto objemu dochází k porušení. Hypotéza ve snaze o obecnost nepopisuje mechanismus porušení materiálu v okolí kavity, který je závislý na charakteru napjatosti. Je přitom založena na dvou základních **předpokladech**:

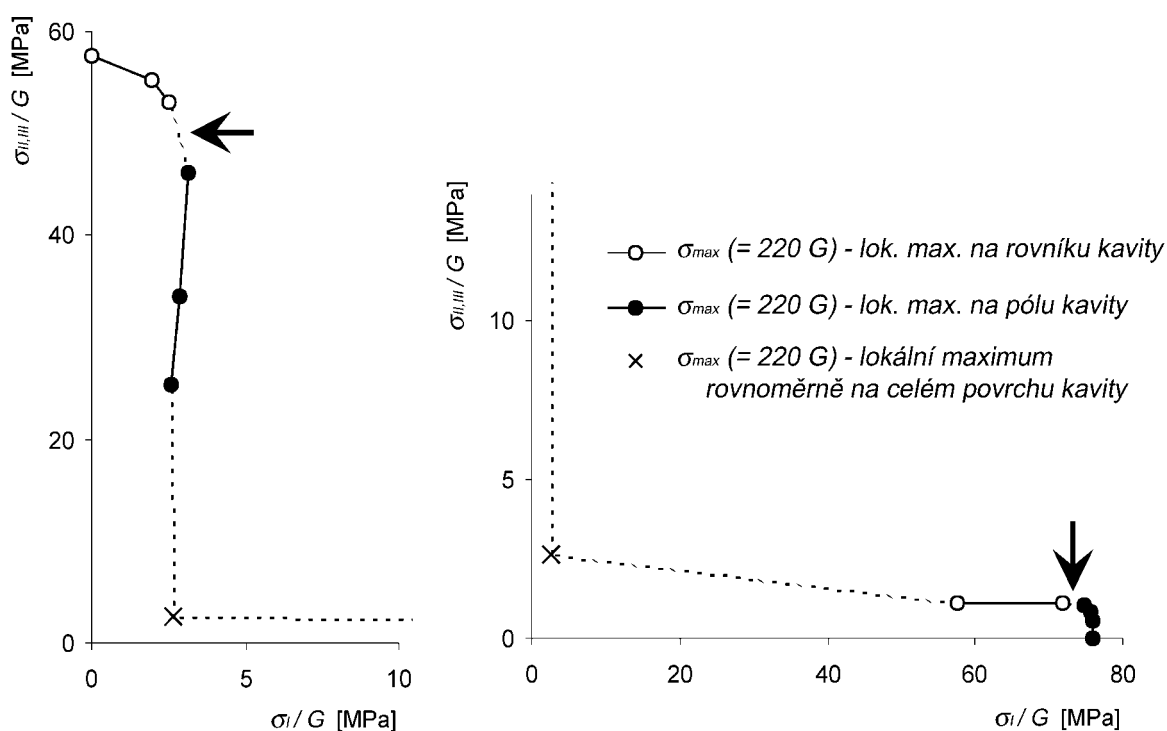
1. V elastomeru existuje **dostatečné množství kavit** tak velkých, aby jejich povrchová energie neměla podstatný vliv na jejich chování.
2. K porušení ve vyšetřovaném objemu materiálu v okolí kavity dojde tehdy, jestliže **maximální napětí** σ_{max} na povrchu kavity **dosáhne své kritické hodnoty** σ_{max}^{crit} , která je charakteristikou materiálu.

³ Jako makroskopickou označuji napjatost bez zohlednění kavity mikroskopických rozměrů, zatímco mikroskopickou je míněna napjatost ovlivněná touto kavitou.

Zatímco pro pevnost elastomerů v trojosé rovnoměrné napjatosti je obecně přijímána jako mezní hodnota napětí $\sigma_{triax}^{crit} = 2.5G$, mezní napětí při jednoosé **nebo dvouosé** napjatosti je až o 2 řády vyšší. Toto srovnání vedlo k hypotéze, že **rozhodujícím parametrem** pro relativně malou pevnost při trojosé napjatosti je **nejmenší z hlavních napětí** σ_3 ; toto bylo následně ověřováno výpočtovým modelováním, při němž byly hledány **parametry makroskopické napjatosti**, vyvolávající na povrchu hypotetické kavity **stejně maximální (mikroskopické) napětí** σ_{max} .

7.2 VÝPOČTOVÉ MODELOVÁNÍ CHOVÁNÍ KAVITY

Pro posouzení byl vytvořen MKP model válcové buňky materiálu s kulovou kavitou a řešen pro zatěžovací stavy vyvolávající v ní polorovnoměrnou, tj. rotačně symetrickou makroskopickou napjatost, definovanou vztahem $\sigma_{II} = \sigma_{III} = \sigma_{II,III}$. Výpočtové modelování potvrdilo velmi významný vliv nejmenšího hlavního makroskopického napětí σ_3 na mezní stav porušení.



obr. 10: Průběh izolinie maximálního mikroskopického napětí $\sigma_{max} = 220G$ na povrchu kavity v rotačně symetrické makroskopické napjatosti

Na obr. 10 je na základě výpočtových analýz znázorněna izočára stejných extrémních mikroskopických napětí na povrchu kavity v souřadnicích poměrných makroskopických napětí (pro zobecnění vyjádřených jako násobky modulu pružnosti materiálu ve smyku). Změna mechanismu porušení je vyznačena šipkou.

Přijmeme-li hypotézu, že o vzniku mezního stavu rozhoduje extrémní napětí na povrchu kavity, pak tato izočára může představovat **řez příslušnou mezní plochou**, znázorněnou v Haighově prostoru napjatosti, jehož souřadnicové osy odpovídají souřadnicím hlavních napětí $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$. To platí samozřejmě pouze tehdy, odpovídají-li hodnoty makroskopických napětí příslušným mezním hodnotám zjištěným pro význačné typy napjatosti (jednoosá, dvouosá rovnoměrná, trojosá rovnoměrná).

7.3 APROXIMACE MEZNÍ PLOCHY

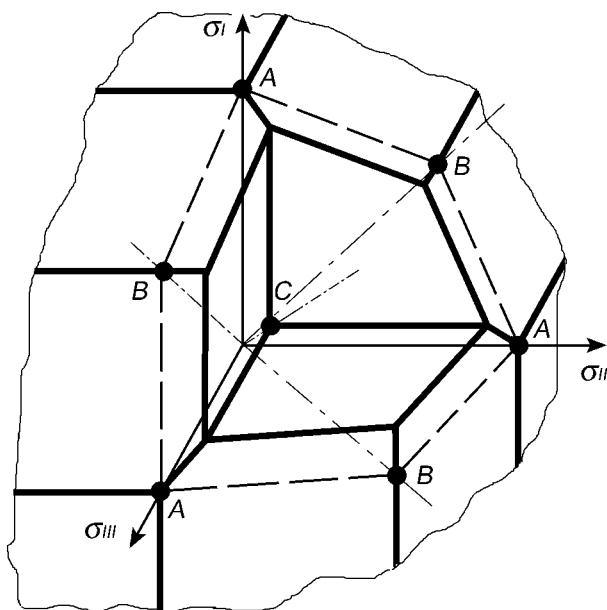
Pro matematické vyjádření mezní podmínky bylo zvoleno tříparametrické vyjádření, kde parametry jsou tři (nezávislé) hodnoty pevnosti v jednoosé, rovnoměrné dvouosé a trojosé

napjatosti, označené v tomto pořadí σ_{uniax}^{crit} , σ_{biax}^{crit} , σ_{triax}^{crit} . Rovnici mezní plochy budeme hledat jako lineární funkci hlavních napětí a těchto tří materiálových parametrů; její obecný tvar lze zapsat následující relací:

$$f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}, \sigma_{uniax}^{crit}, \sigma_{biax}^{crit}, \sigma_{triax}^{crit}) = 1 \quad (6)$$

Za těchto podmínek jsou mezní izoliny aproximovány přímkami, mezní plocha soustavou rovin. V habilitační práci je uvedeno celkem šest aproximací této mezní plochy, podstatu demonstrují na jedné z nich, popsané pro kladné hodnoty všech hlavních napětí vztahem:

$$\max \left\{ \frac{\sigma_3}{\sigma_{triax}^{crit}}; \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_{uniax}^{crit}} + \frac{\sigma_2}{\sigma_{biax}^{crit}} \right\} = 1 \quad (7)$$



obr. 11: Zobrazení mezní podmínky v Haighově prostoru napjatosti

Uvedená mezní podmínka popisuje mezní plochu v prvním oktantu Haighova prostoru. Vzhledem k tomu, že podmínka je formulována jako funkce hlavních napětí seřazených podle velikosti, představuje každý dílčí vztah v závorce rovnice (7) soustavu rovin. Rovnice vyhovuje jak pro popis jednoosé tahové napjatosti, při níž se redukuje na tvar $\frac{\sigma_1}{\sigma_{uniax}^{crit}} = 1$, tak i pro popis rovnoměrné dvouosé tahové napjatosti $\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{biax}^{crit}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_{biax}^{crit}} = 1 \right)$, resp. rovnoměrné trojosé tahové napjatosti

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{triax}^{crit}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_{triax}^{crit}} = \frac{\sigma_3}{\sigma_{triax}^{crit}} = 1 \right).$$

Rozšíření podmínky na zbytek Haighova prostoru vychází z předpokladu, ověřeného v [1] výpočtovým modelováním, že záporná hlavní napětí nemění podstatně maximální mikroskopická napětí na povrchu kavity, takže neovlivňují významně mezní stav. Takto zobecněná podmínka má rozšířený tvar daný vztahem

$$\max \left\{ \frac{\sigma_3}{\sigma_{triax}^{crit}}; \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_{uniax}^{crit}} + \frac{\sigma_2}{\sigma_{biax}^{crit}}; \frac{\sigma_1}{\sigma_{uniax}^{crit}} \right\} = 1 \quad (8)$$

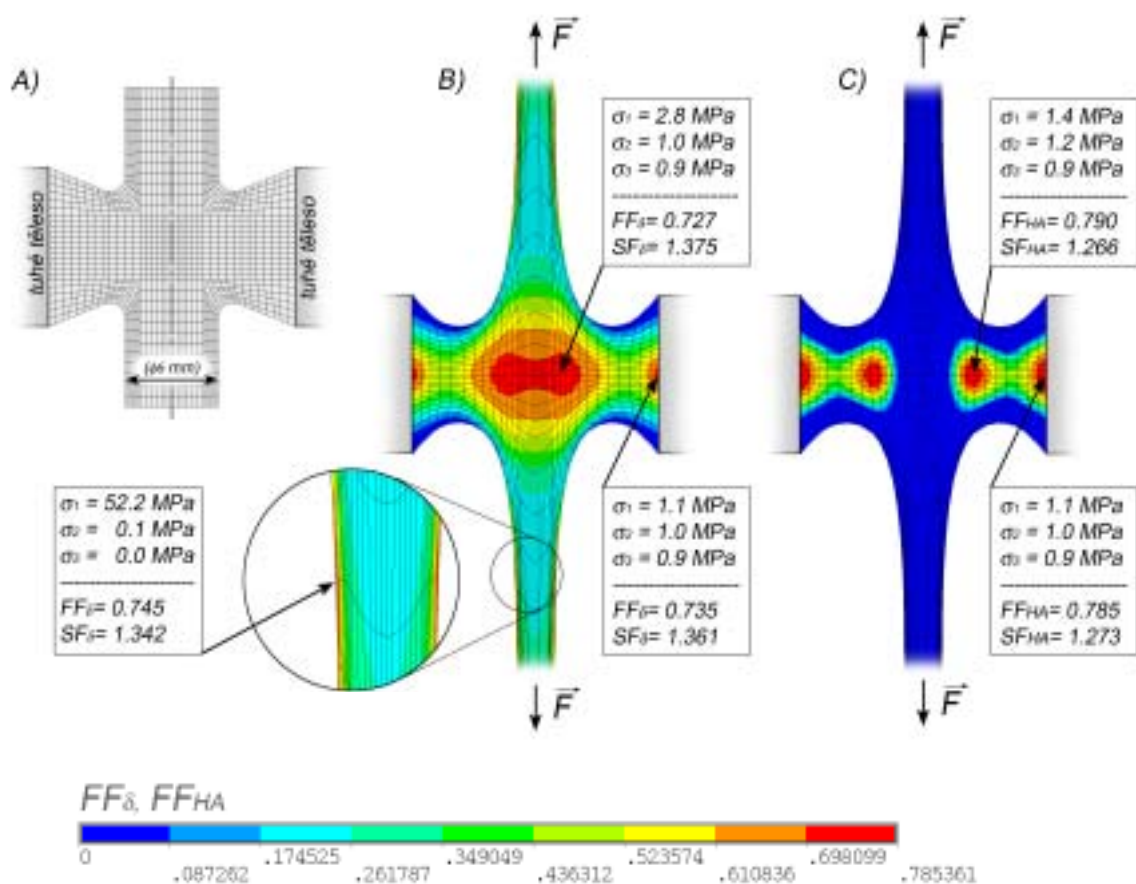
a její znázornění v H-W prostoru ukazuje obr. 11. Tuto mezní podmínku budu dále nazývat **podmínkou S**.

7.4 IMPLEMENTACE MEZNÍ PODMÍNKY DO PROGRAMU MKP

Hodnotu na levé straně rovnice (8) lze nazvat **součinitelem nebezpečnosti** (angl. „failure factor“ – FF). V praxi obvyklejší **součinitel bezpečnosti** („safety factor“ – SF) je pak jeho převrácenou hodnotou. Pro porovnání byly mezní podmínky HA a S implementovány do postprocessingu programového systému ANSYS. Na modelovém rotačně symetrickém tělese (obr. 12 A) pak lze ilustrovat **obecnou povahu této podmínky**, projevující se např. v porovnání s podmínkou HA, založenou na porušování kavitací.

Nedeformovaný tvar tělesa je na obr. 12A. Na obr. 12B jsou pro zatížený stav vykresleny průběhy součinitele nebezpečnosti podle obecné podmínky S, na obr. 12C tytéž výsledky zpracované podle podmínky HA, založené na kavitáčním porušování. Z obr. 12 je zřejmé, že

pro extrém v blízkosti středu rozhraní s tuhým materiálem (trojosá napjatost) jsou výsledky pomocí obou podmínek srovnatelné. Druhý lokální extrém v okolí těžiště tělesa však je již hodnocen rozdílně, především co do rozsahu. Nejmarkantnější je rozdíl ve svislé válcové části tělesa, kde podmínka **HA** vůbec neodhalí nenulové riziko porušení, které je však **správně posouzeno obecnou podmínkou S**.



obr. 12: Průběh součinitele nebezpečnosti (FF), resp. bezpečnosti (SF) v deformovaném elastomerovém tělese (A) podle podmínky **S** (B) a podle podmínky **HA** (C)

8 VÝPOČTOVÉ MODELOVÁNÍ NAPJATOSTI V ARTERIÍCH

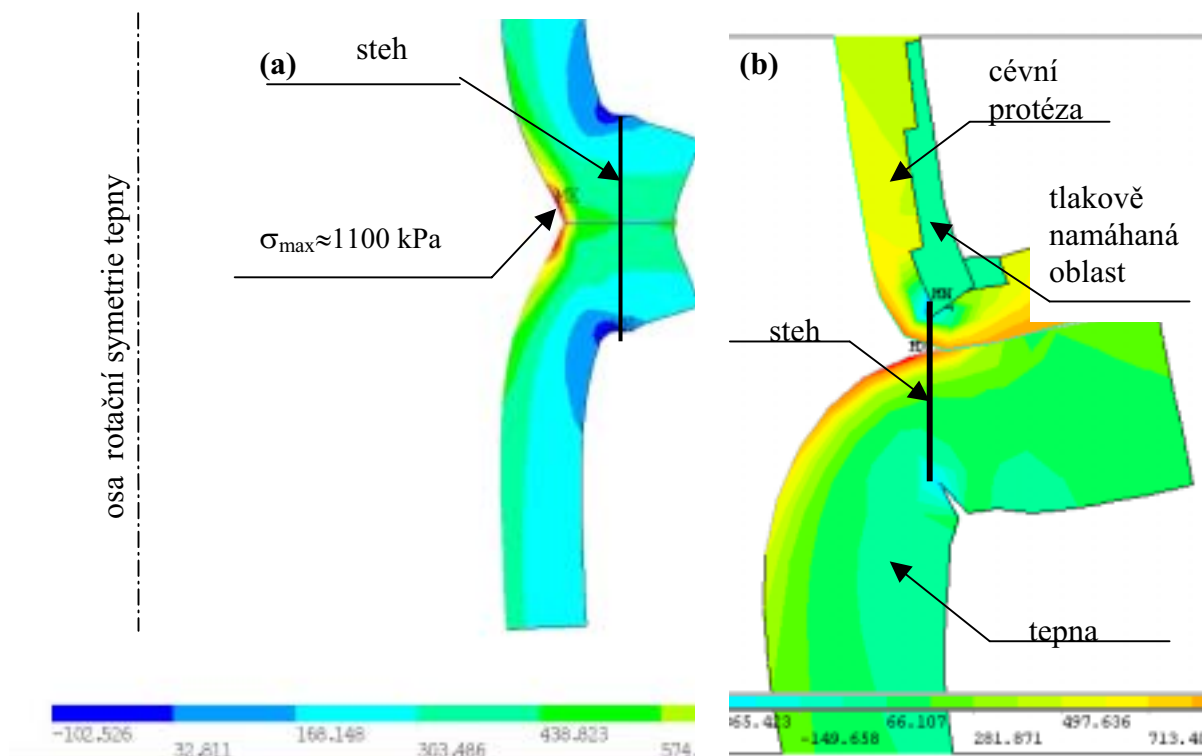
V této kapitole jsou prezentovány výpočtové modely chirurgického spojení tepen vzájemně mezi sebou, tepen s cévní náhradou a tepen silně postižených aterosklerózou.

8.1 VÝPOČTOVÉ MODELOVÁNÍ SPOJENÍ TEPEN A CÉVNÍCH PROTÉZ

Homogenní nelineárně elastický izotropní konstitutivní model byl používán i při modelování spojení tepen, resp. tepny s cévní protézou, a to konkrétně hyperelastický model Arruda-Boyce a model multilineárně elastický. Dosud publikované modely (např. [31]) modelují anastomózu jako ideální tupý spoj dvou válcových trubic a nerespektují skutečné provedení a geometrii spoje. Příklady výsledných rozložení napětí v okolí spoje jsou na obr. 13; model na obr. 13a znázorňuje spojení dvou identických částí tepny, tak jak se používá například u koarktace aorty, obr. 13b znázorňuje model spojení tepny s cévní protézou. Zatížení je vnitřním tlakem 20 kPa a v případě (a) ještě relativně vysokým axiálním protažením (30%), které je u těchto operací, na rozdíl od aplikace cévních protéz, obvyklé.

Protože při chirurgickém spojování tepny a protézy dochází k ohybu spojovaných okrajů, vyskytují se zde oblasti **záporných** (tlakových) **napětí a přetvoření**. U značně porézních pletených cévních protéz se samozřejmě vlastnosti v tlaku a v tahu **řádově liší**. Cévní protéza byla

modelována jako lineárně elastická s moduly pružnosti v tahu $E_t = 7000$ kPa. Výpočet byl prováděn **iteračně** tak, aby v těch prvcích, v nichž střední přetvoření ε_s bylo záporné, byl změněn modul pružnosti na hodnotu $E_d = 70$ kPa (tlakově namáhaná oblast na obr. 13b).



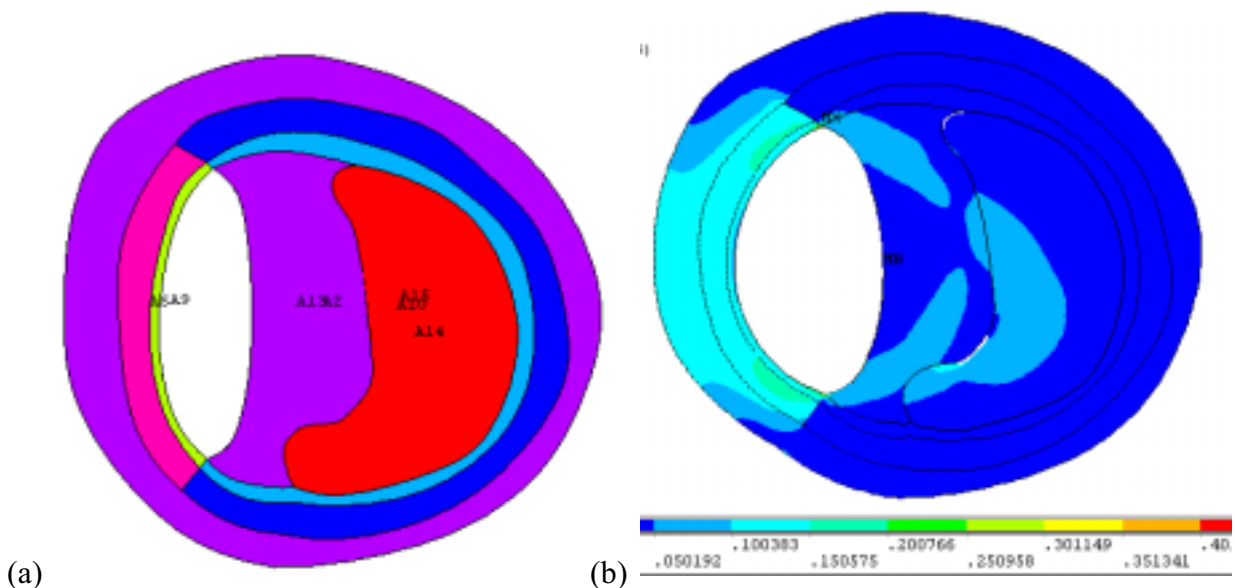
obr. 13: Rozložení obvodových napětí v meridiánovém řezu (a) modelu spoje dvou identických částí aorty; (b) modelu spoje aorty s cévní protézou

8.2 VÝPOČTOVÉ MODELOVÁNÍ TEPNY POSTIŽENÉ ATEROSKLERÓZOU

Modelování deformačně-napěťových stavů v aterosklerotické tepně bylo dosud realizováno na úrovni zjednodušené geometrie a homogenních vlastností tepny a ateromu (např. [32]). V práci [33] byly zřejmě poprvé publikovány výsledky **mechanických zkoušek jednotlivých vrstev cévní stěny** postižené aterosklerotickými změnami. Tepny byly navíc podrobeny i histologickému rozboru a byly k dispozici rovněž snímky z magnetické rezonance, takže je kromě základní geometrie příčného průřezu známo i přibližné rozložení jednotlivých typů tkání ve stěně tepny (viz obr. 14 (a)).

Ortotropie vlastností není v modelech uvažována, protože konstitutivní modely implementované v použitém softwaru to současně s velkými (nelineárními) deformacemi neumožňují. Z výsledků publikovaných v [33] však je zřejmé, že rozptyl vlastností mezi jednotlivými vzorky je vyšší než rozdíly mezi jednotlivými hlavními směry ortotropie materiálu. Proto lze předpokládat, že **izotropní model** vlastností materiálu je za těchto podmínek akceptovatelný.

Z hlediska geometrie bylo řešeno několik modelů vycházejících z obr. 14 (a), v němž jsou geometrickým podoblastem přiřazeny vždy příslušné typy tkání. Kromě uvedeného modelu byla řešena ještě tepna geometricky ideální, tj. válcová, a tepna zdravá, jejíž příčný průřez vychází rovněž z obr. 14(a), avšak bez přítomnosti ateromu. Výpočtový model byl vytvořen jako **rovinný** za podmínek rovinné deformace. Model byl zatížen vnitřním tlakem 16 kPa, odpovídajícím fyziologické hodnotě systolického tlaku krve.



obr. 14: Příklad MKP modelu arteria iliaca s ateromem, s vyznačením oblastí s různými typy tkání (a – nedeformovaný tvar) a rozložení největšího hlavního přetvoření (logaritmického v deformovaném modelu– (b)).

Pro modelování nelineárně elastického chování tkání byl nejprve použit model **multilineárně elastický** (Melas), poté byl jako nejvhodnější z hyperelastických modelů vybrán model **Yeoh 3. řádu** (viz [34]), jehož konstitutivní rovnice vypadá následovně:

$$W = \sum_{i=1}^N c_{i0} (I_1' - 3)^i + \sum_{k=1}^N \frac{2}{d_k} (J - 1)^{2k} \quad (9)$$

V rovnici znamená N zvolený stupeň polynomu, I_1' modifikovaný první invariant (pravého Cauchy-Greenova) tenzoru deformace a J poměrnou změnu objemu. Materiálové parametry c_{i0} a d_k se určují z deformačně-napěťových závislostí při základních režimech deformace. Konstanty c_{i0} pro zvolený stupeň polynomu (N=3) byly určeny z **jednoosé tahové zkoušky**. Z rozsáhlých testů vyplynul následující závěr:

Vychází-li konstitutivní model pouze z jednoosé tahové zkoušky, musí být rozsah přetvoření při této zkoušce podstatně (několikanásobně) vyšší než rozsah očekávaných přetvoření při víceosé napjatosti ve výpočtovém modelu.

Výpočtový model a jeho výsledky ilustruje obr. 14. Lze učinit následující závěry:

- **Intima je mechanicky významnou**, dokonce nejvíce namáhanou vrstvou stěny tepny.
- **Napětí v intimě** jsou silně ovlivněna nepravidelnostmi geometrie stěny a mohou být i za fyziologických podmínek **srovnatelná s pevností** této vrstvy.
- Tvorba ateromů současně se zmenšováním průtočného průřezu vede ke snižování napětí v intimě v některých oblastech po obvodu tepny. Protože v těchto oblastech dochází k lokálnímu zvyšování křivosti stěny tepny (viz obr. 14 (b)), v ostatních jejích vrstvách, především v adventitii, napětí spíše rostou. Je tedy možné, že podobně jako u remodelace tkání se i zde projevuje snaha živé tkáně při zvýšeném namáhání dosáhnout **návratu k fyziologickým hodnotám** změnami v geometrii a struktuře orgánů.

9 VÝPOČTOVÉ MODELOVÁNÍ HLADKÉ SVALOVÉ BUŇKY

Jako **odezva na jakoukoli změnu zatížení** nastává **remodelace tkání**, tj. přizpůsobování jejich struktury novým podmínkám, se snahou **navodit původní fyziologický stav**; i aterosklerotické procesy v cévní stěně jsou významně ovlivňovány mechanickými faktory. Všechny tyto procesy

začínají **na buněčné úrovni**, proto je třeba se zabývat i popisem mechanického chování jednotlivých buněk a pokusit se popsat jejich mechanické vlastnosti.

První model byl na úrovni homogenního izotropního nelineárně elastického kontinua, aby bylo v této inverzní úloze dosaženo jednoznačnosti řešení; cílem byla volba konstitutivního modelu a identifikace jeho parametrů na základě zkoušek jednoosým tahem podle [35], realizovaných na izolovaných buňkách hladkého svalu. Z těchto zkoušek byla jejich autory určována závislost zátěžné síly na protažení buňky, zatěžované pomocí mikropipet přilepených ke stěně buňky. Jako konstitutivní model byl vybrán pětiparametrický Mooney-Rivlinův vztah pro měrnou energii napjatosti ve tvaru

$$W = a_1(I_1' - 3) + a_2(I_2' - 3) + a_3(I_1' - 3)^2 + a_4(I_1' - 3)(I_2' - 3) + a_5(I_2' - 3)^2 + \frac{\kappa}{2}(I_3' - 1)^2, \quad (10)$$

kde I_i' ($i = 1,2,3$) jsou modifikované invarianty pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace, κ označuje objemový modul pružnosti a a_i ostatní materiálové parametry (Mooney-Rivlinovy konstanty).

Parametry konstitutivního modelu byly určovány iteračně. V prvním kroku byla výchozí křivka σ - ε odhadnuta jako běžná smluvní křivka pomocí elementárních analytických vztahů. Z této odhadnuté křivky byly určeny parametry zvoleného konstitutivního modelu. S těmito parametry pak byla **simulována tahová** zkouška. Výsledná křivka prodloužení-síla byla porovnána s experimentálně zjištěnou pomocí sumy kvadrátů odchylek. V dalších **iteračních krocích** byly parametry konstitutivního modelu modifikovány s cílem dosáhnout co nejlepší shody mezi experimentální a simulovanou křivkou síla-protážení. Výsledná křivka napětí-přetvoření (tj. křivka použitá v posledním kroku iterace) představuje konstitutivní popis **homogenního nelineárně elastického izotropního modelu** materiálu buňky a je popsána parametry použitého Mooney-Rivlinova modelu, uvedenými v tab. 6.

<i>tab. 6 : Konstanty Mooney-Rivlinova modelu získané iterací</i>					
Označení konstanty podle rovnice (10)	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
Hodnota konstanty	-3,53	3,86	-0,98	3,15	-0,43

9.1 ANALÝZA MOŽNOSTÍ VÝPOČTOVÉHO MODELOVÁNÍ BUŇKY

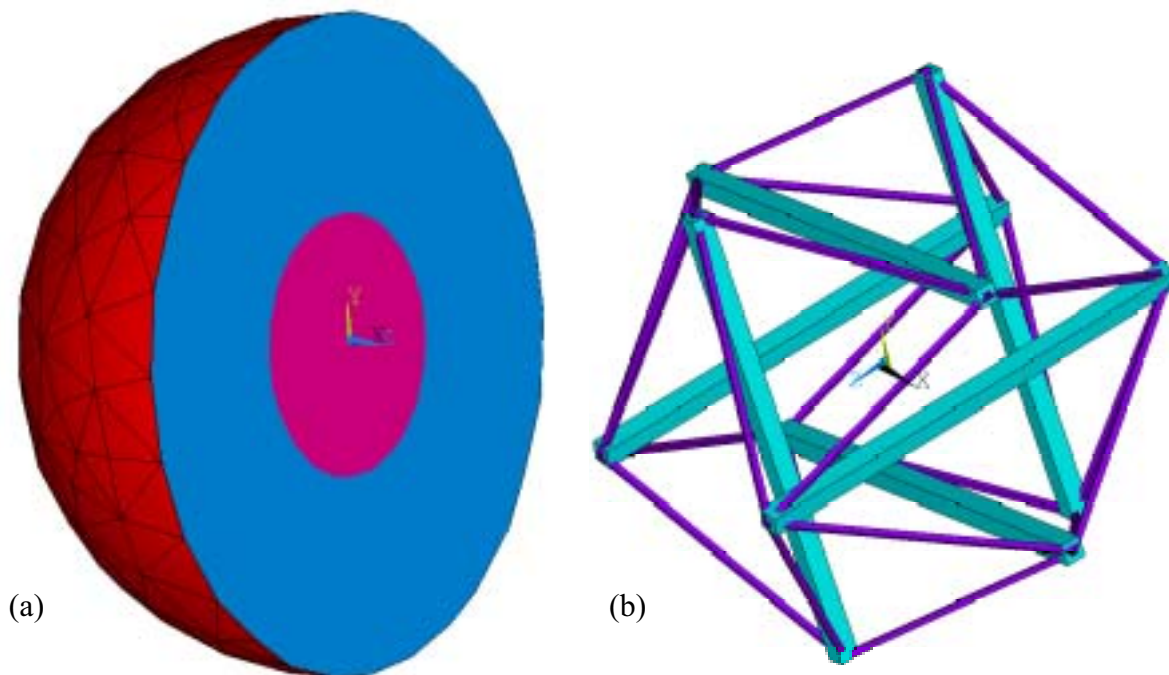
Možnosti identifikace parametrů složitějšího výpočtového modelu jsou limitovány mj. **nejednoznačností** řešení v případě příliš vysokého počtu proměnných parametrů. Výpočtový model hladké svalové buňky byl vytvořen na základě znalostí struktury buňky s následujícími základními strukturními složkami, podstatnými z hlediska mechaniky:

- **Membránový skelet** – tj. vyztužující vrstva pod buněčnou membránou.
- **Hluboký cytoskelet** – tj. mřížka vytvořená z mikrotubulů a mikrofilament.
- Centrální část buňky (**jádro** a přilehlé orgány).
- **Periferní části sarkoplazmy** (mimo jádro a jeho okolí).

Identifikace parametrů takového výpočtového modelu je samozřejmě mnohem komplikovanější, protože zahrnuje více materiálových parametrů a k jejich jednoznačnému určení je třeba využít výsledků více mechanických zkoušek. V poslední době byly publikovány další metody pro mechanické zkoušky jednotlivých buněk, což poskytuje rozšířené možnosti pro identifikaci konstitutivních parametrů modelů buněk. Kromě tahové zkoušky jsou to např. metoda aspirace mikropipetou (viz [36] a [37]), zkouška průniku [38] a tlaková zkouška mikrodestičkami [39], které se jeví použitelné pro výpočtové modelování a identifikaci materiálových parametrů jednotlivých konstitutivních vztahů.

Příklad modelu buňky na naznačené úrovni ukazuje obr. 15, kde jsou samostatně modelovány cytoplazma a jádro buňky, na jejímž povrchu je membránový skelet modelován vrstvou skořepinových prvků. Fiktivní geometrie hlubokého cytoskeletu (obr. 15b) bez detailní znalosti

jeho skutečné struktury byla přejata z práce [40]. Model cytoskeletu byl vytvořen jako tensegritní struktura⁴ (viz [41], [42], [43]), sestávající ze šesti silnějších členů přenášejících tlakové zatížení (ekvivalent mikrotubulů) a dvaceti předepjatých tenkých prutových členů (ekvivalent vláken). Tento hluboký cytoskelet je vnořen jako výztužná struktura do modelu buňky na obr. 15a.



obr. 15: Model hladké svalové buňky na základě tensegritní struktury
 (a) jádro, cytoplazma a membránový skelet (modelovaný skořepinovými prvky)
 (b) výztužná tensegritní struktura buňky – model hlubokého cytoskeletu

10 PERSPEKTIVY VÝPOČTOVÉHO MODELOVÁNÍ

Předkládaná práce se zabývá využitím výpočtového modelování při řešení problémů mechaniky, především spojených s deformačně-napěťovou analýzou, a to jak u objektů neživých, technických, tak u objektů živých. Mezi výpočtovým **modelováním elastomerů a měkkých tkání** existuje řada **analogií** a vzájemných propojení. I personální propojení obou oblastí lze dokumentovat na řadě významných vědeckých pracovníků, kteří formulovali např. současné nepoužívanější konstitutivní modely pryží (Ogden, Arruda, Boyce, Holzapfel a další) a v současnosti se věnují problematice konstitutivních modelů měkkých tkání. Přes společnou podstatu a řadu podobností existují mezi oběma oblastmi z pohledu konstitutivních modelů zásadní rozdíly, takže i o perspektivách pojednám odděleně.

10.1 TECHNICKÉ KOMPOZITNÍ MATERIÁLY

V oblasti vláknových kompozitů s elastomerovou maticí, používaných v technice, jsou v současnosti na vyhovující úrovni zvládnuty a implementovány v komerčně dostupných programových systémech pouze konstitutivní modely samotných elastomerů. Modely pro popis těchto kompozitů nejsou k dispozici, protože teorii vláknových kompozitů, odvozenou pro kompozity s křehkou nebo houževnatou maticí a založenou na předpokladu malých elastických přetvoření, nelze pro tyto materiály použít. Problémy, které je v oblasti výpočtového modelování

⁴ Pojem „tensegrity“ byl vytvořen v angličtině spojením slov „tensional integrity“. Tensegritní struktura je tvořena nespojitými tlakovými členy, jejichž spojitost (integrita) je zajištěna tahovými členy.

deformačně-napjatostních a mezních stavů u těchto kompozitů třeba řešit, lze rozčlenit na několik podoblastí:

1. Modely **konstitutivních závislostí** kompozitů na bázi homogenizace jejich vlastností, zohledňující směrovou orientaci vláken, velká přetvoření matrice mezi vlákny, příp. materiálovou nespojitost vláken (pletená nebo kroucená lanka) a interakce mezi vrstvami u vícevrstvých kompozitů.
2. **Podmínky porušení spojitosti** elastomerových materiálů – jsou specifické odlišnými mechanismy porušení od krystalických materiálů. Zatímco u houževnatých krystalických materiálů je typickým mechanismem vedoucím k porušení kluz na dislokačních rovinách, ke kterému nedochází při rovnoměrné trojosé napjatosti, je při této napjatosti naopak nejvyšší riziko kavitace, která je jedním z typických procesů vedoucích k porušení u elastomerů.
3. **Podmínky porušení soudržnosti** matrice a vlákna – při dostatečně pevné vazbě (kovalentní) mezi materiálem vlákna a matrice nedochází k oddělení obou materiálů přímo na rozhraní, nýbrž k porušení v elastomerové matrici v bezprostřední blízkosti materiálového rozhraní, které v elastomeru vyvolává napjatost blízkou rovnoměrné trojosé napjatosti. Konkrétní tvar rozhraní ovšem může vést na **napěťové singularity** v jeho okolí, které podstatně ovlivní vznik mezního stavu porušení.

Všem uvedeným oblastem se předkládaná práce v rámci výzkumné činnosti pracoviště v minulých letech do jisté míry věnovala. V oblasti modelování kompozitních struktur s elastomerovou matricí (pneumatik) se nepodařilo dosáhnout, aby vytvořený výpočtový model na základě změřených materiálových charakteristik věrohodně určoval deformačně-napěťové parametry výrobku. Příčinou je jednak značná složitost struktury, dále informační embargo uplatňované firmami vyrábějícími pneumatiky a také náročná výroba speciálních vzorků potřebných pro verifikaci výpočtových modelů. Přestože často bývají prezentovány modely simulující např. deformaci pneumatik při nejrůznějších zatěžovacích stavech, strukturní úroveň těchto modelů bývá utajována a nepodařilo se mi nalézt doklad o tom, že by úroveň výpočtového modelování ve vývojových základnách výrobních podniků byla zásadně vyšší. Pro **verifikaci dílčích výpočtových modelů** je nutné využívat (a zajistit výrobu) speciálně navržených vzorků.

V oblasti popisu podmínek porušení elastomerů se podařilo **formulovat obecnou fenomenologickou podmínku porušení**, založenou na předpokladu, že k porušení dochází tehdy, dosáhne-li mikroskopické největší hlavní napětí na povrchu hypotetické kavity v elastomeru jisté mezní hodnoty, charakteristické pro materiál. Tato podmínka byla zformulována na základě známých mezních hodnot makroskopických napětí při význačných stavech napjatosti a rozsáhlého výpočtového modelování. Její experimentální verifikace vyžaduje návrh a **výrobu speciálních těles** z pryže v kombinaci s kovem, ve kterých by se za pomoci výpočtového modelování určovaly parametry deformačně-napěťových stavů, při nichž dochází k porušení.

V oblasti porušování soudržnosti dvou materiálů byla navržena **zkouška krutem**, která na rozdíl od dosud používaných zkoušek adhezní pevnosti není tak závislá na rozměrech vzorku. Její praktické využití však zřejmě zůstane omezeno na materiály matrice nevykazující velká přetvoření. V případě elastomerů dochází k porušení výchozích předpokladů o charakteru napjatosti na ploše materiálového rozhraní. V kompozitech s elastomerovou matricí je však porušení úzce spojeno s porušením samotného elastomeru.

10.2 BIOLOGICKÉ KOMPOZITNÍ MATERIÁLY – MĚKKÉ TKÁNĚ

Výpočtové modelování tkání cévní stěny se ubírá dvěma základními směry. První je modelování na **makroskopické** úrovni, tj. tvorba modelů stěny cévy na základě jistého stupně homogenizace jejich vlastností, a to buď pro celou stěnu, nebo lépe pro její jednotlivé vrstvy. Špičková světová pracoviště již zvládla techniku **oddělování strukturních vrstev** stěny cévy a měření jejich materiálových charakteristik. Mohou tak být vytvářeny modely na úrovni různých tkání, zastoupených jak ve zdravé, tak především v patologické tepně. Především

v aterosklerotické tepně se vyskytuje větší počet mechanicky odlišných materiálových komponent. Pro věrohodné alespoň komparativní výpočtové modelování deformačně-napěťových stavů těchto tepen a jejich případné interakce s implantáty je třeba jednak používat nejsložitější konstitutivní modely, které jsou průběžně stále zdokonalovány, jednak získávat co nejdokonalejší informace o geometrii patologických orgánů a tkání. Problém v oblasti konstitutivního modelování spočívá v jeho bouřlivém rozvoji v posledních letech, který není zachycen softwarovými firmami zabývajícími se tvorbou výpočtových programů; jediná cesta pro výzkum v tomto směru pak vede přes náročnou **tvorbu vlastních programů**, schopných používat stále dokonalejší konstitutivní modely, příp. v implementaci nových konstitutivních modelů do stávajících komerčních softwarových produktů. Tato poslední možnost je závislá na uživatelské přístupnosti zdrojových textů prodávaného softwaru, která nebývá vždy pro zákazníky zajišťována. V oblasti konečnoprvkových výpočtů se předběžně jeví jako nejvýhodnější v tomto směru programový systém Abaqus. V oblasti získávání reálné 3D geometrie je doposud nezvládnutým problémem **slabá rozlišitelnost** jednotlivých typů **měkkých tkání** v obrazech z CT i NMR. Na rozdíl od modelování kostí, kde již byly vytvořeny programové systémy umožňující prakticky automatické převedení získaného 3D obrazu do výpočetního systému s rozlišením jednotlivých struktur, segmentaci měkkých tkání na jednotlivé typy musí provádět odborník ručně v každém 2D obraze a ještě bývá výsledek často nejednoznačný. Proto dosud nebyly publikovány 3D modely cév, které by realisticky popisovaly jejich geometrii včetně rozložení jednotlivých typů tkání. Tato oblast je stále velkou výzvou pro budoucnost.

Druhou cestu výpočtového modelování cévní stěny představují modely na **mikroskopické** úrovni jednotlivých buněk. Cílem těchto modelů je přispět k poznání procesů (například aterosklerotických nebo remodelačních) probíhajících v tkáni, které jsou iniciovány na úrovni buněk a ovlivněny jejich deformačně-napěťovými stavy. Pro řešení této problematiky je třeba postupně přecházet od nejjednodušších výpočtových modelů homogenního izotropního kontinua k modelům respektujícím vnitřní strukturu buňky. Poznání struktury buněk je možné především díky elektronové mikroskopii, pro určení mechanických vlastností jednotlivých buněčných komponent však je třeba dále vyvíjet experimentální techniku a zdokonalovat výpočtové modely, aby umožňovaly co nejvěrohodnější výpočtové modelování. Současná úroveň tzv. „tensegritních“ modelů, tak jak jsou prezentovány i v této práci (kap. 9.1), je významným pokrokem oproti modelu homogenního kontinua, ale struktura výztužných prvků ve všech současných modelech je stále **silně idealizovaná**, protože chybí dostatek znalostí o skutečné struktuře cytoskeletu a dalších mechanicky významných složek buňky.

11 ZÁVĚR

Předkládaná práce představuje v jistém smyslu vývoj výzkumné činnosti v oblasti mechaniky kompozitních materiálů vykazujících velké deformace na Ústavu mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky v posledních letech, na níž jsem se podstatnou měrou podílel nebo ji v případě doktorandů řídil. Lze konstatovat, že se podařilo **zachytit aktuální trendy** v této oblasti, především pokud se týká výpočtového modelování chování hyperelastických materiálů. Bylo zvládnuto řešení problémů spojených s mechanikou těchto materiálů na úrovni, která byla ještě před několika lety nemyslitelná. Za přínos práce lze považovat především pokrok v řešení následujících problémů:

V oblasti živých materiálů:

- Deformačně-napěťová analýza cévní stěny, zahrnující všechny podstatné zatěžující účinky.
- Deformačně napěťová analýza stěny tepny v okolí chirurgického spojení se stejnou tepnou nebo umělou cévní náhradou.
- Deformačně napěťová analýza patologické tepny s ateromatózním plátem.
- Experimentální určování mechanických charakteristik biologických materiálů.

- Výpočtové modelování deformačně-napěťových stavů hladkých svalových buněk cévní stěny, založené na experimentech prováděných v laboratoři biomechaniky na Osaka University v Japonsku.

V oblasti neživých materiálů:

- Experimentální určování mechanických charakteristik elastomerů.
- Zvládnutí aktuálních konstitutivních modelů hyperelastických materiálů.
- Poznání problematiky porušování spojení elastomerů s krystalickými materiály.
- Vytvoření výpočtových modelů těles z kompozitních materiálů, tvořených kombinací elastomeru s kovem (pneumatika, pryžové silentbloky).
- Formulace obecně použitelné podmínky porušování elastomerů.

Uvedené výsledky vytvářejí úroveň, která je srovnatelná s předními pracovišti ve světě a je základem pro další úspěšnou výzkumnou činnost v této oblasti.

12 LITERATURA

- [1] Skácel P.: Výpočtové a experimentální modelování deformačně napjatostních a mezních stavů elastomerů a jejich rozhraní s tuhými materiály. *Disertační práce*, ÚMTMB, FSI, VUT Brno, 2004.
- [2] Mullins L.: Softening of Rubber by Deformation. *Rubber Chemistry and Technology*, Vol. 42, 1969, pp. 339-362.
- [3] Krmela J.: Návrh výpočtového prostorového modelu radiální pneumatiky. *Disertační práce*, Univerzita Pardubice, Dopravní fakulta Jana Pernera, 2004.
- [4] Burša J.: Analýza napjatosti a deformace ve stěně tepny. *Disertační práce*, ÚMT, FS, VUT Brno, 1999.
- [5] Takamizawa K., Hayashi K.: Strain energy density function and uniform strain hypothesis for arterial mechanics. *Journal of Biomechanics*, Vol.20, No.1, 1987, pp.7-17.
- [6] Maltzahn W.W.v., Besdo D., Wilmer W.: Elastic Properties of Arteries: A Nonlinear Two-Layer Cylindrical Model. *J.Biomechanics*, Vol.14, No.6, 1981, pp.389-397.
- [7] Fung Y.C., Fronek K., Patitucci P.: Pseudoelasticity of Arteries and the Choice of its Mathematical Expression. *Amer. Journal of Physiology*, Vol. 237, 1979, pp. H620-H631.
- [8] Chuong C.J., Fung Y.C.: On Residual Stresses in Arteries. *Journal of Biomechanical Engineering*, Vol.108, May 1986, pp. 189-192.
- [9] Chuong C.J., Fung Y.C.: Residual stress in arteries. In: *Frontiers in Biomechanics*, ed. Schmidt-Schönbein, Springer Verlag, New York, 1986.
- [10] Simon B.R., Kaufmann M.V., McAfee M.A., Baldwin A.L.: Porohyperelastic Finite Element Analysis of Large Arteries Using ABAQUS. *Journal of Biomechanical Engineering*, Vol.120, April 1998, pp.296-298.
- [11] Simon B.R., Kaufmann M.V., McAfee M.A., Baldwin A.L., Wilson L.M.: Identification and Determination of Material Properties for porohyperelastic Analysis of large Arteries. *Journal of Biomechanical Engineering*, Vol.120, April 1998, pp.188-194.
- [12] Rachev A., Hayashi K.: Theoretical study of the effects of vascular smooth muscle contraction on strain and stress distributions in arteries. *Ann. Biomed. Engr.*, Vol. 27, 1999, pp. 459-468.
- [13] Zulliger M.A., Rachev A., Stergiopoulos N.: A constitutive formulation of arterial mechanics including vascular smooth muscle tone. *Am J Physiol Heart Circ Physiol*, Vol. 287, 2004, pp. H1335-H1343.
- [14] Holzapfel G.A., Gasser T.C., Ogden R.W.: A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models. *Journal of Elasticity*, Vol. 61, 2000, pp. 1-48.

- [15] Vaishnav R.N., Vossoughi J.: Estimation of residual strains in aortic segments. In: Biomedical Engineering II: Recent Developments. ed. Hall C.W., *Pergamon Press*, New York, 1983, pp. 330-333.
- [16] Vaishnav R.N., Vossoughi J.: Residual stress and strain in aortic segments. *Journal of Biomechanics*, 1987, Vol.20, pp.235-239.
- [17] Schulze-Bauer C. A. J., Regitnig P., Holzapfel G.A.: Mechanics of the human adventitia. *13th Conference of the European Society of Biomechanics*, September 2002, Wroclaw, Poland.
- [18] Greenwald S.E., Moore J.E.Jr., Rachev A., Kane T.P.C., Meister J.-J.: Experimental Investigation of the Distribution of Residual Strains in the Artery Wall. *J. Biomechanical Engineering*, Vol.119, November 1997, pp.438-444.
- [19] Matsumoto T., Goto T., Furukawa T., Sato M.: Residual stress and strain in the lamellar unit of the porcine aorta: experiment and analysis. *J. Biomechanics*, Vol. 37, 2004, pp.807-815.
- [20] Matsumoto T., Goto T., Sato M.: Microscopic Residual Stress Caused by the Heterogeneity in the Lamellar Unit of the Porcine Thoracic Aortic Wall. *JSME International Journal*, Series A, Vol. 47, No.3, 2004, pp.341-348..
- [21] Legorju-jago K., Bathias C.: Fatigue Initiation and Propagation in Natural and Synthetic Rubbers. *International Journal of Fattigue*, Vol.24, 2002, pp. 85-92.
- [22] Deegan R. D., Petersan P. J., Marder M., Swinney H. L.: Oscillating Fracture in Rubber, 2001.
- [23] Rivlin R. S., Thomas A. G.: Rupture of rubber. Part 1. Characteristic energy for tearing. *Journal of Polymer Science*, Vol. 10, 1953, pp. 291-318.
- [24] Gent A. N., Chang T. Y. P., Leung M. B.: Fracture and Fatigue of Bonded Rubber Blocks under Compression. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 44, No. 6, 1993, pp. 843-855.
- [25] Gent A. N., Lindley P. B.: Internal Rupture of Bonded Rubber Cylinders in Tension. *Proc. R. Soc. Lond.* A249, 1958, pp. 195-205.
- [26] Gent A. N., Tompkins D.A.: Nucleation and Growth of Gas Bubbles in Elastomers. *Journal of Applied Physics*, Vol. 40, No. 6, 1969, pp. 2520-2525.
- [27] Cho K., Gent A. N.: Cavitation in Model Elastomeric Composites. *J. Materials Sci.*, Vol. 235, 1988, pp. 141-144.
- [28] Pond T. J.: Cavitation in Natural Rubber Cylinders Repeatedly Loaded in Tension. *J. of Natural Rubber Research*, Vol. 10, No.1, 1995, pp. 14-25.
- [29] Horgan C. O., Polignone D. A.: Cavitation in Nonlinearly Elastic Solids: a Review. *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 48, 1995, pp. 471-485.
- [30] Hou H., Abeyaratne R.: Cavitation in Elastic-Plastic Solids. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 40, 1992, pp. 571-592.
- [31] Matsumoto T., Itagaki H., Hayashi K.: FEM Analysis of Stress and Deformation in the Vicinities of arterial Graft Anastomosis. *J. Applied Biomaterials*, Vol.5, 1994, pp. 79-87.
- [32] Hayashi K., Imai Y.: Tensile Property of Atheromatous Plaque and an Analysis of Stress in Atherosclerotic Wall. *J. Biomechanics*, Vol.30, No. 6, 1997, pp. 573-579.
- [33] Holzapfel G.A., Sommer G., Regitnig P.: Anisotropic Mechanical Properties of Soft Tissue Components in Human Atherosclerotic Plaques. *J. Biomechanical Engineering*, Vol.126, No.5, November 2004, pp.657-665.
- [34] Yeoh O.H.: Characterization of Elastic Properties of Carbon Black Filled Rubber Vulcanizates. *Rubber Chemistry and Technology*, Vol. 63, No. 5, 1990, pp. 792-805.
- [35] Miyazaki, H., Hasegawa, Y., Hayashi, K.: Tensile properties of contractile and synthetic vascular smooth muscle cells, *JSME Int. J.*, Vol. 45, 2002, 870-879.
- [36] Sato M., Levesque M.J., RM Nerem R.M.: Micropipette aspiration of cultured bovine aortic endothelial cells exposed to shear stress, *Arteriosclerosis*, Vol. 7, 1987, 276-286.

- [37] Sato M., Ohshima N., Nerem R.M.: Viscoelastic Properties of Cultured Porcin Aortic Endothelial Cells Exposed to Shear Stress. *Journal of Biomechanics*, Vol.29, No. 4, 1996, pp. 461-467.
- [38] Hayashi K.: Tensile properties and local stiffness of cells. *Symposium IUTAM*, Graz, June 2004.
- [39] Thoumine O. and Ott A.: Time scale dependent viscoelastic and contractile regimes in fibroblasts probed by microplate manipulation, *Journal of Cell Science*, Vol. 110, 1997, pp.2109-2116.
- [40] McGarry J.G., Prendergast P.J.: A Three-Dimensional Finite Element Model of an Adherent Eukaryotic Cell. *European Cells and Materials*, Vol. 7, 2004, pp. 27-34.
- [41] Ingber D.E.: Cellular tensegrity: defining new rules of biological design that govern the cytoskeleton. *J. of Cell Science*, Vol. 104, 1993, pp. 613-627.
- [42] Ingber D.E.: Tensegrity I. Cell structure and hierarchical systems biology. *J. of Cell Science*, Vol. 116, No.7, pp. 1157-1173.
- [43] Ingber D.E.: Tensegrity II. How structural networks influence cellular information processing networks. *J. of Cell Science*, Vol. 116, No.8, pp. 1397-1408.

ABSTRACT

This work deals with multilevel computational modelling of problems of mechanics of solid bodies of composite materials with hyperelastic matrix. These materials are used mostly in production of tyres, and a similar type of fibre composite can be found in soft living tissues as well. The thesis starts with an overview of theories of computational modelling of fibre composites (linear elastic, i.e. without large deformations) and of their failure. Then an overview of strain energy density functions used at elastomers (mostly isotropic) and soft tissues (anisotropic, some of them with influence either of wavy fibres and their direction, or of muscle cells and their activation) is presented.

As an example of a technical body, a computational model of tyre is presented. Such a complex structure cannot be solved with taking its fibre structure into account; it is modelled as a body composed of several (eight) various types of hyperelastic, isotropic or anisotropic materials. This model, however, does not give realistic results; therefore it is sought for causes of these discrepancies, which can lie in the different tensional and bending stiffnesses of the element, in the non-continuous character of fibres (knitted or twisted of many thin wires) and maybe in other discrepancies of the model. Therefore only the behaviour of a composite bilayer was modelled; the model gave realistic results in tension, but non-realistic in bending, probably because of the discontinuity of fibres or of the non-realistic description of the rubber properties.

Also conditions of the interface failure between steel and rubber have been investigated using experiments and computational modelling. A torsion test has been proposed for evaluation of limit shear stresses in the interface; it seems, however, to give acceptable results only at linear elastic materials (e.g. epoxy resin with steel). In the case that one of the materials (rubber) shows large strains, the failure occurs not in the interface, but in the rubber near the interface; then the composite failure is expected to be driven by the rubber failure. However, no general condition of rubber failure has been formulated till now. Therefore an attempt was made to formulate such a failure criterion on the basis of computational modelling of behaviour of a cavity in the rubber under various stress states.

In the field of soft tissues, computational models of large arteries have been created at the level of macrostructure. Model of connection of arteries with a realistic geometry of the anastomosis and hyperelastic properties of the tissue is presented. In the connection of an artery and a knitted vascular graft, the graft material is modelled with different elastic properties in tension and compression; the criterion used to distinguish between them is the sign of the mean strain (first invariant of the strain tensor). The model of a highly sclerotic (nearly occluded) artery respects several different types of tissues in the diseased artery. It shows, in contrary to the generally accepted assumption, that the intima is a highly stressed layer; the stresses in it can reach its strength value but are decreased by the atheromatous plaque.

At the microscale level, models of behaviour of smooth muscle cells under basic mechanical tests is presented. Parameters of the Mooney-Rivlin constitutive model of cytoplasm as a homogeneous hyperelastic continuum are identified on the basis of the tension tests realized with the smooth muscle cells. A more complex model is based on the tensegrity structure of the cytoskeleton connected with the membrane skeleton (modelled by shell elements), and it includes nucleus and the remaining cytoplasm modelled as different elastic continua. This model has too many material parameters to be identified from a single material test only; its parameters are chosen to give realistic results, but these values cannot be unambiguous. Additional material tests (compression test, micropipette aspiration test, indentation tests) should be used in future to identify material parameters of the model.