

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
Fakulta strojního inženýrství
Ústav matematiky

Mgr. Jana Procházková

MODELOVÁNÍ MATEMATICKÝCH PLOCH V CAD SYSTÉMECH

Modeling of mathematical surfaces in CAD systems

ZKRÁCENÁ VERZE Ph.D. THESIS

Obor: Matematické inženýrství
Školitel: doc. PaedDr. Dalibor Martišek, Ph.D.
Oponenti: prof. Ing. Josef Kohoutek, CSc.
Doc. RNDr. Josef Janyška, CSc.
Datum obhajoby: 31.5.2007

Klíčová slova

počítačová grafika, CAD, matematické plochy, NURBS, B-spline, T-spline, NURBS interpolace, geografický informační systém, tensor product surface

Keywords

computer graphics, CAD, mathematical surfaces, NURBS, B-spline, T-spline, NURBS interpolation, geographic information system, tensor product surface

Místo uložení práce

Oddělení pro vědu a výzkum

FSI VUT v Brně, Technická 2896/2, 616 69

© Jana Procházková, 2007

ISBN 978-80-214-3455-4

ISSN 1213-4198

Obsah

1	ÚVOD	5
2	NURBS OBJEKTY	5
3	CÍL PRÁCE	6
3.1	HLAVNÍ CÍLE DISERTAČNÍ PRÁCE:	6
4	B-SPLINE, NURBS OBJEKTY	7
5	IMPLEMENTACE NURBS OBJEKTŮ	8
5.1	NURBS KŘIVKY A JEJICH DERIVACE	9
5.2	NURBS PLOCHY	9
5.3	NURBS TĚLESA	10
6	NOVÉ PŘÍSTUPY PŘI STUDIU MATEMATICKÝCH PLOCH	11
6.1	TENZOROVÝ SOUČIN MEZI NURBS OBJEKTY	12
6.1.1	Tenzorový součin mezi Grassmannovými prostory	12
6.1.2	Odvození tenzorového součinu pomocí vektorových prostorů a přidružených lineárních forem	13
6.1.3	Tenzorový součin pomocí váhovo-bázových funkcí	14
6.2	VLIV UZLOVÝCH VEKTORŮ NA TVAR PLOCHY	15
6.3	PODMÍNKY HLADKÉHO NAPOJOVÁNÍ NURBS PLOCH	15
6.4	VYUŽITÍ NURBS INTERPOLACE V LÉKAŘSTVÍ	17
6.4.1	Matematický zápis	17
6.4.2	Testování metody provedené na válci	18
6.5	VYUŽITÍ T-SPLINE V GIS	18
7	ZÁVĚR	20
	LITERATURA	22
	ŽIVOTOPIS	27
	ABSTRACT	28

1 ÚVOD

Počítačová grafika a geometrie je jedním z velmi progresivních odvětví informačních technologií. Potřeba digitalizace naměřených dat, vizualizace objektů či návrh nových tvarů se stala nedílnou součástí většiny průmyslových odvětví – strojírenství, stavebnictví, design. K zobrazování objektů jsou nutné co nejobecnější tvary, které lze jednoduše měnit a zároveň jednoznačně matematicky vyjádřit. K tomuto účelu se v současné době nejčastěji používají NURBS (Neuniformní Racionální B-Spline) objekty.

Při pohledu do historie zjistíme, že o první pokusy sestavit křivky a plochy s těmito vlastnostmi se inženýři velkých automobilek pokoušeli již v 60. letech minulého století. Postupně se objevily Bézierovy, Coonsovy, Fergusonovy a další typy křivek a ploch.

Velký rozvoj nastal s objevem B-spline křivek a ploch, které vznikly zobecněním Coonsových kubik. Tyto křivky již nesly první znaky pozdějších vlastností NURBS. Jsou dány řídicími body spojenými s bázovými funkcemi. Přidáním vah a neuniformních uzlových vektorů otevřely nové konstrukční možnosti NURBS křivky a plochy. Tak postupně vznikl obor, který nese název CAD – Computer Aided Design.

2 NURBS OBJEKTY

Za zakladatele teorie týkající se B-spline objektů je považován Carl de Boor. V díle (9) položil základy týkající se matematického aparátu spline funkcí. Podrobný popis vlastností a některých algoritmů lze nalézt v (29), (48). Zkoumání NURBS křivek a ploch se věnovala celá řada vědců a za shrnutí velké části znalostí je považována kniha (30).

Vzhledem k již poměrně dlouhému vývoji existuje celá řada vědeckých článků zabývajících se studiem týkajícím se NURBS objektů či vlastností. ((28), (49), (16), (17)).

Z fyzikálního pohledu jsou nejzajímavější tzv. D-NURBS (Dynamic NURBS), které v sobě dokáží zachytit další fyzikální vlastnosti a staly se součástí při měření fyzikálních jevů (více viz (46), (47)).

Bez NURBS objektů se v dnešní době neobejde většina grafických aplikací (Maya, Rhinoceros, Blender, atd.). Otázkou je, proč používat NURBS? Výhod existuje celá řada. Patří mezi ně lokální kontrolovatelnost (změna jednoho parametru ovlivní objekt pouze lokálně), rychlý a stabilní algoritmus výpočtu, možnost kreslení kuželoseček, zachovaná spojitost při změnách a samozřejmě takřka neomezené konstrukční možnosti.

Z těchto důvodů je NURBS křivkám a plochám v oblasti Computer science věnována velká pozornost. Vývoj samozřejmě pokračuje dál a NURBS objekty jsou zlepšovány. Novým trendem se staly T-splines. Jedná se o zobecnění NURBS plochy, jejíž body nemusí ležet v pravidelné obdélníkové mřížce. V roce 2005 byly implementovány do programu Autodesk Maya a v roce 2006 do programu Rhinoceros ((39), (43)).

3 CÍL PRÁCE

Při vývoji těchto objektů je však často kladen důraz jen na technickou stránku věci, aniž by se věnovala pozornost matematickým souvislostem. Cílem této práce je tedy přispět k vývoji těchto objektů, a to jak po stránce matematické, tak po stránce jejich aplikace a to v různých oblastech – grafický design, lékařství, geografické informační systémy.

Při vědecké práci se lze zabývat známými pojmy, vlastnostmi a algoritmy s cílem odhalit nové souvislosti, objevit elegantnější důkaz či efektivnější algoritmus. Druhou možností je vydat se cestou nového vývoje do neprobádaných oblastí. Ve své práci jsem využila oba přístupy. První přístup při zkoumání derivací, vlastností a způsobech implementace NURBS objektů, druhý přístup při rozboru a využití T-spline ploch – nejnovějšího rozšíření NURBS ploch.

3.1 HLAVNÍ CÍLE DISERTAČNÍ PRÁCE:

1. **Analytické vyjádření derivace NURBS křivek.** Derivace NURBS křivek hrají důležitou roli při výpočtech, např. statiky objektů. Práce dává nový důkaz pro vzorec výpočtu, jeho srovnání se současně používanou numerickou derivací a také způsob vlastní implementace. Navržený způsob výpočtu derivace byl v r. 2006 implementován do komerčního softwaru RFEM 3D.
2. **Modelace vlivu uzlového vektoru na tvar NURBS.** NURBS objekty patří mezi nové křivky a plochy, které se zadávají řídicími body a dalšími parametry. Těmi jsou uzlové vektory a váhy jednotlivých bodů. Většina aplikací nabízí možnost práce s uzlovými vektory, ta však není intuitivní. V dostupné literatuře neexistuje přehledný geometrický pohled na vliv uzlového vektoru na tvar křivek a ploch.
3. **Matematický popis jednoduchých NURBS těles z netradičního tenzorového pohledu.** Pro usnadnění práce s NURBS plochami jsou ve většině kvalitních aplikací předdefinována základní NURBS tělesa – koule, kužel, válec, hranol, obecná rovina a anuloid. Lze je elegantně popsat pomocí tenzorového součinu. Tento přístup je v literatuře silně opomíjen.
4. **Matematická formulace nových trendů a jejich uplatnění v geografických informačních systémech.** Novým trendem se staly T-spline a T-NURCCs plochy, které obsahují uzly T-junctions. Jedná se o zobecnění NURBS ploch, jejichž řídicí body nemusí ležet v pravidelné obdélníkové mřížce. Tyto objekty postupně nacházejí široké použití v grafických systémech, mohou však být použity i v jiných oblastech. V práci je demonstrováno jejich možné použití v geografických informačních systémech při vykreslování ploch ze zadaných dat.
5. **Využití interpolace pomocí NURBS křivek v lékařství.** V rámci spolupráce s ústavem strojírenské technologie naší fakulty a nemocnicí u sv. Anny v Brně vyvíjíme program založený na interpolaci pomocí NURBS, který bude v budoucnu sloužit při výrobě kolenních kloubních náhrad. Výzkum je v současné době v testovací fázi.

6. **Návrh efektivních způsobů implementace** NURBS křivek, ploch a základních těles s ohledem na jejich stabilitu a rychlost.
7. **Ověření navržených metod implementací do německého komerčního CAD softwaru RFEM 3D.** V rámci doktorského studia jsem spolupracovala s firmou Fem Consulting, do jejichž komerčního softwaru RFEM 3D implementuji svoje teoretické poznatky a testuji výsledky. Systém RFEM 3D slouží k navrhování stavebních konstrukcí či strojních součástí, na které je následně aplikována metoda konečných prvků pro výpočet statiky a dalších důležitých konstrukčních vlastností.
8. **Srovnání implementace a stability NURBS v grafických programech, kde jsou již implementovány, s mými metodami implementovanými v programu RFEM 3D.**

4 B-SPLINE, NURBS OBJEKTY

Základem B-spline i NURBS objektů jsou B-spline funkce, které jsou nazývány bázovými funkcemi. Jsou definovány rekurentně následujícím způsobem.

Definice 4.1. Nechť $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ je uzlový vektor. **B-spline funkce** stupně k je definována jako:

$$N_i^0(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \in \langle t_i, t_{i+1} \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$N_i^k(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} N_i^{k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(t), \quad (1)$$

$$\text{kde } 0 \leq i \leq n - k - 1, 1 \leq k \leq n - 1, \frac{0}{0} := 0.$$

Každá B-spline křivka je zadána posloupností řídicích bodů P_i , uzlovým vektorem \mathbf{t} a stupněm křivky n . Uzlový vektor je neklesající posloupnost reálných čísel s určitými omezeními, které jsou dány vlastnostmi B-spline funkcí. Pak můžeme vyjádřit B-spline křivku rovnicí:

$$C(t) = \sum_{i=0}^n P_i N_i^n(t) \quad (2)$$

Pokud ke každému bodu přidáme váhu w_i , tj. kladné reálné číslo určující vliv bodu na tvar křivky a uzlový vektor nebude uniformní (rozdíl sousedních hodnot není konstantní), dostáváme NURBS křivku:

$$C(t) = \frac{\sum_{i=0}^m w_i P_i N_i^n(t)}{\sum_{i=0}^m w_i N_i^n(t)}, \quad (3)$$

Jestliže vezmeme jako síť $(q+1)(r+1)$ bodů P_{ij} spolu s jejich váhami w_{ij} , dva uzlové vektory (\mathbf{u}, \mathbf{v}) a dva stupně (m, n) pro sloupce a řádky, dostáváme vyjádření pro NURBS plochu:

$$C(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^r w_{ij} P_{ij} N_i^m(u) N_j^n(v)}{\sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^r N_i^m(u) N_j^n(v)}, \quad (4)$$

Novým typem matematických ploch se staly T-spline plochy, jejichž řídicí body nemusí ležet v pravidelné mřížce jako body NURBS či Bézierovy plochy. Body jsou vzájemně lokálně svázány a to je popsáno pomocí T-mesh, která určuje tyto vazby. Ke každému bodu jsou přiřazeny dva uzlové vektory, které se odvozují z T-mesh. Jejich délka je závislá na stupni plochy. Stupeň se volí jediný pro celou plochu (teorii zpracovává (42), (39)).

Výhodou T-spline je samozřejmě ohromná volnost při návrhu, ale také jsou to dva algoritmy - T-spline simplification pro redukci řídicích bodů a local refinement ke zjemnění sítě bodů bez vlivu na tvar plochy.

Nechť máme dány body T-spline plochy P_i s vahami w_i . Rovnice obecného bodu na ploše jsou dány vztahem:

$$P(s, t) = \frac{\sum_{i=0}^n (x_i, y_i, z_i) B_i(s, t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i(s, t)}. \quad (5)$$

Bázové funkce jsou dány jako

$$B_i(s, t) = N[s_{i0}, s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}, s_{i4}](s) N[t_{i0}, t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}, t_{i4}](t).$$

Bázová funkce $N[s_{i0}, s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}, s_{i4}](s)$ je asociována s uzlovým vektorem

$$s_i = [s_{i0}, s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}, s_{i4}]$$

a funkci $N[t_{i0}, t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}, t_{i4}](t)$ je přiřazen uzlový vektoru

$$t_i = [t_{i0}, t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}, t_{i4}].$$

Rovnice T-spline jsou velmi podobné obecným NURBS plochám. Zásadní rozdíl je ve tvaru a způsobu odvození uzlových vektorů.

5 IMPLEMENTACE NURBS OBJEKTŮ

V rámci doktorského studia jsem spolupracovala s firmou Fem Consulting, která se podílí na vývoji komerční aplikace RFEM 3D, která slouží k návrhu stavebních konstrukcí a k výpočtu jejich fyzikálních vlastností metodou konečných prvků.

Teoretické poznatky, které jsem postupně získávala během studia, jsem mohla ověřit v praxi. Při návrhu programu je nutné dbát na stabilitu, robustnost a bezchybnost programů. Proto bylo nutné podrobné studium k nalezení všech speciálních případů a kritických míst algoritmů.

V roce 2006 obsahoval release programu RFEM 3D implementované NURBS křivky s výpočtem derivací a v letošním roce budou přidány NURBS plochy a tělesa. Uvedené ukázkové plochy byly vytvořeny v testovacím prostředí FemDev, které používám při návrhu a testování algoritmů.

5.1 NURBS KŘIVKY A JEJICH DERIVACE

Pro potřebu fyzikálních výpočtů je nutné znát co nejpřesnější hodnoty prvních derivací v bodech NURBS křivky. V aplikaci RFEM 3D je již implementována numerická metoda. Existuje však i analytická metoda pro výpočet derivací, které je dána větou 5.1.

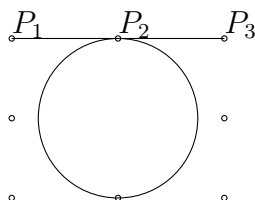
Věta 5.1. *Máme-li dánu B-spline funkci danou definicí 4.1, pak její první derivaci lze vyjádřit jako*

$$C(t)' = \sum_{i=0}^m N_i^n(t)' P_i, \quad (6)$$

kde

$$N_i^n(t)' = \frac{n}{t_{i+n} - t_i} N_i^{n-1}(t) - \frac{n}{t_{i+n+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{n-1}(t) \quad (7)$$

Její důkaz jsem provedla matematickou indukcí a oproti důkazu uvedenému v (30) obecnějším způsobem. Během implementace byla objevena výjimka, kdy podle teoretického předpokladu derivace neexistuje, ale v daném bodě známe tečnu. To se stane v případě, když parametr pro tento řídicí bod má násobnost v uzlovém vektoru rovnu stupni křivky, ale tento řídicí bod a bod před a za tímto bodem leží na přímce. Příkladem může být kružnice a její řídicí body P_1, P_2, P_3 .



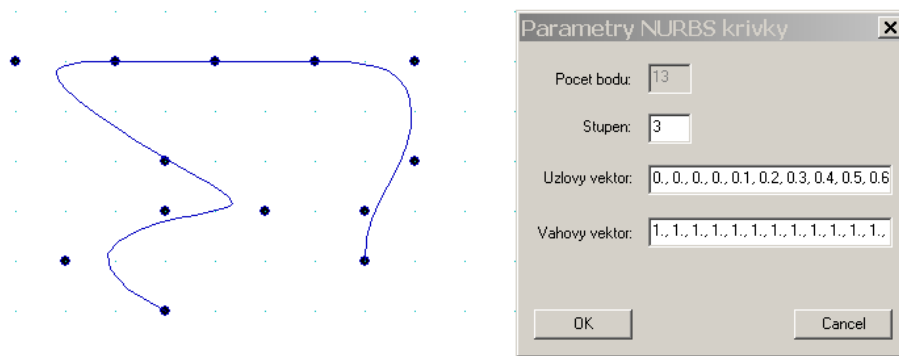
Obrázek 1: Speciální případ derivace

Výpočet bodů NURBS křivky probíhá deBoorovým algoritmem. NURBS křivky se zadávají řídicími body s váhami, uzlovým vektorem a stupněm, jak je vidět na obr. 2.

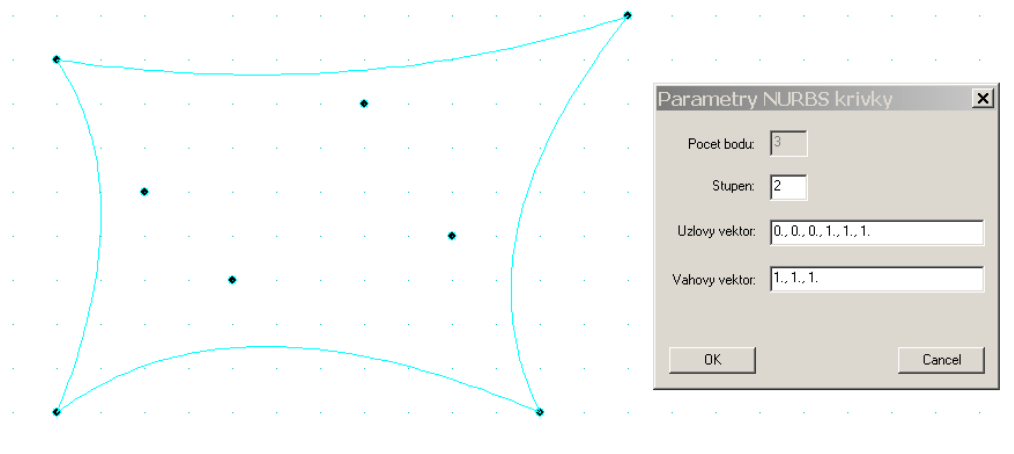
5.2 NURBS PLOCHY

Obecná NURBS plocha je dána sítí řídicích bodů spolu s jejich váhami. Dále je nutné znát řádkový a uzlový vektor a stupně křivek v obou směrech. Toto zadání je uživatelsky nepříjemné a nepoužívá se. Ve své práci jsem vybrala pro zadávání ploch určení jejich okrajových křivek. Program dogeneruje vnitřní body automaticky.

Princip programování obecné NURBS plochy spočívá v tom, že rozdělíme výpočet na dvě části, tedy používáme dvakrát deBoorův algoritmus pro výpočet obecného bodu NURBS křivky. Při návrhu algoritmu je nutné velmi precizně ošetřit vstupní podmínky, zkontrolovat jednotlivé zadávající křivky a při výpočtu ošetřit krajní hodnoty parametrů. Na obr. 3 je ukázka obecné NURBS plochy a způsobu zadání jedné z jejích tvořících křivek.



Obrázek 2: Zadávání NURBS křivky



Obrázek 3: Zadání obecné NURBS plochy

5.3 NURBS TĚLESA

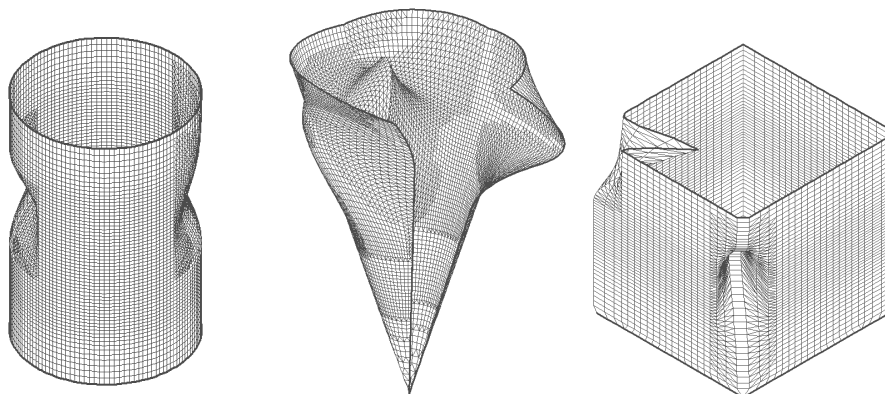
Dalším krokem v implementaci NURBS objektů jsou předdefinovaná tělesa – kužel, válec, koule, anuloid, rovina, hranol a obecná rotační plocha. Zadání těchto objektů je konvenční. Uživatel má možnost na rozdíl od analytického zadání určit také počet rovnoběžek a poledníků či úhel rozevření tělesa. Každý objekt lze jednoduše upravovat – měnit polohu bodů, jejich váhy, uzlový vektor.

Pro obecné NURBS plochy byla vytvořena třída `SNurbs`. Tělesa budou implementována jako samostatné třídy, které jsou potomky třídy `SNurbs`. Třída `SNurbs` obsahuje metodu `param` pro výpočet obecných bodů ploch, kterou budeme volat při konstrukci všech NURBS těles.

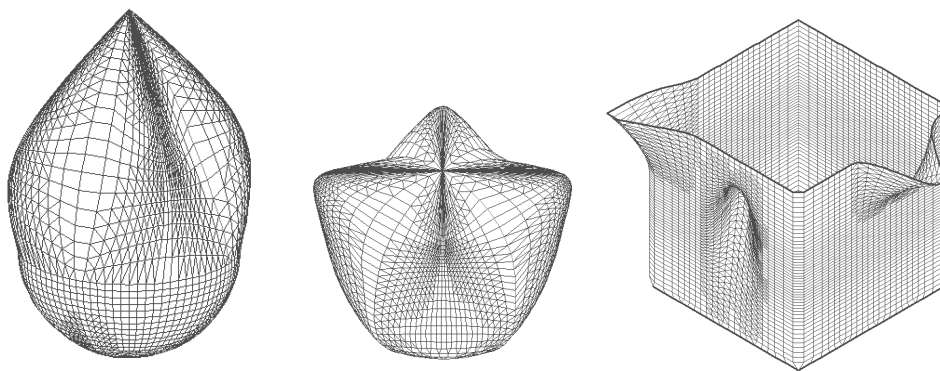
System implementace je pro každé těleso stejný. Uživatel zadá vstupní hodnoty pro dané těleso, v konstruktoru příslušné třídy se vstup zkontroluje metodou `test` a pokud je vše v pořádku, tak se metodou `spoctiParametry` vypočítají základní parametry pro obecnou plochu (řídící body, váhy, uzlové vektory). Poté využitím dědičnosti můžeme použít metodu

param z rodičovské třídy `SNurbs` a plochu vykreslit. Ukázky NURBS ploch a možnosti jejich editace jsou na obr. 4, 5, 6.

Pro každé těleso je nutné zkontrolovat vstupní podmínky, zda jsou zadané body různé, leží v požadovaných pozicích, atp. Dále je nutné udat omezení pro počet rovnoběžek a poledníků a úhel rozevření tělesa.



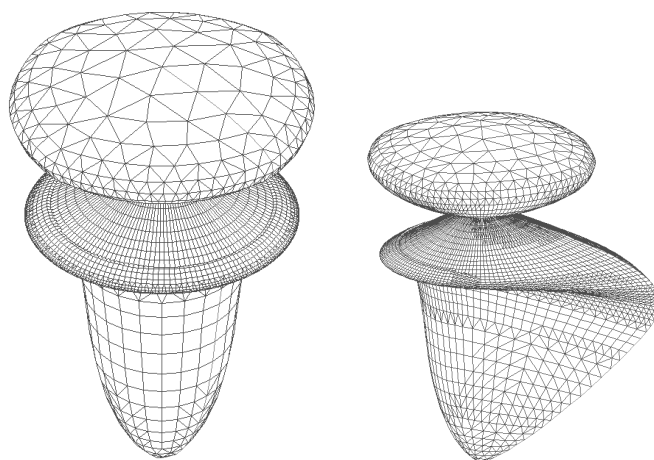
Obrázek 4: Modifikace NURBS těles I



Obrázek 5: Modifikace NURBS těles II

6 NOVÉ PŘÍSTUPY PŘI STUDIU MATEMATICKÝCH PLOCH

NURBS objekty nemusíme studovat pouze z praktického implementačního hlediska. Můžeme na ně nahlížet i z geometrického tenzorového pohledu či zkoumat vliv uzlového vektoru na tvar výsledné plochy. Hladké napojování NURBS plátů je v technické praxi řešeno pomocí dodatečné funkce nazývané *merge*. Vhodnou úpravou řídicích bodů plochy dané podmínkami



Obrázek 6: Rotační NURBS tělesa

v části 6.3 lze vytvořit přímé hladké napojení dvou ploch. NURBS a T-spline nejsou pouze doménou grafických oborů. Ve své práci jsem řešila i jejich nová uplatnění – geografické informační systémy či lékařství.

6.1 TENZOROVÝ SOUČIN MEZI NURBS OBJEKTY

NURBS plochy a tělesa jsou v literatuře ((30), (45)) popisovány jako tzv. *tensor product surface*, což je možné přeložit jako plochy vzniklé tenzorovým součinem. Ve své práci jsem se zaměřila na aplikaci tenzorového součinu na NURBS tělesa. V literatuře existují dva pohledy na tenzorový součin u NURBS objektů – odvození tenzorového součinu pomocí vektorových prostorů a přidružených lineárních forem a použití Grassmannových prostorů. Při podrobnějším studiu jsem zjistili, že ani jeden z těchto dvou přístupů není matematicky korektní, proto jsme zavedli tzv. kvazitenzorový součin mezi bilineárními zobrazeními.

6.1.1 Tenzorový součin mezi Grassmannovými prostory

Racionální křivky jsou prvky Grassmannových prostorů, a proto můžeme definovat tenzorový součin přímo mezi dvěma Grassmannovými prostory. Grassmannovy prostory jsou rozšířením afinních prostorů o základní operace. Teorii a jejich vzájemné propojení lze nalézt například v (12).

Základní myšlenka je převzata z klasické mechaniky, kde jsou body (umístění) a vektory (síly). K bodům můžeme také přidat objekty (hmotu), na kterou budou síly působit. Tak vznikají hmotné body, v našem případě je nazýváme body s vahami.

V Grassmannově prostoru jsou tyto body dány dvojicí (P, w) , kde P je bod afinního prostoru a w je skalár. Body s nulovou vahou nazýváme vektory a značíme $(v, 0)$. Mezi nimi lze zavést všechny operace a vyjádřit NURBS křivku jako:

$$R(t) = \sum_{i=0}^n \left(\frac{w_i B_i(t)}{\sum_{j=0}^n w_j B_j(t)} \right) (P_i + v(t)). \quad (8)$$

V našem případě se budeme pohybovat v prostoru V_4 , což je prostor trojrozměrných bodů s váhami. Tensorového součin je dán v prostoru $V_4 \otimes V_4$. Dimenze výsledného prostoru je součin obou dimenzí, tedy V_{16} . Naším úkolem je tedy najít vnoření prostoru V_{16} do V_4 a následně do V_3 .

Toto vnoření však není jednoznačně dáno. Musí se stanovit výrazná omezení. Dalším problémem v tomto přístupu je provádění operací s body, resp. vektory, které je vyjadřují. Například posunutí bodů, které je nezbytné při hledání bodů válce, otáčení pro anuloid, atd. Z tohoto důvodu je tento přístup pouze formální a přispívá k pochopení významu vah pro jednotlivé řídicí body.

6.1.2 Odvození tensorového součinu pomocí vektorových prostorů a přidružených lineárních forem

Následující přístup je popsán v jednom z prvních děl týkajících se B-spline profesora Carl de Boora – (9). Tensorový součin je popsán pomocí vektorových prostorů funkcí na množině.

Nechť U je vektorový prostor funkcí, všechny jsou definovány na množině X do reálných čísel. A necht' V je také vektorový prostor funkcí definovaný na množině Y do \mathbb{R} . Pro každé $u \in U$ a $v \in V$ pravidlo

$$w(t, s) = u(t)v(s), \text{ pro } \forall (t, s) \in X \times Y \quad (9)$$

definuje funkci na $X \times Y$, kterou nazýváme tensorovým součinem u a v a značíme $u \otimes v$.

Množina všech lineárních kombinací funkcí na $X \times Y$ typu $u \otimes v$ pro libovolné $u \in U$ a $v \in V$ se nazývá tensorový součin U s V a značíme jej $U \otimes V$.

Dále se definují přidružené lineární formy f , resp. g na obou prostorech. Poté můžeme definovat $f \otimes g$ jako:

$$f \otimes g \left(\sum_i u_i \otimes v_i \right) = \sum_i f(u_i)g(v_i) \text{ pro } \forall u_i \otimes v_i. \quad (10)$$

Za vektorové prostory zvolíme prostory B-spline funkcí. Přidružené lineární formy f a g jsou lineární formy na U, V , které můžeme nazvat vyčíslovací funkce. Nyní vezmeme dva prvky prostorů U a V – $N_i^n(t)$ a $N_j^m(s)$ a příslušné vyčíslovací funkce f, g určují souřadnice bodů B-spline křivky.

$$(f \otimes g)(w) = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q R_{ij} N_i^n(t) N_j^m(s), \quad (11)$$

kde R_{ij} jsou souřadnice řídicích bodů $R_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$ výsledné B-spline plochy jejichž odvození (9) neuvádí.

Na tomto přístupu je názorně vidět matematická podstata výpočtu bodů na ploše vzniklé tenzorovým součinem. Pro pevný parametr vypočítáme na každém sloupci (resp. řádku) pomocí první vyčíslovací funkce jeden bod. Ty tvoří nové hodnoty, na které aplikujeme druhou vyčíslovací hodnotu s pevným parametrem. Výsledkem je bod plochy.

Tento, na první pohled názorný způsob má však velkou mezeru. Tenzorový součin je definován jako zobrazení dvou či více vektorových prostorů do tělesa. Rovnice (9) však definuje tenzorový součin do jiného prostoru, což není korektní. Pro názornost je však tenhle způsob ideální, avšak nejedná se o čistou definici tenzorového součinu, kterou jsme zavedli pomocí kvazitenzorového součinu.

6.1.3 Tenzorový součin pomocí váhovo-bázových funkcí

Při následujícím rozboru budeme pracovat s vektorovými prostory B-spline funkcí. To, že se jedná o vektorový prostor není na první pohled zřejmé. Definici a částečné ověření uvádí (8).

Náš přístup přichází s rozšířením definice tenzorového součinu na kvazitenzorový součin, který je definován obecně do jiného prostoru. Kombinací bázových B-spline funkcí společně s váhami dostáváme souřadnice abstraktních objektů v prostoru (abstraktní kružnice, přímka). Přidáním sítě bodů, které jsou pro každé těleso generovány speciálními transformacemi, můžeme vyjádřit souřadnici určitého bodu výsledné plochy. Celá podrobná teoretická konstrukce je uvedena v disertační práci a zde uvedeme pouze názornou ukázkou tvorby válcové plochy s využitím kvazitenzorového součinu a s přesnou konstrukcí řídicích bodů plochy. Další tělesa jako anuloid, kulová či kuželová plocha vznikají různými aplikacemi posunutí či otáčení, což je opět podrobně rozebráno v disertační práci.

Válcová a kuželová plocha

Aplikací předešlých úvah můžeme zapsat válcovou či kuželovou plochu jako:

$$V(s, t) = k(s) \cdot u(t) = \overline{\omega}[\mathbf{PQ}]\omega \quad (12)$$

kde výraz $[\mathbf{PQ}]$ je nutné odvodit. Matici \mathbf{P} (1×9) tvoří řídicí body kružnice nad množinou bodů. Analogicky matici \mathbf{Q} tvoří řídicí body přímky (matice 1×2). Matice

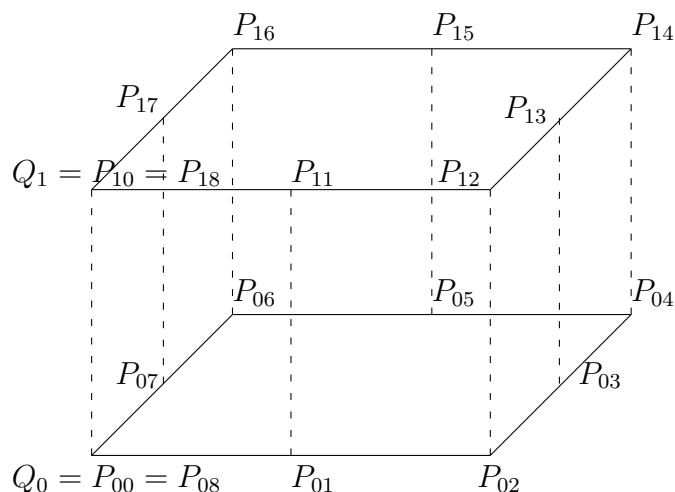
$$\mathbf{R} = [\mathbf{PQ}]$$

je matice bodů typu 2×9 , kde řádky jsou řídicí body kružnic, sloupce řídicí body přímek a je tedy tvaru:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}_{00} & \mathbf{R}_{01} & \cdots & \mathbf{R}_{08} \\ \mathbf{R}_{10} & \mathbf{R}_{11} & \cdots & \mathbf{R}_{18} \end{pmatrix}$$

Pro válcovou plochu získáme síť posunutím řídicí kružnice. Vektor posunutí určuje zadaná přímka – $\mathbf{v} = \overrightarrow{Q_0Q_1}$. Tj. platí:

$$\forall j \in \{0, 1, \dots, 8\} : \mathbf{R}_{1j} = \mathbf{R}_{0j} + \mathbf{v}$$



Obrázek 7: Řídicí body pro válec

6.2 VLIV UZLOVÝCH VEKTORŮ NA TVAR PLOCHY

Bázové funkce ploch definované v části 4 jsou dány jako součin dvou B-spline funkcí. Dosud nebylo napsáno shrnutí, jak tvar uzlového vektoru ovlivňuje tvar výsledné plochy. Ovládání není intuitivní, a proto se podrobnému popisu různých typů uzlových vektorů podrobně věnujeme. Bázové funkce jsou zobrazeny v softwaru Maple.

Bázovými funkcemi pro NURBS plochy je součin dvou B-spline funkcí (viz rovnice (4)). Počet těchto součinů je $(q + 1) \times (r + 1)$. Rozepsáním jsou to:

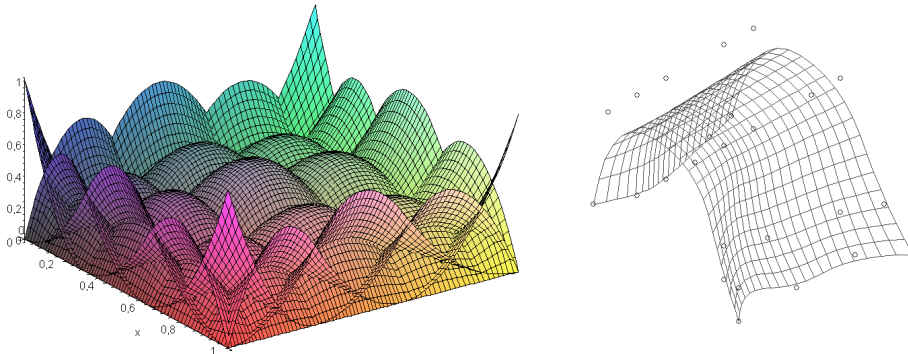
$$\sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^r N_i^m(u) N_j^n(v) = N_0^n N_0^m + N_0^n N_1^m + \dots + N_0^n N_r^m + N_1^n N_0^m + \dots + N_q^n N_r^m$$

Každý z těchto součinů je násoben příslušným řídicím bodem P_{ij} . Hodnota součinu je vždy číslo v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Toto číslo udává – stejně jako u křivek – kolika procenty má daný bod vliv na polohu výsledného bodu.

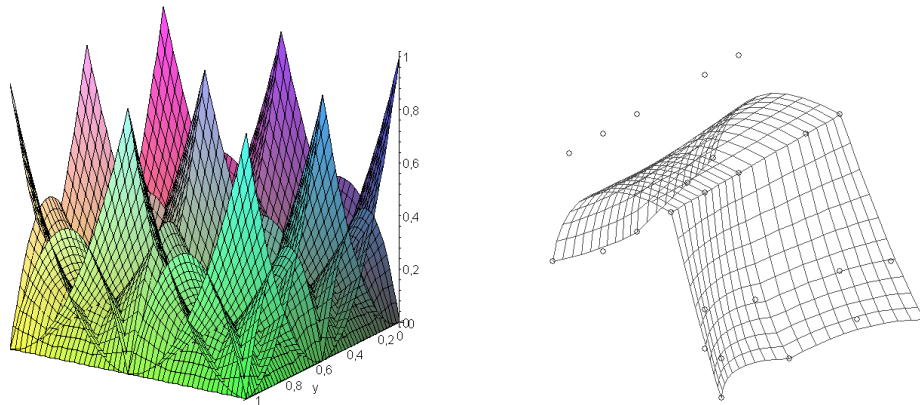
Na obr. 8 jsou bázové funkce pro neekvidistantní uzlové vektory, které způsobují, že výsledná NURBS plocha prochází svými rohovými body, a výsledná plocha. Opakování uzlu v uzlovém vektoru způsobí body nespojitosti (vrcholy a hrany), jak je ukázáno na obr. 9.

6.3 PODMÍNKY HLADKÉHO NAPOJOVÁNÍ NURBS PLOCH

Při návrhu grafických objektů je někdy nutné spojit navržené části do jedné spojitě oblasti. K tomu se využívá dodatečná funkce nazývaná merge. Naším úkolem bylo navrhnout podmínky tak, aby připojená plocha byla přímo spojitě navázána na předcházející. Tento postup bude opět využít v programu RFEM 3D.



Obrázek 8: Neuniformní uzlový vektor $(0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1)$



Obrázek 9: Vznik zlomu na NURBS ploše

Obecně máme dānu NURBS plochu $S(u, v)$ s řídícími body P_{ij} s vahami w_{ij} , $i = 0, 1, \dots, m$ a $j = 0, 1, \dots, n$ a řádkovým uzlovým vektorem \mathbf{u} a sloupcovým vektorem \mathbf{v} . Dále je dán řádkový a sloupcový stupeň plochy p, q .

Druhou plochu chceme hladce navázat podél posledního sloupce první plochy. Označme ji $S'(u, v)$. Její řídící body označme Q_{ij} s vahami w'_{ij} , $i = 0, 1, \dots, m$ a $j = 0, 1, \dots, r$. První zřejmou podmínkou je, že počet řádků musí být u obou ploch stejný. Také sloupcový uzlový vektor a sloupcový stupeň obou ploch se musí rovnat, neboť musí mít společnou křivku danou posledním sloupcem původní plochy. Tedy sloupcový uzlový vektor je \mathbf{v} a sloupcový stupeň je q . Zbývající řádkový vektor označme \mathbf{u}' a řádkový stupeň s .

Kromě předchozích formálních podmínek musí platit základní vztah. Odpovídající body posledního a předposledního sloupce původní plochy leží na přímce spolu s body druhého sloupce připojené plochy. Váhy odpovídajících bodů těchto tří sloupců jsou stejné

$$w_{i,n-1} = w_{i,n} = w'_{i,0} = w'_{i,1}.$$

Obecné podmínky pro dvě různé NURBS plochy S, S' lze uvést následujícím způsobem. Důkaz

je uveden v disertační práci a je založen na přítomnosti společné tečné roviny pro obě plochy na hraniční křivce.

Plocha S

síť $m \times n$ bodů

řídící body P_{ij} s váhami w_{ij}

řádkový a sloupcový uzlový vektor \mathbf{u}, \mathbf{v}

řádkový a sloupcový stupeň p, q

Plocha S'

síť $l \times r$ bodů

řídící body Q_{ij} s váhami w'_{ij}

řádkový a sloupcový uzlový vektor \mathbf{u}', \mathbf{v}'

řádkový a sloupcový stupeň p', q'

Jestliže platí:

1. $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$
2. $q = q'$
3. $w_{i,n-1} = w_{i,n} = w'_{i,0} = w'_{i,1}$ pro $i = 0, 1, \dots, m$
4. $Q_{i,0} = P_{i,n}$ pro $i = 0, 1, \dots, m$
5. pro libovolné $k \neq 0, k \in \mathbb{R}$

$$P_{i,n-1}Q_{i,1} = k.P_{i,n-1}Q_{i,0} = k.P_{i,n-1}P_{i,n} \text{ pro } i = 0, 1, \dots, m$$

pak jsou plochy S a S' hladce napojeny.

6.4 VYUŽITÍ NURBS INTERPOLACE V LÉKAŘSTVÍ

Ve spolupráci s ústavem strojírenské technologie – obor technologie obrábění vytváříme projekt pro medicínské využití. Jedná se o výrobu kloubních náhrad vhodných pro operace kolenních kloubů. Naše výsledky budou po testování použity v nemocnici u sv. Anny v Brně, kde se ročně provádí asi 100 těchto operací.

Naším úkolem je získat přesné vyjádření plochy kloubu a tu transformovat do souřadnic pro dráhu frézky, která kloub z kovového hranolu vyrobí.

6.4.1 Matematický zápis

Předpokládejme, že dostaneme množinu $(n + 1)$ naměřených hodnot

$$\mathbf{Q}_k, k = 0, \dots, n.$$

Chceme sestrojít neracionální neuniformní B-spline křivku stupně p , která bude interpolovat tyto body, tj. hledáme nové řídící body P_i a uzlový vektor $\bar{\mathbf{u}}_k$

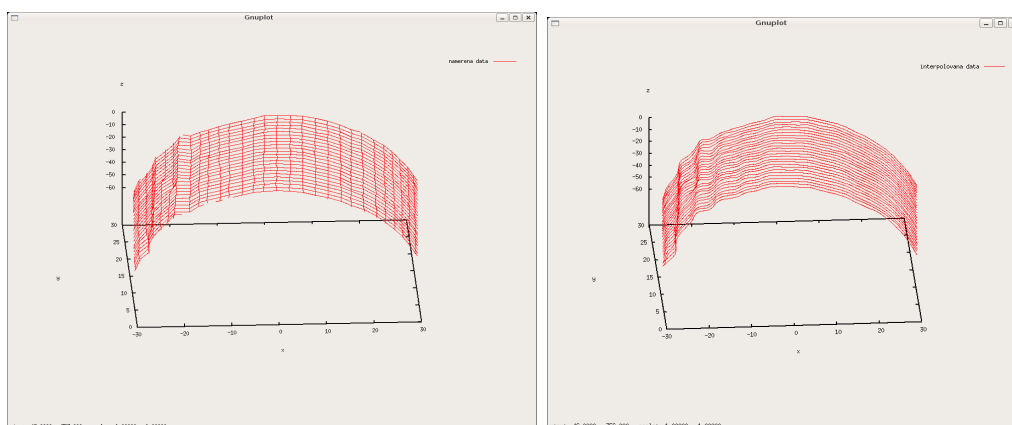
$$\mathbf{Q}_k = C(\bar{\mathbf{u}}_k) = \sum_{i=0}^n N_i^p(\bar{\mathbf{u}}_k) \mathbf{P}_i. \quad (13)$$

Hodnoty \bar{u}_k jsou určeny tětívovou nebo středovou metodu. Dále je sestrojen uzlový vektor u_k pomocí metody averaging. Pomocí gaussovy eliminace se vypočítají nové řídící body interpolační křivky, jejíž průběh určí dráhu frézky.

6.4.2 Testování metody provedené na válci

Metodu jsme již testovali na půlválci. Nejdříve se pomocí přístroje Microscribe nasnímalá síť bodů. Předmět musí být velmi dobře připevněn a pomocí snímací tužky se zapisují souřadnice nasnímané pozice. Tyto body jsou interpolovány pomocí NURBS křivek s využitím středové metody.

Na frézce byl válec znovu vyroben (obr. 11). Vzhledem k nepřesnostem při snímání bodů se projevilo malé zkrivení. To dokazuje funkčnost metody, která s velkou přesností interpoluje vložená data (viz obr. 10). Vývoj je prozatím v testovací fázi a nadále budeme pracovat na zlepšení metody. Uvažuje se o vytvoření spirálovité dráhy frézky, která by lépe obráběla výsledný kloub.



Obrázek 10: Vstupní a vypočítaná data pro testovací půlválec



Obrázek 11: Výroba výsledného válce na frézce

6.5 VYUŽITÍ T-SPLINE V GIS

GIS (geografický informační systém, geographic information system) je informační systém rozšířený o možnosti práce s geografickým kontextem – tj. prostorovým vymezením objektů a prostorovými vztahy objektů. GIS popisuje okolní svět s využitím prostorové lokalizace.

Z širokého pole působnosti GIS bylo vybráno zobrazování a vyhodnocování zemského povrchu z naměřených dat LiDAR technologií pomocí T-spline ploch. LiDAR (Light Detection and Ranging) technologie je jednou z možností, jak rychle získat informace o určité oblasti. LiDAR technologie pracuje na bázi snímání zemského povrchu letecky ve spolupráci se satelity a pozemními systémy. Výsledkem je mrak bodů, pro který je nutné další zpracování k identifikaci budov, stromů a povrchu.

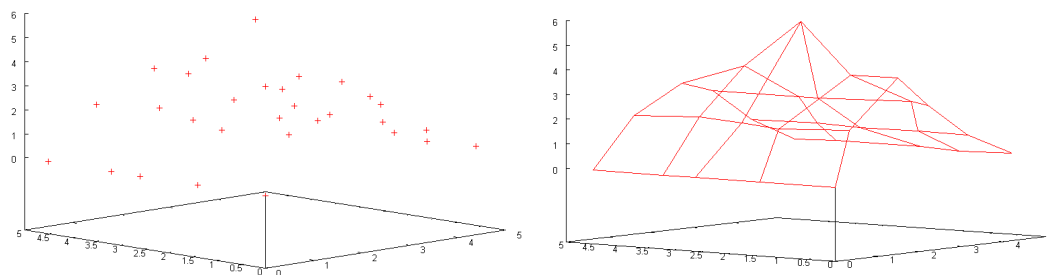
Algoritmus řešení:

1. Nalézt rovinné plochy (střechy, budovy) a oddělit je od ostatních bodů.
2. Uspořádat zbývající body.
3. Každému bodu přiřadit uzlové vektory potřebné pro T-spline síť.
4. Algoritmem T-spline simplification odstranit nadbytečné body bez změny tvaru výsledné plochy.
5. Zobrazit budovy a objekty pomocí rovinných ploch.
6. Vypočítat výslednou T-spline plochu a zobrazit ji.

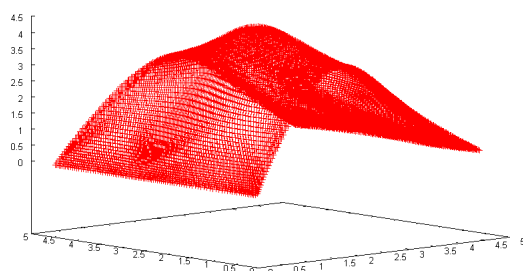
Pro uspořádání mraku bodů jsme navrhli metodu nazvanou *y-cube*, která spočívá v rozdělení oblasti na jednotkové hranoly (velikost jednotky se zvolí vzhledem k velikosti snímání) v ose y . Následně seřídíme prvky v jednotlivých hranolech pomocí metody quick sort. Tím vytvoříme kontrolní síť pro T-spline.

Uzlové vektory jsou pro křivky v jednotlivých *y-cube* vypočítány pomocí středové metody. Pro druhý směr jsou ekvidistantní kvůli pozdějším výpočtům. Na obr. 12 je vstupní mrak bodů, na který byla aplikována metoda *y-cube*, určeny uzlové vektory a výsledná T-spline plocha byla vykreslena (obr. 13).

Pokud snímaná oblast obsahuje zastavěné plochy, lze použít metody pro detekci budov (viz (51), (2), (53)).



Obrázek 12: Mrak bodů a jeho uspořádání



Obrázek 13: Výsledná T-spline plocha

7 ZÁVĚR

Modelování matematických ploch v CAD systémech je jedno z moderních odvětví počítačové grafiky. Navrhovat hladké plochy a libovolně modifikovat vytvořené objekty je jednou z velmi důležitých předpokladů každého CAD systému. K tomuto účelu v současné době nejvíce pomáhají NURBS křivky a plochy. V nejmodernějších aplikacích potom T-spline plochy.

Ve své práci jsem se zaměřila právě na tuto oblast týkající se *free-form* objektů. Zvolený přístup není pouze implementační, ale také zkoumající, prohlubující a hledající nové poznatky a uplatnění.

K čemu by byly technikům nejmodernější způsoby zobrazování, kdyby nerozuměli jejich vnitřní struktuře, kdyby sebemenší odchylka od pevně daného zadání způsobila kolaps programu? Proto jsem se snažila popsat metody řešení s ohledem na vnitřní porozumění a kritická místa. Při určování vlivu uzlového vektoru jsou popsány a vykresleny bazové funkce a ukázána jejich souvislost s body, při výpočtu derivací je nalezen speciální případ, kde derivace existuje i přes matematickou nespojitost, při programování NURBS objektů jsou podrobně popsány omezující podmínky a kritická místa. Jak již bylo zmíněno jsou zde uvedené teoretické poznatky postupně implementovány do komerčního softwaru RFEM 3D.

Během svého studia jsem nabyla dojmu, že jazyk čistě matematický a jazyk technicky praktický, nejsou blízcí kolegové, ale vzdálení příbuzní, kteří si příliš nerozumí. Na pohled jednoduchému problému týkajícímu se tenzorového součinu se věnuje spousta geometrií prostým konstatování, že existuje. Proto je v práci zahrnuta část týkající se NURBS ploch z pohledu tenzorového součinu. Úskalí jednotlivých známých přístupů (Grassmanovy prostory, prostory B-spline funkcí) jsou v nekorektním matematickém zápisu a nedostatečném popisu vzniku sítě bodů. Jsou však vhodné pro názornost. K čisté definici byl navržen tzv. kvazitenzorový součin, který je korektní pro oba jazyk matematický i geometrický.

Využití NURBS není pouze v počítačové grafice a designu. Ve spolupráci s ústavem strojírenské technologie – obor technologie obrábění pracujeme na vývoji programu pro generování dráhy bodů, která by co nejlépe interpolovala vstupní data. Ve spolupráci s nemocnicí u sv. Anny v Brně budeme testovat tuto metodu na datech pro výrobu kloubních kolenních náhrad a dále spolupracovat na zlepšování a možnému uvedení softwaru do praxe.

Geografické informační systémy jsou jedním z dalších uplatnění matematických ploch. Aproximace či interpolace naměřených dat je stěžejním problémem při zobrazování zemského

povrchu. B-spline přístup je v této oblasti již plně využíván. Ve své práci jsem navrhla nový způsob aproximace pomocí T-spline s využitím již známých metod pro další úpravy (detekce budov, stromů, hran).

Matematické modelování ploch je důležitou součástí počítačové grafiky i praktických oborů. Ve své práci jsem se pokusila shrnout dosavadní znalosti a najít jejich nové uplatnění. Spolupráce s komerční firmou či použití ve zdravotnictví potvrzuje, že zde uvedené poznatky jsou užitečné a použitelné v praxi. Věřím, že můj další výzkum bude založen na poznatcích, které jsem nabyla při studiu na této disertační práci.

VLASTNÍ PUBLIKACE

Reference

- [1] PROCHÁZKOVÁ, J. – MARTIŠEK, D. – MARTIŠEK, K. New methods for space reconstruction of inside cell structure. *Journal of Applied Biomedicine*. 2007. – přijato k publikaci
- [2] PROCHÁZKOVÁ, J. – VITÁSEK, V. Výuka programovacího jazyka Delphi pomocí moderních počítačových technologií. *akce: XXV. mezinárodní kolokvium o řízení vzdělávacího procesu, UNOB Brno*. 2007.
- [3] PROCHÁZKOVÁ, J. – VITÁSEK, V. E-learningové opory s flash animacemi pro práci s grafickým studiem. *akce: XXV. mezinárodní kolokvium o řízení vzdělávacího procesu, UNOB Brno*. 2007.
- [4] PROCHÁZKOVÁ, J.– PROCHÁZKA, D. An Implementation of NURBS Curve Derivatives in Engineering Practice. *WSCG'2007 International Conferences in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision*. UNION Agency – Science Press. 2007. ISBN 978-80-86943-03-9.
- [5] PROCHÁZKOVÁ, J.– PROCHÁZKA, D. An Influence of Knot Vectors on the Shape of NURBS Surfaces. *The 5th International Mathematical Workshop*. VUT Brno. 2006. ISBN 80-214-3282-9.
- [6] PROCHÁZKOVÁ, J. Animation and normal envelope of cyclic curves with Maple. *APLIMAT 2007*. Slovak University of Technology in Bratislava, 2007. ISBN 978-80-969562-5-8. s.407-412.
- [7] SEDLÁK, J.– PROCHÁZKOVÁ, J. – PÍŠA, Z.– SEDLÁČEK, J.– ZOUHAR, J. Přímá B-spline interpolace dráhy CND nástroje z mraku bodů. *Frézování IV*. FSI VUT v Brně, 2007. ISBN 80-214-3239-X. s.147-154. ,
- [8] PROCHÁZKOVÁ, J. – PROCHÁZKA, D. T-splines: nová metoda modelování povrchů. *GIS Ostrava 2007*. Vol.1. (2007). pp.82. ISSN 1213-2454.
- [9] PROCHÁZKA, D.– PROCHÁZKOVÁ, J.– MACHALOVÁ, J.– MOTYČKA, A.– ČEPICKÝ, J.– KRYŠTOF, J. Virtuální mapserver. *GIS Ostrava*, 2007. 2007. ISSN 1213-2454. Vol.1. s.83.
- [10] PROCHÁZKOVÁ, J.– PROCHÁZKA, D. Implementation of Cylinder and Cone as NURBS in Engineering Software. *Proceedings of symposium on computer geometry SCG 2006*. Slovak University of Technology in Bratislava, 2006. ISBN 80-227-2489-0. s.124–130

- [11] PROCHÁZKOVÁ, J. Křivky NURBS. *ROOT informace nejen ze světa Linuxu*. 2006. ISSN 1212-8309. Vol.5. s.1–3.
- [12] PROCHÁZKA, D. – PROCHÁZKOVÁ, J. – MACHALOVÁ, J. – KRYŠTOF, J. – ČEPICKÝ, J. Moebius: Virtual mapserver for data abstraction. *21. European Conference for ESRI Users*. Athens, 2006.
- [13] PROCHÁZKOVÁ, J. The Application of Nurbs Surfaces in Engineering Software. *15. ročník semináře Moderní matematické metody v inženýrství*. ISBN 80-248-1224-X, s.190-195.
- [14] PROCHÁZKOVÁ, J. Derivative of B-Spline Function. *25. konference o geometrii a počítačové grafice*. 2005. ISBN 80-7015-013-0. s.199-204.

POUŽITÁ LITERATURA

Reference

- [1] ALEXANDR, L. *Výuka počítačové grafiky cestou www*. Diplomová práce. VUT Brno, 1999.
- [2] ALHARTHY, A. – J., B. Heuristic filtering and 3d feature extraction from lidar data. *PCV02*. 2002.
- [3] ARROWSMITH, J. Notes on Lidar interpolation. *DGS – Arizona State University*. 2006.
- [4] ASZÓDI, B. – CZUCZOR, S. – SZIRMAY-KALOS, L. NURBS fairing by knot vector optimization. *Full papers WSCG*. 2004.
- [5] BARTELS, R. – FORSEY, D. Surface fitting with hierarchical splines. *ACM Trans. Graphics*. 1995, 14, 2, s. 134–161.
- [6] BERCOVIER, M. – GOLDENTHAL, R. Spline Curve Approximation and Design Over the Knots Using Genetic Algorithms. *EUROGEN*. 2003.
- [7] BERCOVIER, M. – GOLDENTHAL, R. Spline Curve Approximation and Design by Optimal Control Over the Knots. *Computing*. 2004, 72, s. 53–64.
- [8] CLINE, A. Spline spaces. [online], Naposledy navštíveno 20. 2. 2007. Dostupné z: www.cs.utexas.edu/users/cline/CS383D/Spline_spaces.pdf.
- [9] BOOR, C. *A Practical Guide to Splines*. New York : Springer-Verlag, 1976. ISBN 0-387-90356-9.
- [10] DOUPOVEC, M. *Diferenciální geometrie a tenzorový počet*. VUT Brno, 1999.

- [11] FOLEY et al. *Computer Graphics – principles and practice*. New York : Addison–Wesley, 2005. ISBN 0-201-84840-6.
- [12] GOLDMAN, R. The Ambient Spaces of Computer Graphics and Geometric Modeling. *Computer Graphics and Applications, IEEE*. 2000.
- [13] HORÁK, P. *Algebra a teoretická aritmetika*. Brno : Rektorát Masarykovy univerzity Brno, 1991. ISBN 80-210-0320-0.
- [14] JANYŠKA, J. – SEKANINOVÁ, A. *Analytická geometrie kuželoseček a kvadrik*. Brno : Masarykova Univerzita v Brně, 2001. ISBN 80-210-2604-9.
- [15] JONEJA, A. Computer Aided Manufacturing. [online], Naposledy navštíveno 20. 1. 2006. Dostupné z: <http://iesu5.ieem.ust.hk/dfaculty/ajay/courses/ieem575/575intro.html>.
- [16] JUHASZ, I. – HOFFMANN, M. Constrained shape modification of cubic B-spline curves by means of knots. *Computer-Aided Design*. 2004, 36, s. 437–445.
- [17] JUHASZ, I. – HOFFMANN, M. The Effect of Knot Modifications on the Shape of B-spline Curves. *Journal for Geometry and Graphics*. 2001, 5, s. 111–119.
- [18] KAZINNIK, R. – ELBER, G. Orthogonal Decomposition of Non-Uniform B-spline Spaces using Wavelets. *Eurographics 97*. 1997, 16, 3.
- [19] LI, W. – RAY, N. – LÉVY, B. Automatic and Interactive Mesh to T-spline Conversion. *Eurographics Symposium on Geometry Processing*. 2006.
- [20] LICHY, C. – BEKHAHN, V. B-Spline Surface Modelling with Adaptive de Boor Grids in Hydroinformatics. *ISSES 1999*. 1999.
- [21] LOMTATIDZE, L. *Historický vývoj pojmu křivka*. PhD thesis, Masarykova univerzita v Brně, 2005.
- [22] LYCHE, T. Knot removal for spline curves and surfaces. *Multivariate Approximation and Application*. 1993, s. 152–87.
- [23] LYCHE, T. – MORKEN, K. The sensitivity of a spline function to perturbations of the knots. *BIT*. 1999, 39, s. 305–22.
- [24] LYCHE, T. – MORKEN, K. – QUAK, E. Theory and algorithms for non-uniform spline wavelets. *Multivariate Approximation and Application*. 2001, s. 152–87.
- [25] MARTIŠEK, D. *Matematické principy grafických systémů*. Brno : Littera, 2002. ISBN 80-85763-19-2.
- [26] MOTL, L. – ZAHRADNÍK, M. Pěstujeme lineární algebru. [online], Naposledy navštíveno 10. 3. 2007. Dostupné z: <http://www.kolej.mff.cuni.cz/~lmotm275/skripta/mzahrad/node150.html>.

- [27] PASEKA, J. Počítačová geometrie. [online], Naposledy navštíveno 20. 1. 2007. Dostupné z: <ftp://www.math.muni.cz/pub/math/people/Paseka/lectures/>.
- [28] PIEGL, L. Modifying the shape of rational B-splines Part 1: curves. *Computer Aided Design*. 1989, 21, s. 509–18.
- [29] PIEGL, L. On NURBS:Survey. *IEEE Computer Graphics and Applications*. 1991.
- [30] PIEGL, L. – TILLER, W. *The NURBS Book*. Berlin : Springer-Verlag, 2002. ISBN 3-540-61545-8.
- [31] PROCHÁZKA, D. – PROCHÁZKOVÁ, J. T-spline – nová metoda modelování povrchů. *GIS Ostrava*. 2007, 1, s. 85. ISSN 1213-2454.
- [32] PROCHÁZKOVÁ, J. Derivatives of B-spline function. *25. konference o počítačové grafice a geometrii*. 2005, 25.
- [33] PROCHÁZKOVÁ, J. Modelování matematických ploch – teze disertační práce, FSI VUT Brno, 2006.
- [34] PROCHÁZKOVÁ, J. – PROCHÁZKA, D. The Application of NURBS Surfaces in Engineering Surface. *Sborník konference Moderní matematické metody v inženýrství*. 2006.
- [35] PROCHÁZKOVÁ, J. – PROCHÁZKA, D. Implementation of Cylinder and Cone as NURBS Surfaces in Engineering Software. *Articles of Symposium on Computer Geometry SCG 2006*. 2006.
- [36] PROCHÁZKOVÁ, J. – PROCHÁZKA, D. Implementation of NURBS curve derivatives in engineering practice. *WSCG 2007 Poster Papers*. 2007.
- [37] RAMSHAW, L. *Blossoms are polar form*. DEC Systems, 1989.
- [38] SCHRODER, P. – SWELDENS, W. Spherical wavelets: Efficiently representing functions on the sphere. *SIGGRAPH*. 1995, s. 161–172.
- [39] SEDERBERG, T. W. et al. T-splines and T-NURCCS. *ACM Transactions on Graphics*. 2003, 22, 3, s. 477–484.
- [40] SEDERBERG, T. An Introduction to B-Spline Curves. [online], Naposledy navštíveno 12. 4. 2007. Dostupné z: tom.cs.byu.edu/~455/bs.pdf.
- [41] SEDERBERG, T. – PARRY, S. Free-Form Deformation of Solid Models. *ACM Computer Graphics*. 1986, 20, 4.
- [42] SEDERBERG, T. et al. T-splines and T-NURCCs. *ACM Trans. Graphic*. 2003.
- [43] SEDERBERG, T. et al. T-splines Simplification and Local Refinement. *ACM Trans. Graphic*. 2004.

- [44] SEKANINA, M. *Geometrie II*. Praha : SPN Praha, 1988. ISBN r88U.
- [45] SHENE, C. Introduction to Computing with Geometry Notes. [online], Naposledy navštíveno 11. 12. 2006. Dostupné z: <http://www.cs.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/NOTES/notes.html>.
- [46] TERZOPOULOS, D. – QIN, H. Dynamic NURBS with Geometric Constraints for Interactive Sculpting. *ACM Transactions on Graphics*. 1994, 13, s. 103–136.
- [47] TERZOPOULOS, D. – QIN, H. D-NURBS a physics-based framework for geometric design. *IEEE Transactions of Visualization and Computer Graphics*. 1996, 2, 1, s. 85–96.
- [48] TILLER, W. Rational B-splines for Curve and Surface Representation. *IEEE Computer Graphics and Applications*. 1983.
- [49] TILLER, W. – PIEGL, T. A Menagerie of Rational B-Spline Circles. *IEEE Computer Graphics and Applications*. 1989.
- [50] VERMA, V. – KUMAR, R. – HSU, S. 3D Building Detection and Modeling from Aerial LIDAR Data. *IEEE Computer Vision and Pattern Recognition*. 2006, 2, s. 2213–2220.
- [51] VOSSELMAN, V. Building reconstruction using planar faces in very high density data. *International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*. 1999.
- [52] WANG, Y. – ZHENG, J. – SEAH, H. Conversion between T-splines and hierarchical B-splines. *Articles of the Eighth IASTED International Conference COMPUTER GRAPHICS AND IMAGING*. 2005, 8, s. 8–13.
- [53] YOU, S. et al. Urban site modeling from Lidar data. *ICCSA*. 2003, 3, s. 579–88.
- [54] ZHENG, J. – WANG, Y. – SEAH, H. S. Adaptive T-spline Surface Fitting to Z-Map Models. *GRAPHITE*. 2006.
- [55] ŽÁRA, J. et al. *Moderní počítačová grafika*. Computer Press, 2004.
- [56] ČADEK, J. Lineární algebra a geometrie. [online], Naposledy navštíveno 12. 4. 2007. Dostupné z: <ftp://www.math.muni.cz/pub/math/people/Cadek/1a3/SKRIPTA.pdf>.

ŽIVOTOPIS

Osobní informace

Jméno: Mgr. Jana Procházková
Bydliště: Nádražní 15, 68201 Vyškov, Česká republika
Telefon do zaměstnání: +420 541 142 553
Telefon: +420 777 654 899
E-mail: jana.prochazkova@ieee.org
Datum narození: 3. 2. 1981
Národnost: česká

Vzdělání

1992 – 1999 Gymnázium Vyškov
1999 – 2004 Masarykova univerzita v Brně, Fakulta přírodovědecká
magisterské studium v oboru Učitelství pro střední školy
matematika – deskriptivní geometrie
2004 – 2007 VUT v Brně, Fakulta strojního inženýrství,
Ústav matematiky,
doktorské studium v oboru Matematické inženýrství

Odborná praxe

2002 Učitelka matematiky
Biskupské gymnázium Brno, Barvičova 85, 602 00 Brno
2004 – současnost Externí programátor C, C++
FEM Consulting Brno, Veveří 331/95, 602 00 Brno

Odborná orientace a schopnosti

Programovací jazyky – C, C++, Pascal
Jazykové znalosti – anglický jazyk, základy francouzského a německého jazyka
Ostatní – řidičský průkaz sk. B

ABSTRACT

Modeling of mathematical surfaces is progressive branch of computer graphics. Possibilities to design and modify smooth surfaces are key functions in all CAD systems. These functions are nowadays usually implemented using NURBS curves and surfaces. In hi-end applications are also used T-splines. I focused on modeling free form objects using NURBS and its properties. My goal was to describe methods of their design with regard to mathematical background of this problem and its special cases. Regarding this all constrains and critical parts of the programming NURBS are described in detail. In my work the analysis of the NURBS from tensor point of view is also mentioned.

I focused on application described problematics in thee areas. First one are construction CAD system. Methods of modeling free-form objects were implemented into RFEM 3D CAD system. Second area is in applied mechanical engineering. In the cooperation with department of manufacturing technology we work on development of the method for curve interpolation from a set of points. This method will be used in cooperation with St. Anna hospital for designing joint replacements. Third application is in the area of geographic information systems. Approximation or interpolation of the terrain are the key problems. Nowadays B-spline method is used for solving this problem. In my work new method of the approximation using T-splines is described. We reveal some other improvements (buildings, trees, edges detection).