VĚDECKÉ SPISY VYSOKÉHO UČENÍ TECHNICKÉHO V BRNĚ
Edice Habilitační a inaugurační spisy, sv. 617
ISSN 1213-418X

Michal Novák

HYPERSTRUKTURY A USPOŘÁDÁNÍ: JEDEN Z MOŽNÝCH PŘÍSTUPŮ

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
Fakulta strojního inženýrství
Ústav matematiky

RNDr. Michal Novák, Ph.D.

HYPERSTRUKTURY A USPOŘÁDÁNÍ: JEDEN Z MOŽNÝCH PŘÍSTUPŮ

HYPERSTRUCTURES AND ORDERING: ONE POSSIBLE APPROACH

ZKRÁCENÁ VERZE HABILITAČNÍ PRÁCE
V OBORU
APLIKOVANÁ MATEMATIKA

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ NAKLADATELSTVÍ VUTIUM

BRNO 2018

KLÍČOVÁ SLOVA (MSC 2010):
algebra, hypergrupy, ostatní zobecnění grup, teorie hyperstruktur, uspořádané struktury

KEYWORDS (MSC 2010):
algebra, hypergroup, hyperstructure theory, ordered structures, other generalizations of groups

MÍSTO ULOŽENÍ HABILITAČNÍ PRÁCE:
Fakulta strojního inženýrství Vysokého učení technického v Brně

ISBN 978-80-214-5687-7
ISSN 1213-418X

Obsah

PŘEDSTAVENÍ AUTORA

RNDr. Michal Novák, Ph.D.

Narozen:	4.7.1975 v Přerově
Researcher ID:	C-9867-2013
ORCID:	0000-0003-3309-8784
SCOPUS ID:	55385598200
Kontakt:	Vysoké učení technické v Brně Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií Ústav matematiky Technická 10 616 00 Brno novakm@feec.vutbr.cz

Autor je absolventem PřF a FF MU. Magisterský titul získal v roce 1998 v oboru *Učitelství pro střední školy* (kombinace *matematika – anglický jazyk*), titul Ph.D. v roce 2004 v oboru *Obecné otázky matematiky* a titul RNDr. v roce 2007 v oboru *Matematika: učitelství matematiky pro střední školy.*

Od roku 2000 působí na FEKT VUT v Brně, kde se na Ústavu matematiky profesně věnuje odborné práci v algebraické teorii hyperstruktur a jejích aplikacích. Vyučuje jak v prezenčním studiu na FEKT a FIT, tak i v kombinovaném studiu FEKT. Vede výuku v anglickém jazyce. Je koordinátorem několika bilaterálních smluv Erasmus+.

Byl hlavním řešitelem projektu OP VK CZ.1.07/1.3.00/14.0001 a 3 projektů FRVŠ. Podílel se na řešení výzkumného záměru MSM0021630529 *Inteligentní systémy v automatizaci*, projektu specifického výzkumu *Dynamika systémů se zaměřením i na algebraickou a topologickou strukturu*, 2 projektů OP VK a 2 projektů FRVŠ.

V roce 2001 absolvoval tříměsíční stáž na Universidade de Coimbra (Portugalsko); od roku 2014 pak 10 výjezdů v rámci programu Erasmus+. Kromě domácích kolegů spolupracuje s Assist. Prof. Irina Cristea, Ph.D. (matematický aparát algebraické teorie hyperstruktur v oblastech, které se částečně překrývají s tématem habilitační práce, tj. hyperstruktury a uspořádání), Kyriakem Ovaliadisem, Ph.D. (aplikace výsledků habilitační práce pro sběr dat ze sítě podmořských senzorů), s Prof. Vassiliem Tsiantosem, Ph.D. (využití učebních materiálů připravených na FEKT VUT) a s Hashemem Bordbarem, Ph.D. (algebraické teorie hyperstruktur v oblastech, které se částečně překrývají s tématem habilitační práce).

K jeho dosavadním nejvýznamnějším odborným výsledkům patří autorství nebo spoluautorství 8 článků publikovaných v časopisech s IF, autorství 1 kapitoly v odborné knize a autorství anglicko–českého / česko–anglického slovníku matematické terminologie (výuková pomůcka určená pro střední a vysoké školy).

Počet bodů dle přílohy Směrnice rektora č. 54/2017 k datu zahájení habilitačního řízení: 815,5 (minimální požadavek: 180)

1 ÚVOD

Algebraická *teorie hyperstruktur* je zobecněním klasické algebry, které je založeno na zobecnění pojmu *algebraická operace.* Zatímco za *operaci* na množině H považujeme zobrazení $f: H^n \to H$, za *hyperoperaci* na množině H považujeme zobrazení $g: H^n \to \mathcal{P}^*(H)$, kde $\mathcal{P}^*(H)$ je množina všech neprázdných podmnožin H.[1] Jinými slovy, zatímco za výsledek operace na množině považujeme opět *prvek* této množiny, za výsledek *hyperoperace* považujeme – v obecném případě – *podmnožinu* této množiny. Typickým příkladem je tak např. úsečka nebo jiná křivka jako výsledek hyperoperace aplikované na množinu bodů roviny nebo množina jistých dělitelů přirozeného čísla, které vznikne aplikací nějaké vhodné algebraické operace na množině přirozených čísel.

Za počátek teorie hyperstruktur se obecně považuje článek F. Martyho [65], který se v roce 1934 zabýval popisem struktury, kterou získáme, jestliže provedeme rozklad grupy podle takové její podgrupy, která není normální. Tuto strukturu nazval *hypergrupou.* Jednoduchým způsobem pak lze ukázat, že definice grupy a hypergrupy fungují jako přirozené paralely – pouze s tím rozdílem, že jednou za výsledek (hyper)operace připouštíme vždy pouze jeden prvek a jindy obecně podmnožinu. Od 70. let 20. století se pod vlivem prací Dunkla, Jewetta a Spectora [7, 27, 54, 97] mnozí autoři od této *algebraické definice* odklánějí a pod pojmem *hypergrupa* nadále rozumějí již jen speciální případ, kdy H je lokálně kompaktní prostor s jistými vlastnostmi. Tyto *topologicky definované hypergrupy* pak nalézají uplatnění zejména v teorii pravděpodobnosti (viz např. Bloom a Heyer [7]; o evoluci a vztazích těchto různých přístupů pojednává např. Litvinov [64]). Vzniká tak jistá dvoukolejnost, která se promítá i do oborové klasifikace AMS, která uvádí dva různé MSC kódy pro pojem *hypergrupa*: $20N20$ pro hypergrupu v původním slova smyslu a $43A62$ pro hypergrupu ve smyslu harmonické analýzy.

Předkládaná habilitační práce se zabývá *algebraickou* teorií hyperstruktur, tj. teorií založenou na původní Martyho definici a na pracích autorů jako Krasner, Koskas, Comer, Prenowitz, Jantosciak, Mittas, Nakasis nebo členové italské a řecké školy jako např. Corsini, de Salvo, Freni, Stratigopoulos, Massouros, Spartalis, Konstantinidou, Vougiouklis a jejich žáci. V českém prostředí je tento přístup historicky spojen např. se jmény Drbohlav, Kepka a Němec [25, 26, 56].

Základní knižní literatura z algebraické teorie hyperstruktur je relativně pozdního data. Teprve v roce 1986 shrnul P. Corsini výsledky dosavadního bádání v italsky psané monografii, která byla v anglickém překladu [12] publikována až v roce 1993. Zásluhou této, i když poněkud uživatelsky nepřívětivě psané, monografie, byly čtenářům zpřístupněny odkazy na mnohé zásadní práce psané většinou francouzsky (řecká škola), resp. italsky a francouzsky (italská škola). Za další významnou anglicky psanou publikaci z oboru pak lze považovat až monografii P. Corsiniho a V. Leoreanu [13] z roku 2003. V českém prostředí nelze opomenout česky psanou monografii J. Chvaliny [37] vydanou krátce po Corsiniho knize, v roce 1995, z níž některé výsledky byly zahrnuty do monografie [13].

Zatímco od 70. let 20. století nalezl přístup k pojmu *hypergrupa ve smyslu harmonické analýzy* uplatnění zejména v teorii pravděpodobnosti, *algebraická* teorie hyperstruktur procházela v této době krizí, během které musela prokázat smysl své existence. Poté, co Krasner [61] zavedl pojem *hyperpole* a později *hyperokruh*, nebylo dlouho možné nalézt jiné příklady těchto struktur než jím popsané. Krasner [60] poté navíc předvedl konstrukci hyperokruhů pomocí faktoro-

[1] Někdy se lze setkat i s definicí připouštějící prázdnou množinu; ta se však vylučuje s definicí pojmu *hypergrupa*, který je v habilitační práci klíčový.

kruhů, která se zdála být vyčerpávající. Teprve v polovině 80. let popsal Massouros [66,68,69] konstrukce hyperokruhů definovaných Krasnerem, které není možné získat pomocí klasické algebry a dosavadních konstrukcí, čímž odpověděl na otázku užitečnosti studia hyperokruhů, která byla diskutována již od počátku 70. let. (Podrobněji o tomto tématu viz Nakasis [73].)

Dlouhé období neexistence knižní literatury, několikaleté diskuse o smyslu studia některých konstrukcí, určité „rozdvojení“ terminologie a v posledních letech bohužel také inflace publikací zejména blízko– a středovýchodní provenience, které často bez hlubšího pochopení recyklují starší výsledky, způsobily, že algebraická teorie hyperstruktur nepatří k hlavnímu proudu soudobé algebry. Je tomu tak i přes některé fundamentální výsledky získané např. W. Prenowitzem a J. Jantosciakem [52,53,91–93], jimž algebraická teorie hyperstruktur umožnila novým způsobem popsat různé typy geometrií a zejména poskytnout motivaci k zavedení pojmu *spojnicový prostor* (*join space*), který našel a stále nachází široké uplatnění v různých matematických oborech (viz např. Nieminen [75, 76] a Polat [90] jako ukázka starších a novějších prací z teorie grafů).

Předkládaná habilitační práce je motivována některými výsledky obsaženými v monografii J. Chvaliny [37] z roku 1995, které nebyly zařazeny do později publikované monografie P. Corsiniho a V. Leoreanu [13]. Jejím tématem jsou algebraické hyperstruktury, při jejichž konstrukci hraje jistou roli relace na nosné množině. Toto téma zdaleka není nové. Naopak, jeho studium se zcela přirozeně nabízí – viz např. dřívější práce Corsiniho [11], Cristei [16], Nieminena [75, 76], Ştefănescu [18], Varleta [99] a dalších. Ukazuje se však, že jedna z konstrukcí odvozená J. Chvalinou je natolik obecná, že umožňuje jednotící pohled na mnohé dosud izolovaně získané výsledky – jak starší, tak novější získané zejména českými autory, kterým je přístupná Chvalinova monografie [37]. Tuto konstrukci označujeme jako „koncové lemma“ a od ní odvozené algebraické hyperstruktury jako *EL–hyperstruktury* (z anglického „Ends lemma“). Právě studiu těchto hyperstruktur se habilitační práce věnuje.

2 STRUKTURA HABILITAČNÍ PRÁCE

Habilitační práce představuje soubor výsledků získaných autorem mezi lety 2005 a 2017. Většina textu již byla autorem publikována (viz str. 7); práci lze tedy formálně považovat za soubor publikovaných prací opatřených komentářem. I když bylo záměrem autora, aby jednotlivé publikace tvořily v budoucnu jeden větší celek, v případě komentáře se nejedná o samostatně stojící text. Naopak, nad rámec sjednocení označování, vyjasnění terminologie, změny pořadí jednotlivých výsledků vynucené potřebou logické návaznosti a podobných víceméně technických zásahů, se ukázalo jako účelné využít daný prostor k historickým a motivačním poznámkám a k zasazení studované problematiky do širšího kontextu.

Text habilitační práce tvoří čtyři, vzájemně provázané, kapitoly. První poskytuje kromě základních definic používaných v dalším textu také stručnou diskusi některých jiných přístupů k problematice uspořádání v algebraické teorii hyperstruktur. Mezi jinými je uvedena Chvalinova [37] konstrukce *kvazipořádkových hypergrup* včetně jejího historického vývoje (což je důležité zejména proto, že do monografie P. Corsiniho a V. Leoreanu [13], ze které je často citována, byla přejata bez patřičného kontextu), konstrukce *uspořádaných hyperstruktur* Heidariho a Davvaze [34] (opět s patřičným kontextem, protože íránští autoři, mezi nimiž je oblíbená, často opomíjejí její motivaci v dřívějším studiu zobecnění svazových struktur provedené M. Konstantinidou a J. Mittasem) a konstrukce *BCK–algeber* a jejích zobecnění (o které je ukázáno, že s tématem práce souvisí pouze ve speciálním, i když důležitém, případě dolních polosvazů).

Druhá kapitola tvoří jádro práce. Nejprve je uvedena konstrukce EL–hyperstruktur a její příklady, které lze – pochopitelně bez tohoto pojmenování – vystopovat až k Pickettově práci [89], zabývající se hyperstrukturním zobecněním svazů (a zprostředkovaně až k původní Martyho konstrukci). V následujících dvou částech této kapitoly je diskutována otázka využitelnosti této konstrukce pro hyperstruktury s jednou a poté pro hyperstruktury se dvěma hyperoperacemi. V závěru druhé kapitoly je zmíněn vztah EL–hyperstruktur a některých jiných přístupů uvedených v kapitole první.

Třetí kapitola práce se zabývá rozšířeními a modifikacemi EL–hyperstruktur. Nejprve je diskutována přirozeně se nabízející otázka aplikace koncového lemmatu místo binárních na *n–ární relace*, ke které lze přistoupit několika různými způsoby. Poté je řešena otázka redukce předpokladů a zvýšení použitelnosti konstrukce, při které se využívá rozkladu nosné množiny na prvky určitých typů daných požadovanou aplikací.

Závěrečná kapitola práce je věnována tématu aplikací dříve získaných teoretických poznatků. Na tomto místě je třeba připomenout, že v případě koncového lemmatu a EL–hyperstruktur se jedná o *jeden z možných přístupů* ke studiu algebraických hyperstruktur, který umožňuje pod mnohé v práci uvedené výsledky zahrnout celou řadu výsledků získaných již dříve či bez odkazu na EL–hyperstruktury. (Např. výše uvedený Pickettův [89] příklad o svazech z roku 1967 je jednoduchou ukázkou koncového lemmatu; podobně definice v práci Al Tahanové a Davvaze [2] o *braid groups* (z roku 2016) není nic jiného než přepsané koncové lemma apod.) Z tohoto pohledu lze říci, že v mnoha pracích zabývajících se aplikací teorie hyperstruktur jsou teoretické výsledky habilitační práce přítomny implicitně. Jako příklad lze uvést právě zmíněné *braid groups* nebo využitelnost teorie hyperstruktur při *městském plánování* popsanou v práci Antampoufise, Dramalidise a Vougiouklise [3]. Vzhledem k tomu, že vhodnou nosnou množinou EL–hyperstruktur jsou také např. *svazy*, je možné i mnohé výsledky týkající se BCK–algeber jako dolních polosvazů (např. Jun a Song [55], Flaut [28], Saeid et al. [96] týkající se kódování ve starších typech mobilních telefonních sítí) vidět perspektivou teoretických výsledků habilitační práce. Protože však přirozeně není možné se omezit pouze na tyto povrchní zmínky, jsou do habilitační práce zahrnuty tři příklady aplikací: první část je věnována studiu *různých typů operátorů* (lineárních diferenciálních, některých integrodiferenciálních, transformačních) jako ukázka aplikace v jiné oblasti matematiky; poznamenejme, že studium hyperstruktur zmiňovaných typů operátorů zahájil Chvalina pod vlivem přístupu Borůvky a Neumana [9,74]. Druhá část je věnována jistému *zobecnění teorie automatů* a slouží jako ukázka aplikace teoretických výsledků do oblasti na pomezí matematiky a inženýrských věd. Konečně poslední, třetí, část závěrečné kapitoly, která je věnována konstrukci *matematického modelu sítě podvodních senzorů* (UWSN), slouží jako ukázka čistě inženýrské aplikace dosažených výsledků.

Jak již bylo zmíněno výše, většina výsledků uvedená v habilitační práci již byla autorem publikována. Přesněji, většina výsledků části 2.4 byla publikována v *European Journal of Combinatorics* jako Novák [79, 82]. Výsledky části 2.4.4 byly publikovány jako Novák [83], zatímco výsledky části 2.4.10 byly publikovány jako Novák, Cristea a Křehlík [85]. Části 2.5.2 a 2.5.3 vycházejí z Novák [81], zatímco výsledky části 2.5.4. pocházejí z Novák a Cristea [84] publikovaném v *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*. Výsledky části 2.5.5 byly publikovány v časopise *Analele Ştiinţifice ale Universităţii "Ovidius" Constanţa* jako Křehlík a Novák [62]. V kapitole třetí je část 3.1 založena na výsledcích publikovaných jako Novák [78] v *Analele Ştiinţifice ale Universităţii "Ovidius" Constanţa* , zatímco část 3.3 byla (společně s částí 2.4.6) publikována v časopise *Soft Computing* jako Novák a Křehlík [86]. Některé z příkladů ve druhé a třetí kapitole a některé z výsledků části 4.1 byly převzaty z článků nebo konferenčních příspěvků jako např. [6, 38–40, 42, 44, 45], jejichž autory jsou žáci a kolegové J. Chvaliny, mezi něž patří i autor habilitační práce. Výsledky motivované částí 4.2 byly publikované v *Analele Ştiinţifice ale Universităţii "Ovidius" Constanţa* jako Chvalina, Křehlík a Novák [41]. Model popsaný v části 4.3 byl publikován jako Novák, Ovaliadis a Křehlík [87]. Některé méně podstatné části kapitoly 3 byly převzaty z publikací jiných autorů. V části 2.4.9 jsou shrnuty výsledky práce Ghazavi, Anvariyeh a Mirvakili [32] publikované v *Journal of Algebraic Systems*. Část 3.1.3 uvádí výsledky Ghazavi a Anvariyeh [30] publikované časopisem *Soft Computing*, zatímco část 3.2 se odvolává na článek Ghazavi, Anvariyeh a Mirvakili [31] publikovaný v *Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics*.

3 SHRNUTÍ HABILITAČNÍ PRÁCE

3.1 Terminologie a základní definice

V této části krátce připomeneme některé základní definice používané v algebraické teorii hyperstruktur tak, jak jsou uvedeny v monografiích Corsiniho [12], Corsiniho a Leoreanu [13] a Vougiouklise [100].

Definice 3.1. Buď H neprázdná množina. *n–hyperoperací* na H rozumíme zobrazení $f : H^n \to \mathcal{P}^*(H)$. Číslo n nazýváme *aritou* f. Pro $n = 2$ mluvíme o *binární* hyperoperaci, pro $n = 3$ o *ternární* hyperoperaci.

Poznamenejme, že n–ární hyperoperace začaly být systematicky studovány teprve nedávno. Implicitně je tento pojem sice přítomen ve Šlapalově práci [98] (v kontextu *univerzálních hyperalgeber*), avšak explicitně byl pojem *n–ární hypergrupa* definován teprve Davvazem a Vougiouklisem [20] v roce 2006.

Definice 3.2. Množinu H, na níž jsou zavedeny hyperoperace, nazýváme *hyperstruktura*. Množinu H s jednou binární hyperoperací nazýváme *hypergrupoid*. Množinu H s jednou binární operací arity $n > 2$ nazýváme *n–ární hypergrupoid*.

Kromě pojmu *hyperoperace* (jako paralely k *operaci*) se lze někdy setkat s pojmem *hyperkompozice* (jako paralely ke *kompozici*). V důsledku toho pak místo o *algebraických hyperstrukturách* hovoříme o *hyperkompozičních strukturách*. Tato terminologie je užívána zejména žáky J. Mittase, z nichž nejvýznamnějším činným je v současné době Ch. Massouros. V některých starších pracech se také lze setkat s předponou „multi-“ místo dnes obvyklého „hyper-“; toto pojmenování souvisí s mírně odlišnými přístupy v prvních pracech z teorie hyperstruktur (F. Marty, H. Wall; více viz Litvinov [64]).

Základním pojmem, jehož prostřednictvím lze algebraicky definovat *hypergrupu*, jsou pojmy *asociativita* a *reprodukční zákon*.

Definice 3.3. n–ární hypergrupoid (H, f) nazýváme *asociativní*, jestliže pro každé $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1} \in H$ platí

$$f(x_1^{i-1}, f(x_i^{n+i-1}), x_{n+i}^{2n-1}) = f(x_1^{j-1}, f(x_j^{n+j-1}), x_{n+j}^{2n-1}), \tag{1}$$

tj. v binárním případě $(H, *)$, $a * (b * c) = (a * b) * c$ pro všechna $a, b, c \in H$.

Definice 3.4. *Reprodukčním zákonem* nazýváme podmínku

$$a * H = H * a = H, \tag{2}$$

jejíž platnost vyžadujeme pro všechna $a \in H$, kde $(H, *)$ je hypergrupoid, případně

$$f(H^{i-1}, x, H^{n-i}) = H \tag{3}$$

pro všechna $x \in H$ a $i = \{1, 2, \ldots, n\}$, kde (H, f) je n–ární hypergrupoid.

Definice 3.5. *Hypergrupou* nazýváme hypergrupoid $(H, *)$ s asociativní operací „$*$", v němž platí reprodukční zákon.

Lze ukázat, že v případě, kdy místo *hypergrupoidu* uvažujeme *grupoid*, tj. místo zobrazení $* : H \times H \to \mathcal{P}^*(H)$ uvažujeme zobrazení $\cdot : H \times H \to H$, je výše uvedená definice ekvivalentní obvyklé definici *grupy*.

Od pojmu *hypergrupa* odvozujeme další obvyklé pojmy, ať už obecnější nebo naopak speciální. Poznamenejme, že *komutativitou* v teorii hyperstruktur rozumíme totéž co v algebře jednoznačných struktur.

Definice 3.6. *Polohypergrupou* rozumíme asociativní hypergrupoid; *n–ární polohypergrupou* rozumíme asociativní n–ární hypergrupoid. *Kvazihypergrupou* rozumíme hypergrupoid, v němž platí reprodukční zákon.

Podobně jako v algebře jednoznačných strukur pracujeme i v algebraické teorii hyperstruktur s pojmy *neutrální* a *inverzní prvek*. Vzhledem k tomu, že výsledkem hyperoperace je v obecném případě *množina* místo *prvku*, mají však tyto pojmy poněkud jiný význam.

Definice 3.7. Prvek $e \in H$, kde $(H, *)$ je hypergrupoid, nazveme *neutrálním prvkem* (nebo také *jedničkou*, případně *identitou*) H, jestliže

$$x \in x * e \cap e * x \tag{4}$$

pro všechna $x \in H$. V n–árním případě je prvek $e \in H$ *neutrálním prvkem* (nebo také *jedničkou*, případně *identitou*) H, jestliže množiny

$$f(\underbrace{e, \ldots, e}_{i-1}, x, \underbrace{e, \ldots, e}_{n-i}) \tag{5}$$

obsahují x pro všechna $x \in H$ a všechna $1 \leq i \leq n$. Je-li $(H, *)$ hypergrupa s alespoň jedním neutrálním prvkem, pak prvek $a' \in H$ nazýváme *inverzním* k $a \in H$, jestliže existuje alespoň jeden neutrální prvek $e \in H$ takový, že $a * a' \ni e \in a' * a$. Množinu prvků inverzních k $a \in H$ označujeme $i(a)$. V n–árním případě prvek x' n-ární hypergrupy (H, f) nazýváme *inverzním* k $x \in H$, jestliže existuje alespoň jeden neutrální prvek $e \in H$ takový, že

$$e \in f(\mathrm{perm}\{x, x', \underbrace{e, \ldots, e}_{n-2}\}) \tag{6}$$

pro každé $1 \leq i \leq n$, kde $\mathrm{perm}\{a_1, \ldots, a_n\}$ značí libovolnou permutaci prvků $a_1, \ldots, a_n$.

Analogií *neutrálního prvku* jednoznačných struktur je *skalární identita*. Kromě ní pracujeme také mj. s pojmy *silná identita* a *absorbční prvek*.

Definice 3.8. Prvek e hypergrupoidu $(H,*)$ nazveme *skalární identitou*, jestliže pro každé $x \in H$ platí $x*e = \{x\} = e*x$, *silnou identitou*, jestliže pro každé $x \in H$ platí $x*e = e*x \subseteq \{x,e\}$, resp. *absorbčním prvkem* (nebo také *nulovým skalárem*), jestliže pro každé $x \in H$ platí $x*e = \{e\} = e*x$. for all $x \in H$.

Ke speciálním případům hypergrup patří zejména *kanonické hypergrupy*, zavedené Mittasem [71] a *polygrupy*, zavedené Comerem [10] a známé také jako *kvazicanonické hypergrupy*. Poznamenejme, že pro naše účely je podstatné, že oba tyto pojmy předpokládají existenci skalární identity.

Definice 3.9. Hypergrupu H nazýváme *kanonickou*, jestliže je komutativní, má skalární identitu, ke každému jejímu prvku existuje právě jeden prvek inverzní, a je reverzibilní, tj. pro každou trojici $x,y,z \in H$ platí (i) jestliže $y \in a*x$, pak existuje inverzní prvek a' k prvku a tak, že $x \in a'*y$ a (ii) jestliže $y \in x*a$, pak existuje inverzní prvek a'' k a takový, že $x \in y*a''$. Nekomutativní kanonická hypergrupa se nazývá *kvazikanonická* nebo také *polygrupa*.

Prenowitz a Jantosciak [52, 92, 93] zavedli další důležitý speciální případ hypergrup, tzv. *spojnicový prostor*. Jestliže zavedeme označování $a/b = \{x \in H \mid a \in x*b\}$, resp. $b \setminus a = \{x \in H \mid a \in b*x\}$ a Paschův axiom o průsečících přímek v rovině zapíšeme jako

$$a/b \cap c/d \neq \emptyset \Rightarrow a*d \cap b*c \neq \emptyset, \tag{7}$$

můžeme zavést následující definici.

Definice 3.10. Komutativní hypergrupu $(H,*)$, v níž pro všechna $a,b,c,d \in H$ platí (7), nazýváme *spojnicový prostor*. Nekomutativní spojnicový prostor nazýváme *transpoziční hypergrupa*.

V roce 1989 představili Corsini a Vougiouklis [14] jednoduchou metodu (tzv. *uniting elements method*), jak pomocí hyperoperací vytvořit jednoznačnou strukturu s požadovanými vlastnostmi (asociativita, komutativita apod.). Tato metoda se záhy [102] stala motivací k zavedení tzv. *slabých*, neboli *H_v–hyperstruktur*, u nichž rovnost množin nahrazujeme požadavkem na neprázdný průnik; více viz Vougiouklisova monografie [100]. Tedy např. místo rovnosti $a*b = b*a$ v definici komutativity postačuje požadavek $a*b \cap b*a \neq \emptyset$.

Definice 3.11. Slabě asociativní hypergrupoid nazýváme *H_v–pologrupa*. H_v–pologrupu, ve které platí reprodukční zákon, nazýváme *H_v–grupa*.

Zobecnění pojmu okruh ve smyslu algebraické teorie hyperstruktur se datuje do 50. let 20. století a je spjato se jménem M. Krasnera [61]. Tzv. *Krasnerovy hyperokruhy* jsou hyperstruktury s jednou hyperoperací (hypersoučtem) a jednou jednoznačnou operací (součinem), svázanými distributivními zákony v obvyklém tvaru, u nichž je součet nahrazen hypersoučtem; místo grupy a pologrupy předpokládáme *kanonickou hypergrupu*, a tedy i jednoznačný inverzní prvek vzhledem k hypersoučtu, a pologrupu. V roce 1982 zavedla Rota [95] pojem *multiplikativní hyperokruh*, který označuje hyperstrukturu, v níž hyperoperací je naopak násobení a jednoznačnou operací sčítání (předpokládáme multiplikativní polohypergrupu a komutativní aditivní grupu). Již o několik let dříve studoval Mittas [72] hyperokruhy, kde jak sčítání tak i násobení jsou hyperoperacemi. Později byl zeslaben požadavek na jednoznačnost inverzního prvku (tj. místo *kanonické hypergrupy* již postačuje jen *hypergrupa*), resp. požadavek na rovnost v distributivních zákonech byl nahrazen inkluzí, nebo – pod vlivem studia H_v–struktur –

neprázdným průnikem. Konečně, podobně jako u jednoznačných struktur, můžeme i u hyperstruktur studovat polookruhy. Získáváme tak poměrně komplikovanou klasifikaci, jejíž část je – bez podrobnější diskuse – uvedena v následující definici.

Definice 3.12. Nechť „$\oplus$“ a „$\odot$“ jsou hyperoperace a „$+$“ a „$\cdot$“ operace definované na množině H. Pojmem *inkluzivní distributivita* „$\odot$“ vzhledem k „$\oplus$“ (a podobně pro všechny možné kombinace výše uvedených (hyper)operací) rozumíme platnost vztahů

$$\begin{aligned} x \odot (y \oplus z) &\subseteq (x \odot y) \oplus (x \odot z) \\ (x \oplus y) \odot z &\subseteq (x \odot z) \oplus (y \odot z) \end{aligned} \tag{8}$$

pro všechna $x, y, z \in H$. *Slabou distributivitou* nazveme platnost vztahů

$$\begin{aligned} x \odot (y \oplus z) &\cap (x \odot y) \oplus (x \odot z) \neq \emptyset \\ (x \oplus y) \odot z &\cap (x \odot z) \oplus (y \odot z) \neq \emptyset, \end{aligned} \tag{9}$$

pro všechna $x, y, z \in H$.

1. Jestliže $(H, \oplus)$ je hypergrupa, $(H, \odot)$ polohypergrupa a „$\odot$“ je inkluzivně distributivní vzhledem k „$\oplus$“, pak $(H, \oplus, \odot)$ nazýváme *obecný hyperokruh.*
2. Jestliže $(H, \oplus)$ je hypergrupa, $(H, \odot)$ polohypergrupa a „$\odot$“ je distrubitivní vzhledem k „$\oplus$“, pak $(H, \oplus, \odot)$ nazýváme *dobrý* (nebo *silný*) *obecný hyperokruh.*
3. Jestliže $(H, \oplus)$ je hypergrupa, $(H, \cdot)$ pologrupa a „$\cdot$“ je inkluzivně distributivní vzhledem k „$\oplus$“, pak $(H, \oplus, \cdot)$ nazýváme *additivní hyperokruh.*
4. Jestliže $(H, \oplus)$ je hypergrupa, $(H, \cdot)$ pologrupa a „$\cdot$“ je distrubitivní vzhledem k „$\oplus$“, pak $(H, \oplus, \cdot)$ nazýváme *dobrý* (nebo *silný*) *additivní hyperokruh.*
5. Jestliže $(H, \oplus)$ a $(H, \odot)$ jsou polohypergrupy a „$\odot$“ je inkluzivně distributivní vzhledem k „$\oplus$“, pak $(H, \oplus, \odot)$ nazýváme *obecný polohyperokruh.*
6. Jestliže $(H, \oplus)$ a $(H, \odot)$ jsou polohypergrupy a „$\odot$“ je distrubitivní vzhledem k „$\oplus$“, pak $(H, \oplus, \odot)$ nazýváme *dobrý* (nebo *silný*) *polohyperokruh.*
7. Jestliže $(H, \oplus)$ je H_v–grupa, $(H, \odot)$ H_v–pologrupa a hyperoperace „$\odot$“ je slabě distributivní vzhledem k „$\oplus$“, pak $(H, \oplus, \odot)$ nazýváme *H_v–okruh.*

Zobecnění svazových pojmů, které časově spadá do konce 70. let 20.století, je spjato se jmény M. Konstantinidou a J. Mittase [57–59]. Genealogie jednotlivých pojmů je podobná jako v případě hyperokruhů, protože – chápeme–li svazy jako algebraické struktury – můžeme zobecňovat buď jednu nebo obě operace. Po zavedení pojmu *uspořádané hyperstruktury*, o nichž jsme se zmiňovali výše, bylo možné začít studovat různá zobecnění svazů také z pohledu uspořádaných struktur. Podobně jako v případě hyperokruhů byly později zavedeny také pojmy *polohypersvaz* (Xiao a Zhao [104]) a *H_v–polosvaz* (Dehghan Nezhad a Davvaz [21]). Níže uvádíme definici *hypersvazu* z práce Mittas a Konstantinidou [59]. V novějších pracích tato definice odpovídá definici *hypersvazu vzhledem k průseku*; podobně můžeme mluvit o *hypersvazu vzhledem ke spojení* a o *úplném hypersvazu* a podobně jako u hyperokruhů používat nebo nepoužívat adjektivum *silný* podle toho zda vyžadujeme platnost posledního axiomu.

Definice 3.13. Nechť H je množina, „$\bigvee$“ hyperoperace na H a „$\wedge$“ operace na H. Řekneme, že $(H, \bigvee, \wedge)$ je *hypersvaz*, jestliže pro všechna $a, b, c \in H$ platí:

1. $a \in a \bigvee a$ and $a \wedge a = a$
2. $a \bigvee b = b \bigvee a$ and $a \wedge b = b \wedge a$
3. $(a \bigvee b) \bigvee c = a \bigvee (b \bigvee c)$ and $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
4. $a \in [a \bigvee (a \wedge b)] \cap [a \wedge (a \bigvee b)]$
5. $a \in a \bigvee b \Rightarrow b = a \wedge b$

3.2 Konstrukce EL–hyperstruktur

Chvalina ve své monografii [37] odvodil následující tvrzení.

Lemma 3.14. *Nechť $(S, \cdot, \leq)$ je uspořádaná pologrupa. Binární hyperoperace $* : S \times S \to \mathcal{P}^*(S)$ definovaná jako*

$$a * b = [a \cdot b)_{\leq} = \{x \in S \mid a \cdot b \leq x\} \tag{10}$$

je asociativní. Polohypergrupa $(S, *)$ je komutativní právě tehdy, když pologrupa $(S, \cdot)$ je komutativní.

Lemma 3.15. *Nechť $(S, \cdot, \leq)$ je uspořádaná pologrupa. Označme $a * b = [a \cdot b)_{\leq}$ pro každé $a, b \in S$. Pak pro každou trojici prvků $a, b, c \in S$ platí*

$$a * (b * c) = [a \cdot b \cdot c)_{\leq} = (a * b) * c. \tag{11}$$

Lemma 3.16. *Nechť $(S, \cdot, \leq)$ je uspořádaná pologrupa. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

1^0 *K libovolné dvojici prvků $a, b \in S$ existuje dvojice prvků $c, c' \in S$ taková, že $b \cdot c \leq a$ a $c' \cdot b \leq a$.*

2^0 *Polohypergrupa $(S, *)$ definovaná pomocí vztahu* (10) *je hypergrupa.*

Důsledek 3.17. *Jestliže v Lemmatu 3.16 je $(S, \cdot, \leq)$ uspořádaná grupa, pak $(S, *)$, konstruovaná pomocí* (10), *je hypergrupa.*

Konečně P. Račková ve své disertační práci ukázala, že vycházíme-li z *grupy*, získáme uvedenou konstrukcí nikoli pouze hypergrupu ale *transpoziční hypergrupu*, tj. v případě *komutativní grupy* získáme *spojnicový prostor*.

Inspirován charakterem množiny $[a)_{\leq}$ nazval J. Chvalina tento soubor výsledků *koncovým lemmatem*; počínaje prací Novák [82] jsou hyperstruktury vytvořené výše uvedenou konstrukcí nazývány *EL–hyperstruktury*.

Ačkoli Chvalina a jeho žáci koncové lemma používali pro odvození některých svých výsledků, resp. ačkoli lze v literatuře (nejen české) najít výsledky přímo či nepřímo založené na využití postřehu o asociativitě hyperoperace definované pomocí (10), nebyly EL–hyperstruktury před rokem 2005 systematicky studovány.

V předkládané habilitační práci autor shrnuje výsledky svého studia EL–hyperstruktur, které jsou členěny do několika okruhů:

1. vymezení limitů výše uvedené konstrukce,
2. využitelnost lemmatu pro konstrukci jednotlivých algebraických hyperstruktur, ať už s jednou nebo s více hyperoperacemi,
3. popis vlastností a význačných prvků těchto hyperstruktur,
4. odvození případných rozšíření a modifikací lemmatu,
5. popis vztahu EL–hyperstruktur k jiným konstrukcím z algebraické teorie hyperstruktur, které využívají pojmu uspořádání,
6. ukázky aplikací.

3.3 Vymezení limitů konstrukce

Koncové lemma ve svém původní znění předpokládá *uspořádanou pologrupu.* Jestliže upustíme od požadavku *antisymetrie* relace „$\leq$", platnost lemmatu to ovlivní pouze nepatrně – komutativita hyperoperace přestane implikovat komutativitu jednoznačné operace.

Věta 3.18. *Nechť $(S, \cdot, \leq)$ je kvaziuspořádaná pologrupa. Binární hyperoperace $* : S \times S \to \mathcal{P}^*(S)$ definovaná pro každé dva prvky $a, b \in S$ jako $a * b = [a \cdot b)_\leq$ je asociativní. Jestliže pologrupa $(S, \cdot)$ je komutativní, pak polohypergrupa $(S, *)$ je také komutativní.*

Upuštěním od požadavku antisymetrie získáme, avšak současně i ztratíme. Vzhledem k tomu, že nyní předpokládáme jen reflexivitu a tranzitivitu relace, můžeme ve speciálním případě pracovat i s ekvivalencemi. Současně se však připravujeme o možnost využít v důkazech pojmy *nejmenší* a *největší prvek*, což bývá u mnohých tvrzení velmi omezující. Částečně lze toto omezení odstranit následující definicí, která je motivována faktem, že mnohdy stačí, aby množina $[a)_\leq$ byla jednoprvková (vzhledem k požadované reflexivitě relace musí vždy obsahovat prvek a).

Definice 3.19. Nechť $(S, \leq)$ je kvaziuspořádaná množina. Prvek $a \in S$ takový, že $[a)_\leq = \{x \in S \mid a \leq x\} = \{a\}$, nazýváme *$EL$–maximální.*

Hyperoperaci „$*$" lze na množině H pochopitelně definovat i duálně jako „$*_d$" pomocí vztahu

$$a *_d b = {}_\leq(a \cdot b] = \{x \in S \mid x \leq a \cdot b\} \tag{12}$$

pro každé $a, b \in S$. Připomeňme, že s operací „$*_d$" (avšak ve speciálním případě ekvivalencí a pod zcela jiným označováním) pracuje Vougiouklis [101].

Konstrukci lze také svým způsobem „obrátit": asociativita hyperoperace implikuje asociativitu jednoznačné operace.

Věta 3.20. [83] *Nechť $(H, \cdot)$ je netriviální grupoid a „$\leq$" je uspořádání na H takové, že pro libovolnou trojici prvků $a, b, c \in H$ takových, že $a \leq b$, platí $c \cdot a \leq c \cdot b$ a $a \cdot c \leq b \cdot c$. Pro libovolnou dvojici prvků $a, b \in H$ definujme hyperoperaci $* : H \times H \to \mathcal{P}^*(H)$ předpisem $a * b = [a \cdot b)_\leq = \{x \in H \mid a \cdot b \leq x\}$. Jestliže hyperoperace „$*$" je asociativní, pak jednoznačná operace „$\cdot$" je také asociativní. Navíc, jestliže existuje prvek $e \in H$ takový, že pro všechna $a \in H$ platí $a * e = e * a = [a)_\leq$, pak $(H, \cdot)$ je monoid s neutrálním prvkem e.*

Již dříve bylo ukázáno, že pomocí koncového lemmatu můžeme vytvářet spojnicové prostory. Při konstrukci specializovanějších hyperstruktur (polygrupy, kanonické hypergrupy apod.), je však klíčovým omezením neexistence skalární identity.

Věta 3.21. [77] *Nechť* $(S, \cdot, \leq)$ *je netriviální kvaziuspořádaná pologrupa taková, že "*$\leq$*" je různá od identické relace. Pak žádný prvek EL–polohypergrupy* $(S, *)$ *není skalární identitou.*

Touto větou je dán rámec dalšího studia, protože z našich úvah musíme vyloučit *polygrupy*, *kanonické hypergrupy*, a v důsledku toho i *Krasnerovy hyperokruhy*. Současně však fakt, že koncové lemma zajišťuje asociativitu (a komutativitu) hyperoperace, má za důsledek, že jsou automaticky splněny předpoklady *(komutativních)* H_v*–pologrup*.

3.4 Různé typy hyperstruktur

Jak již bylo zmíněno, mezi EL–hyperstruktury můžeme řadit *polohypergrupy*, *hypergrupy*, *transpoziční hypergrupy*, *spojnicové prostory*. Pokud uvážíme hyperstruktury s více (hyper)operacemi, musíme sice z našich úvah vyloučit Krasnerovy hyperokruhy, přesto však zbývá celá škála dalších typů hyperstruktur. Pro další odvozování je klíčové ukázat, jak distributivita v jednoznačných okruhových strukturách implikuje distributivitu v okruhových hyperstrukturách. Ještě před tím je však nutné vyjasnit, zda v definici polookruhu budeme nebo nebudeme vyžadovat existenci neutrálního prvku aditivní struktury. V habilitační práci používáme definici bez tohoto požadavku (viz např. Hebisch a Weinert [33]).

Definice 3.22. Nechť $S \neq 0$ je množina a „+" a „·" binární operace na S nazvané *sčítání* a *násobení*. Jestliže jsou splněny následující podmínky, pak $(S, +, \cdot)$ nazveme *polookruh*:

1. $(S, +)$ je komutativní pologrupa,
2. $(S, \cdot)$ je pologrupa,
3. obě operace jsou svázány *distributivními zákony* $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ a $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$ for all $a, b, c, \in S$.

Polookruh nazýváme *komutativní*, pokud je navíc $(S, \cdot)$ komutativní. $(S, +, \cdot)$ nazýváme *okruh*, jestliže $(S, +)$ je komutativní grupa. Polookruh, který není okruhem, nazýváme *vlastní*.

Definice 3.23. *Kvaziuspořádaným* (*uspořádaným*) *polookruhem* nazýváme polookruh $(S, +, \cdot)$ takový, že „$\leq$" je kvaziuspořádání (uspořádání) na S a

$$a \leq b \quad \Rightarrow \quad a + c \leq b + c \text{ and } c + a \leq c + b \tag{13}$$

$$a \leq b \quad \Rightarrow \quad a \cdot c \leq b \cdot c \text{ and } c \cdot a \leq c \cdot b \tag{14}$$

pro všechna $a, b, c \in S$.

Z pohledu těchto definic pak dostáváme (*pozn.:* problém komutativity je v habilitační práci ošetřen):

Věta 3.24. [84] *Nechť* $(S, +, \cdot, \leq)$ *je kvaziuspořádaný polookruh a* $(S, \oplus)$ *a* $(S, \odot)$ *jsou EL–polohypergrupy zkonstruované po řadě z kvaziuspořádaných pologrup* $(S, +, \leq)$ *a* $(S, \cdot, \leq)$.

1. $(S, \oplus, \odot)$ *je obecný polohyperokruh.*

2. Jestliže $(S, \cdot)$ *je grupa, pak* $(S, \oplus, \odot)$ *je silný polookruh.*

3. Jestliže $(S, +)$ *je grupa nebo jestliže* $(S, \oplus)$ *je hypergrupa, pak* $(S, \oplus, \odot)$ *je obecný hyperokruh.*

4. Jestliže $(S, +)$ *je grupa s neutrálním prvkem* 0 *a* $(S \setminus \{0\}, \cdot)$ *je grupa, pak* $(S, \oplus, \odot)$ *je dobrý obecný hyperokruh.*

Koncové lemma nám sice nedovoluje získat *Krasnerovy hyperokruhy*, avšak můžeme pomocí něj získat *multiplikativní hyperokruhy*, a to jak ve smyslu původní definice Roty tak i ve smyslu klasifikace podle Vougiouklise, resp. Spartalise (podrobná diskuse jednotlivých přístupů přesahuje rámec tohoto krátkého shrnutí; v práci je uvedena na str. 9–11).

Věta 3.25. [81, 84] *Nechť* $(S, +, \cdot, \leq)$ *je kvaziuspořádaný polookruh a* $(S, \odot)$ *EL–polohypergrupa zkonstruovaná z kvaziuspořádané pologrupy* $(S, +, \leq)$*. Jestliže* $(S, +)$ *je grupa, pak* $(S, +, \odot)$ *je silný multiplikativní hyperokruh ve smyslu Spartalise a Vougiouklise. Jestliže navíc* $(S, +)$ *je komutativní, tj.* $(S, +, \cdot)$ *je okruh, pak* $(S, +, \odot)$ *je silně distributivní multiplikativní hyperokruh ve smyslu Roty.*

V tomto obecném rámci lze pochopitelně studovat různé speciální vlastnosti. V habilitační práci je uveden příklad použití koncového lemmatu pro konstrukci *kompozičních hyperokruhů* zavedených Cristeou a Jančić-Rašović [17] jako zobecnění Adlerem [1] definovaných *kompozičních okruhů*; motivace pro zobecnění v teorii hyperstruktur leží ve studiu hyperokruhů polynomů; viz [17].

Koncové lemma můžeme využít také ke konstrukci *svazových hyperstruktur*.

Věta 3.26. [85] *Nechť* $(L, *)$ *je EL–polohypergrupa zkonstruovaná z kvaziuspořádané pologrupy* $(L, \cdot, \leq)$*.*

1. Jestliže „·“ je komutativní a $(L, \cdot)$ *je vlastní pologrupa, pak podmínka, že pro každé* $a \in L$ *platí* $a \cdot a \leq a$*, je ekvivalentní tomu, že* $(L, *)$ *je hyperpolosvaz.*

2. Jestliže „·“ není komutativní a „≤“ je antisymetrická, pak $(L, *)$ *není ani hyperpolosvaz ani* H_v*–polosvaz.*

3. Jestliže $(L, \cdot)$ *je netriviální grupa a „≤“ je antisymetrická, pak* $(L, *)$ *není ani hyperpolosvaz ani* H_v*–polosvaz.*

Věta 3.27. [85] *Nechť* $(L, *)$ *je EL–polohypersvaz (zkonstruovaný z* $(L, \cdot, \leq)$*) a „∧“ je idempotentní, komutativní a asociativní operace na* L*.*

1. Jestliže pro všechna $a, b \in L$ *platí, že* $a \cdot (a \wedge b) \leq a$ *a* $a \cdot b \leq a$*, pak* $(L, *, \wedge)$ *je hypersvaz vzhledem ke spojení.*

2. Jestliže pro všechna $a, b \in L$ *platí, že* $a \cdot (a \wedge b) \leq a$ *a* $a = a \wedge 1$*, kde* 1 *je největší prvek* $(L, \leq)$*, pak* $(L, *, \wedge)$ *je hypersvaz vzhledem ke spojení.*

Ve své knize o reprezentacích hypergrup [100] pracuje Vougiouklis s pojmem H_v*–matice.*

Definice 3.28. H_v*–maticí* nazýváme matici, jejíž koeficienty jsou prvky H_v–okruhu nebo H_v–pole.

Koncové lemma přitom představuje nástroj, jak jednoduchým způsobem H_v–matice zkonstruovat; viz Křehlík a Novák [62]. Uvažme množinu $\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ všech $m \times n$ matic s koeficienty z vhodné množiny $\mathcal{S}$, tj.

$$\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}) = \{\mathbf{M} = [m_{i,j}]) \mid m_{i,j} \in \mathcal{S}, i = \{1, \dots, m\}, j = \{1, \dots, n\}\}. \tag{15}$$

a definujme na ní relaci „$\leq_M$" takto:

$$\mathbf{A} \leq_M \mathbf{B} \text{ if } a_{i,j} \leq_e b_{i,j} \text{ pro všechna } i = \{1, \dots, m\}, j = \{1, \dots, n\}, \tag{16}$$

kde „$\leq_e$" je vhodná relace mezi koeficienty matic. Předpokládejme dále, že $(\mathcal{S}, \inf, \sup, \leq_e)$ je svaz, a definujme *minimum matic* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ jako

$$\min\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} = \mathbf{C}, \text{ kde } \mathbf{C} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}) \text{ taková, že } c_{i,j} = \inf\{a_{i,j}, b_{i,j}\} \tag{17}$$

pro každé $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$ (analogicky pro více matic; analogicky *maximum matic* pomocí supréma). Jednoduše se ukáže, že $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), \min, \max, \leq_M)$ je svaz. Jestliže nyní na množině $\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ definujeme pomocí koncového lemmatu hyperoperace a jejich vhodné analogie, vhodné dvojice těchto hyperoperací na množině $\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ splňují – v případě, že svaz $\mathcal{S}$ je distributivní – axiomy H_v–okruhu. V důsledku tak je $\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ množina H_v–matic.

3.5 Vlastnosti a význačné prvky

Uvádět všechny výsledky týkající se vlastností EL–hyperstruktur, resp. tyto vlastnosti také nejprve definovat, by přesahovalo rámec tohoto shrnutí. Proto pouze stručně naznačíme některá témata a zájemce odkážeme na práce Novák [77, 79, 82, 83].

Ze všeho nejdříve je nutné vyjasnit otázku *podhyperstruktur* EL–hyperstruktur. Důvodem je skutečnost, že pracujeme s množinami typu $[a)_\leq = \{x \in S \mid a \leq x\}$ a jestliže se chceme omezit na podmnožiny $G \subseteq S$, máme na výběr ze dvou přístupů, z nichž oba se mohou jevit jako vhodné.

Pro libovolný prvek $a \in G$, kde $G \subseteq S$, můžeme psát buď $[a)_{\leq_G} = \{x \in G \mid a \leq x\}$ nebo $[a)_{\leq_S} = \{x \in S \mid a \leq x\}$, tj. můžeme pracovat buď s (případnou) hyperstrukturou $(G, *_G)$ založenou na hyperoperaci „$*_G$", která libovolné dvojici prvků $a, b \in G$ přiřadí podmnožinu

$$a *_G b = [a \cdot b)_{\leq_G} = \{x \in G \mid a \cdot b \leq x\} \tag{18}$$

nebo s (případnou) hyperstrukturou $(G, *_S)$, kde hypersoučin $a *_S b$ je definován jako

$$a *_S b = [a \cdot b)_{\leq_S} = \{x \in S \mid a \cdot b \leq x\}. \tag{19}$$

Je přitom zřejmé, že ne vždy nám oba přístupy umožní definovat hyperstrukturu. V habilitační práci je hlavní pozornost věnována hyperoperaci „$*_S$", která vystihuje myšlenku koncového lemmatu lépe. Abychom mohli rozhodnout, za jakých podmínek lze tímto způsobem definovat hyperoperaci, použijeme myšlenku *horní množiny*, kterou však v práci – vzhledem ke kontextu – nazýváme *horní konec množiny* (navíc jej definujeme i pro kvaziuspořádané množiny).

Definice 3.29. Nechť $(S, \cdot, \leq)$ je kvaziuspořádaná pologrupa a G její neprázdná podmnožina S. Jestliže pro libovolný prvek $g \in G$ platí $[g)_\leq \subseteq G$, nazveme G *horním koncem množiny* S. Jestliže existuje prvek $g \in G$ takový, že existuje prvek $x \in S \setminus G$, že $g \leq x$ (tj. $x \in [g)_\leq$), řekneme, že G *není horní konec* S *kvůli prvku* x.

Hyperoperaci lze zavést nejen v situaci, kdy S je horním koncem G. Následující lemma popisuje všechny možné případy. V případě hypergrupoidů lze poté ukázat, že opět pologrupa vytváří polohypergrupu a grupa hypergrupu, resp. lze ve vhodných případech tyto implikace obrátit.

Lemma 3.30. [83] *Nechť $(S, *)$ je EL–polohypergrupa zkonstruovaná na kvaziuspořádané pologrupě $(S, \cdot, \leq)$ a nechť $G \subseteq S$ je neprázdná. Jestliže $(S, \cdot)$ je monoid, označme jeho neutrální prvek u. Dále předpokládejme, že $(G, \cdot)$ je podgrupoid $(S, \cdot)$.*

1. *Jestliže G je horním koncem S, pak $(G, *)$ je podhypergrupoid $(S, *)$.*
2. *Jestliže G není horním koncem S a platí, že $u \in G$, pak $(G, *)$ není podhypergrupoid $(S, *)$.*
3. *Tvrzení v bodě 2 platí i v případě, že $u \notin G$ (nebo kdy u neexistuje) ale pro nějaká $a, b \in G$ platí $a \cdot b = c$, kde $c \in G$ je takový prvek, že existuje prvek x_i, kvůli kterému G není horním koncem S, a $c \leq x_i$.*
4. *Jestliže současně platí*
   - *(a) u neexistuje nebo $u \notin G$,*
   - *(b) G není horním koncem H kvůli prvkům $x_i, i \in I$,*
   - *(c) pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí $a \cdot b = c$ a všechny tyto trojice jsou takové, že pro žádné x_i neplatí $c \leq x_i$,*

   pak $(G, *)$ je podhypergrupoid $(S, *)$.

Podobně jako je třeba odpovědět na otázku, kdy je možné koncovým lemmatem korektně definovat hyperoperaci na vhodné podmnožině, je dobré zabývat se otázkou, kdy uspořádaná vlastní pologrupa vytváří vlastní polohypergrupu a kdy hypergrupu. Na tuto otázku dává částečnou odpověď již původní koncové lemma (viz Věta 3.16), ale tato odpověď není dostatečná. Pro rozhodování můžeme použít např. větu podobné konstrukce jako Lemma 3.30.

Věta 3.31. [79] *Nechť $(S, *)$ je EL–polohypergrupa zkonstruovaná z kvaziuspořádané pologrupy $(S, \cdot, \leq)$ s alespoň dvěma různými prvky. Jestliže $(S, \cdot)$ je monoid, označme jeho neutrální prvek u. Polohypergrupa $(S, *)$ není hypergrupou právě tehdy, když existuje prvek $x \in S$ takový, že pro nějaké $a \in S$:*

(i) *x je nesrovnatelný se všemi součiny $a \cdot b$, $b \cdot a$, a to pro každé $b \in S$ a $x \neq u$, nebo*

(ii) *$x < a \cdot b$ a $x < b \cdot a$, a to pro všechna $b \in S$ (s explicitní výjimkou případů $a = x, b = u$ a $a = u, b = x$).*

Stejně tak je vhodné se ptát, zda v případě, kdy máme hyperstrukturu, o níž víme, že je vytvořená pomocí koncového lemmatu, je množina, z níž byla zkonstruována, pologrupou či grupou. Při hledání odpovědi na tuto otázku můžeme použít jednoduché kritérium založené na vlastnostech idempotentních prvků.

Věta 3.32. [79, 82] *Nechť $(H,*)$ je EL–hypergrupa zkonstruovaná z kvaziuspořádané pologrupy $(H,\cdot,\leq)$ takové, že alespoň dva její různé prvky jsou v relaci „$\leq$“ (tj. „$\leq$“ není triviální). Jestliže existuje prvek $a \in H$ takový, že $a * a = \{a\}$, pak $(H,\cdot)$ není grupa. Stejně tak, jestliže v situaci, kdy „$\leq$“ je navíc antisymetrická, pro dva různé prvky $a,b \in H$, platí, že $a*a=\{a\}$, $b*b=\{b\}$, pak $(H,\cdot)$ není grupa.*

V habilitační práci jsou odvozeny podmínky pro to, aby EL–hyperstruktury splňovaly některé ze základních vlastností (polo)hypergrup, jako např. *regularita*, *revezibilita*, *invertibilita*, *regularita* apod. a jsou popsány způsoby nalezení *neutrálních* a *inverzních prvků*. Výsledky týkající se *nulových skalárů* jsou využity pro popis vztahu EL–hyperstruktur a *jednoduchých polohypergrup* a *r–hypergrup* studovaných např. v pracech Jafarabadi et al. [47,48]. Některé výsledky v této oblasti umožnily v Ghazavi et al. [32] popsat hyperideály v EL–hyperstrukturách a využít koncové lemma pro konstrukci *Γ–polohypergrup*.

Ve vztahu k aplikacím je důležité, že Chvalina a Chvalinová [39] mj. dokázali, že je-li stavová hypergrupa automatu vnitřně ireducibilní, je tento automat souvislý, tj. je možné se z každého stavu dostat do každého jiného. Jejich výsledek předpokládá *kvazipořádkové hypergrupy* tj. jinou konstrukci než koncové lemma. Vnitřně ireducibilní EL–hyperstruktury však existují také.

Věta 3.33. [82] *Nechť $(H,*)$ je EL–hypergrupa zkonstruovaná z uspořádané komutativní grupy $(H,\cdot,\leq)$. Jestliže pro každé $x \in H$ takové, že x, x^{-1} jsou nesrovnatelné v relaci „$\leq$“ platí buď $[x)_\leq \cap [x^{-1})_\leq \neq \emptyset$ nebo $_\leq(x] \cap {}_\leq(x^{-1}] \neq \emptyset$, pak $(H,*)$ je vnitřně ireducibilní.*

Významnou vlastností hyperoperací je *extenzivita*, která je definovaná jako vlastnost, že pro každé dva prvky a,b platí $\{a,b\} \subseteq a*b$. Již z původní verze koncového lemmatu jednoduchou úvahou plyne, že každá extenzivní EL–polohypergrupa je hypergrupou. V habilitační práci však extenzivita funguje jako významný nástroj pro modifikaci koncového lemmatu, které si klade za cíl snížit počet předpokladů konstrukce; viz Novák a Křehlík [86]. V této souvislosti je významné následující lemma.

Lemma 3.34. [86] *Nechť S je množina s binární operací „$\cdot$“ a relací „$\leq$“. Binární hyperoperace $* : S \times S \to \mathcal{P}^*(S)$ definovaná předpisem $a*b = [a\cdot b)_\leq$ je asociativní právě tehdy, když binární hyperoperace $*_m : S \times S \to \mathcal{P}^*(S)$ definovaná předpisem $a *_m b = \{a,b\} \cup [a\cdot b)_\leq$ je asociativní.*

3.6 Rozšíření a modifikace

Původní koncové lemma je možné několika přirozenými způsoby modifikovat. Předně se nabízí rozšíření z *binárního kontextu* do kontextu *n–árního*, které je možné provést v zásadě třemi hlavními způsoby:

1. za výsledek n–ární hyperoperace budeme považovat podmnožinu generovanou prvkem, který je výsledkem iterované binární operace "$\cdot$", přičemž relace "$\leq$" zůstává binární (přístup používaný v algebraické teorii hyperstruktur např. v Leoreanu Fotea a Davvaz [63]),

2. jednoznačná operace zůstane binární a zobecníme relaci (v jiné souvislosti viz např. Cristea a Jančić-Rašović [16, 18]),

3. do n–árního kontextu zobecníme jak hyperoperaci tak i relaci (v jiné souvislosti viz např. Anvariyeh a Momeni [4]).

V habilitační práci je zvolen první z uvedených přístupů; viz Novák [78]. Je ukázáno, že jestliže definujeme n–ární hyperoperaci $f : S^n \to S$ předpisem

$$f(a_1^n) = [\underbrace{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}_{n})_{\leq} = \{x \in S \mid \underbrace{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}_{n} \leq x\} \tag{20}$$

(a předpokládáme-li kvaziuspořádanou pologrupu $(S, \cdot, \leq)$), asociativita i případná komutativita operace se – stejně jako v původním koncovém lemmatu – přenesou i na hyperoperaci; v případě uspořádané pologrupy se komutativita opět přenáší oběma směry. Grupa opět vytváří (tentokrát n–ární) hypergrupu. V habilitační práci jsou odvozeny výsledky týkající se význačných prvků (neutrální, inverzní, absorbční, skalární identita) a je ukázáno, že výsledky v binárním kontextu jsou jejich speciálními případy. Jako příklad uveďme tvrzení o inverzních prvcích.

Věta 3.35. [78] *Nechť (H, f) je n–ární EL–hypergrupa zkonstruovaná z kvaziuspořádané grupy $(H, \cdot, \leq)$. Pro libovolné $x \in H$ platí:*

1. *Jestliže $x' \leq x^{-1}$, pak prvek x' je v (H, f) inverzní k x.*
2. *Jestliže prvek x' je v (H, f) inverzní k x, pak pro každé $a \in \mathrm{perm}\{x' \cdot \underbrace{e \cdot \ldots \cdot e}_{2(n-2)}\}$ platí $a \leq x^{-1}$.*

V obou případech přitom x^{-1} značí inverzní prvek k $x \in H$ v jednoznačné struktuře $(H, \cdot)$, e je vhodný neutrální prvek v hypergrupě (H, f) a $\mathrm{perm}\{x_1, \ldots, x_i\}$ značí množinu všech permutací prvků $x_1, \ldots, x_i$.

Ghazavi a Anvariyeh [30] se rozhodli pro studium EL–hyperstruktur druhým z výše uvedených postupů a zkonstruovali EL–hypergrupy na *n–uspořádaných pologrupách.* Tento přístup je obecně komplikovanější, protože nelze rozumně definovat n–ární antisymetrii, přičemž je to právě antisymetrie, která usnadňuje, resp. umožňuje mnoho důkazů. Hlavní výsledky uvedené v [30] jsou proto v habilitační práci pro zajímavost uvedeny, i když nebyly získány autorem.

Podobně jsou do habilitační práce zahrnuty některé výsledky Ghazaviho et al. [31] týkající se tzv. *EL^2–hyperstruktur.* Tito autoři koncové lemma aplikovali nikoli na *uspořádanou pologrupu* ale na *kvaziuspořádaný hypergrupoid.*

Nejvýznamnějším rozšířením koncového lemmatu je však studium situace, kdy je nosná množina fragmentována na několik víceméně nekompatibilních částí, přičemž v relaci mohou být jen některé prvky (typicky např. množina jedinců obou pohlaví, ve které jednoznačná operace označuje křížení a relace označuje linii předek – potomek). Vzhledem k tomu, že v reálných situacích je mnohdy obtížné splnit všechny předpoklady koncového lemmatu (problém činí zejména požadavek na kompatibilitu relace a jednoznačné operace), je studium těchto fragmentovaných množin spojeno se snahou *redukovat předpoklady* koncového lemmatu při současném zachování podstatných rysů konstrukce. Významnou roli v této souvislosti přitom hraje případná *extenzivita* hyperoperace. V habilitační práci jsou uvedeny dvě modifikace koncového lemmatu (publikované v Novák a Křehlík [86]), které se liší smysluplností definování relace ve vztahu k jednotlivým částem množiny (někdy lze porovnávat jen prvky stejného typu, jindy to naopak není vhodné; podobně někdy lze jednoznačnou operaci aplikovat jen na prvky různého typu, zatímco jindy jen na prvky stejného typu). Definice těchto *modifikovaných EL–hyperstruktur* je založená na myšlence *kardinálního součtu* uspořádané množiny. I když ne vždy je možné zajistit splnění reprodukčního zákona (tj. nelze tímto způsobem vždy získat hypergrupu), je ukázáno, za jakých podmínek platí transpoziční zákon, a kdy jsou modifikované EL–hyperstruktury spojnicovými prostory. I když jsou v habilitační práci studovány nosné množiny tvořené prvky pouze *dvou* typů, uváděné definice jsou zavedeny pro obecný případ n typů.

3.7 Vztah k jiným konstrukcím

Jak již bylo zmíněno, konstrukce algebraických hyperstruktur pomocí koncového lemmatu je jen jednou z mnoha možných. Jestliže chceme popsat např. vztah EL–hyperstruktur a *uspořádaných hyperstruktur* Heidariho a Davvaze [34], je nejprve nutné uvést, že u uspořádaných hyperstruktur hledáme kompatibilní relaci na již zkonstruované hyperstruktuře, zatímco u koncového lemmatu relaci využíváme k vlastní konstrukci. *Kompatibilitou hyperoperace a relace* na $(S, *, \preceq)$ rozumíme splnění podmínky

$$x \preceq y \Rightarrow a * x \preceq a * y \text{ a } x * a \preceq y * a \tag{21}$$

pro všechna $a, x, y \in S$, kde zápisem $a*x \preceq a*y$ rozumíme fakt, že pro každé $c \in a*x$ existuje $d \in a * y$ takové, že $c \preceq d$ (a analogicky pro $x * a \preceq y * a$).

Z tohoto pohledu je tedy zřejmé, že relaci „$\preceq$“ vůbec nemusíme definovat pomocí relace „$\leq$“. Pokud však předpokládáme speciální případ, kdy obě relace jsou stejné, můžeme lehce ukázat platnost následujícího tvrzení.

Věta 3.36. [80] *EL–polohypergrupa $(S, \circ)$ zkonstruovaná z uspořádané pologrupy $(S, \cdot, \leq)$ je uspořádanou polohypergrupou $(S, \circ, \leq)$, jestliže každá dvojice prvků $x, y \in S$ má horní závoru.*

Dále, jestliže relaci „$\preceq$“ definujeme jako inverzní relaci k relaci „$\leq$“, pak je kompatibilita zajištěna vždy.

Věta 3.37. [80] *Nechť $(S, \circ)$ je EL–polohypergrupa, která je zkonstruovaná z uspořádané pologrupy $(S, \cdot, \leq)$. Pro každou dvojici prvků $x, y \in S$ položme $x \preceq y$, kdykoli $y \leq x$. Pak relace „$\preceq$“ je kompatibilní s hyperoperací „$\circ$“.*

Co se týče vztahu EL–hyperstruktur a *kvazipořádkových hypergrup*, uveďme pro zajímavost výsledek uvedený v Jančić-Rašović [51], který podává konstrukci obecného silného hyperokruhu, v němž je jedna hyperoperace definována pomocí kvazipořádkových hypergrup a druhá pomocí koncového lemmatu (věta je zapsána pomocí označování používaného v habilitační práci).

Věta 3.38. *Nechť $(H, \cdot)$ je pologrupa s binárními relacemi „$\leq_1$“ a „$\leq_2$“ takovými, že jak $(H, \cdot, \leq_1)$ tak i $(H, \cdot, \leq_2)$ jsou kvaziuspořádané pologrupy a „$\leq_1$“ $\subseteq$ „$\leq_2$“. Pro každou dvojici prvků $a, b \in H$ definujme hyperoperace „$+_{\leq_1}$“ a „$\circ_{\leq_2}$“ na H těmito předpisy:*

$$\begin{aligned} x +_{\leq_1} y &= [x)_{\leq_1} \cup [y)_{\leq_1} \\ x \circ_{\leq_2} y &= [x \cdot y)_{\leq_2} \end{aligned}$$

Pak $(H, +_{\leq_1}, \circ_{\leq_2})$ je silný obecný hyperokruh.

Konečně, jestliže uvážíme, že každý polosvaz $(X, \wedge, \leq)$, resp. $(X, \vee, \leq)$, vytváří při

$$a \circ b = [a \wedge b)_{\leq} = \{x \in X \mid a \wedge b \leq x\}, \tag{22}$$

resp. $a \circ b = [a \vee b)_{\leq} = \{x \in X \mid a \vee b \leq x\}$ hypergrupu, můžeme jednoduše odvodit následující tvrzení:

Věta 3.39. [80] *EL–hypergrupa $(X, \circ)$ zkonstruovaná z ohraničeného dolního polosvazu $(X, \wedge, \leq)$ pomocí vztahu* (22) *je uspořádaná hypergrupa.*

Poznamenejme, že díky tomuto výsledku lze rozpracovat např. poznatky o ideálech *dolních BCK–polosvazů* uvedené v práci Bordbar, Zahedi a Jun [8].

3.8 Ukázky aplikací

Využitelnost teoretických výsledků získaných v habilitační práci je dána několika faktory. Předně, koncové lemma již ve svém původním znění pracuje s *uspořádanými pologrupami*; v habilitační práci je však značná pozornost věnována obecnějšímu případu kvaziuspořádaných pologrup, tj. výsledky lze přenést i na pologrupy, na nichž definujeme relaci ekvivalence. Pojem (kvazi)uspořádaná pologrupa přitom patří ke standardním pojmům s četnými aplikacemi již sám o sobě.

Dále, v práci jsou záměrně odvozovány výsledky, které stanovují podmínky, za nichž získáme spojnicové prostory, hyperokruhy, případně další specializované hyperstruktury, které opět samy o sobě mají mnohé aplikace (např. distributivní hypersvazy ve strojovém učení).

Navíc, koncové lemma, které lze samo o sobě aplikovat na množiny rozličných typů, lze využít postupem naznačeným v práci Al Tahanové a Davvaze [2]: jestliže jistou vlastnost jistého objektu ohodnotíme (např. reálným) číslem, pak vlastnost objektu, který vznikne nějakou operací s těmito objekty, může záviset na původních hodnotách – v mnoha situacích tak, že zvolená číselná množina spolu s operací a uspořádáním čísel podle velikosti může tvořit uspořádanou (polo)grupu. Tak např. jestliže slovu přiřadíme jeho délku ve znacích, pak skládání slov implikuje sčítání přirozených čísel. Podobně čtvercovou matici lze reprezentovat jejím determinantem, stopou a dalšími číselnými charakteristikami.

Další zdroje aplikací EL–hyperstruktur jsou dány typem nosné množiny. Tak např. pokud aplikujeme koncové lemma na uspořádanou pologrupu $(\langle 0, 1\rangle, \min, \leq)$, může $a * b$ značit množinu jevů, jejichž pravděpodobnost je větší než menší z čísel $p(a), p(b)$. Tuto úvahu, spolu s výsledky týkajícími se modifikovaných EL–hyperstruktur, lze využít např. v situaci popsané v článku Novák a Křehlík [86]. Zde fragmentovanou nosnou množinu představuje sjednocení $\mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}^3$, přičemž koncové lemma je využito ke konstrukci spojnicového prostoru na této množině. Přitom prvky $\mathbb{R}^2$ představují body v rovině a prvky $\mathbb{R}^3$ body v prostoru. Uvažme nyní techniku SLAM (*simultaneous localization and mapping*) – viz např. Davidson et al. [19] nebo Vu, Aycard and Appenrodt [103] – která je založena na vytváření mapy neznámého 3D prostředí a současné lokalizace nějakého zařízení v něm (pomocí 2D mapy), přičemž následný pohyb zařízení probíhá v pravoúhlé síti. Navíc, každý bod mapy představuje bod skutečné krajiny a údaje o něm jsou zachyceny ve formě matic. V celém procesu vyhodnocujeme vzdálenosti, pravděpodobnosti kolize a přirozeně vyžadujeme „kuželovitý výhled“ – tedy přesně splňujeme základní předpoklady (modifikovaného) koncového lemmatu.

Podobně může být nosnou množinou EL–hyperstruktur množina komplexních čísel, přičemž jednoznačnou operací může být vhodně modifikované sčítání nebo násobení a definice vhodné relace může využívat absolutní hodnoty, tj. vzdálenosti v Gaussově rovině. V tomto se pak blížíme tzv. *geometrickým hyperoperacím* studovaným žáky a kolegy A. Dramalidise; ukázka aplikace viz Antampoufis, Vougiouklis a Dramalidis [3], v níž je ve skutečnosti hyperoperace definována pomocí koncového lemmatu. Nebo, jestliže jako nosnou množinu EL–hyperstruktur uvážíme dolní polosvaz, nabízí se díky propojení s teorií dolních BCK–polosvazů další možnosti využití.

Aplikace teoretických výsledků kapitol 1–3 jsou v habilitační práci představeny ve třech rovinách: jako aplikace do *jiné oblasti matematiky*, jako aplikace do *silně matematizované oblasti inženýrských věd* a jako ukázka *matematického modelu jistého reálného problému.* Onou „jinou oblastí matematiky" je řešení diferenciálních, resp. integro-diferenciálních rovnic, které ve skutečnosti poskytly motivaci pro teoretické studium EL–hyperstruktur. Žáci a kolegové J. Chvaliny na přelomu tisíciletí odvodili celou řadu výsledků, v nichž byly (integro-)diferenciální operátory různých typů studovány z hlediska algebraické teorie hyperstruktur jako zobecnění přístupu O. Borůvky a F. Neumana [9, 74]. Koncové lemma při odvozování mnohých těchto výsledků hraje klíčovou roli. Současně však díky neexistenci teoretických výsledků musely být mnohé z vlastností odvozovány pracně a nahodile, resp. nebyly odvozeny vůbec. Zde je nutné poznamenat, že vzhledem k tomu, že pracujeme s (integro-)diferenciálními rovnicemi, vystupují ve zdánlivě jednoduchém tvaru lemmatu

$$a * b = [a \cdot b)_{\leq} = \{x \mid a \cdot b \leq x\}$$

vektory, jejichž složkami jsou funkce, tudíž nalezení vhodně motivovaných jednoznačných operací a relací není triviální úkol. Jako názorný příklad uveďme analogickou situaci *transformací v komplexním oboru.* Pro funkci $f \in \mathbb{C}^{\Omega}$ a libovolné $\lambda \in \mathbb{C}$ takové, že $\lambda \neq 0$ a $F, G \in \mathbb{C}^{\Omega}$ definujme operátor

$$T(\lambda, F, \varphi)(f) = \lambda F f + \varphi,$$

tj. funkci vynásobíme komplexním číslem λ, poté další funkcí F a výsledek poté posuneme ve směru φ. Skládání takovýchto transformací lze popsat jako

$$T(\lambda_1, F_1, \varphi_1) \circ T(\lambda_2, F_2, \varphi_2) = T(\lambda_1\lambda_2, F_1F_2, \lambda_1F_1\varphi_2 + \varphi_1), \tag{23}$$

což definuje *jednoznačnou operaci* na množině operátorů, která je potřebným vstupním údajem pro aplikaci koncového lemmatu. Současně je na této ukázce vidět, že pracovat s nekomutativními (hyper)strukturami je pro koncové lemma přirozené, což vysvětluje pozornost věnovanou v habilitační práci komutativitě. *Relace* na nosné množině vůbec nemusí být definována jako variace na uspořádání podle velikosti (ať už vektorů podle jistých složek nebo čísel). Ve výše uvedeném případě, publikovaném v Chvalina, Moučka a Novák [43] v roce 2007, tj. v době před systematickým studiem koncového lemmatu, je relace na množině operátorů $T(\lambda, F, \varphi)$ definována takto: Položíme $T_1 \leq T_2$, kdykoli existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $T_2 = T_1 \circ T_0^n$, kde $T^n(\lambda, F, \varphi)$ je definováno jako

$$T^n(\lambda, F, \varphi)(f) = \begin{cases} f + n\varphi = T(1, 1, n\varphi)(f) & \text{pro } F = \lambda^{-1} \\ \lambda^n F^n f + \frac{\lambda^n F^n - 1}{\lambda F - 1}\varphi = T(\lambda^n, F^n, \frac{\lambda^n F^n - 1}{\lambda F - 1}\varphi)(f) & \text{pro } F \neq \lambda^{-1} \end{cases},$$

a T_0 je jistý vhodný operátor. Je zřejmé, že dosáhnout v podobných situacích antisymetričnosti relace, resp. její kompatibility s jednoznačnou operací, je obtížné. Tato ukázka tedy poskytuje jisté zdůvodnění studia modifikací koncového lemmatu a pozornosti věnované antisymetrii relace.

„Silně matematizovanou oblastí inženýrských věd“, kterou jsme zmínili výše, rozumíme *teorii automatů*. Motivace k jejímu studiu opět vychází z prací J. Chvaliny, který však byl motivován přístupem Ch. Massourose a J. Mittase [70] (z novějších prací na téma hyperstruktury v teorii automatů uveďme např. Massouros [67]). Algebraickou teorii hyperstruktur aplikoval v teorii automatů J. Chvalina již v práci Chvalina a Chvalinová [39], avšak v tomto případě se nejednalo o použití EL–hyperstruktur ale *kvazipořádkových hypergrup*. V habilitační práci pracujeme s *automaty bez výstupu* a – kvůli zachování kontinuity terminologie – používáme termín *kvaziautomat* (*angl.* quasiautomaton), i když v mnoha případech se jedná spíše o *poloautomat* (*angl.* semiautomaton). Pojetí výsledků v habilitační práci navazuje na pojetí klasických prací Gécseka a Peáka [29] a Dörflera [22, 23]. Dále je využito zobecnění podmínky kladené na přechodovou funkci kvaziautomatu, a sice

$$\delta(y, \delta(x, s)) = \delta(xy, s) \tag{24}$$

pro libovolnou dvojici vstupů x, y a libovolný stav s, ve které je místo rovnosti vyžadována relace „býti prvkem“ a součin xy na pravé straně je nahrazen hypersoučinem $x * y$. Význam této úpravy je zřejmý: místo stavu, ke kterému dospějeme po postupné aplikaci dvou vstupů x, y, nyní na pravé straně zobecněného vztahu (25) uvažujeme množinu všech stavů, k nimž lze dospět aplikací všech vstupů z množiny $x * y$, a vyžadujeme, aby stav $\delta(y, \delta(x, s))$ byl jedním z nich. I když se zobecněním podmínky (24) na (25) do našich úvah vstupuje aspekt mnohoznačnosti, je vhodné připomenout, že se v tomto zobecnění nejedná o nedeterministický automat, protože oborem hodnot přechodové funkce je stále množina stavů, nikoli její potenční množina. Habilitační práce se drží označování podmínky

$$\delta(y, \delta(x, s)) \in \delta(x * y, s) \tag{25}$$

zkratkou GMAC (*angl.* Generalized Mixed Associativity Condition), kterou zavedl J. Chvalina, i když se jedná o poněkud nešikovné označení, protože původní podmínka bývá zkratkou MAC označována jen zřídka.

Poznamenejme, že původní přístup, který je v habilitační práci rozvíjen, je silně algebraizován, takže místo nejobvyklejší operace *katenace*, tj. *řetězení slov*, můžeme pracovat s mnohem širší škálou operací. Tento přístup nám také dovolí považovat za vstup takto zobecněného kvaziautomatu množinu matic, resp. vektorů, což – z pohledu praxe – dovoluje pracovat s různými stavovými modely; viz např. Jan a Janová [49, 50] o restauraci digitálních signálů. Habilitační práce odkazuje na článek Chvalina, Křehlík a Novák [41], ve kterém jsou diskutovány problémy spojené s kartézskou kompozicí takto zobecněných automatů. Na tomto místě uveďme jiný – doposud nepublikovaný – výsledek (Novák, Křehlík a Staněk, n–ary Cartesian composition of automata, v recenzním řízení v *Soft Comput.*). Jestliže uvážíme množinu kvaziautomatů a skutečnost, že podmínkou GMAC popisujeme množinu stavů, které lze získat po postupné aplikaci dvou vstupů, pak jestliže automat představuje v reálné situaci robotické zařízení prohledávající neznámý terén (a pohybující se po pravoúhlé síti mapy), pak kartézkou kompozicí jednotlivých automatů za využití podmínky GMAC jsme schopni popsat všechna místa, která lze prohledat v jednom kroku množinou všech robotických zařízení. Opět poznamenejme, že navigace v mapě využívá vektorů, matic a jistého porovnávání podle velikosti (v našem případě stopu vhodně definované matice); zde využíváme mj. teoretických výsledků o úplných hypergrupách uvedených v Cristea [15] a rozvíjených v (Novák, Křehlík a Staněk, n–ary Cartesian composition of automata) pomocí koncového lemmatu.

Konečně, v habilitační práci je představen *matematický model podvodní bezdrátové sítě* (*angl.* UWSN, tj. Underwater Wireless Sensor Network) pro typ sítě založené na sdružování senzorů do klastrů (*angl.* clustering). Představení tohoto typu sítí viz např. Domingo a

Prior [24], podrobněji viz např. Ayaz et al. [5], Ovaliadis a Savage [88] nebo Rault, Abdelmadjid a Yacine [94]; detaily zmiňovaného modelu viz Novák, Ovaliadis a Křehlík [87].

Připomeňme, že podvodní bezdrátové sítě se od pozemních v mnoha ohledech odlišují. Podstatným faktorem je zejména skutečnost, že voda jako médium má odlišné vlastnosti od vzduchu, což má vliv na šířku dostupného pásma. V úvahu je třeba v obecném případě brát také vodní proudy, tj. rozmístění prvků sítě není statické. Limitujícím faktorem je také skutečnost, že u mořského dna není možné použít lokalizaci prvků sítě pomocí GPS, a zejména fakt, že senzory provádějící měření jsou velmi objemná a drahá zařízení, u nichž je navíc obtížné zajišťovat napájení, resp. vyměňovat baterie. Navíc, požadavek na co nejlepší pokrytí prostoru (tj. zajištění sběru data směrem od senzorů k lodi nebo pozemní stanici), je v přímém rozporu s požadavkem na minimalizaci spotřeby energie, a tedy vybíjení baterie. Špatné rozmístění senzorů má za následek buď neúplné nebo naopak duplikované údaje, což v obou případech zvyšuje chybovost přenosu. Klíčovým požadavkem je proto *správná konfigurace sítě* zajištěná co nejefektivnějším rozmístěním jejích prvků, tj. senzorů, a sběrem dat. V našem matematickém modelu se prozatím podařilo popsat sběr dat v systému uspořádání do klastrů (*angl.* cluster based data aggregation) v řeči EL–hyperstruktur a matematicky zformulovat problém úspěšného sběru dat z každého prvku sítě. Definice jednoznačné operace, hyperoperace i relace přitom vycházejí z modifikace koncového lemmatu popsané v článku Novák a Křehlík [86]. Při označování cl_i jako i–tý kluster, CH_i jako hlava i–tého klastru (*angl.* cluster head) a H jako množina všech prvků sítě obohacená o prvek s (o jeho roli viz Novák, Ovaliadis a Křehlík [86, 87]) pracujeme s následujícími definicemi:

$$a * b = \begin{cases} \{a,b\} \cup [a \cdot b)_{\leq} & \text{pro } (a = CH_i, b = CH_j) \text{ nebo } a,b \in cl_i \\ \{a,b\} & \text{pro } (a \neq CH_i \text{ nebo } b \neq CH_j) \\ & \text{a současně } (a \in cl_i, b \in cl_j, i \neq j), \end{cases} \tag{26}$$

kde $[a \cdot b)_{\leq}$ značí množinu $\{x \in H \mid a \cdot b \leq x\}$, kde $a \cdot b$ je výsledek jednoznačné binární operace $a \cdot b$ definované pro libovolná $a, b \in H$ jako

$$a \cdot b = \begin{cases} CH_i & \text{pro } a,b \in cl_i \\ CH_k & \text{pro } a = CH_i, b = CH_j, i \neq j \\ s & \text{pro } a = s \text{ nebo } b = s \text{ nebo} \\ & ((a \neq CH_i \text{ nebo } b \neq CH_j) \text{ a současně } (a \in cl_i, b \in cl_j, i \neq j)) \end{cases} \tag{27}$$

a CH_k je hlava takového klastru, že $CH_i \leq CH_k$, $CH_j \leq CH_k$, kde $a \leq b$ je relace mezi prvky sítě splňující následující předpoklady: (1) $s \leq s$, $s \leq CH_i$ a $CH_i \leq s$ pro všechny klastry cl_i, (2) *v rámci stejného klastru* cl_i máme $a_j \leq CH_i$ pro všechna $a_j \in cl_i$ zatímco vzájemně různé prvky, které nejsou hlavami klastrů, jsou nesrovnatelné, (3) *mezi klastry* pro $a = CH_i$, $b = CH_j$ skutečnost, že $a \leq b$ znamená, že úroveň (tj. hladina, *angl.* tier) b (měřeno směrem k hladině) je menší nebo rovna úrovni a, (4) ve všech ostatních případech a a b nejsou v relaci. Přitom CH_k je taková hlava klastru, která se nachází na *nejbližší* vyšší úrovni nad CH_i a současně i CH_j. Pochopitelně, na nejbližší vyšší úrovni nějaká hlava klastru existuje vždy (v každém případě je jí loď nebo pozemní stanice provádějící sběr dat), ale může být problematické ji určit. K takovému určení lze použít např. metodu LEACH (používanou také v pozemních sítích) nebo algoritmus výběru hlavy v metodě DUCS apod.; detaily viz

Domingo a Prior [24] nebo Huang et el. [35, 36]. Poznamenejme, že z matematického pohledu je problém možnosti určení hlavy CH_k odpovědí na otázku, zda můžeme výše uvedenou relaci považovat za antisymetrickou nebo ne, tj. zda příslušnou EL–hyperstrukturu konstruujeme z kvaziuspořádané nebo z uspořádané pologrupy.

4 ZÁVĚR

EL–hyperstruktury, tj. hyperstruktury vytvářené pomocí tzv. *koncového lemmatu* z (kvazi)uspořádaných pologrup představují jednu ze tříd algebraických hyperstruktur. Díky zdánlivé jednoduchosti konstrukce kombinované s faktem, že (kvazi)uspořádané pologrupy patří ke standardním algebraickým pojmům, lze za EL–hyperstruktury považovat nejen hyperstruktury cíleně vytvářené pomocí koncového lemmatu, ale i mnohé příklady získané již dříve různými autory. Autorem studovaná konstrukce dovoluje sestrojit nejen *(polo)hypergrupy*, resp. *spojnicové prostory* (*angl.* join spaces), ale také *svazové* a *okruhové hyperstruktury* a může dokonce sloužit i ke konstrukci *H_v–matic*. I když v nejjednodušším případě můžeme EL–hyperstruktury konstruovat na číselných množinách opatřených vhodnou algebraickou operací, skutečný aplikační potenciál konstrukce je patrný teprve ve chvíli, kdy ji aplikujeme na množiny matic, vektorů, operátorů jistého typu apod. Přístup popsaný v habilitační práci tak umožňuje využití výsledků algebraické teorie hyperstruktur např. v *teorii automatů* nebo při řešení konkrétních inženýrských problémů, které musejí pracovat s aspektem potenciální mnohoznačnosti svých výsledků. Autorovým záměrem bylo mj. ukázat sílu této konstrukce a zdůraznit skutečnost, že vychází ze samotných základů algebraické teorie hyperstruktur.

Jak již bylo mnohokrát zmíněno, téma *uspořádání* provází algebraickou teorii hyperstruktur již od jejího zrodu. Habilitační práce tak kromě již autorem publikovaných teoretických výsledků o EL–hyperstrukturách a jejich aplikacích přináší možný nový pohled na dosavadní poznatky a představuje tak „jeden z možných přístupů“ ke studiu pojmu *uspořádání* v algebraické teorii hyperstruktur.

LITERATURA

[1] I. Adler, Composition rings, *Duke Math. J.*, **29** (1962), 607–623.

[2] M. Al Tahan, B. Davvaz, On a special single-power cyclic hypergroup and its automorphisms, *Discrete Math. Algorithm. Appl.*, **8**(4) (2016), 1650059.

[3] N. Antampoufis, T. Vougiouklis, A. Dramalidis, Geometrical and circle hyperoperations in urban applications, *Ratio Sociologica*, **4**(2) (2011), 53–66.

[4] S. M. Anvariyeh, S. Momeni, n–ary hypergroups associated with n–ary relations, *Bull. Korean Math. Soc.*, **50**(2) (2013), 507–524.

[5] M. Ayaz et al., A survey on routing techniques in underwater wireless sensor networks, *J. Netw. Comput. Appl.*, **34**(6) (2011), 1908-1927.

[6] J. Beránek, J. Chvalina, On a certain group of linear second-order differential operators of the Hill-type, *Acta Math. (Nitra)*, **17** (2014).

[7] W. R. Bloom, H. Heyer, *Harmonic Analysis of Probability Measures on Hypergroups*, Walter de Gruyter, Berlin – New York, 1995.

[8] H. Bordbar, S. S. Ahn, M. M. Zahedi, Y. B. Jun, Semiring structures based on meet and plus ideals in lower BCK–semilattices, *J. Comput. Anal. Appl.*, **23**(5) (2017), 945–954.

[9] O. Borůvka, *Linear Differential Transformations of the Second Order*, English Univ. Press, London, 1971.

[10] S. D. Comer, Integral relation algebras via pseudogroups, *Notices AMS* **23** (1976), A-659.

[11] P. Corsini, Hypergroupes et groupes ordonnés, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **48** (1973), 189–204.

[12] P. Corsini, *Prolegomena of Hypergroup Theory*, Aviani Editore, Tricesimo, 1993.

[13] P. Corsini, V. Leoreanu, *Applications of Hyperstructure Theory*, Kluwer Academic Publishers, Dodrecht – Boston – London, 2003.

[14] P. Corsini, T. Vougiouklis, From groupoids to groups through hypergroups, *Rendiconti di Mat.*, Serie **VII**(9) Roma (1989), 173–181.

[15] I. Cristea, Complete hypergroups, 1-hypergroups and fuzzy sets, *An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa*, **10**(2) (2002), 25–38.

[16] I. Cristea, Several aspects on the hypergroups associated with n-ary relations, *An. Şt. Univ. Ovidius Constanta*, **17**(3) (2009), 99–110.

[17] I. Cristea, S. Jančić-Rašović, Composition hyperrings, *An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa*, **21**(2) (2013), 81–94.

[18] I. Cristea, M. Ştefănescu, Hypergroups and n-ary relations, *European J. Combin.*, **31** (2010), 780–789.

[19] A. J. Davidson et al., MonoSLAM: Real-Time Single Camera SLAM, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **29**(6) (2007), 1052–1067.

[20] B. Davvaz, T. Vougiouklis, n–ary hypergroups, *Iran. J. Sci. Technol. Trans. A-Sci.*, **30**(A2) (2006), 165–174.

[21] A. Dehghan Nezhad, B. Davvaz, An Introduction to the Theory of H_v–Semilattices, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, **32**(3) (2009), 375–390.

[22] W. Dörfler, The cartesian composition of automata, *Math. System Theory*, **11** (1978), 239–257.

[23] W. Dörfler, The direct product of automata and quasi-automata, in: A. Mazurkiewicz ed., *Mathematical foundations of Computer Science:* 5^{th} *Symposium, Gdansk, Sept. 6-10, 1976*, Springer Verlag, 1976.

[24] M. C. Domingo, R. Prior, A distributed clustering scheme for underwater wireless sensor networks, in: *The 18th Annual IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications (PIMRC'07)*, 2007, Article number 4394038.

[25] K. Drbohlav, Gruppenartige Multigruppen, *Czech. Math. J.*, **7**(2) (1957), 183–190.

[26] K. Drbohlav, T. Kepka, P. Němec, Associativity semihypergroups and related problems, *Atti Convegno su Ipergruppi, altre Strutture Multivoche e loro Applicazioni*, Udine, 1985.

[27] Ch. Dunkl, The measure algebra of a locally compact hypergroup, *Trans. Amer. Mathem. Soc.*, **179** (1973), 331–348.

[28] C. Flaut, BCK–algebras arising from block codes, *J. Intell. Fuzzy Syst.*, **28**(4) (2015), 1829–1833.

[29] F. Gécseg, I. Peák, *Algebraic Theory of Automata*, Budapest, Akadémia Kiadó, 1972.

[30] S. H. Ghazavi, S. M. Anvariyeh, EL–hyperstructures associated to n-ary relations, *Soft Comput.*, **21**(19) (2017), 5841–5850.

[31] S. H. Ghazavi, S. M. Anvariyeh, S. Mirvakili, EL^2–hyperstructures derived from (partially) quasi-ordered hyperstructures. *Iran. J. Math. Sci. Inform.*, **10**(2) (2015), 99–114.

[32] S. H. Ghazavi, S. M. Anvariyeh, S. Mirvakili, Ideals in EL–semihypergroups associated to ordered semigroups. *Journal of Algebraic Systems*, **3**(2) (2016), 109–125.

[33] U. Hebisch, H. J. Weinert, *Semirings – Algebraic Theory and Applications in Computer Science.* World Scientific Publishing, 1998.

[34] D. Heidari, B. Davvaz, On ordered hyperstructures, *U.P.B. Sci. Bull. Series A*, **73**(2) (2011), 85–96.

[35] C. J. Huang et al., A clustering head selection algorith for underwater sensor networks, in: *2008 Second International Conference on Future Generation Communication and Networking (FGCN 2008)*, 2008, Article number 4734050, 21–24.

[36] C. J. Huang et al., A self-healing clustering algorithm for underwater sensor networks, *Cluster Comput.*, **14** (2011), 91–99.

[37] J. Chvalina, *Funkcionální grafy, kvaziuspořádané množiny a komutativní hypergrupy*, Masarykova univerzita, Brno, 1995.

[38] J. Chvalina, L. Chvalinová, Join spaces of linear ordinary differential operators of the second order, *Folia FSN Universitatis Masarykianae Brunensis, Mathematica* **13**, CDDE – Proc. Colloquium on Differential and Difference Equations, Brno, (2002), 77–86.

[39] J. Chvalina, L. Chvalinová, State hypergroups of automata, *Acta Math. et Inform. Univ. Ostraviensis*, **4**(1) (1996), 105–120.

[40] J. Chvalina, L. Chvalinová, Transfer between join spaces of certain integral operators and translation operators on rings of a continuous functions, in: *5th International Conf. APLIMAT.* FME Slovak University of Technology, Bratislava, 2006, 607–612.

[41] J. Chvalina, Š. Křehlík, M. Novák, Cartesian composition and the problem of generalising the MAC condition to quasi-multiautomata. *An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa*, **24**(3) (2016), 79–100.

[42] J. Chvalina, Š. Hošková-Mayerová, On certain proximities and preorderings on the transposition hypergroups of linear first-order partial differential operators, *An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa*, **22**(1) (2014), 85–103.

[43] J. Chvalina, J. Moučka, M. Novák, Actions of centralizer semihypergroups of certain transformation operators on rings of functions of a complex variable, in: *XXV Internat. Colloq. Brno, Proceedings*, University of Defence, Brno, 2007. [CD-ROM].

[44] J. Chvalina, M. Novák, Hyperstructures of preference relations, in: 10^{th} *International Congress of Algebraic Hyperstructures and Applications, Proceedings of AHA 2008*, University of Defence, Brno, 2009, 131–140.

[45] J. Chvalina, P. Račková, Join spaces of smooth functions and their actions on transposition hypergroups of second order linear differential operators, *APLIMAT – J. Appl. Math.*, **1**(1) (2008), 55–64.

[46] K. Iwasava, On linearly ordered groups, *J. Math. Soc.* **1**(1) (1948), 1–9.

[47] H. M. Jafarabadi, N. H. Sarmin, M. R. Molaei, Completely simple and regular semi hypergroups, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, **35**(2) (2012), 335–343.

[48] H. M. Jafarabadi, N. H. Sarmin, M. R. Molaei, Simple semi hypergroups, *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, **5**(4) (2011), 51–55.

[49] J. Jan, *Digital Signal Filtering, Analysis and Restoration*, IEEE Publishing, London, 2000.

[50] J. Jan, D. Janová, Complex approach to surface reconstruction of microscopic samples from bimodal image stereo data, *Machine Graphic and Vision*, **10** (2001), 261–288.

[51] S. Jančić-Rašović, On hyperrings associated with binary relations on semihypergroup, *Ital. J. Pure Appl. Math.*, **30** (2013), 279–288.

[52] J. Jantosciak, Classical geometries as hypergroups, in *Convegno su: Ipergruppi, altre strutture multivoche e loro applicazioni*, P. Corsini Ed., Udine, Italy, 1985, 93–104.

[53] J. Jantosciak, Transposition Hypergroups: Noncommutative Join Spaces, *J. Algebra*, **187** (1997), 97–119.

[54] R. I. Jewett, Spaces with an abstract convolution of measures, *Adv. Math.*, **8**(1) (1975), 1–101.

[55] Y. B. Jun, S. Z. Song, Codes based on BCK–algebras, *Inf. Sci.*, **181**(22) (2011), 5102–5109.

[56] T. Kepka, A note on the associativity hypergroups of quasigroups and loops, *Atti Soc. Pelor. Sc. Mat. Fis. Nat.*, **27** (1981)

[57] M. Konstantinidou-Seramifidou, Distributive and complemented hyperlattices, *Math. Balcanica*, **13** (1981), 339–360.

[58] M. Konstantinidou-Seramifidou, Modular hyperlattices, *Math. Balcanica*, **11** (1978), 202–218.

[59] M. Konstantinidou, J. Mittas, An introduction to the theory of hyperlattices, *Math. Balcanica*, **7** (1977), 187–193.

[60] M. Krasner, A class of hyperrings and hyperfields, *Int. J. Math. Sci.*, **6**(2) (1983), 307–312.

[61] M. Krasner, Approximation des corps values complets de characteristique $p \neq 0$ par ceux de characteristique 0, in: *Colloque d'Algebre Superieure (Bruxelles, Decembre 1956)*, CBRM, Bruxelles, 1957.

[62] Š. Křehlík, M. Novák, From lattices to H_v–matrices, *An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa*, **24**(3) (2016), 209–222.

[63] V. Leoreanu-Fotea, B. Davvaz, n–hypergroups and binary relations, *European J. Combin.*, **29** (2008), 1207–1218.

[64] G. L. Litvinov, Hypergroups and hypergroup algebras, *J. Soviet Math.*, **38**(2) (1987), 1734–1761.

[65] F. Marty, Sur une généralisation de la notion de groupe, *IV Congrès des Mathématiciens Scandinaves*, Stockholm (1934), 45–49.

[66] Ch. G. Massouros, Methods of constructing hyperfields, *Internat. J. Math. & Math. Sci.*, **8**(4) (1985), 725–728.

[67] Ch. G. Massouros, On path hypercompositions in graphs and automata, *MATEC Web of Conferences*, **41**, 05003 (2016).

[68] Ch. G. Massouros, On the theory of hyperrings and hyperfields, *Algebra i Logika*, **24**(6) (1985), 728–742.

[69] Ch. G. Massouros, *Algebraic structures and hyperoperations*, Doctoral Thesis, University of Patras, Greece, 1986.

[70] G. G. Massouros, J. D. Mittas, Languages, Automata and Hypercompositional Structures, in: *Algebraic Hyperstructures and Applications. Proceedings of the Fourth International Congress, Xanthi, Greece, 1990*, Th. Vougiouklis ed., World Scientific, 1991, 137–147.

[71] J. D. Mittas, Hypergroups canoniques, *Math. Balcanica*, **2** (1972), 165–179.

[72] J. D. Mittas, Sur les hyperanneaux et les hypercorps, *Math. Balcanica*, **3** (1973), 368–382.

[73] A. Nakasis, Recent results in hyperring and hyperfield theory, *Internat. J. of Math. & Math. Sci.*, **11**(2) (1988), 209–220.

[74] F. Neuman, *Global Properties of Linear Ordinary Differential Equations*, Mathematics and its Applications, East European Series **52**, Kluwer Academic Publishers (with Academia Praha), Dordrecht–Boston–London, 1991.

[75] J. Nieminen, Join space graphs, *J. of Geometry*, **33** (1988), 99–103.

[76] J. Nieminen, Chordal graphs and join spaces, *J. of Geometry*, **34** (1989), 146–151.

[77] M. Novák, Important elements of EL–hyperstructures, *Aplimat – J. of Appl. Math.*, **4**(II) (2011), 105–113.

[78] M. Novák, n–ary hyperstructures constructed from binary quasi–ordered semigroups, *An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa*, **22**(3) (2014), 147–168.

[79] M. Novák, On EL–semihypergroups, *European J. Combin.*, **44**(Part B), (2015), 274–286.

[80] M. Novák, Ordering in the Algebraic Hyperstructure Theory: Some Examples with a Potential for Applications in Social Sciences. In *Models and Theories in Social Systems. Studies in Systems, Decision and Control.* Cham, Switzerland: Springer, 2018. pp. 535–551.

[81] M. Novák, Potential of the "Ends lemma" to create ring-like hyperstructures from quasi-ordered (semi)groups, *South Bohemia Mathematical Letters*, **17**(1) (2009), 39–50.

[82] M. Novák, Some basic properties of EL–hyperstructures, *European J. Combin.*, **34** (2013), 446–459.

[83] M. Novák, The notion of subhyperstructure of "Ends lemma"–based hyperstructures, *Aplimat – J. of Appl. Math.*, **3**(II) (2010), 237–247.

[84] M. Novák, I. Cristea, Composition in EL–hyperstructures, *Hacet. J. Math. Stat.* (v tisku: **47**(6) (2018)).

[85] M. Novák, I. Cristea, Š. Křehlík, A class of hyperlattices induced by quasi-ordered semigroups, in: *Proceedings, 16th Conference on Applied Mathematics Aplimat 2017*, Vydavatelstvo Spektrum STU, Bratislava, 2017.

[86] M. Novák, Š. Křehlík, EL–hyperstructures revisited, *Soft Comput.*, **22**(21) (2018), 7269–7280.

[87] M. Novák, K. Ovaliadis, Š. Křehlík, A hyperstructure model of Underwater Wireless Sensor Network (UWSN) design, in: *Proceedings ICNAAM 2017* (accepted).

[88] K. Ovaliadis, N. Savage, Cluster protocols in underwater sensor networks: a research review, *Journal of Engineering Science and Technology Review*, **7**(3)(2014), 171-175.

[89] H. E. Pickett, Homomorphisms and subalgebras of multialgebras, *Pac. J. Math.*, **21**(2) (1967), 327–342.

[90] N. Polat, On bipartite graphs whose interval space is a closed join space, *J. Geom.*, **108** (2017), 719–741.

[91] W. Prenowitz, Projective geometries as multigroups, *Amer. J. Math.*, **65** (1943), 235–256.

[92] W. Prenowitz, J. Jantosciak, Geometries and join spaces, *J. Reine Angew. Math.*, **257** (1972), 100–128.

[93] W. Prenowitz, J. Jantosciak, *Join geometries*, UTM, Springer-Verlag, New York, 1979.

[94] T. Rault, B. Abdelmadjid, C. Yacine, Energy efficiency in wireless sensor networks: A top-down survey, *Comput. Netw.* **67**(2014), 104-122.

[95] R. Rota, Sugli iperanelli moltiplicativi, *Rend. Di Mat., Series VII*, **2** (1982), 711–724.

[96] A. E. Saeid et al. Some connections between BCK–algebras and n–ary block codes, *Soft Comput.* (2017) (online ready).

[97] R. Spector, Apercu de la theorie des hypergroupes, *Lect. Notes. Math.*, **497** (1975), 643–673.

[98] J. Šlapal, On exponentiation of universal hyperalgebras, *Algebr. Universalis*, **44** (2000), 187–193.

[99] J. V. Varlet, Remarks on distributive lattices, *Bull. de l'Acad. Polonnaise des Sciences, Serie des Sciences Math., Astr. et Phys.*, **23** (1975), 1143–1147.

[100] T. Vougiouklis, *Hyperstructures and their Representations*, Monographs in Mathematics, Hadronic Press, 1994.

[101] T. Vougiouklis, Representations of hypergroups by generalized permutations, *Algebr. Universalis*, **29** (1992), 172–183.

[102] T. Vougiouklis, The fundamental relation in hyperrings, The general hyperfield, in: *Algebraic Hyperstructures and Applications. Proceedings of the Fourth International Congress, Xanthi, Greece, 1990*, Th. Vougiouklis ed., World Scientific, 1991, 203–211.

[103] T. D. Vu, O. Aycard, N. Appenrodt, Online Localization and Mapping with Moving Object Tracking in Dynamic Outdoor Environments, in: *Proc. 2007 IEEE Intelligent Vehicles Symposium Istanbul, Turkey, June 13–15, 2007*, 190–195.

[104] Y. Xiao, B. Zhao, Hypersemilattices and their ideals, *J. Shaanxi Normal Univ. Nat. Sci. Ed.*, **33**(1) (2005), 7–10.

ABSTRACT

The habilitation thesis is a collection of results from the algebraic hyperstructure theory centered on a construction of algebraic hyperstructures from partially ordered semigroups. We show that the construction, known as the "Ends lemma" (thus resulting in what is known as *EL–hyperstructures*) can be applied in a number of various contexts and can result in a wide range of types of hyperstructures with both one and more hyperoperations. In the thesis these ways of construction are described and important elements and properties of such hyperstructures are studied. Apart from this the original binary construction is generalized into the n–ary context and modified so that it could be applied in an even wider variety of contexts. Examples of application of the theoretical results are also included. We discuss the use of the construction in the study of operators of various kinds and theory of automata and present a mathematical model of underwater wireless sensor networks. Most of the results of the thesis had already been published by the author. In order to make the thesis comprehensible to a wide audience, an introduction to the algebraic hyperstructure theory, numerous historical and motivational remarks, links to other similar concepts and references to an extensive list of bibliography are included.