

VĚDECKÉ SPISY VYSOKÉHO UČENÍ TECHNICKÉHO V BRNĚ

*Edice Habilitační a inaugurační spisy, sv. 256*

*ISSN 1213-418X*

**Zdeněk Kolka**

**SYMBOLICKÁ ANALÝZA  
ELEKTRONICKÝCH OBVODŮ  
SOUČASNÝ STAV,  
TRENDY VÝVOJE A VÝUKA**

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií  
Ústav radioelektroniky

**Doc. Dr. Ing. Zdeněk Kolka**

**SYMBOLICKÁ ANALÝZA ELEKTRONICKÝCH OBVODŮ**  
**Současný stav, trendy vývoje a výuka**

SYMBOLIC ANALYSIS OF ELECTRONIC CIRCUITS  
State of the Art, Trends and Education

TEZE PŘEDNÁŠKY K PROFESORSKÉMU JMENOVACÍMU ŘÍZENÍ  
V OBORU  
ELEKTRONIKA A SDĚLOVACÍ TECHNIKA



BRNO 2008

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

Elektronické obvody, analogové obvody, symbolická analýza, počítačové metody, CAD

## **KEYWORDS**

Electronic circuits, analog circuits, symbolic analysis, computer methods, CAD.

# OBSAH

1	ÚVOD .....	5
1.1	ZÁKLADNÍ POJMY .....	5
1.2	HISTORICKÝ VÝVOJ A SOUČASNOST SYMBOLICKÉ ANALÝZY .....	6
2	ZÁKLADNÍ METODY SYMBOLICKÉ ANALÝZY .....	9
2.1	OBVODOVÉ ROVNICE.....	9
2.2	TOPOLOGICKÁ METODA VÝPOČTU.....	10
2.2.1	<i>Pasivní obvody</i> .....	10
2.2.2	<i>Aktivní obvody</i> .....	11
2.2.3	<i>Výpočet obvodových funkcí</i> .....	12
2.2.4	<i>Složitost symbolického vztahu</i> .....	14
3	PŘIBLIŽNÁ SYMBOLICKÁ ANALÝZA.....	16
3.1	ZÁKLADNÍ PRINCIP .....	16
3.2	KLASIFIKACE ALGORITMŮ.....	17
3.3	METODY SBG .....	19
3.3.1	<i>Řídící algoritmus</i> .....	19
3.3.2	<i>Parametrická metoda SBG</i> .....	19
3.3.3	<i>Topologická metoda SBG</i> .....	20
4	SNAP – PROGRAM PRO SYMBOLICKOU ANALÝZU .....	24
4.1	POPIS PROGRAMU .....	24
4.2	VYUŽITÍ SYMBOLICKÉ ANALÝZY VE VÝUCE A VÝZKUMU .....	25
4.3	NETRADIČNÍ APLIKACE SYMBOLICKÉ ANALÝZY .....	26
5	ZÁVĚR .....	26



**Zdeněk Kolka** se narodil v roce 1969 v Brně. Vysokoškolská studia absolvoval na Fakultě elektrotechniky a informatiky Vysokého učení technického v Brně v letech 1987-1992. Studium úspěšně zakončil v červnu 1992 a byl mu udělen titul inženýr. Od roku 1994 je zaměstnán na Ústavu radioelektroniky FEKT VUT v Brně (do r. 2004 jako odborný asistent, od r. 2004 jako docent). Na UREL v současné době zastává funkci zástupce vedoucího ústavu. V letech 1992-1997 úspěšně absolvoval doktorské studium v oboru Elektronika a sdělovací technika s disertační prací na téma „Modelování po částech lineárních soustav“. V roce 2004 úspěšně obhájil na VUT v Brně habilitační práci na téma „Modelování zvláštních jevů v dynamických systémech“ a byl mu udělen titul docent

v oboru Elektronika a sdělovací technika.

Do pedagogické praxe se Doc. Kolka zapojil ihned po ukončení studia, zpočátku jako asistent v počítačových cvičeních z oblasti analogových a číslicových obvodů, později se postupně zapojoval i do ostatních oblastí. V minulých letech zavedl do výuky 5 nových předmětů pro bakalářské, magisterské i doktorské studium. Je autorem nebo spoluautorem celkem 7 titulů výukových skript. V současné době Doc. Kolka vyučuje předměty: „Počítačové řešení elektronických obvodů“ v bakalářském studiu; „Počítačové a komunikační sítě“ a „Počítačové systémy a jejich aplikace“ v magisterském studiu a je garantem předmětu „Návrh moderních analogových obvodů“ v doktorském studiu. Doc. Kolka vedl více než 22 diplomových prací, více než 20 bakalářských prací a vedl (vede) 6 doktorandů, z nichž dva studium úspěšně ukončili. Je členem oborové rady doktorského studia v oboru Teoretická elektrotechnika na FEKT VUT a členem oborové rady doktorského studia v oboru Radioelektronika na FEL ČVUT v Praze. Doc. Kolka byl odpovědným řešitelem doktorského grantového projektu GAČR 102/03/H105 „Moderní Moderní metody řešení, návrhu a aplikace elektronických obvodů“ v letech 2004-2007.

Doc. Kolka se ve své odborné a vědecko-výzkumné práci věnuje teorii, počítačové simulaci a praktickým aplikacím analogových a číslicových elektronických obvodů. Na počátku své vědecké dráhy se věnoval teorii chaotických obvodů, zejména jejich modelování, vzájemné synchronizaci a praktické realizaci. Je autorem nových účinných algoritmů klasické a aproximační symbolické analýzy linearizovaných obvodů. Je hlavním tvůrcem známého programu SNAP pro symbolickou analýzu obvodů, který je využíván na akademických institucích i v průmyslu v řadě zemí. V poslední době se Doc. Kolka také podílí na vývoji atmosférických optických spojů a metod pro jejich testování. Byl odpovědným řešitelem tří grantových projektů GAČR, jednoho projektu GAAV, čtyř projektů FRVŠ a členem řešitelských týmů dalších 22 výzkumných projektů. Získal čtyři zakázky z průmyslu.

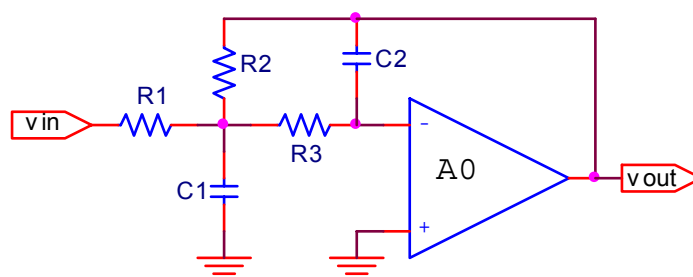
Doc. Kolka je členem společnosti IEEE. Je členem redakční rady vědeckého časopisu Radioengineering.

# 1 ÚVOD

## 1.1 ZÁKLADNÍ POJMY

Symbolickou analýzou rozumíme třídu technik, které umožňují vyjádřit charakteristiku elektrického obvodu ve formě uzavřeného analytického výrazu s hodnotami obvodových prvků reprezentovanými symboly. Symbolický simulátor je počítačový program, jehož vstupem je popis obvodu a výstupem jsou charakteristiky v symbolickém tvaru.

Ačkoli bylo demonstrováno použití symbolických metod pro slabě [1] i silně nelineární systémy [2], tak zdaleka největší popularity a rozšíření doznala aplikace symbolické analýzy na lineární systémy, zejména pak na lineární, resp. linearizované obvody ve frekvenční oblasti a částečně též na spínané obvody v oblasti  $z$ . Symbolické řešení soustavy lineárních rovnic, kterými jsou tyto systémy popsány, je totiž možné snadno algoritmizovat.



Obr. 1.1: Aktivní filtr druhého řádu

Na obr. 1.1 je aktivní kmitočtový filtr druhého řádu typu dolní propust. Operační zesilovač je modelován jako zdroj napětí řízený napětím s přenosem  $A_0$ . **Symbolicky** je možné vyjádřit přenosovou funkci filtru v oblasti komplexní frekvence ve tvaru

$$K(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{-G_1 G_3}{s^2 \left[ C_1 C_2 \left( 1 + \frac{1}{A_0} \right) \right] + s \left[ C_2 (G_1 + G_2 + G_3) \left( 1 + \frac{1}{A_0} \right) + \frac{C_1 G_3}{A_0} \right] + G_2 G_3 \left( 1 + \frac{1}{A_0} \right) + \frac{G_1 G_3}{A_0}}, \quad (1.1)$$

kde vodivosti  $G_i$  jsou převrácenými hodnotami příslušných odporů  $R_i$ .

Výsledek (1.1) popisuje analyzovaný obvod **kvalitativně**. Dosazením  $s = 0$  získáváme přímo stejnosměrný přenos. Uvažováním  $A_0 \rightarrow \infty$  dostáváme přenosovou funkci při použití ideálního operačního zesilovače. Z koeficientů polynomu jmenovatele je možné určit analyticky výraz pro charakteristický kmitočet filtru

$$\omega_0^2 = \frac{1 + 1/A_0 + R_2/(R_1 A_0)}{C_1 C_2 R_2 R_3 (1 + 1/A_0)}. \quad (1.2)$$

Provedeme-li naopak **numerickou** analýzu, tak např. pro konkrétní hodnoty obvodových prvků  $R_1 = 1\text{k}\Omega$ ,  $R_2 = 2\text{k}\Omega$ ,  $R_3 = 5\text{k}\Omega$ ,  $C_1 = 10\text{nF}$ ,  $C_2 = 20\text{nF}$ ,  $A_0 = 10^5$ ,  $U_{in} = 1\angle 0^\circ\text{V}$  dostáváme jako výsledek pro kmitočet 1kHz výstupní napětí  $U_{out} = 0,860\angle 113^\circ\text{V}$ . K získání podobných informací, které vyplynuly z rozboru (1.1), by bylo nutné provést celou řadu numerických simulací s různými hodnotami vstupních parametrů. Srovnání obou typů analýz tedy ukazuje na značný potenciál symbolických metod poskytnout kvalitativní informace o analyzovaném obvodu.

Obecně, obvodová funkce každého časově invariantního lineárního obvodu se soustředěnými parametry v oblasti komplexní frekvence  $x$  ( $s$  pro obvody se spojitým časem a  $z$  pro obvody s diskretním časem) může být vyjádřena ve tvaru racionální funkce lomené

$$H(x) = \frac{\sum_i x^i a_i(p_1, \dots, p_m)}{\sum_j x^j b_j(p_1, \dots, p_m)}, \quad (1.3)$$

kde koeficienty čitatele a jmenovatele  $a_i$ ,  $b_j$  jsou symbolické polynomiální funkce parametrů obvodových prvků  $p$ . Tyto dílčí polynomiální funkce mohou být ve vnořeném nebo roznásobeném tvaru. Koeficienty výrazu (1.1) jsou ve vnořeném tvaru. V případě roznásobených koeficientů hovoříme o (1.3) jako o funkci v tzv. **plochem tvaru**.

V plně symbolickém tvaru jsou všechny parametry obvodových prvků reprezentovány symboly. Je-li některý parametr vyjádřen číselně, pak mluvíme o částečně symbolickém tvaru. V krajním případě, když jsou všechny parametry vyjádřeny číselně a jediným symbolem je proměnná  $s$  nebo  $z$ , dostáváme tzv. semisymbolický tvar.

Chování lineárního systému v oblasti komplexní proměnné je popsáno soustavou lineárních rovnic. V zásadě existují dvě třídy metod, které je možné použít pro řešení této soustavy:

- **Algebraické metody:** Požadovaná obvodová funkce je získána pomocí algebraických operací s maticí, jejíž koeficienty jsou vyjádřeny symbolicky. Nejčastěji se jedná o aplikaci Cramerova pravidla s rozvojem determinantu v symbolickém tvaru [3]. Do této kategorie spadají i metody pro získání částečně symbolického [4] či semisymbolického tvaru obvodové funkce [5].
- **Topologické (grafové) metody:** Systém je popsán grafem, jehož hrany mají symbolické váhy. Používají se grafy signálových toků nebo topologické grafy. Požadovaná obvodová funkce je získána na základě operací s grafy, jako např. nalezení smyček nebo koster [3].

V dalším textu bude věnována pozornost pouze metodám pro výpočet plně symbolického tvaru. V soustavě lineárních rovnic popisujících elektrický obvod existují vnitřní vazby dané Kirchhoffovými zákony, které způsobují, že během výpočtu symbolického výrazu může docházet ke vzniku tzv. zrušitelných členů, které se navzájem odečtou.

$$a(b+c) - b(a+d) = ac - bd \quad (1.4)$$

Zrušitelné členy (jako např.  $ab$  v (1.4)) zvyšují náročnost výpočtu a také přinášejí problémy při použití metod přibližné symbolické analýzy, která je založena na zanedbávání některých členů ve výrazech. Pokud bychom např. v druhé závorce v (1.4) zanedbali člen  $a$  z důvodu jeho nevýznamnosti ve srovnání s  $d$ , tak se ve výsledku objeví nový člen  $ab$ , který není obsažen v původním tvaru. Problém se zrušitelnými členy se projevuje u metod určených pro řešení obecné soustavy lineárních rovnic, které nevyužívají speciální strukturu obvodových rovnic [3].

## 1.2 HISTORICKÝ VÝVOJ A SOUČASNOST SYMBOLICKÉ ANALÝZY

### *Léta šedesátá a sedmdesátá*

Spolu se zaváděním počítačů do běžné praxe rostl zájem o symbolickou analýzu. Byla navržena řada programů zejména pro analýzu frekvenčních filtrů [6]. Vzhledem k omezeným možnostem výpočetní techniky byly populární topologické metody. Plně symbolická analýza byla možná pro relativně malé obvody o velikosti do 15 uzlů z důvodu exponenciálního růstu složitosti výsledného

výrazu. Numerické metody (jako např. interpolační metoda uvedená v [5]) dovolovaly získat výsledek v semisymbolickém tvaru pro podstatně větší obvody. Kombinací těchto dvou metod vznikly seminumerické metody pro výpočet částečně symbolických výrazů s několika málo symboly. Postupně byla symbolická analýza zastíněna popularitou numerických simulátorů typu Spice.

### *Osmdesátá léta*

Pro překonání problémů s velikostí obvodu byly navrženy hierarchické metody, které generují výraz ve vnořeném tvaru na rozdíl od tvaru plochého u standardních metod [7]. Algebraické metody byly dovedeny do stavu, kdy byly stejně efektivní jako metody topologické [8]. Vznikla řada nových programů, které díky vyššímu výpočetnímu výkonu byly schopné analyzovat obvody do velikosti až 40 uzlů (nebo 15 tranzistorů) [6]. Byl vytvořen prakticky použitelný simulátor ISAAC [9], který umožňoval symbolickou analýzu zkrácení ve slabě nelineárních obvodech.

### *Devadesátá léta a současnost*

Výpočetní výkon již není překážkou provedení přesné symbolické analýzy. Hybnou silou tohoto období se stalo praktické využití symbolické analýzy zejména při návrhu analogových integrovaných obvodů. Jednou z hlavních aplikací symbolické analýzy je poskytnutí **interpretovatelného** výrazu návrháři elektronického obvodu. Je zřejmé, že takový výraz musí být především jednoduchý, tj. obsahovat několik málo členů, jinak jej člověk není schopen zpracovat.

Je možné ukázat (kap. 2.2.4), že složitost symbolického výrazu v plochem tvaru měřená počtem členů čitatele a jmenovatele roste exponenciálně s počtem uzlů, resp. větví obvodu. Pro bloky o velikosti desítek tranzistorů dostáváme složitost řádu  $10^{10}$  a vyšší. Takto složitý výraz nemůže mít žádné praktické uplatnění. Radikální snížení složitosti je možné dosáhnout použitím výrazu ve vnořeném tvaru, resp. ve tvaru posloupnosti dílčích výrazů [10], který je vhodný např. pro opakované vyčíslování funkce, avšak symbolicky zcela neinterpretovatelný.

Přesná symbolická analýza obvodů většího rozsahu proto nemá praktický smysl. Od počátku devadesátých let jsou z toho důvodu vyvíjeny metody tzv. **přibližné symbolické analýzy**. Jedná se o soubor technik, které umožňují získat přibližný symbolický výraz platný se zadanou přesností v jistém frekvenčním pásmu a jistém intervalu parametrů obvodových prvků. Kromě generování přibližného výrazu pro obvodovou funkci byly vyvinuty i metody pro přímý přibližný výpočet nul a pólů [11].

Prvním prakticky využitelným programem pro přibližnou analýzu byl *ISAAC* [9] vyvinutý na univerzitě v Leuvenu. V současnosti existuje několik volně dostupných programů jako např. *Sapwin* [12] z univerzity ve Florencii nebo program *SNAP* [13] vyvíjený na VUT v Brně. Jediným komerčním produktem je simulátor *Analog Insydes* [14] z ITWM Kaiserslautern, který je implementovaný jako nadstavba univerzálního matematického programu *Mathematica*. Je to zároveň jediný program schopný přibližné analýzy i obecných nelineárních systémů.

V současné době můžeme najít několik základních oblastí použití jak přesné, tak přibližné symbolické analýzy:

#### *A. Kvalitativní analýza obvodů*

Symbolický výraz v sobě koncentruje informaci, kterou by jinak bylo nutné získat mnohonásobným prováděním numerické simulace. V rámci oboru platnosti poskytuje symbolický výraz výsledek platný pro všechny kombinace vstupních hodnot. Např. je možné určit, jaké parametry ovlivňují střední frekvenci filtru, nebo jaké je minimální požadované zisk operačního zesilovače. Rozborem výsledků je možné najít vztahy pro návrh hodnot obvodových prvků. Ze symbolického výrazu je možné přímo určit citlivostní funkce.



Základní podmínkou interpretovatelnosti, danou schopnostmi člověka, je relativní jednoduchost symbolického výrazu. To je důvod použití metod přibližné symbolické analýzy. Zjednodušením však výraz ztratí svoji univerzálnost. Přibližná symbolická analýza je tak kompromisem mezi přesností a interpretovatelností.

Symbolická analýza má své místo ve výuce elektronických obvodů, kde slouží k poznání vlastností základních obvodů i pro verifikaci ručních výpočtů.

### *B. Automatické generování náhradních modelů pro analýzu a syntézu*

Simulace i optimalizace rozsáhlých systémů vyžaduje použití zjednodušených modelů. Např. filtr z obr. 1.1 může být reprezentován přenosovou funkcí (1.1). Během simulace tak není třeba opakovaně řešit soustavu rovnic, nýbrž jen dosadit do připraveného výrazu, což výrazně snižuje požadavky na výpočetní výkon. Navíc je možné vypočítat analyticky citlivostní funkce pro optimalizaci.

Symbolické modely našly své uplatnění v nástrojích pro syntézu analogových integrovaných obvodů jako např. ARIADNE [15], kde vstupními daty jsou požadavky na výsledné vlastnosti. Jednotlivé buňky, jejichž topologie je známa dopředu, jsou reprezentovány analytickými modely.

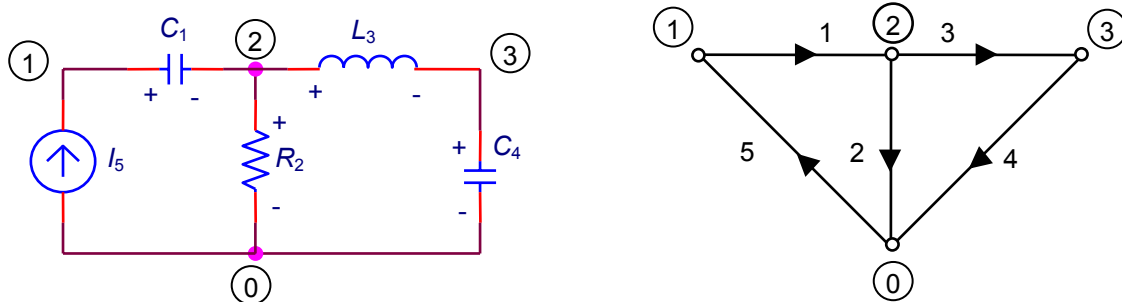
### *C. Poruchová analýza a testovatelnost*

Závažným problémem při výrobě zejména integrovaných obvodů je jejich testování, kdy je nutné z ekonomických i technických důvodů zjistit chybnou funkci obvodových prvků na základě měření v co nejmenším počtu bodů. Úkolem metod poruchové analýzy je stanovit optimální počet měřících bodů. V [1] je ukázáno výrazné zlepšení vlastností metod použitím symbolické analýzy, která odstraňuje problém se zaokrouhlovacími chybami.

## 2 ZÁKLADNÍ METODY SYMBOLICKÉ ANALÝZY

### 2.1 OBVODOVÉ ROVNICE

Uvažujme souvislý lineární elektrický obvod se soustředěnými parametry s  $n$  uzly, který se skládá z  $m_p$  pasivních dvojpólů a  $m_z$  nezávislých zdrojů proudu. Celkový počet větví je pak  $m_p+m_z$ . V každé větvi zvolíme kladnou orientaci a přiřadíme napětí a proudy, které vytvoří vektory  $\mathbf{i}_p$ ,  $\mathbf{u}_p$  pro pasivní větve a vektory  $\mathbf{i}_z$ ,  $\mathbf{u}_z$  pro zdroje proudu. Topologii takového obvodu je možné vyjádřit pomocí grafu, jehož vrcholy odpovídají uzlům a hrany větvím.



Obr. 2.1: Repräsentace topologie obvodu grafem

Strukturu grafu se zvoleným referenčním vrcholem odpovídajícím referenčnímu uzlu 0 v obvodu vyjádříme pomocí redukované incidenční matice uzlů a větví  $\mathbf{A}$  o rozměru  $(n-1) \times (m_p+m_z)$ , kde sloupce odpovídají větvím (hranám) a řádky uzlům (vrcholům) [5]. Matice rozdělená na pasivní část a část zdrojů bude mít pro obvod na obr. 2.1 tvar

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_p, \mathbf{A}_z] = \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \end{array} . \quad (2.1)$$

První Kirchhoffův zákon je pak možné vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_p \\ \mathbf{i}_z \end{bmatrix} = [\mathbf{A}_p \quad \mathbf{A}_z] \begin{bmatrix} \mathbf{i}_p \\ \mathbf{i}_z \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

a po úpravě

$$\mathbf{A}_p \mathbf{i}_p = -\mathbf{A}_z \mathbf{i}_z . \quad (2.3)$$

Je možné ukázat, že branová napětí  $\mathbf{u}_p$  i  $\mathbf{u}_z$  lze vyjádřit menším počtem proměnných [5]. Definujme vektor  $\mathbf{v}$  napětí všech uzlů proti zvolenému referenčnímu,  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_{n-1})^T$ . Pak je možné psát

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{A}_p^T \mathbf{v} . \quad (2.4)$$

Vektor branových proudů pasivních prvků  $\mathbf{i}_p$  je možné vyjádřit pomocí admitancí ve tvaru

$$\mathbf{i}_p = \mathbf{Y}_p \mathbf{u}_p , \quad (2.5)$$

kde  $\mathbf{Y}_p = \text{diag}(y_1, \dots, y_{m_p})^T$  je diagonální matice admitancí pasivních prvků.

Dosazením (2.4) a (2.5) do (2.3) dostáváme rovnici

$$\mathbf{A}_p \mathbf{Y}_p \mathbf{A}_p^T \mathbf{v} = -\mathbf{A}_z \mathbf{i}_z, \quad (2.6)$$

kteřá představuje maticový zápis klasické metody uzlových napětí [5]. Matice  $\mathbf{Y}_n = \mathbf{A}_p \mathbf{Y}_p \mathbf{A}_p^T$  je uzlová admitanční matice a  $\mathbf{J}_n = -\mathbf{A}_z \mathbf{i}_z$  představuje vektor budících uzlových proudů. Analogickým postupem je možné dojít i k duální metodě smyčkových proudů, která se však pro účely symbolické analýzy nepoužívá.

Uzlovou matici je možné sestavit přímo za použití jednoduchých pravidel pro umíst'ování dílčích admitancí do matice [16]. Vztah (2.6) představuje soustavu lineárních rovnic, kterou je možné řešit pomocí Cramerova pravidla. Napětí  $k$ -tého uzlu proti referenci můžeme vyjádřit jako

$$v_k = \frac{\det_k(\mathbf{A}_p \mathbf{Y}_p \mathbf{A}_p^T, -\mathbf{A}_z \mathbf{i}_z)}{\det(\mathbf{A}_p \mathbf{Y}_p \mathbf{A}_p^T)}, \quad (2.7)$$

kde  $\det_k$  označuje determinant matice, ve které byl  $k$ -tý sloupec nahrazen vektorem pravých stran. Výpočet determinantu je možné provést pomocí Laplaceova rozvoje prováděného symbolicky.

Uvážíme-li jediný zdroj proudu  $I$  připojený mezi uzel  $k$  a zemní svorku, tak vektor  $\mathbf{J}_n$  bude obsahovat pouze jeden nenulový prvek – proud  $I$ . Determinant v čitateli (2.7) bude možné rozvinout podle  $k$ -tého sloupce. Pro vstupní impedanci uzlu  $k$  vzhledem k zemní svorce můžeme psát

$$Z_k = \frac{v_k}{I} = \frac{\Delta_{k:k} I}{\Delta I} = \frac{\Delta_{k:k}}{\Delta}, \quad (2.8)$$

kde  $\Delta$  je determinant uzlové matice,  $\Delta_{k:k}$  reprezentuje algebraický doplněk, tj. determinant vzniklý vynecháním  $k$ -tého sloupce a řádku v původní matici. Výpočet všech obvodových funkcí pomocí algebraických doplňků je velmi podrobně zpracován v klasické literatuře, např. v [16].

Jediným potřebným výpočtem je Laplaceův rozvoj determinantu. Při něm vznikají zrušitelné členy, které se v průběhu výpočtu odečtou. Díky rekurzivní povaze algoritmu a řídkosti obvodových matic, je klasická varianta rozvoje velmi výpočetně náročná – výsledkem mnoha dílčích rekurzí je nula. Velmi rychlý algoritmus rozvoje byl vyvinut Prof. Čajkou [17].

Pro obvod z obr. 2.1 dostáváme

$$\mathbf{Y}_n = \begin{array}{|c|c|c|} \hline sC_1 & -sC_1 & 0 \\ \hline -sC_1 & sC_1 + G_2 + 1/sL_3 & -1/sL_3 \\ \hline 0 & -1/sL_3 & sC_4 + 1/sL_3 \\ \hline \end{array}, \quad (2.9a,b)$$

$$\Delta_Y = s^2 G_2 C_1 C_4 + C_1 G_2 / L_3 + C_1 / (sL_3 C_4)$$

## 2.2 TOPOLOGICKÁ METODA VÝPOČTU

### 2.2.1 Pasivní obvody

Uvažujme vztah (2.7). Uzlová admitanční matice  $\mathbf{Y}_n = \mathbf{A}_p \mathbf{Y}_p \mathbf{A}_p^T$  byla formulována na základě topologické struktury pasivní části obvodu. Podle Binet-Cauchyho věty je možné determinant  $\mathbf{Y}_n$  vyjádřit jako součet součinných členů, které představují tzv. hlavní determinanty (majory) matic

$\mathbf{A}_p \mathbf{Y}_p$  a  $\mathbf{A}_p^T$  [18]. Z teorie grafů je známo, že majory jsou nenulové tehdy a jen tehdy, když sloupce vybrané z původní incidenční matice odpovídají tzv. kostře grafu, což je soubor hran, které spojují všechny vrcholy a netvoří smyčku.

Nenulový major incidenční matice může nabývat jen hodnot  $\pm 1$ . Protože  $\mathbf{Y}_p$  je diagonální matice, tak součin  $\mathbf{A}_p \mathbf{Y}_p$  má stejnou strukturu jako samotná matice  $\mathbf{A}_p$  s tím rozdílem, že každý sloupec  $j$  je násobený příslušnou admitancí  $y_j$ . Proto každý nenulový major součinu  $\mathbf{A}_p \mathbf{Y}_p$  bude ve tvaru

$$\pm y_{t_1} y_{t_2} \dots y_{t_{n-1}}, \quad (2.10)$$

což představuje tzv. admitanční součin kostry grafu. Má-li graf  $n$  vrcholů, tak kostra se skládá z právě  $n-1$  hran.

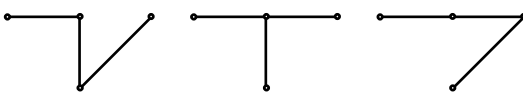
Major matice  $\mathbf{A}_p^T$  odpovídá stejné kostře a má proto stejné znaménko jako (2.10). V součinu se znaménka vyruší a všechny členy budou kladné

$$\det(\mathbf{A}_p \mathbf{Y}_p \mathbf{A}_p^T) = \sum_{t \in T(G)} y_{t_1} y_{t_2} \dots y_{t_{n-1}}, \quad (2.11)$$

kde  $T(G)$  označuje množinu všech koster grafu  $G$ . Označíme-li každý prvek jedinečným symbolem, tak žádné dva členy v sumě (2.11) nebudou stejné.

Metoda založená na generování koster topologických grafů proto **negeneruje zrušitelné členy**. Pro systematické generování koster byly navrženy účinné algoritmy [19].

Pro obvod z obr. 2.1 dostáváme výsledek, který je ve shodě s algebraickou metodou.



$$\Delta_Y = s^2 G_2 C_1 C_4 + C_1 G_2 / L_3 + C_1 / (s L_3 C_4)$$

## 2.2.2 Aktivní obvody

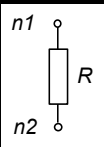
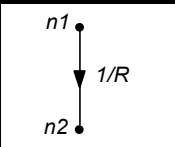
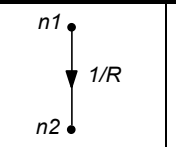
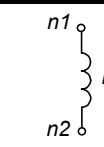
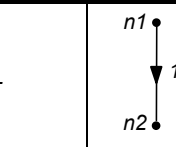
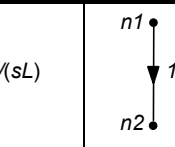
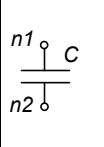
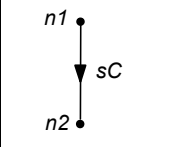
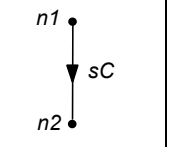
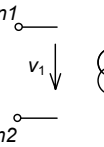
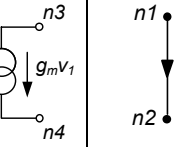
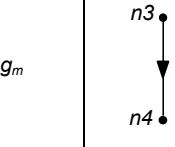
Topologická metoda výpočtu pro pasivní dvojpóly podle (2.11) byla založena na skutečnosti, že matice branových admitancí je diagonální. V případě aktivních obvodů tento předpoklad neplatí. Řešení nabízí přístup publikovaný v roce 1957 pod názvem metoda dvou grafů [20]. Tato metoda umožňuje analyzovat obvody sestávající z pasivních prvků (RLC) a zdrojů proudu řízených napětím (ZPN). Ostatní typy řízených zdrojů lze modelovat pomocí náhradních obvodů [21].

Matice branových admitancí  $\mathbf{Y}$  obsahuje i mimodiagonální elementy, což znemožňuje aplikaci Binet-Cauchyho věty. Např. je-li proud v  $k$ -té větvi určený napětím v  $j$ -té větvi, tak dostáváme

$$i_k = g_m u_j, \quad (2.12)$$

což představuje element matice  $\mathbf{Y}$  na pozici  $y_{k,j} = g_m$ .

Zatímco v případě pasivních obvodů byl I. i II. Kirchhoffův zákon vyjadřován prostřednictvím společné incidenční matice, resp. společného grafu, základní myšlenka metody dvou grafů je založena na odděleném vyjádření těchto zákonů prostřednictvím dvou samostatných grafů. Proudový graf vyjadřující I. Kirchhoffův zákon proto reprezentuje vzájemnou topologii výhradně proudových bran obvodu a napěťový graf vyjadřující II. Kirchhoffův zákon představuje vzájemnou topologii výhradně napěťových bran obvodu. Každý obvodový prvek přispívá do obou grafů právě jednou hranou, obr. 2.2.

Prvek	Napětový graf	Proudový graf	Prvek	Napětový graf	Proudový graf
					
					

Obr. 2.2: Napětové a proudové hrany základních prvků

Topologie proudového a napětového grafu je popsána zkrácenými incidenčními maticemi  $\mathbf{A}_I$  a  $\mathbf{A}_V$ . První Kirchhoffův zákon (2.3) bude nyní formulován jako

$$\mathbf{A}_I \mathbf{i}_b = \mathbf{J}_n \quad (2.13)$$

kde  $\mathbf{i}_b$  je vektor proudů proudových větví a  $\mathbf{J}_n$  je vektor budících proudů. Vektor  $\mathbf{i}_b$  můžeme vyjádřit pomocí vektoru napětí napětových větví  $\mathbf{u}_b$  jako

$$\mathbf{i}_b = \mathbf{Y}_b \mathbf{u}_b . \quad (2.14)$$

V případě, že proudy a napětí všech prvků jsou ve vektorech  $\mathbf{i}_b$  a  $\mathbf{v}_b$  uspořádány ve shodném pořadí, je matice větvových admitancí  $\mathbf{Y}_b$  opět diagonální.

Vektor větvových napětí  $\mathbf{u}_b$  můžeme při znalosti zkrácené incidenční matice  $\mathbf{A}_V$  napětového grafu vyjádřit snadno z uzlových napětí

$$\mathbf{u}_b = \mathbf{A}_V^T \mathbf{v} . \quad (2.15)$$

Nyní je možné rovnici (2.6) přeformulovat do tvaru

$$\mathbf{A}_I \mathbf{Y}_b \mathbf{A}_V^T \mathbf{v} = \mathbf{J}_n \quad (2.16)$$

představujícího zobecnění metody uzlových napětí.

Rozvoj  $\det(\mathbf{A}_I \mathbf{Y}_b \mathbf{A}_V^T)$  obsahuje podle Binet-Cauchyho věty nenulové členy jen tehdy, pokud odpovídající majory matic  $\mathbf{A}_I \mathbf{Y}_b$  a  $\mathbf{A}_V^T$  obsahují stejnou sadu hran, která tvoří zároveň kostru napětového i proudového grafu

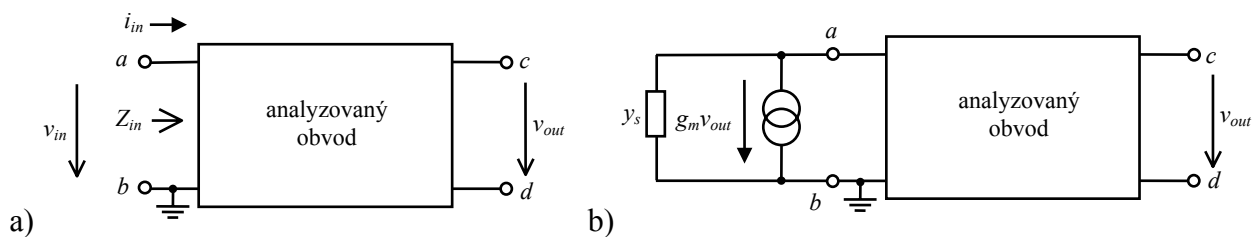
$$\det(\mathbf{A}_I \mathbf{Y}_b \mathbf{A}_V^T) = \sum_{t \in T(V) \cap T(I)} \varepsilon(t) y_{t_1} y_{t_2} \dots y_{t_{n-1}} . \quad (2.17)$$

Symboly  $T(V)$  a  $T(I)$  reprezentují množiny koster napětového a proudového grafu. Na rozdíl od pasivních obvodů nejsou znaménka majorů obecně stejná. Znaménkový člen  $\varepsilon(t)$  v (2.17) nabývá hodnot  $\pm 1$ . Pravidlo pro výpočet znaménka je poměrně komplikované a tudíž nevhodné pro ruční řešení [18]. Žádné dvě kostry nejsou stejné. Použijí-li se jedinečné symboly pro všechny obvodové parametry, tak nedojde v sumě (2.17) k žádnému výskytu zrušitelných členů.

### 2.2.3 Výpočet obvodových funkcí

Vztahy (2.11) i (2.17) představují prostředek na výpočet determinantu uzlové matice. Pro získání obvodových funkcí je nutné znát další algebraické doplňky matice  $\mathbf{Y}_n$ . V [18] byla publikována metoda, jenž spočívá v doplnění dalších elementů k analyzovanému obvodu.

Uvažujme analyzovaný obvod jako dvojbran, který doplníme o pomocnou admitanci  $y_s$  a pomocný zdroj proudu řízený proudem se strmostí  $g_m$ , obr. 2.3.



Obr. 2.3: Doplnění analyzovaného obvodu

Je možné ukázat, že determinant uzlové matice doplněného obvodu bude mít tvar

$$\tilde{\Delta} = \Delta + y_s \Delta_{aa} + g_m \Delta_{ac}^{c>d}, \quad (2.18)$$

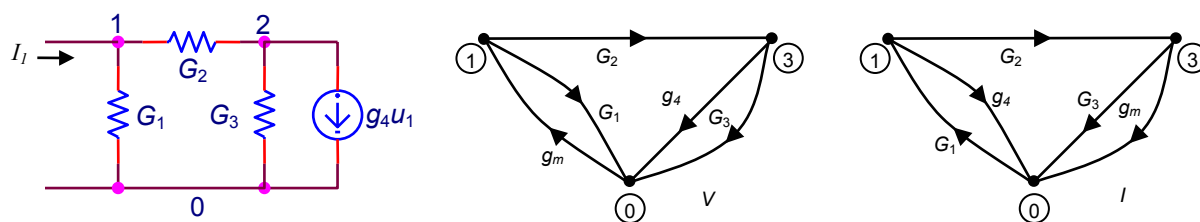
kde  $\Delta$  je determinant matice původního obvodu a  $\Delta_{aa}$ ,  $\Delta_{ac}^{c>d}$  jsou algebraické doplňky, pomocí kterých můžeme vyjádřit některé základní obvodové funkce:

$$\text{vstupní impedance: } Z_{in} = \frac{v_{in}}{i_{in}} = \frac{\Delta_{aa}}{\Delta}, \quad (2.19)$$

$$\text{přenosová impedance: } Z_t = \frac{v_{out}}{i_{in}} = \frac{\Delta_{ac}^{c>d}}{\Delta}, \quad (2.20)$$

$$\text{napětový přenos: } K_V = \frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{\Delta_{ac}^{c>d}}{\Delta_{aa}}. \quad (2.21)$$

Pomocné prvky  $y_s$  a  $g_m$  jsou vyjádřeny symbolicky. Výsledné symbolické členy, které neobsahují  $y_s$  ani  $g_m$  patří do  $\Delta$ . Členy obsahující  $y_s$  patří do  $\Delta_{aa}$  a členy obsahující  $g_m$  patří do  $\Delta_{ac}^{c>d}$ .



Obr. 2.4: Elementární obvod a jeho napětový a proudový graf

Uvažujme obvod na obr. 2.4. Pro výpočet přenosové admitance postačí obvod doplnit jen řízeným zdrojem proudu  $g_m$ . Množině společných koster napětového a proudového grafu odpovídá rozvoj determinantu uzlové matice se členy

$$\{G_1 G_2, G_1 G_3, G_2 G_3, g_4 G_2, g_m G_2, -g_4 g_m\}. \quad (2.22)$$

Podle (2.20) dostáváme

$$Z_t = \frac{v_2}{I_1} = \frac{G_2 - g_4}{G_1 G_2 + G_1 G_3 + G_2 G_3 + g_4 G_2}. \quad (2.23)$$

## 2.2.4 Složitost symbolického vztahu

Obvodová funkce každého obvodu se soustředěnými parametry má tvar podílu dvou polynomů. V plochém tvaru je čitatel i jmenovatel tvořen součtem součinných členů, jako např. ve výsledku (2.23). Jako míru složitosti symbolického výrazu můžeme definovat celkový počet součinných členů. Zvolená míra není závislá na konkrétní metodě použité pro řešení obvodu. V jistých případech, kdy je obvodovou funkci možné rozložit na součin dílčích členů, nemusí být takto zvolená míra optimální. Obecně lze však říci, že počet součinných členů dobře odpovídá subjektivnímu chápání složitosti.

Uvažujme pasivní obvod složený z dvojpólů. Jmenovatel (2.11) obvodové funkce (2.7) je podle Binet-Cauchyho věty určen jako součet admitančních součinných členů všech koster grafu, tj. složitost jmenovatele je rovna počtu koster.

$$\det(\mathbf{A}_p \mathbf{Y}_p \mathbf{A}_p^T) = \sum_{t \in T(N)} y_{t_1} y_{t_2} \dots y_{t_{n-1}}$$

Všechny sčítance v (2.11) mají kladné znaménko. Budeme-li formálně uvažovat všechny admittance jako jednotkové,  $\mathbf{Y}_p = \mathbf{E}$ , tak výsledek sumace bude přímo roven počtu koster

$$\det(\mathbf{A}_p \mathbf{A}_p^T) = \sum_{t \in T(N)} 1 = |T(N)|. \quad (2.24)$$

Incidenční matice  $\mathbf{A}_p$  je numerická matice obsahující čísla +1 nebo -1. Výpočtem determinantu  $\mathbf{A}_p \mathbf{A}_p^T$  získáme přímo složitost jmenovatele bez nutnosti generovat úplný symbolický výraz.

K získání složitosti čitatele by bylo nutné stejný postup aplikovat na algebraický doplněk matice  $\mathbf{A}_p \mathbf{Y}_p \mathbf{A}_p^T$ . Při řešení praktických úloh bývá počet členů čitatele menší než počet členů jmenovatele, někdy i řádově. Pro odhad složitosti  $C$  obvodové funkce  $H_p$  pasivního obvodu bude postačující uvažovat jen složitost jmenovatele, tj. položíme

$$C(H_p) \approx \det(\mathbf{A}_p \mathbf{A}_p^T). \quad (2.25)$$

V případě aktivních obvodů rozvoj determinantu (2.17) může obsahovat kladné i záporné členy. V případě uvažování jednotkové admitanční matice se některé členy odečtou. Výsledkem je tedy spodní hranice pro odhad počtu společných koster napěťového a proudového grafu. Na druhou stranu, počet společných koster nemůže převýšit počet koster napěťového ani proudového grafu. Pro odhad složitosti obvodové funkce  $H_a$  aktivního obvodu dostáváme podmínku

$$|\det(\mathbf{A}_I \mathbf{A}_V^T)| \leq C(H_a) \leq \min(\det(\mathbf{A}_V \mathbf{A}_V^T), \det(\mathbf{A}_I \mathbf{A}_I^T)). \quad (2.26)$$

Napěťové a proudové podgrafy pasivních částí aktivního obvodu jsou shodné. Členy se zápornými znaménky souvisejí s řízenými zdroji. V praxi je počet řízených zdrojů menší než počet pasivních prvků, což zejména platí pro obvody s polovodiči. Proto má blíže k reálné složitosti spíše spodní hranice odhadu (2.26).

Pro úplný obvod na obr. 2.5a) je podle [22] počet koster grafu roven

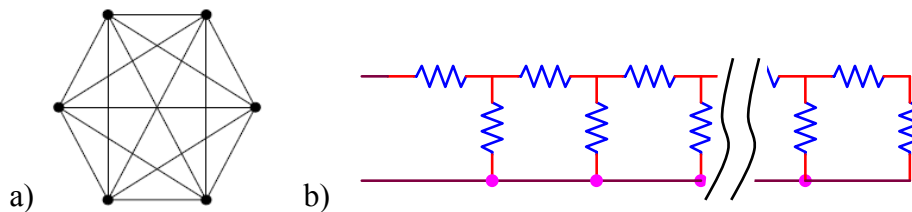
$$\det(\mathbf{A} \mathbf{A}^T) = n^{n-2}, \quad (2.27)$$

kde  $n$  je počet uzlů. Celkový počet větví úplného obvodu je  $n(n-1)/2$ .

Pro příčkový článek na obr. 2.5b) dostáváme podle [18] počet koster

$$\det(\mathbf{A} \mathbf{A}^T) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right], \quad (2.28)$$

kde  $n$  je opět počet nezávislých uzlů.



Obr. 2.5: Dvě mezní pravidelné topologie: úplný obvod a příčkový článek

Pro obecný obvod bude složitost ležet někde mezi exponenciální ( $a^n$ ) závislostí pro příčkový článek a superexponenciální ( $n^n$ ) závislostí pro úplný obvod. Např. v [30] je uvedeno, že odhadovaná složitost napěťového přenosu klasického operačního zesilovače 741 modelovaného na tranzistorové úrovni je řádu  $10^{19}$ . Je vidět, že pro elektronické obvody běžné velikosti s desítkami uzlů, je přesná symbolická analýza prakticky neproveditelná. I kdyby se podařilo vygenerovat výsledný výraz, tak pro něj nebude praktické využití.



## 3 PŘIBLIŽNÁ SYMBOLICKÁ ANALÝZA

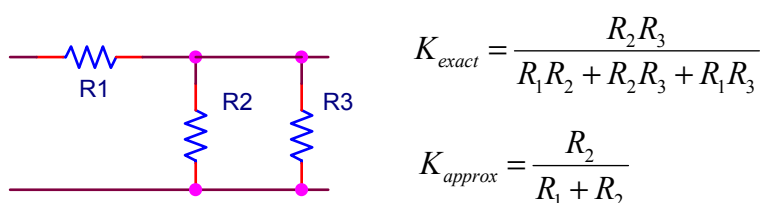
### 3.1 ZÁKLADNÍ PRINCIP

Jak bylo ukázáno v kap. 2.2.4, složitost přesného symbolického výrazu nedovoluje použití klasické symbolické analýzy pro obvody praktické velikosti. Pomineme-li využití symbolických výrazů pro výpočtové účely (opakované vyčíslování, optimalizace, modelování, poruchová analýza, apod.), tak smyslem symbolického vyjádření obvodové funkce je poskytnutí informace o analyzovaném obvodu návrháři – člověku. Aby měl symbolický výraz smysl, musí být *interpretovatelný*. Základním předpokladem interpretovatelnosti je poměrná jednoduchost, která je v příkrém rozporu s exponenciálním růstem počtu členů s velikostí obvodu.

Od konce osmdesátých let jsou proto ve středu zájmu v oblasti symbolické analýzy metody pro zjednodušení výrazů. Ukázalo se, že algebraické (bezeztrátové) zjednodušování spočívající v krácení zlomků a faktorizaci dílčích členů je buď neproveditelné, nebo neúčinné. Jedinou možností je aproximovat výraz pro obvodovou funkci.

Pro danou funkci a dané chybové kritérium je samozřejmě možné nalézt nekonečně mnoho aproximačních funkcí. Praktické zkušenosti ukazují, že po dosažení číselných hodnot do přesného symbolického výrazu je výsledek určen relativně malým počtem členů, zatímco většina ostatních je numericky nevýznamná. Základní principem, který byl proto v symbolické analýze obecně přijat, je podmínka strukturální podobnosti aproximovaného výrazu s původním. Jinými slovy, aproximovaný výraz obsahuje jen ty členy, které obsahuje původní výraz. Aproximace tedy spočívá v rušení členů původního výrazu. Zvolený princip je ve shodě s intuitivním přístupem, který je používán při „ručním“ řešení elektronických obvodů. Byly navrženy i jiné postupy, např. aproximace podle předem daných šablon [23].

Uvažme elementární obvod na obr. 3.1, ve kterém platí nerovnost  $R_3 \gg R_2$ . Při ručním řešení obvodu intuitivně zanedbáme  $R_3$  vůči  $R_2$ , tj. daný odpor odstraníme z obvodového modelu, čímž dostaneme jednodušší výsledný výraz. Zanedbání odporu odpovídá uvažování  $R_3 \rightarrow \infty$ .



Obr. 3.1: K výkladu symbolického zjednodušování

Základním principem přibližné symbolické analýzy je tedy identifikace a odstranění nevýznamných členů symbolického výrazu nebo naopak vygenerování pouze dominantních členů. Pro automatickou identifikaci významnosti jednotlivých symbolických členů je nutné znát jejich číselné hodnoty.

Nechť  $H(f, \mathbf{p})$  je přesný tvar obvodové funkce a  $H'(f, \mathbf{p})$  je přibližný tvar vzniklý vynecháním některých členů. Vektor  $\mathbf{p}$  je vektor parametrů obvodových prvků a  $f$  je frekvence. Nechť  $L(H, H')$  je vhodně zvolená míra pro odchylku mezi původním a přibližným tvarem obvodové funkce.

Uvažujme interval parametrů obvodových prvků  $\mathbf{p} \in D \subset R^r$  a frekvenční interval  $f \in F = \langle f_1, f_2 \rangle$ . Přibližnou symbolickou analýzou rozumíme nalezení  $H'$  s co nejmenší složitostí tak, že

$$L(H(f, \mathbf{p}), H'(f, \mathbf{p})) \leq \varepsilon, \quad (3.1)$$

$f \in F$   
 $\mathbf{p} \in D$

kde  $\varepsilon$  je zvolená maximální hodnota.

Přibližná symbolická analýza je tedy kombinací symbolické a numerické analýzy. **Zjednodušení symbolického výrazu je dosaženo na úkor jeho obecnosti.** Definice je založena na předpokladu, že subjektivní interpretovatelnost je nepřímo úměrná složitosti výrazu, tj. počtu symbolických členů. Je však možné ukázat, že např. vynecháním nevýznamného členu ve výrazu můžeme znemožnit jeho úpravu na součin dílčích členů (faktorizaci).

Všechny dosud publikované algoritmy řeší proces zjednodušování heuristicky. Členy jsou postupně odstraňovány z úplného výrazu s předpokladem, že se tím zvýší interpretovatelnost výsledného výrazu.

K zajištění požadované obecnosti výsledku je třeba maximální odchylku mezi původní a aproximovanou funkcí obecně nutné sledovat na intervalu  $D \times F$ . Z důvodu výpočetní náročnosti se stanovení metriky  $L$  v průběhu symbolického zjednodušování obvykle provádí pouze na vybraných bodech z  $D \times F$ . Přesnější stanovení odchylky vede na nutnost použít velmi výpočetně náročné algoritmy pro řešení kořenů polynomů a intervalovou aritmetiku [24].

Definujme množinu kontrolních bodů

$$P = \{(f_i, \mathbf{p}_i) \mid f_i \in F, \mathbf{p}_i \in D \forall i = 1..m\}. \quad (3.2)$$

V praxi se navíc většinou uvažují jen nominální hodnoty obvodových parametrů. Interval  $D \times F$  je tak vzorkován jen ve frekvenční oblasti. Zjednodušenou metriku pak můžeme definovat jako

$$L'(H(f, \mathbf{p}), H'(f, \mathbf{p})) = \max_{\substack{f \in F \\ \mathbf{p} \in D \\ (f_i, \mathbf{p}_i) \in P}} (e(H(f_i, \mathbf{p}_i), H'(f_i, \mathbf{p}_i))), \quad (3.3)$$

kde  $e$  je odchylka mezi komplexními hodnotami  $H$  a  $H'$ .

Vzhledem k tomu, že pracujeme s kmitočtovými charakteristikami, je rozumné sledovat odchylku v Bodeho diagramu, tj. sledovat odchylku amplitudy a fáze. Definujme chybovou funkci

$$E(f, \mathbf{p}) = \frac{H'(f, \mathbf{p})}{H(f, \mathbf{p})}, \quad (3.4)$$

která nabývá hodnoty  $E = 1$  pro  $H = H'$ . Odchylku  $e$  pak můžeme definovat jako vážený součet odchylky amplitudy a odchylky fáze

$$e(f_i, \mathbf{p}_i) = \frac{|20 \log |E(f_i, \mathbf{p}_i)||}{\Delta M_i} + \frac{|\arg(E(f_i, \mathbf{p}_i))|}{\Delta P_i}. \quad (3.5)$$

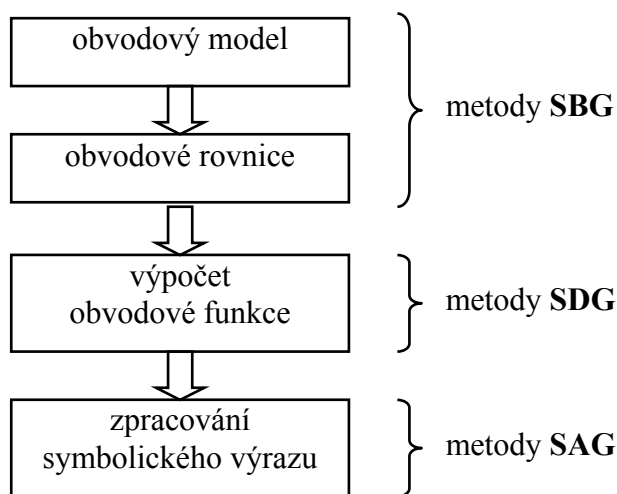
kde  $\Delta M_i$  a  $\Delta P_i$  nepřímo definují váhu pro každý vzorek z množiny  $P$ . Pro  $H = H'$  dostáváme  $e = 0$ .

## 3.2 KLASIFIKACE ALGORITMŮ

Zjednodušování symbolického výrazu je možné provádět na různém stupni výpočtu obvodové funkce, obr. 3.2.

Techniky zjednodušování před generováním (**SBG** – Simplification Before Generation) jsou založené na zjednodušování obvodového modelu, které spočívá v odstraňování nevýznamných obvodových prvků. Stejný postup byl uplatněn i v příkladu na obr. 3.1. Odstranění libovolného obvodového prvku vždy vede na zjednodušení výsledného symbolického výrazu v případě, že

prvky jsou označeny rozdílně. Principiálně se nemohou objevit tzv. nepůvodní členy, vniklé když se odstraní jeden z dvojice vzájemně zrušitelných členů.



Obr. 3.2: Klasifikace přibližných technik

Další možností je zjednodušování (lineárních) obvodových rovnic, které spočívá v rušení některých koeficientů matice soustavy nebo úpravě grafu. Tento přístup může obecně generovat nepůvodní členy. Metoda [25] známá jako *Sifting Approach* upravuje odděleně matice pro výpočet algebraických doplňků čitatele a jmenovatele. Zjednodušovací algoritmus programu *Analog Insydes* [14] odstraňuje prvky matice podle jejich vlivu na výslednou chybu (3.3). Efektivita algoritmu a případný vznik nepůvodních členů závisí na použité formulační metodě. Autoři programu však nikdy nepublikovali hlubší rozbor.

Na Ústavu radioelektroniky byla v rámci výzkumu symbolické analýzy vyvinuta původní metoda zjednodušování grafu, kap. 3.3.3, [26], [27], [28].

Techniky zjednodušování při generování (**SDG** – Simplification During Generation) jsou založené na selektivním generování jen dominantních členů. Nedominantní členy, kterých je většina, se vůbec negenerují. To umožňuje analyzovat i relativně větší obvody s rozsahem desítek uzlů. Nejznámější algoritmus z této oblasti patří do kategorie topologických metod a je založen na průniku matroidů, kdy je možné generovat admitanční součiny společné kostry napěťového a proudového grafu se zvoleným počtem kapacitorů, tj. pro zvolený koeficient polynomu čitatele nebo jmenovatele [29]. Koeficienty se pak generují v sestupném pořadí, dokud není splněna podmínka (3.1). Metoda negeneruje nepůvodní členy.

Technika zjednodušování po generování (**SAG** – Simplification After Generation) postupně ruší členy úplného symbolického výrazu, až přestane být splněna podmínka (3.1). Před zahájením zjednodušování je nutné vygenerovat úplný symbolický výraz. Bylo navrženo několik metod, které se liší formulací kritéria pro vynechávání symbolických členů [1].

Požadavky na algoritmy přibližné analýzy:

- **Nepůvodní členy.** V souladu s postulovaným principem přibližné symbolické analýzy se ve zjednodušeném výrazu nesmí objevit členy, které by nebyly obsažené v úplném výrazu. Tuto podmínku nesplňuje prosté rušení některých koeficientů v obvodové matici u algebraických metod SBG.

- **Řídící algoritmus.** Proces zjednodušování je nutné založit na průběžném vyhodnocování podmínky (3.1) pro chybu aproximace [30].
- **Rozsah obvodu.** Hlavní nevýhodou metod SAG je nutnost vygenerovat úplný symbolický výraz, což je pro obvody o velikosti desítek uzlů nemožné. Nejvýkonnější jsou techniky SBG, které operují s relativně malým počtem rovnic.
- **Interpretovatelnost.** Praktické zkušenosti ukazují, že metody založené na čistě matematickém přístupu sice poskytují výsledky vyhovující (3.1), ale hůře interpretovatelné. Tento problém se týká zejména metod SDG. Naopak nejlepší výsledky poskytují metody, které přímo zjednodušují topologii obvodu, resp. jeho modelu.

V praxi se obvykle používá kombinace několika metod. Technika SAG slouží jako postprocesor pro mezivýsledky získané pomocí SBG nebo SDG. Pro symbolický simulátor SNAP byla zvolena kombinace metody SBG a SAG, která zajišťuje možnost analyzovat rozsáhlé obvody při zachování interpretovatelnosti výsledků.

### 3.3 METODY SBG

Tato kapitola pojednává o algoritmech vyvinutých v rámci výzkumu symbolických metod na Ústavu radioelektroniky FEKT VUT v Brně.

#### 3.3.1 Řídící algoritmus

Postup zjednodušování obvodových rovnic nebo grafů u metod SBG můžeme rozdělit na posloupnost dílčích kroků, kdy je v každém vykonána jedna elementární operace (zrušení obvodového prvku nebo transformace grafu). Celý proces probíhá v cyklu. Nejdříve se pro všechny potenciální operace stanoví velikost chyby, kterou způsobí. Jedna nebo více operací s nejmenšími chybami se provedou. Zjednodušování končí, jakmile celková akumulovaná chyba dosáhne maximální stanovené hodnoty.

Každá operace se ohodnocuje chybou podle (3.3), kterou by způsobilo její provedení. Výpočetní náročnost zjednodušování je právě určena výpočtem chyb dílčích operací.

*výpočet referenčního řešení;*  
**dokud**  $\varepsilon_A < \varepsilon_{\max}$  {  
*generování potenciálních operací;*  
*výpočet chyby pro každou operaci;*  
*provedení operací s nejmenší chybou;*  
*aktualizace numerického řešení a  $\varepsilon_A$ ;*  
 }  
*zrušení poslední operace;*

Obr. 3.3: Řídící algoritmus symbolického zjednodušování SBG

Výsledkem je zjednodušený obvodový model, u kterého se provede symbolická analýza. Její výsledek může být dále zjednodušen pomocí některé z metod SAG.

#### 3.3.2 Parametrická metoda SBG

Uvažujme obvodové rovnice lineárního obvodu bez zdrojů ve tvaru

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0} , \quad (3.6)$$

kteřé byly sestaveny např. pomocí modifikované metody uzlových napětí [5], která umožňuje popsat jakýkoliv obvod bez omezení typu prvků.

Koeficienty matice  $\mathbf{A}$  jsou tvořeny parametry obvodových prvků. Jako elementární operaci budeme uvažovat vypuštění jednoho prvku, což zároveň vždy zjednoduší i výsledný symbolický výraz. Pokud je uvažovaným prvkem např. rezistor, tak jeho odstraněním se rozumí nahrazení zkratem nebo vyjmutí z obvodu.

Libovolnou obvodovou funkci je možné vyjádřit jako podíl dvou algebraických doplňků matice  $\mathbf{A}$ , tj. podílu dvou subdeterminantů s vhodným znaménkem

$$H = (-1)^\alpha \frac{\det(\mathbf{A}_1)}{\det(\mathbf{A}_2)} . \quad (3.7)$$

Matice  $\mathbf{A}_1$  a  $\mathbf{A}_2$  byly získány z  $\mathbf{A}$  přičtením, resp. vynecháním některých řádků a sloupců [16]. Uvážíme-li elementární parametr  $p$  na pozici  $(i, j)$  v matici, tak je možné pro determinant psát

$$\det(\mathbf{A}_1) = \Delta' + p\Delta_{i,j} , \quad (3.8)$$

kde  $\Delta'$  je determinant matice bez prvku  $p$ , a  $\Delta_{i,j}$  je algebraický doplněk. Stejný princip platí samozřejmě i pro  $\mathbf{A}_2$ . Prvek  $p$  bude mít obecně rozdílné souřadnice v  $\mathbf{A}_1$  a  $\mathbf{A}_2$ .

Obvodová funkce pak může být podle (3.8) napsána ve tvaru

$$H = \frac{ap + b}{cp + d} , \quad (3.9)$$

kde  $a, b, c, d$  jsou komplexní čísla. Představuje-li  $p$  admitanci prvku, tak jeho náhrada zkratem odpovídá  $p \rightarrow \infty$  a vyjmutí z obvodu pak  $p \rightarrow 0$ . Z (3.9) snadno odvodíme

$$\lim_{p \rightarrow \infty} H = \frac{a}{c} , \quad \lim_{p \rightarrow 0} H = \frac{b}{d} . \quad (3.10a,b)$$

K výpočtu nové hodnoty obvodové funkce stačí znát **numericky** determinanty a všechny doplňky matic  $\mathbf{A}_1$  a  $\mathbf{A}_2$ .

Maticovou inverzi je možné formálně vyjádřit jako

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \dots & \Delta_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \dots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} (\mathbf{A}_\Delta)^T , \quad (3.11)$$

kde  $\mathbf{A}_\Delta$  je matice algebraických doplňků, kterou je možné vyjádřit jako

$$\mathbf{A}_\Delta = \det(\mathbf{A}) (\mathbf{A}^{-1})^T . \quad (3.12)$$

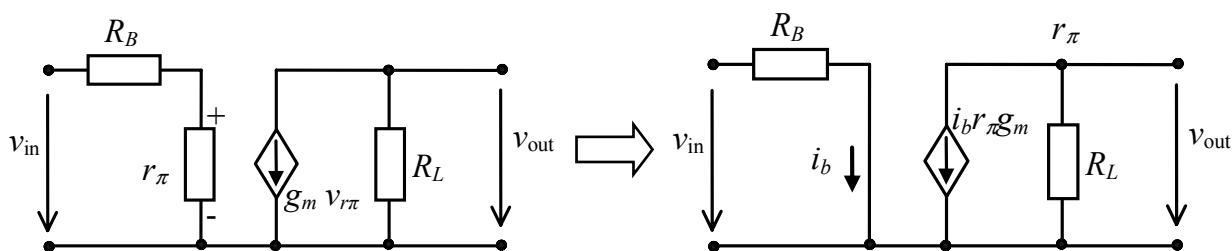
Protože je determinant vedlejším produktem maticové inverze, tak výpočet (3.12) vyžaduje  $(n-1)^3/3$  operací, kde  $n$  je dimenze původní obvodové matice.

### 3.3.3 Topologická metoda SBG

Algebraická metoda z kap 3.3.2 odstraňuje z obvodu elementární prvky. Z principu nemůže generovat nepůvodní členy ve výsledném symbolickém výrazu. Jakmile je dosažena maximální

povolená odchylka, tak procedura skončí. Je možné ukázat, že v tomto bodě je možné pomocí netriviálních operací s grafy obvodu docílit dalšího zjednodušení.

Uvažujme, že parametrická metoda došla do bodu, kdy v obvodovém modelu zůstaly prvky dle obr. 3.4 kde  $R_B = 36\text{k}\Omega$ ,  $r_\pi = 4\text{k}\Omega$ ,  $g_m = 35\text{mS}$ ,  $R_L = 4\text{k}\Omega$ .



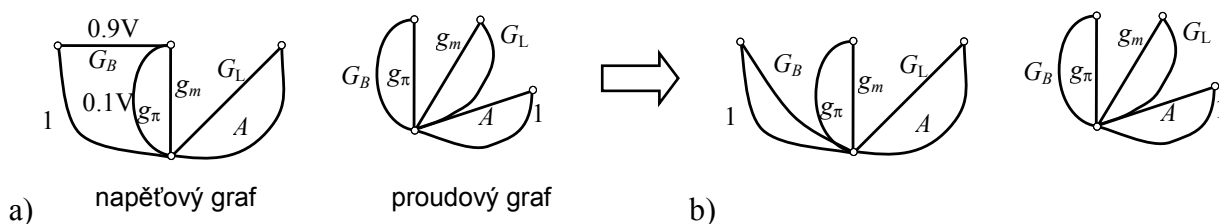
Obr. 3.4: Elementární obvod

Přesný výraz pro napěťový přenos je

$$K_V = \frac{v_{out}}{v_{in}} = -\frac{r_\pi}{R_B + r_\pi} g_m R_L . \quad (3.13)$$

Protože  $R_B \gg r_\pi$ , tak vztah může být dále zjednodušen. Omezíme-li se na metodu SBG, tak rezistor  $r_\pi$  již nemůže být z obvodu odstraněn. Jak zkratování, tak jeho vyjmutí by způsobilo neakceptovatelnou chybu.

Použijme nyní pro řešení metodu dvou grafů, kap. 2.2.2. Pro výpočet napěťového přenosu je nutné obvod doplnit o pomocné prvky, obr. 3.5a).



Obr. 3.5: Původní a zjednodušené grafy obvodu z obr. 3.4

Nechť je napětí vstupní brány „1“ rovno 1V. Potom napětí  $r_\pi$  je 0,1V. Toto napětí může být zanedbáno ve smyčkách  $1-G_B-g_\pi$  a  $1-G_B-g_m$ , ale ne ve smyčce  $g_\pi - g_m$ . Jednoduchá modifikace grafu na obr. 3.5b) odstraní  $g_m$  a  $g_\pi$  jen z „vysokonapěťových“ smyček. Stanovením společných koster obou grafů je pak možné vypočítat výsledný napěťový přenos

$$K'_V = -\frac{r_\pi}{R_B} g_m R_L . \quad (3.14)$$

Z grafu na obr. 3.5b) vyplývá, že dvojice  $r_\pi$  a ZPN byla nahrazena zdrojem proudu řízeným proudem. Pomocí transformací obou grafů je možné selektivně odstranit „nízkonapěťové“ větve z „vysokonapěťových“ smyček. Podobná transformace může být formulována pro proudové řezy obvodu. Metoda byla formulována v [26] a následných publikacích [27], [28].

Nechť  $G$  je graf. Potom  $V(G)$  je množina jeho vrcholů (uzlů),  $E(G)$  je množina hran (větví),  $T(G)$  je množina koster. Incidence hrany  $e$  v grafu  $G$ ,  $\rho(e, G) = (i, j)$ , přiřadí dva vrcholy  $i$  a  $j$  hraně  $e$ . Hrana s incidencí  $(v, v)$  se nazývá vlastní smyčka. Graf  $G$  se nazývá separovatelný, jestliže existuje vrchol, jehož odstraněním se graf rozpadne na dvě nebo více částí. Blok je maximální neseperovatelný podgraf.

Základní operací metody je tzv. separace podgrafu [26]:

**Definice:** Separací souvislého podgrafu  $G_S$  z grafu  $G$  rozumíme operaci, která transformuje  $G$  na

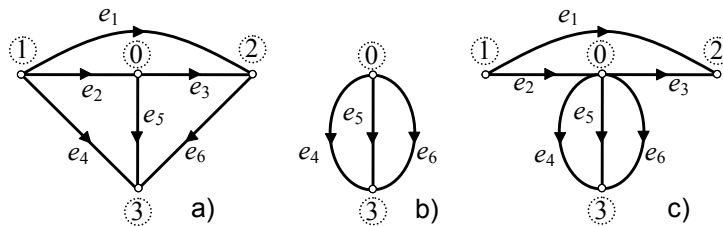
$$G' = \tilde{G} \cup G_S, \quad (3.15)$$

kde  $\tilde{G}$  je podgraf, jehož množina hran je  $E(\tilde{G}) = E(G \setminus G_S)$ . Incidence  $\rho(e, G) = (v_i, v_j)$  jakékoli hrany  $e \in E(\tilde{G})$  je transformována na  $\rho(e, \tilde{G}) = (f(v_i), f(v_j))$ , kde  $f$  je

$$f(v) = \begin{cases} v_c & \text{pro } v \in V(G_S) \\ v & \text{jinak} \end{cases}. \quad (3.16)$$

$v_c$  je libovolně zvolený vrchol  $v_c \in V(G \setminus G_S) \cap V(G_S)$ . Operace bude označena jako

$$\tilde{G} = G \Rightarrow G_S, \quad G' = G \triangleright G_S. \quad (3.17)$$



Obr. 3.6: Příklad separace  $G_S = \{e_1, e_2, e_3\}$ : a) původní graf  $G$ ; b) graf  $\tilde{G} = G \Rightarrow G_S$ ; c)  $G' = G \triangleright G_S$ .

Obr. 3.6 ukazuje separaci  $G_S = \{e_1, e_2, e_3\}$ . Je možné ukázat, že tato transformace nemění počet vrcholů a hran, ale zmenšuje počet koster grafu  $G'$ . Důkaz může být nalezen v [27].

Nechť je obvod reprezentován proudovým grafem  $G_I$  a napěťovým grafem  $G_V$  s hranami  $e_1, e_2, \dots, e_b$ , jejichž váhy jsou amplitudy větvových proudů a napětí na zvoleném kmitočtu.

Nechť  $L_1, L_2, \dots, L_B \subseteq G_V$  jsou všechny smyčky napěťového grafu  $G_V$ . Napětí  $v(e_j)$  hrany  $e_j \in E(L_i)$  bude považováno za numericky nevýznamné ve smyčce  $L_i$  pokud

$$|v(e_j)| < \varepsilon_V \max_{h \in E(L_i)} |v(h)|, \quad (3.18)$$

kde  $\varepsilon_V \in (0, 1)$  je zvolená prahová hodnota. Tato hrana je kandidátem na odstranění ze smyčky  $L_i$ .

Uvažujme, že graf  $G_V$  může být rozložen na dva disjunktní podgrafy  $G_V^H$  a  $G_V^L$  a že platí

$$\max_{e \in G_V^L \cap L} |v(e)| < \varepsilon_V \max_{e \in L} |v(e)| \quad (3.19)$$

pro každou smyčku  $L \subseteq G_V$  která je obsažena v obou podgrafech. Potom je možné odstranit nízkonapěťové hrany  $G_V^L$  z vysokonapěťových smyček pomocí separace

$$G'_V = G_V \triangleright G_V^L. \quad (3.20)$$

Pro obvod na obr. 3.4 je  $G_V^L = \{g_\pi, g_m\}$ . Pokud je separovaný graf nesouvislý, tak se operace provádí po jednotlivých komponentách.

Je možné ukázat, že odstranění „maloproudových“ větví z „vysokoproudových“ řezů vede na rozklad  $G_I$  vzhledem ke zvolenému prahu  $\varepsilon_I \in (0, 1)$  na dva disjunktí podgrafy  $G_I^H$  a  $G_I^L$  [27]. pokud pro každou smyčku  $L \subseteq G_I$  obsaženou v obou podgrafech platí podmínka

$$\min_{e \in E(L)} |i(e)| < \varepsilon_I \min_{e \in E(G_I^H \cap L)} |i(e)|, \quad (3.21)$$

potom je možné provést separaci

$$G'_I = G_I \triangleright G_I^H. \quad (3.22)$$

Zjednodušovací algoritmus je aplikován dvakrát. Nejdříve se provádí parametrické zjednodušování podle kap 3.3.2, tj. základní operace jsou  $p_i \rightarrow 0$  a  $p_i \rightarrow \infty$  pro každý parametr. Tento krok snižuje výrazně velikost obvodového modelu. Výpočetní náročnost je zhruba  $O(r m n^3)$ , kde  $n$  je řád obvodové matice,  $r$  je počet prvků, které mají být odstraněny, a  $m$  je počet testovacích bodů z  $D \times F$ .

*nalezení společné kostry s nejnižším admitančním součinem;*  
*seřazení větiv  $c_i$  sestupně;*  
 $S_A = \emptyset; S_S = \emptyset;$   
**opakuji**  $i = 1 \dots (b-n+1)$  {  
*generování základní smyčky  $L_i$  pro větivu  $c_i$ ;*  
 $S_B = \{S_{A,j} \mid S_{A,j} \cap L_i \neq \emptyset\};$   
**jestliže**  $S_B$  je prázdná {  
*přidat  $L_i$  to  $S_A$ ;*  
**jinak** {  
 $U = \left( \bigcup_{S_{B,j}} \right) \cup L_i;$   
*odstranění členů  $S_B$  z  $S_A$ ;*  
*přidání  $U$  to  $S_A$ ;*  
**opakuji pro všechna  $j$**   
**jestliže**  $\max_{e \in S_{B,j}} |v(e)| < \varepsilon_V \max_{e \in L_i} |v(e)|$ , *přidej  $S_{B,j}$  to  $S_S$ ;*  
**}**  
**}**  
**}**

Obr. 3.7: Generování základních operací pro  $G_V$

Dalším krokem je separace podgrafů splňujících podmínky (3.19), resp. (3.21), obr. 3.7. Uvažujme souvislý graf ( $G_V$  nebo  $G_I$ ) s  $n$  vrcholy a  $b$  hranami. Každá kostra  $t$  má přesně  $n-1$  hran, tzv. haluzí (twig). Zbylé hrany jsou tzv. větivy [5]. Základní smyčka je tvořena jednou větivou a několika haluzemi. Necht'  $S_A$  a  $S_B$  jsou pomocné množiny podgrafů a  $S_S$  je množina kandidátů na separaci. Symbol  $S_{A,i}$  reprezentuje  $i$ -tý člen  $S_A$ . Algoritmus pro proudový graf je podobný. Výpočetní náročnost je přibližně  $O(m(n^3+b))$ .



## 4 SNAP – PROGRAM PRO SYMBOLICKOU ANALÝZU

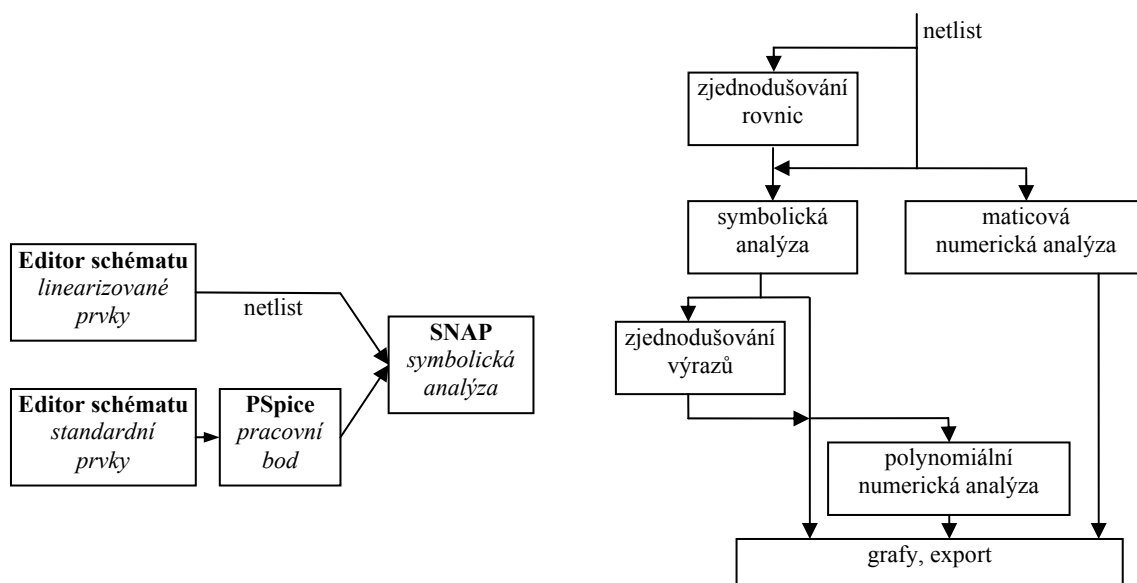
Symbolický simulátor SNAP (Symbolic Network Analysis Program) byl vytvořen na Ústavu radioelektroniky FEKT VUT v Brně jako konkrétní výstup výzkumu algoritmů pro přesnou i přibližnou symbolickou analýzu. Jeho unikátní vlastností je možnost tvorby uživatelských modelů pro elektrické i neelektrické soustavy. Při jeho vývoji, který kontinuálně probíhá od roku 1995, byla vyvinuta řada původních algoritmů pro zjednodušování obvodových rovnic.

Program se v současné době používá ve výuce na FEKT VUT v Brně, Univerzitě obrany Brno, Univerzitě Palackého Olomouc, Žilinské univerzitě, ČVUT i Ústavu termomechaniky AV ČR. Podle ohlasů ze zahraničí je používán např. v King Mongkut's Univ. of Technology (Thajsko) a ISEP Paris (Francie). Bylo potvrzeno i nasazení v průmyslu, např. v centru Motorola v Plantation, Florida (USA) a Transim Technology, Portland (USA).

Vývoj algoritmů symbolické analýzy a programu SNAP byl přímo podpořen dvěma granty GAČR a GAAV. Program je zdarma k dispozici na Internetu.

### 4.1 POPIS PROGRAMU

Vstupem simulátoru SNAP je netlist analyzovaného obvodu, který je obvykle vygenerován vhodným schematickým editorem. Existují dvě možnosti zadání schématu. Buď uživatel použije knihovnu lineárních prvků, tj. provede linearizaci obvodu sám, nebo je možné automaticky linearizovat nelineární obvod v pracovním bodu pomocí numerického simulátoru PSpice.



Obr. 4.1: Uspořádání programu a posloupnost výpočtů

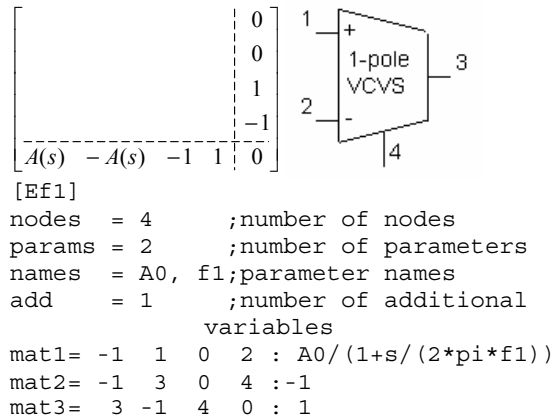
Parametry prvků je možné zadávat ve formě symbolu, výrazu, číselné hodnoty nebo výrazu pro číselnou hodnotu, obr. 4.2. Tak je možné provádět čistě symbolickou nebo částečně symbolickou analýzu. Program kromě symbolického tvaru vypočítá i polohu nul a pólů a výsledky zobrazí graficky.

V programu jsou implementovány vyvinuté algoritmy přibližné analýzy popsané v kap. 3.3 doplněné o standardní metodu SAG pro další zjednodušení.

Modely všech prvků jsou uloženy v knihovně, kterou může uživatel libovolně rozšiřovat. Na obr. 4.2 je příklad definice zdroje napětí řízeného napětím s přenosovou funkcí prvního řádu.

Položky *mat* určují tzv. razítka prvků v matici modifikované metody uzlových napětí. Všechny elementy mohou být zadány jako výrazy.

	syntaxe	příklad
1	<symbol>	R1
2	<symbolický výraz>	$R1+s*L1$
3	<hodnota>	10k
4	<výraz pro hodnotu>	$\{R1/2+1k\}$
5	<symbol> = <hodnota>	$R2=10k$ $R2=\{R1/2+1k\}$

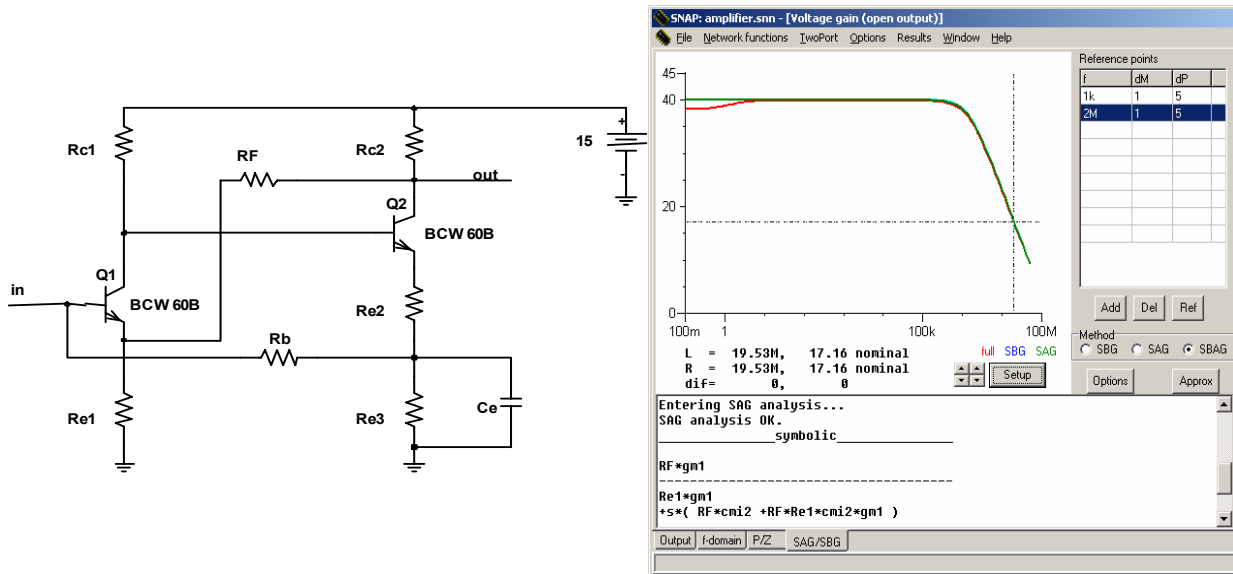


Obr. 4.2: Možnosti zadání parametrů prvků a ukázka modelu v knihovně

## 4.2 VYUŽITÍ SYMBOLICKÉ ANALÝZY VE VÝUCE A VÝZKUMU

Symbolický simulátor je vhodným nástrojem pro výuku základních analogových obvodů. Studenti mohou ověřovat správnost „ručních“ výpočtů. Simulátor SNAP umožňuje výpočet rozložení nul a pólů, který není dostupný např. ani ve známém numerickém simulátoru PSpice.

Přibližná symbolická analýza je poměrně novým nástrojem. Studenti tak mají možnost se při řešení praktických úloh seznámit s výhodami i nevýhodami tohoto způsobu řešení obvodů.



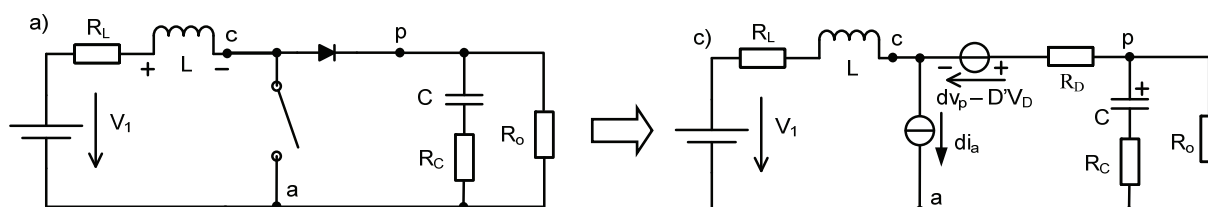
Obr. 4.3: Využití přibližné symbolické analýzy pro určení šířky pásma zesilovače

Na obr. 4.3 je příklad analýzy transistorového zesilovače s určením prvků, které utvářejí horní mezní kmitočty. Původní symbolický výraz o rozsahu několika stran A4 byl v rámci maximální povolené chyby zredukován na funkci prvního řádu, ze které se snadno určí dominantní pól.

### 4.3 NETRADIČNÍ APLIKACE SYMBOLICKÉ ANALÝZY

Symbolické metody jsou tradičně spojované s analýzou lineárních obvodů ve frekvenční oblasti. Je však možné je využít všude tam, kde můžeme analyzovaný systém popsat soustavou lineárních rovnic.

Jednou z netradičních oblastí aplikace symbolické analýzy jsou spínané zdroje. Jejich nelinearita nedovoluje přímé řešení ve frekvenční oblasti. Pro průměrné hodnoty veličin v obvodu je však možné sestavit lineární náhradní schéma, na které lze aplikovat symbolické metody, obr. 4.4.



Obr. 4.4: Lineární model spínaného zdroje pro průměrné hodnoty

Monografie [34] popisuje využití symbolických metod (a konkrétně programu SNAP) pro řešení mechatronických soustav. Dynamiku složitých elektromechanických systémů je možné reprezentovat ekvivalentními elektrickými obvody. Potom je možné využít všechny nástroje vyvinuté pro elektrické obvody.

## 5 ZÁVĚR

Symbolická analýza je nástroj, který doplňuje klasickou numerickou analýzu. Poskytuje kvalitativní popis analyzovaného systému. Ze symbolického výsledku je možné odvodit návrhové vztahy pro volbu hodnot obvodových prvků.

Překážkou většího rozšíření symbolických metod je zejména složitost výsledných výrazů. Pro obvody o velikosti desítek tranzistorů je symbolické řešení nemožné. Metody přibližné symbolické analýzy jsou kompromisem mezi čistě symbolickou a numerickou analýzou. Za cenu ztráty přesnosti a univerzálnosti je možné získat jednoduchý vztah pro hledanou obvodovou funkci.

Pro přibližnou analýzu se podařilo vyvinout účinné algoritmy, které dovolují zpracovat obvody až do velikosti stovky uzlů. Praktické zkušenosti ukazují, že (subjektivní) interpretovatelnost výsledků jednotlivých metod se liší. Lepší výsledky dosahují metody, které jsou založené na sledování fyzikálních (elektrických) poměrů v analyzovaném obvodu.

Symbolická analýza má VUT v Brně dlouhou tradici. Dlouholetý výzkum vyústil do vzniku symbolického simulátoru SNAP, který je aktivně používán na řadě pracovišť ve školství i v průmyslu.

## Literatura

- [1] FERNÁNDEZ, F. V.; RODRIGUES-VASQUES, A.; HUERTAS, J. L.; GIELEN, G. *Symbolic Analysis Techniques - Applications to Analog Design Automation*, New York: IEEE Press, 1998.
- [2] WICHMANN, T. Simplification of Nonlinear DAE Systems with Index Tracking. In *Proceedings of ECCTD '01*, Espoo, Finland: IEEE, Aug. 2001, vol. II, pp. 173–176.
- [3] WAMBACKQ, P.; GIELEN, G.; SANSEN, W. Symbolic Network Analysis Methods for Practical Analog Integrated Circuits: A Survey. *IEEE Trans. on Circuits and Systems II*, October 1998, vol. 45, no. 10, pp. 1331-1341.
- [4] LIN, P. M. *Symbolic Network Analysis*. New York: Elsevier, 1991.
- [5] VLACH, J.; SINGHAL, K. *Computer Methods for Circuit Analysis and Design (2nd ed.)*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1994.
- [6] GIELEN, G., WAMBACQ, P.; SANSEN, W. Symbolic Analysis Methods and Applications for Analog Circuits: A Tutorial Overview. *Proceedings of the IEEE*, Feb. 1994, vol. 82, no. 2, pp. 287–304.
- [7] HASSOUN, M.; McCARVILLE, K. Symbolic Analysis of Large-Scale Networks Using a Hierarchical Signal Flowgraph Approach. *Journal of Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, Jan 1993, vol. 3, no. 1, pp. 31-42.
- [8] GIELEN, G.; SANSEN, W. *Symbolic Analysis for Automated Design of Analog Integrated Circuits*. Norwell, MA: Kluwer, 1991.
- [9] GIELEN, G.; WALSCARTS, H.; SANSEN, W. ISAAC: A symbolic simulator for analog integrated circuits. *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, Dec. 1989, vol. 24, no. 6, pp. 1587-1597.
- [10] PIERZCHALA, M.; RODANSKI, B. Generation of Sequential Symbolic Network Functions for Large-Scale Networks by Circuit Reduction to a Two-Port. *IEEE Trans. on Circuits and Systems I*, July 2001, vol. 48, no. 7, pp. 906-909.
- [11] HENNIG, E.; WIESE, M.; SOMMER, R. Symbolic Pole/Zero Approximation Using Eigenvalue Shift Prediction. In *Proc. of 5th Int. Workshop on Symbolic Methods and Applications to Circuit Design*, Kaiserslautern: ITWM, Oct. 1998, pp. 29-35.
- [12] LUCHETTA, A.; MANETTI, S.; REATTI, A. SAPWIN-a symbolic simulator as a support in electrical engineering education. *IEEE Trans. on Education*, May 2001, vol.44, no. 2.
- [13] KOLKA, Z. SNAP – program for symbolic analysis. *Radioengineering*, 1999, vol. 8, no. 1, pp. 23-24.
- [14] SOMMER, R.; HENNIG, E.; THOLE, M.; HALFMANN, T., Analog Insydes 2 - New Features and Applications in Circuit Design. In *Proceedings of 6th International Workshop on Symbolic Methods and Applications in Circuit Design*, Lisbon, Portugal, Oct. 2000.
- [15] SWINGS, K.; SANSEN, W. ARIADNE: A constraint-based approach to computer-aided synthesis and modeling of analog integrated circuits. *Int. Journal of Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, 1993, vol. 3, pp. 197-215.
- [16] ČAJKA, J.; KVASIL, J. *Teorie lineárních obvodů*. SNTL Praha, 1979.
- [17] ČAJKA, J.; VRBA, K.; BIOLEK, D. Improved program for symbolic analysis and synthesis of linear circuits. In *Proc. of AMSE94*, Lyon, France, 1994, vol. 1, p. 299-302.

- [18] LIN, P. M. *Symbolic Network Analysis*. Amsterdam: Elsevier, 1991.
- [19] PAPADIMITRIOU, C. H.; STEIGLITZ, K. *Combinatorial optimization*. Mineola, NY: Dover Publications, 1998.
- [20] MAYEDA, W.; SESHU, S. *Topological Formulas for Network Functions*. Engineering Experimentation Station, University of Illinois, Bulletin 446, Urbana, 1957.
- [21] VLK, M.; KOLKA, Z. New Topological Approach to Simplification Before Generation. In *Proc. of 7th International Workshop on Symbolic Methods and Applications to Design SMACD 2002*, Sinaia, Romania, 2002, pp. 120 – 123.
- [22] FOULDS, L. R. *Graph Theory Applications*. New York (USA): Springer, 1992.
- [23] DAEMS, W.; GIELEN, G.; SANSEN, W. A fitting approach to generate symbolic expressions for linear and nonlinear analog circuit performance characteristics. In *Proc. of Design Automation and Test in Europe Conference*, Mar. 2002, pp. 268-273.
- [24] RODRIGUEZ, J. D.; GUERRA, O.; ROCA, E.; FERNANDEZ, F. V.; RODRIGUEZ-VAZQUES, A. Error control in simplification before generation algorithms for symbolic analysis of large analogue circuits. *Electronics Letters*, vol. 35, no. 4, pp. 260 – 261.
- [25] YU, Q; SECHEN, C. A Unified Approach to the Approximate Symbolic Analysis of Large Analog Integrated Circuits. *IEEE Trans Circ Syst-I*, 1996; vol. 43, no. 8, pp. 656-69.
- [26] VLK, M. *Aproximační symbolická analýza lineárních obvodů*. Disertační práce, FEKT VUT v Brně, 2004.
- [27] KOLKA, Z.; VLK, M.; BIOLEK, D.; BIOLKOVÁ, V. Topology Transformations for Symbolic Analysis. In *Proc. of the 2006 IEEE Int'l Midwest Symposium on Circuits and Systems*. Puerto Rico, USA: IEEE, 2006, pp. 200 – 204.
- [28] KOLKA, Z.; VLK, M.; BIOLEK, D.; BIOLKOVÁ, V. Symbolic Analysis Based on Graph Transformations. In *Proc. of 14th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems (ICECS 2007)*, Marrakech: IEEE, 2007.
- [29] WAMBACQ, P.; DOBROVOLNÝ, P.; GIELEN, G.; SANSEN, W. Symbolic Analysis of Large Analog Circuits Using a Sensitivity-Driven Enumeration of Common Spanning Trees”, *IEEE Trans. on Circ. and Syst.II*, Oct. 1998, vol. 45, no. 10, pp. 1342–1350.
- [30] DAEMS, W.; WERHAGEN, W.; WAMBACQ, P.; GIELEN, G.; SANSEN, W. Evaluation of Error-Control Strategies for the Linear Symbolic Analysis of Analog Integrated Circuits. *IEEE Trans. on Circuits and Systems I*, May 1999, vol.46, no. 5, pp. 594 – 606.
- [31] HORÁK, M.; KOLKA, Z. Topological simplification using sparse matrices and Sherman-Morrison formula. In *Proc. of the 14th International Electrotechnical and Computer Science Conference*, Portorož, Slovenia, 2005, pp. 36 – 74.
- [32] DAEMS, W.; GIELEN, G.; SANSEN, W. Circuit complexity reduction for symbolic analysis of analog integrated circuits. In *Proc. of 36th Design Automation Conference*, 1999, pp. 958 – 963.
- [33] SOMMER, R. et al., Equation-Based Symbolic Approximation by Matrix Reduction with Qualitative Error Prediction, *Alta-Frequenza Rivista di Elettronica*, 1993, vol.5, no.6, pp.29-37.
- [34] KALOUS, J.; KRATOCHVÍL, C.; HERIBAN, P. *Dynamika rotačních elektromechanických pohonů*. Brno: Ústav termomechaniky AV ČR, 2007.

## Abstract

Symbolic analysis is a class of techniques for modeling and calculating the behavior of a circuit in analytical form. Symbolic analysis provides insight into circuit behavior. A single analytical formula concentrates information that could be otherwise obtained only by many numerical analyses.

Both numerical and symbolical methods for linear circuits emerged in the early 1970s in connection with implementing computers into the design process of electronic circuits. While numerical simulators have become standard tools, the symbolic analysis has not reached such a wide use. One of the reasons is the astronomical size of symbolic expressions for network functions of circuits of practical size.

The approximate symbolic analysis is a technique for obtaining simple symbolic expressions at the expense of accuracy and generality. Such expressions are valid in the vicinity of nominal values of network parameters and within a limited frequency range. On the other hand, the approximate symbolic analysis is the only technique suitable for large circuits. Chapter 3 of the paper presents two methods developed at the Department of Radio Electronics. The topological method is based on two-graph circuit description. The conventional approach consists in eliminating the network parameters or coefficients of a circuit matrix. This method represents a new approach to simplifying the symbolic expressions that is based on a structural modification of graphs representing a network. The method goes beyond the capabilities of parametric simplification. Instead of simple edge deletion or contraction it changes the graph structure in order to decrease the number of common spanning trees.

The symbolic analysis has a long-standing tradition at Brno University of Technology. The research into symbolic methods has led to the development of symbolic simulator Snap. The program is a suitable tool both for teaching electronic circuits and for circuit design. It is actively used in several universities and companies.

The symbolic analysis is not restricted to electrical circuits. It can be applied to any linear or linearized system, for example to mechanical or fluid systems.