

VĚDECKÉ SPISY VYSOKÉHO UČENÍ TECHNICKÉHO V BRNĚ

Edice Habilitační a inaugurační spisy, sv. 507

ISSN 1213-418X

Pavel Rajmic

**ŘÍDKÉ A NÍZKOHODNOSTNÍ
REPREZENTACE SIGNÁLŮ
S APLIKACEMI**

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií
Ústav telekomunikací

Mgr. Pavel Rajmic, Ph.D.

**ŘÍDKÉ A NÍZKOHODNOSTNÍ REPREZENTACE
SIGNÁLŮ S APLIKACEMI**

SPARSE AND LOW-RANK REPRESENTATIONS
OF SIGNALS WITH APPLICATIONS

ZKRÁCENÁ VERZE HABILITAČNÍ PRÁCE
OBOR: TELEINFORMATIKA



BRNO 2015

KLÍČOVÁ SLOVA

zpracování signálů, řídké reprezentace, optimalizace, komprimované snímání, audio inpainting, magnetická rezonance

KEYWORDS

signal processing, sparse representation, optimization, compressed sensing, audio inpainting, magnetic resonance

MÍSTO ULOŽENÍ PRÁCE:

Dizertační práce je uložena na oddělení vědy a výzkumu, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Vysoké učení technické v Brně, Technická 12, 618 00 Brno.

OBSAH

1	ÚVOD	5
2	DOPLŇOVÁNÍ CHYBĚJÍCÍCH DAT DO AUDIOSIGNÁLU	6
2.1	Formulace problému	6
2.2	Dosavadní metody pro řešení problému	6
2.3	Nová metoda založená na sociální řídkosti	8
2.4	Experimenty a výsledky	9
3	KOMPRIMOVANÉ SNÍMÁNÍ V PERFUZNÍM ZOBRAZOVÁNÍ MAGNETICKOU REZONANCÍ	10
3.1	Fyzikální podstata zobrazování pomocí MR	11
3.2	Matematický popis MRI	12
3.3	Fyziologická podstata perfuzního zobrazování	13
3.4	Lognormální model perfuzní křivky	13
3.5	Fantom perfuzního zobrazování	15
3.6	Sestavení měřicích masek	15
3.7	Metody pro rekonstrukci signálu z naměřených dat	17
3.8	Výsledky rekonstrukcí L+S modelu a jejich diskuze	19
3.9	Srovnání modelů L&S a L+S	21
3.10	L+S model s 1D totální variací	22
3.11	Použití na reálných datech	22
4	ZÁVĚR	25
5	ABSTRACT	27

CURRICULUM VITÆ

Jméno: **Mgr. Pavel Rajmic, Ph.D.**
Narozen: 17. 5. 1978 v Uherském Hradišti
Kontakt: rajmic@feec.vutbr.cz

Vzdělání

1992 – 1996 Gymnázium Uherské Hradiště
1996 – 2001 Masarykova univerzita v Brně, Přírodovědecká fakulta,
magisterské studium oboru Matematika-ekonomie
2001 – 2004 Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, doktorské studium oboru Teleinformatika

Praxe

2000 – 2001 MU v Brně, Fakulta sociálních studií, statistik
2001 – 2004 VUT v Brně, FEKT, asistent
2004 – 2015 VUT v Brně, FEKT, odborný asistent

Účast na řešení projektů – jako řešitel

- Nové metody doplňování chybějících vzorků v audio datech mezinárodní projekt s NuHAG a ARI Rakousko, MŠMT, 2013–2014
- Podpora zapojení vědecko-výzkumných týmů do mezinárodní spolupráce v oblasti zpracování obrazových a zvukových signálů OPVK projekt, MŠMT, 2011–2014
- Optimální algoritmy přesného výpočtu waveletové transformace v reálném čase GAČR, 2006–2008

Klasifikace vědeckovýzkumných aktivit dle ISI Web of Knowledge

- Nalezených záznamů: 19
- Celkový počet citací: 8
- Počet citací bez autocitací: 5
- Citujících článků: 8
- Citujících článků bez autocitací: 5
- h-index: 1

Pedagogické aktivity

Pod dobu působení na ÚTKO FEKT podíl na kurzech: Základy počítačové sazby a grafiky, Multimediální a grafické procesory, Moderní počítačová grafika, Analýza signálů a soustav. Vedení přibližně 70 bakalářských a diplomových prací. Úspěšná obhajoba tří doktorandů (2009, 2012).

1 Úvod

Signály s tzv. *řádkou reprezentací* přitahují pozornost odborníků již bezmála třicet let, přičemž hlavní vlna zájmu přišla kolem přelomu tisíciletí. Název řádká reprezentace znamená, že daný signál je možné vyjádřit přesně či velmi dobře aproximovat lineární kombinací velmi malého počtu vektorů ze zvoleného reprezentačního systému.

Historické kořeny této tématické oblasti sahají do počátku 90. let 20. století [39, 10, 49]. Zájem komunity zpracování signálů o tuto oblast v poslední dekádě zažívá srovnatelný boom jako způsobil v 80. a 90. letech objev vynikajících vlastností vlnkové transformace. Paralelně ovšem lze vystopovat druhou větev, kterou rozvíjejí zejména statistici a lidé z komunity strojového učení a dolování dat. Hlavní dosud známé výsledky z teorie řídkých reprezentací na straně zpracování signálů byly publikovány v letech 2000 až 2006, přičemž tahouny oblasti jsou vesměs kapacity, které jsou známé již z pionýrské činnosti ve výzkumu vlnkové transformace. Hlavní teoretické výsledky i první aplikace publikovali vesměs matematici, což lze jednoduše vysvětlit tím, že toto zaměření vyžaduje dobré znalosti hned v několika matematických disciplínách současně.

Aplikací je dnes již nepřeborné množství, s převahou v oboru zpracování obrazu. Mezi nejvýznamnější aplikace namátkou patří efektivní komprese signálů [15], separace charakterově se lišících prvků v signálu [16], odšumování signálů, inverzní filtrace, superresolution [45], doplňování chybějících úseků signálu [15], zdánlivě paradoxní konstrukce tzv. fotoaparátu s jedním pixelem [14] a konstrukce nových typů analogově-digitálních převodníků [40, 9]. Dalšími příklady speciálního, nezvyklého užití tohoto přístupu je například analýza znečištění vzduchu [50] nebo hledání konkrétních změn v signálu [41]. Za nejatraktivnější aplikaci řídkých reprezentací však lze s jistotou označit tzv. komprimované snímání (compressed sensing) [21, 22, 17], které umožnilo obejít limity klasického shannonovského vzorkování a významně ovlivnilo i oblast teorie informace. Mezi hlavní aplikace zde patří biomedicína [36], nové metody radiolokace [19], optimalizace ekvalizace v bezdrátových OFDM kanálech [48], nebo korekční kódování v komunikačních technologiích [8].

Zájem se v poslední době částečně přesunul také k tzv. *nízkohodnostním reprezentacím*. To znamená, že signál lze uspořádat do matice, která má nízkou hodnotu (přesně či přibližně). Aplikace tohoto zaměření směřují k doplňování chybějících údajů do datových polí a předpovědi volby zákazníka [7], ale i zpracování videa, robustní analýze hlavních komponent [6], hyperspektrálnímu zobrazování [23] či zrychlení snímání v magnetické rezonanci [42, 13]. Teoretický aparát však zůstává velmi podobný jako u řídkých reprezentací.

V těchto tezích habilitační práce záměrně vynecháváme teoretické kapitoly (báze a framy, řídké reprezentace, komprimované snímání, proximální algoritmy) a zaměřujeme se na aplikace z této, již známé, teorie vycházející. Teoretická část vychází článků [43, 28, 27], dříve publikovaných autorem habilitační práce.

2 Doplnování chybějících dat do audiosignálu

V této kapitole se věnujeme aplikaci řídkých reprezentací signálu v problému doplnování chybějících dat do audiosignálu. Jedná se o situaci, kdy v jednorozměrném signálu jsou neznámé některé vzorky (např. díky poškození). Úkolem je tyto vzorky dopočítat, tak, aby bylo optimalizováno nějaké kritérium. Kromě obvyklého SNR to u audiosignálu bývá psychoakustický dojem posluchače.

Problém naznačeného druhu se vyskytuje v praxi často. Jako modelový, motivační příklad si představme úkol restaurování fonografických záznamů [37]. Záznamy byly pořízeny více než sto let zpět na voskové válečky. Úkolem restauračního procesu je záznamy digitalizovat a zvukově upravit pro kvalitnější poslech, transkripci či etnografickou analýzu. Předpokládáme, že lokace chybějících či poškozených vzorků je známá.

Vlastní přínos autora habilitace v této kapitole je soustředěn zejména v části 2.3, kde přejdeme od obvyklého modelu „obyčejné“ řídkosti k složitějším strukturám časově-kmitočtových koeficientů, čímž překonáme účinnost současných metod.

2.1 Formulace problému

Naším cílem je obnova signálu $y \in \mathbb{R}^N$, jestliže jej známe pouze částečně. Formálně toto omezené pozorování označíme jako $y^r = M^r y$, kde M^r je matice velikosti $(N - N^m) \times N$, vzniklá vypuštěním řádků z jednotkové matice příslušných neznámým vzorkům. Analogicky y^m bude zastupovat vektor neznámých koeficientů a M^m příslušnou matici. Problém nalezení odhadu \hat{y} za uvedených podmínek je přirozeně špatně podmíněný a má nekonečně mnoho řešení, dokud na hledaná data nevložíme nějaký dodatečný apriorní požadavek.

Pro jednoduchost předpokládáme jednokanálový audiosignál a také realistický předpoklad, že chybějící data (dále nazývány pouze *dírami*) tvoří jeden nebo více kompaktních úseků.

2.2 Dosavadní metody pro řešení problému

Z hlediska přístupu k problému je možné vystopovat dva hlavní proudy: starší metody vycházejí z autoregresních případně tzv. sinusoidálních modelů, novější metody jsou založeny na řídkých reprezentacích.

Přístupy jako [30] a [18] spoléhaly na přílehavost *autoregresního* (AR) *procesu* na zkoumaný signál. AR model je konstruován tak, že hodnotu pozorovaného signálu y v daném okamžiku lze předpovídat lineárně z předchozích hodnot:

$$y_i = \sum_{j=1}^k a_j y_{i-j} + u_i. \quad (1)$$

Zde a_j jsou váhy příslušné historickým hodnotám (*AR koeficienty*), u_i je náhodná chyba modelu. Číslo k představuje řád modelu, kdy současná hodnota y_i již nezávisí (alespoň ne přímo) na vzorcích starších než y_{i-k} . Odhad AR parametrů z posloupnosti dat patří mezi standardní statistické techniky [5]. Algoritmy většinou poskytují AR parametry, které mají vlastnost lineární predikce s minimální očekávanou kvadratickou odchylkou (MSE). Metody pracují, s malými obměnami, v základu s těmito body:

1. Odhad AR parametrů signálu z levého okolí díry.
2. Lineární predikce signálu v díře ve směru běhu času, ozn. \hat{y}^{left} .
3. Odhad AR parametrů signálu z pravého okolí díry, převráceného v čase.
4. Lineární predikce signálu v díře proti směru běhu času, ozn. \hat{y}^{right} .
5. Zkombinování dílčích dvou výsledků provedením jejich křížového prolnutí (cross-fade), kde odhady zleva a zprava jsou váhovány.

Metody jsou rychlé, lze je nasadit v reálném čase, a obdržíme s nimi poměrně dobré výsledky na signálech s dírami do délky trvání 20 ms. Selhávají však pokud jsou aplikovány na nestacionární signály [20, 31].

V článku [33] autoři pojmají přístup, kdy jsou v signálu nejprve identifikovány a separovány jednotlivé, tzv. sinusoidální komponenty. Nejedná se však o sinusové komponenty – každý dílčí separovaný signál je modelován jako proměnlivý v amplitudě a v kmitočtu, a tyto modulace jsou odhadovány pomocí AR modelu. Tedy modelován není přímo signál jako výše, dokonce ani jeho komponenty, nýbrž hyperparametry komponent; signál je pak možné z těchto hyperparametrů generovat. Metoda je schopna doplnit úspěšně signál až do délky jedné sekundy, takový výsledek ovšem lze dosáhnout jen pro velmi stacionární a neměnné signály jako jsou např. pomalé orchestrální pasáže. Později byla tato metoda rozšířena a zlepšena [35]. Metoda je velmi závislá na úspěšné separaci základních složek.

Většinu přirozených audiosignálů lze považovat za řídké (kompresibilní) ve vhodné časově-kmitočtové reprezentaci: $\mathbf{y} \approx \mathbf{D}\mathbf{x}$, $\|\mathbf{x}\|_0 \ll N$, kde \mathbf{D} představuje tuto reprezentaci ve formě slovníku, kde každý atom je umístěn v jednom sloupci. Pionýrská práce [2] využívá této skutečnosti, a funguje na jednoduchém principu:

1. odhadnout souřadnice ze známé části signálu
2. a posléze je použít k dopočítání signálu v díře.

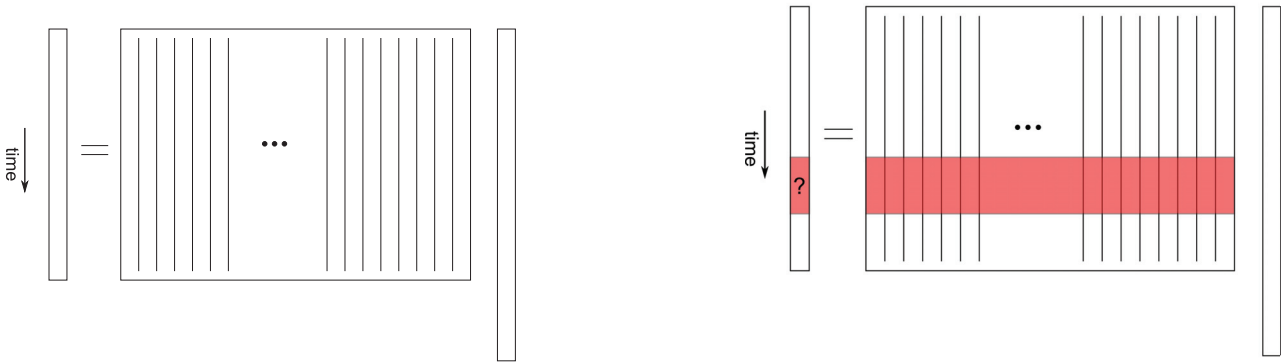
Tento přístup si, vzhledem k dobrým výsledkům a jednoduchosti algoritmu, rychle získal popularitu a byl následován některými vylepšeními zejména v oblasti desaturace audiosignálů [47, 1]. Formálně, souřadnice $\hat{\mathbf{x}}$ odhadujeme pomocí známých vzorků \mathbf{y}^r a redukovaného slovníku $\mathbf{D}^r = \mathbf{M}^r\mathbf{D}$: $\hat{\mathbf{x}} = f(\mathbf{y}^r, \mathbf{D}^r)$, zatímco rekonstrukce je triviální syntéza pomocí plného slovníku: $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{D}\hat{\mathbf{x}}$. Viz ilustraci na obr. 1.

Nabízí se např.

$$\hat{\mathbf{x}} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{vzhledem k } \mathbf{y}^r = \mathbf{D}^r\mathbf{x} \quad (2)$$

nebo

$$\hat{\mathbf{x}} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{vzhledem k } \|\mathbf{y}^r - \mathbf{D}^r\mathbf{x}\|_2 \leq \delta. \quad (3)$$



Obrázek 1: Vlevo ilustrace syntézy audiosignálu plným slovníkem, vpravo situace odpovídající neznámému bloku vzorků.

Tyto NP-těžké úlohy lze aproximativně řešit např. hladovými algoritmy jako v článku [2] nebo jinými. Naším přístupem je konvexní relaxace, tedy řešení ℓ_1 optimalizační úlohy.

2.3 Nová metoda založená na sociální řídkosti

Audio data nejsou přesně řídká, proto se odrazíme od varianty povolující odchylku, viz úlohu (3). Úlohu přeformulujeme do (ekvivalentního) neomezeného tvaru, s použitím ℓ_1 -relaxace

$$\hat{\mathbf{x}} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y}^r - \mathbf{D}^r \mathbf{x}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_1, \quad (4)$$

kde první člen penalizuje odchylku syntezeujícího modelu od známých dat \mathbf{y}^r , a druhý člen penalizuje souřadnice \mathbf{x} , které nejsou řídké. Parametr λ určuje poměr mezi těmito dvěma kritérii. Úloha (4) obsahuje konvexní funkce, první je diferencovatelná a druhá ne, a proto je možné pro nalezení $\hat{\mathbf{x}}$ použít proximální gradientní algoritmus, který v našem případě získá tento tvar:

Za počáteční bod bereme $\mathbf{x}^0 = (\mathbf{D}^r)^\top \mathbf{y}^r$ a v iteraci $k = 1, 2 \dots$ počítáme postupně:

- $\mathbf{z}^k = \mathbf{x}^{k-1} - t_k [(\mathbf{D}^r)^\top (\mathbf{D}^r \mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{y}^r)]$
 což odpovídá gradientnímu kroku s t_k .
- $\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^{k-1} + s_k (\operatorname{soft}(\mathbf{z}^k, \lambda) - \mathbf{x}^{k-1})$
 což odpovídá měkkému prahování koeficientů.

Iterace ukončíme, jakmile je splněno nějaké vhodné kritérium.

Na tomto místě zdůrazňujeme, že popsaný přístup zachází s každým jednotlivým koeficientem zvlášť, což kontrastuje s inovativním přístupem představeným níže. Mezi nevýhody regularizace pomocí $\|\mathbf{x}\|_1$ patří:

- Vytvoření nechtěného efektu tzv. *hudebního šumu*. To je efekt, kterým trpí i jiné metody. V rekonstrukci se objevují osamocené významné nebo naopak osamocené nevýznamné koeficienty, což má za následek vznik krátkých harmonických kmitů, což při poslechu působí jako melodický šum či bubláni.
- Rychlá ztráta energie koeficientů v rekonstrukci směrem dovnitř díry.

Řešení těchto potíží nabízí strukturovaná řídkost. Konkrétně v našem problému doplňování chybějících dat v čase je logické konstruovat skupiny Gaborových koeficientů horizontálně, tedy snažit se zachytit harmonické průběhy, a ty pak doplnit do signálu. Seskupení koeficientů zabrání popsaným artefaktům. Počet členů skupiny je vhodné volit tak, aby nosič takovéto skupiny koeficientů byl srovnatelně dlouhý s velikostí díry, jak bude prokázáno také dále v experimentu. Z důvodu stálosti (persistence) harmonických struktur je také přínosné, když se skupiny překrývají.

Zapišme tuto novou, vylepšenou rekonstrukční úlohu jako

$$\hat{\mathbf{x}} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y}^r - \mathbf{D}^r \mathbf{x}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_{S,w}, \quad (5)$$

kde textový index S zastupuje výše popsanou strukturu skupin vloženou na koeficienty \mathbf{x} , a w je případný vektor vah aplikovaný na každou jednotlivou skupinu (při prahování – výpočtu proximálního operátoru).

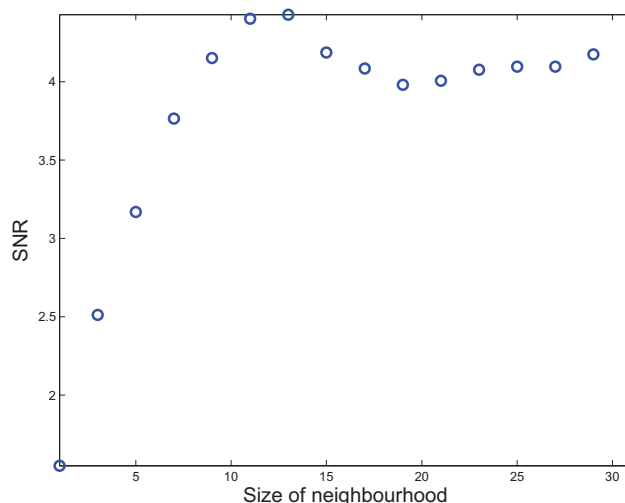
2.4 Experimenty a výsledky

Účelem prvního experimentu je demonstrovat, že sociální řídkost vhodně zavedená na reprezentační koeficienty přináší signifikantní zlepšení výsledků rekonstrukce ve srovnání s běžnými metodami. Jedná se o monofonní signál poprockové hudby, vzorkovací kmitočet 16 kHz. V signálu byla uměle vytvořená jedna díra délky 30 ms, což odpovídá 480 vzorkům. Jako slovník byl použit těsný Gaborův frame generovaný Hannovým oknem o délce 64 ms, posun mezi okny v čase byl 16 ms, pro každé okno 1024 rovnoměrně rozložených kmitočtových pásem. Skupiny byly vytvořeny jako čistě horizontální, neváhované, velikost skupin se pohybovala od jediného koeficientu (tedy nosič délky 64 ms) po 35 koeficientů (celkový nosič 624 ms).

Jako konkrétní numerický algoritmus pro řešení (5) byla použita zrychlená varianta uvedeného proximálního gradientního algoritmu, známá pod zkratkou FISTA [3], v případě strukturní řídkosti StructFISTA. Regularizační parametr λ zůstal konstantní přes všechny velikosti skupin.

Subjektivní pohled na časové průběhy rekonstrukcí ukazuje vzestup míry úspěšnosti pro rostoucí velikost skupin koeficientů. Nicméně pro příliš velké skupiny již kvalita pomalu klesá. To potvrzuje i vyhodnocení úspěšnosti pomocí SNR, viz obr. 2.

Druhý experiment je obsáhlejší a má za účel potvrdit, že použití strukturované řídkosti v úloze doplňování chybějících úseků není dílo náhody, jak by se mohlo myslet po předchozím experimentu s jediným signálem, ale je že obecně přínosné. Doplňováno bylo sto náhodně lokalizovaných úseků o délce přibližně 20 ms. Byla porovnávána řada algoritmů, z nichž polovina je založena na autoregresivním základu a druhá polovina je na řídkostní bázi, viz obr. 3. Již z grafů je jasně zřetelné, že řídkostní metody dávají kvalitnější výsledky. Potvrzují to i objektivní měření pomocí kritéria SNR, srovnávání pomocí subjektivního poslechu (nebyly však provedeny psychoakustické testy) i podle objektivního výpočetního kritéria PEMO-Q [29], které se na základě



Obrázek 2: Vývoj SNR rekonstrukce pro rostoucí délku skupiny koeficientů. Nejlepšího výsledku podle této metriky dosahují skupiny jedenácti a třinácti koeficientů, což odpovídá délce nosiče skupiny přibližně 250 ms.

psychoakustického modelu snaží o přiblížení vnímání člověka.

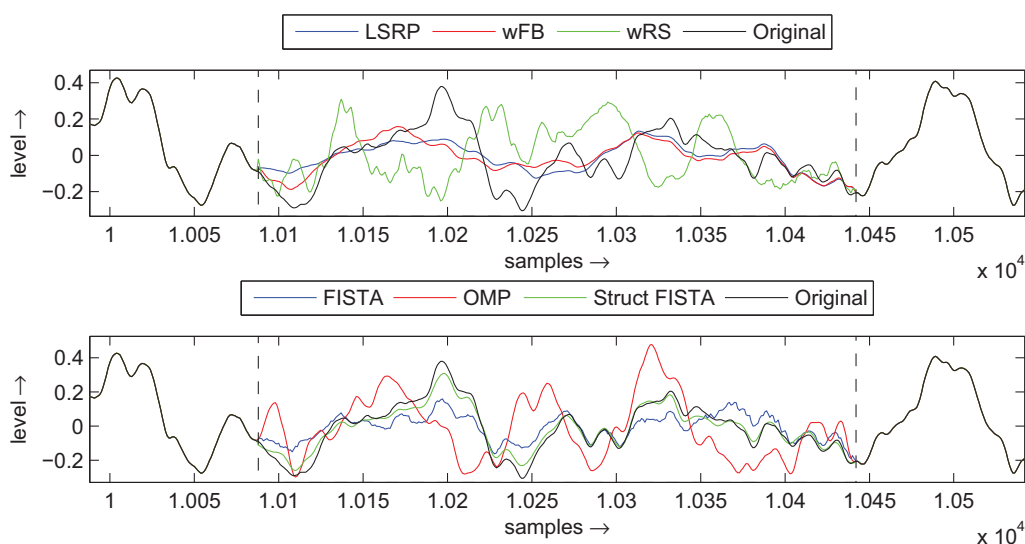
V obdobném experimentu, detailně publikovaném v článku [38], také strukturní řídkost jasně předčila ostatní metody, a jako nejlepší vyšla z experimentu metoda používající strukturní řídkost nazývaná *Persistent ellitist LASSO*, viz [32, 47].

3 Komprimované snímání v perfuzním zobrazování magnetickou rezonancí

Perfuzní zobrazování je experimentální lékařská diagnostická metoda. V současné době je snaha nalézt jeho využití v magnetické rezonanci, která nenese žádná rizika způsobená ionizujícím zářením, které je typické pro jiné modality jako jsou počítačová tomografie, pozitronová emisní tomografie, rentgen. Je prokázáno, že pomocí perfuzního zobrazování v magnetické rezonanci mohou být diagnostikovány onkologická a kardiovaskulární onemocnění a umožněna jejich efektivní léčba.

Pro přesnou perfuzní analýzu je však nezbytné mít *současně* vysoké časové i prostorové rozlišení, jinak totiž může dojít ke zkreslení odhadů parametrů popisujících vlastnosti tkáně, pomocí kterých se určuje diagnóza. Klasické způsoby měření (a rekonstrukce dat) v magnetické rezonanci zde ale naráží na fyzikální limity – je nemožné dosáhnout obou dostatečně vysokých rozlišení zároveň. Např. při perfuzním zobrazování lze snímat *jeden* řez tkání v maximálním rozlišení přibližně 100×100 px za 1–4 sekundy, pro přesnou perfuzní analýzu je však tato doba trvání na hranici přípustného, neboť prodloužení intervalu by znamenalo ztrátu schopnosti zachytit dostatečně jemně průběh koncentrace kontrastní látky v čase. To nemluvíme o výrazně pohodlnějším a přesnějším medicínském zpracování, pokud řezů sejmeme více najednou.

Proto se přímo nabízí možnost použít komprimované snímání pro perfuzní zobrazo-



Obrázek 3: Ukázka průběhů interpolací jednotlivých metod z druhého experimentu. Jednotlivé metody: Least-Squares Residual prediction (LSRP), Weighted Forward-Backward prediction (wFB), Weighted Repetitive Substitution (wRS), Orthogonal Matching Pursuit (OMP),

vání pomocí magnetické rezonance, které nám umožní zrychlení snímacího procesu. Pro úspěšnou následnou rekonstrukci dat je důležité mít apriorní informace o změřených datech. Zde budeme konkrétně využívat řídkost a nízkohodnotní strukturu.

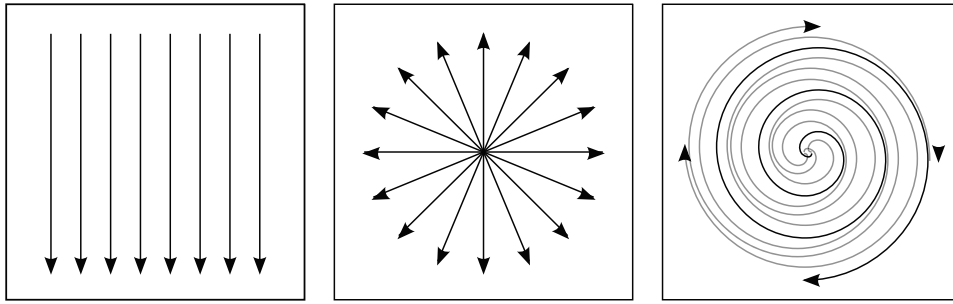
V této kapitole je nejprve vysvětlena fyziologická a fyzikální podstata problému, následně matematicky formulován snímací proces a rekonstrukční úloha. Nakonec ukážeme výsledky experimentů, srovnání obvyklých algoritmů s nově vylepšenými algoritmy. Vlastní přínos v této kapitole habilitační práce je soustředěn zejména

- v části 3.8, kde zhodnotíme empirické výsledky současných přístupů, poukážeme na jejich typické nedostatky a odůvodníme je,
- v části 3.9, ve které porovnáme teoreticky i prakticky dvě nejnadějnější, konkurenční rekonstrukční optimalizační modely, a
- v části 3.10, kde u jednoho z modelů zvýšíme jeho rekonstrukční efektivitu jeho rozšířením o penalizaci totální variací.

3.1 Fyzikální podstata zobrazování pomocí MR

Magnetická rezonance (MR) je technika, která využívá interakce silného magnetického pole s jádry vodíku, který je obsažen ve vodě. MR se používá v medicíně mj. k zobrazení požadovaných oblastí uvnitř lidského těla; potom mluvíme o tzv. *zobrazování pomocí magnetické rezonance* (MR imaging, MRI). Voda tvoří dvě třetiny lidského těla a z toho důvodu je MRI vhodné pro skenování měkkých tkání s výjimkou kostí, ve kterých není téměř žádná voda.

Po aplikaci silného magnetického pole je potřeba jádra „zviditelnit“ tím, že jsou excitována radiofrekvenčními (RF) pulzy, a poté můžeme naměřit jejich odezvu. Aby bylo možné rozlišit místa, ze kterých měřený signál pochází, musíme přidat další



Obrázek 4: Nejběžnější typy trajektorií v k -prostoru při snímání MRI dat. Zleva *kartézský*, *radiální* a *spirální*.

slabší magnetické pole – tzv. gradientní [36]. Hlavní kroky MR měření jsou níže jmenovány a nakonec shrnuty matematicky, abychom mohli exaktně formulovat snímací a rekonstrukční proces.

- Polarizace protonů statickým magnetickým polem.
- Excitace radiofrekvenčním (RF) pulzem. Radiofrekvenční pulz má na tkáňové protony dvojí účinek:
 - Větší množství protonů je orientováno antiparalelně k magnetickému poli, čímž dochází ke změně složky z vektoru magnetizace tkáně.
 - Fáze precesí se sjednotí, čímž vznikne příčná složka vektoru magnetizace.
- FID a relaxace. Protony se postupně dostávají do původního stavu a je zachycen indukovaný elektrický proud/signál FID (free induction decay).

Použitím samotného RF pulzu zobrazíme hustotu protonů v jednotlivých umístěních. Takto ovšem nemusíme zobrazit všechny požadované rozdíly v tkáních. K dosažení potřebného kontrastu se proto využívají složitější *pulzní sekvence*.

Při použití výše uvedených technik chybí v datech prostorová informace. Lokalizace informace je však v perfuzním zobrazování klíčová, a pro tyto účely se přidává další, tzv. gradientní pole, které způsobuje, že se kmitočet precese bude lineárně měnit v závislosti na prostorové poloze. Pokud budeme gradientní pole měnit, získáme tím různé *trajektorie* ve dvourozměrné kmitočtové rovině, nazývané v tomto oboru *k-prostor*. Nejčastěji používané typy trajektorií jsou schematicky zobrazeny na obr. 4. Ze zaznamenaného FID signálu a z těchto trajektorií již můžeme rekonstruovat 2D nebo 3D obrazy pomocí technik založených na inverzní Fourierově transformaci [36].

3.2 Matematický popis MRI

Gradientní pole $X(\mathbf{z})$ na pozici $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ můžeme zapsat ve tvaru $X(\mathbf{z}) = |X(\mathbf{z})|e^{-j\phi(\mathbf{z})}$, kde $|X(\mathbf{z})|$ je jeho amplituda a $\phi(\mathbf{z})$ fáze. Označíme-li $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^3$ gradient tohoto magnetického pole, kmitočet precese může být charakterizován vztahem

$$\omega(\mathbf{z}) = \kappa(B_0 + \langle \mathbf{G}, \mathbf{z} \rangle), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3, \quad (6)$$

kde B_0 je intenzita vnějšího statického magnetického pole a κ fyzikální konstanta. Pokud se gradient \mathbf{G} mění v čase, což zapíšeme jako zobrazení $\mathbf{G} : \langle 0, T \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3$,

fáze magnetizace $\phi(\mathbf{z}) = \phi(\mathbf{z}, t)$ je integrál

$$\phi(\mathbf{z}, t) = 2\pi\kappa \int_0^t \langle \mathbf{G}(\tau), \mathbf{z} \rangle d\tau, \quad (7)$$

kde $t = 0$ odpovídá času excitace RF pulzem.

Nyní definujeme funkci $\mathbf{k} : \langle 0, T \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3$ jako

$$\mathbf{k}(t) = \kappa \int_0^t \mathbf{G}(\tau) d\tau. \quad (8)$$

Přijímací cívka snímá signál, který odpovídá integrálu přes celý objem. Tedy zapíšeme

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^3} |X(\mathbf{z})| e^{-2\pi j \langle \mathbf{k}(t), \mathbf{z} \rangle} d\mathbf{z} = \mathcal{F}(|X|)(\mathbf{k}(t)), \quad (9)$$

kde $\mathcal{F}(|X|)(\xi)$ značí 3D-Fourierovu transformaci amplitudy $|X|$ magnetizace [22].

Jak bylo řečeno, v MRI můžeme také snímat jednotlivé řezy těla. Nejprve nastavíme gradientní pole na souřadnici z , které způsobí, že se rezonanční frekvence budou lineárně lišit podél této souřadnice. Když potom excitujeme protony úzkopásmovým RF pulzem, vybereme tím jeden řez, ve kterém Larmorovy kmitočty odpovídají kmitočtům RF pulzu. V takovém případě je trojrozměrná Fourierova transformace nahrazena dvojrozměrnou [25].

Naměřený MRI signál je tedy Fourierovou transformací prostorově závislé amplitudy $|X|$ magnetizace (obraz), která je podvzorkována na křivce $\{\mathbf{k}(t) : t \in [0, T]\} \subset \mathbb{R}^3$. Opakováním několika různých RF excitací dostaneme vzorky (diskrétní) Fourierovy transformace funkce $|X|$ podél různých křivek $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_L$ v \mathbb{R}^3 . Čas věnovaný měření je úměrný počtu L takových křivek, což je jedna z klíčových vlastností – nevýhod [22]. V dalším se budeme snažit o minimalizaci snímacího času, aniž bychom zasáhli do kvalitativních parametrů rekonstruovaného obrazu.

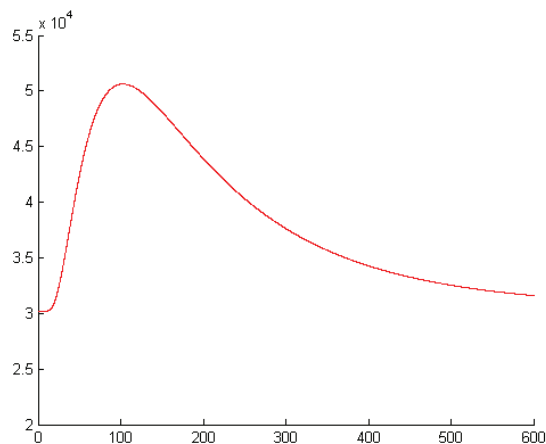
3.3 Fyziologická podstata perfuzního zobrazování

Pacientovi je nitrožilně podána vhodná kontrastní látka, tzv. *bolus*, ve formě injekce nebo infuze. Díky kardiovaskulárnímu systému je tato látka rozvedena do celého těla. Časové a prostorové rozložení této látky je přitom sledováno, obvykle v nějaké oblasti zájmu, což může být samostatný orgán nebo část orgánu nebo i samostatný voxel.

Záznamy časového průběhu koncentrace kontrastní látky v oblasti zájmu nazýváme *perfuzní křivky*. Následnou analýzou křivek získáme odhady tzv. perfuzních parametrů, které jsou pak použity pro diagnózu nebo sledování vývoje nemoci – oblast postižená nádorem bude vykazovat jiné perfuzní parametry než zdravá tkáň v okolí.

3.4 Lognormální model perfuzní křivky

Pro perfuzní křivky se používají tři základní typy modelů – matematické, prostorové a fyzikální; pomocí nich se odhadují perfuzní parametry [24]. Pro účely této práce



Obrázek 5: Lognormální křivka s parametry $t_0 = 7$, $c = 3,02 \cdot 10^4$, $S = 5,25 \cdot 10^6$, $\mu = 5,18$ a $\sigma = 0,62$.

jsou perfuzní křivky modelovány matematicky, pomocí křivky hustoty lognormálního rozdělení, známé ze základních kurzů statistiky. Tento model popisuje koncentraci kontrastní látky v čase:

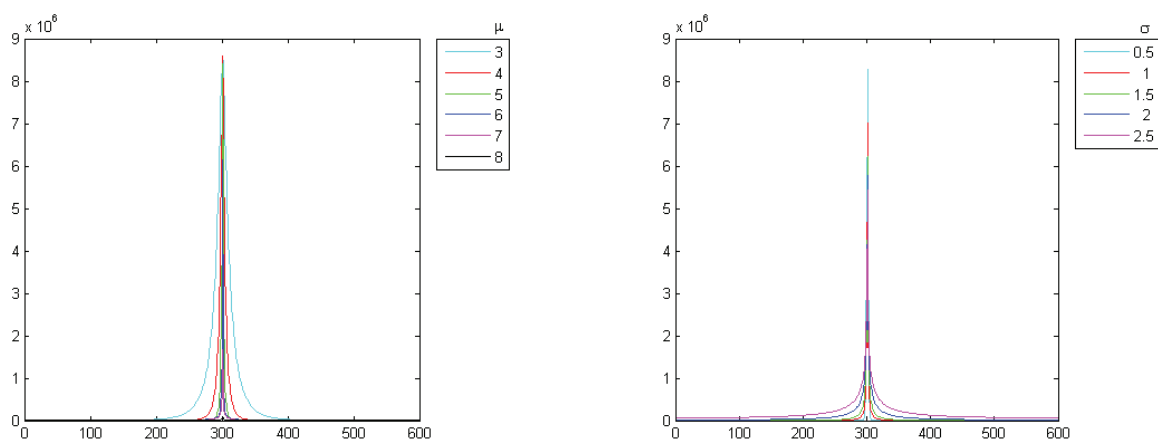
$$f(t) = \begin{cases} c & t \leq t_0 \\ c + \frac{S}{(t-t_0)\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(t-t_0)-\mu)^2}{2\sigma^2}} & t > t_0, \end{cases} \quad (10)$$

kde c představuje konstantní hodnotu bez použití kontrastní látky, t_0 zpoždění bolusu mezi místem podání a oblastí zájmu, S plochu mezi konstantní hodnotou c a křivkou a μ a σ jsou obvyklé parametry lognormálního rozdělení. Na obr. 5 je znázorněn lognormální model perfuzní křivky pro konkrétní volbu parametrů.

Ačkoli je tento model založen na vizuální podobnosti reálných a modelových křivek, může také být odvozen z distribuce průtoku krve a kinetiky kontrastní látky pomocí stochastického modelu s využitím binárních fraktálních sítí [44].

Pro odhadnutí parametrů modelu z průběhu křivky nejprve odhadneme posunutí c jako průměr z několika prvních vzorků. Poté všechny vzorky snížíme o tuto hodnotu. Zpoždění t_0 potom můžeme dostat jako první vzorek větší než 10 procent maximální hodnoty. Dále plochu pod křivkou S spočítáme pomocí numerické integrace. Na odhad parametrů μ a σ lze použít metodu maximální věrohodnosti.

Na obr. 6 je znázorněno amplitudové spektrum lognormální křivky pro různá μ a naopak pro různá σ . Při výpočtu spektra byly ostatní parametry zvoleny takto: $t_0 = 1$, $S = 8,6 \cdot 10^6$, $c = 0$. Z této empirické analýzy plyne, že spektrum perfuzních křivek můžeme považovat za (téměř) řídké, poněvadž velké množství jeho koeficientů se blíží nule.



Obrázek 6: Amplitudové spektrum perfuzní křivky: vlevo pro různá μ při $\sigma = 0,7$; vpravo pro různá σ při $\mu = 5,5$.

3.5 Fantom perfuzního zobrazování

Abychom ověřili uvažovaný přístup zrychlení, nejprve vytvoříme fantom. Poté metody ověříme i na reálných perfuzních datech.

Základ fantomu je tvořen modifikovaným Shepp-Loganovým fantomem [46], který je ve své původní podobě dostupný v Matlabu. Fantom představuje obraz – jeden uměle vytvořený řez mozku. Je tvořen celkem deseti elipsami, z nichž se některé překrývají a tedy ovlivňují intenzitu pixelů. Perfuzní fantom vzniká tak, že bereme jeden Shepp-Loganův fantom pro každý čas měření, přičemž intenzita pixelů je určena hodnotami perfuzních křivek vytvořených pomocí lognormálního modelu (viz část 3.4).

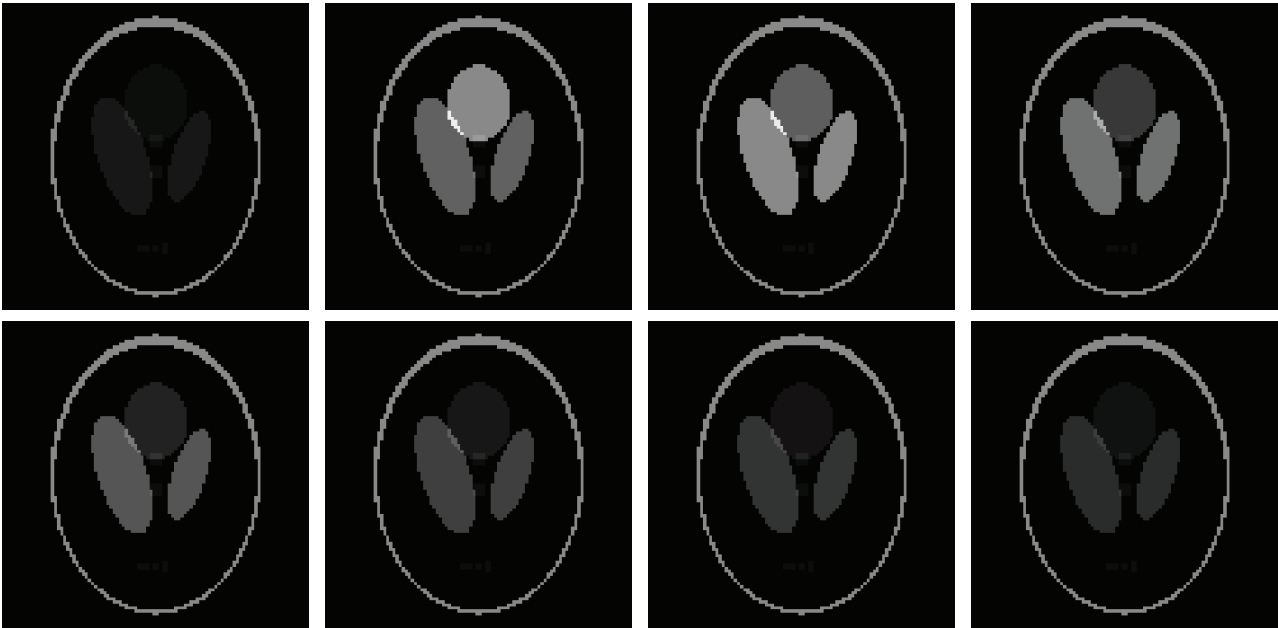
Pro představu, sekvenci snímků fantomu uvádí obrázek 7.

Fantom perfuzního zobrazování lze chápat jako trojrozměrný datový tenzor, nebo prostě jako videosekvenci. Tento tenzor před použitím přeskupíme do obyčejné dvojrozměrné matice, kterou označíme M , a to tak, že každý jednotlivý snímek přeskládáme do sloupcového vektoru a tyto sloupce vytvoří, zleva doprava, novou matici, se kterou se následně pracuje [42]. Jednotlivé řádky takto vytvořené matice tedy obsahují přímo perfuzní křivky.

3.6 Sestavení měřicích masek

Připomeňme, že v MRI je signál měřen přímo v kmitočtové oblasti. Měnicí se gradientní pole určuje trajektorii v k -prostoru, ty však nemohou být libovolné kvůli fyzikálním a fyziologickým omezením. V dnešních systémech jsou gradienty limitovány svojí maximální amplitudou ($|G| < G_{\max}$) a maximální rychlostí jejich náběhu ($|\frac{dG}{dt}| < S_{\max}$).

Zjednodušeně, každé měření představuje přímo jeden Fourierův koeficient z dvourozměrného pole. V jazyku komprimovaného snímání to znamená, že měřicí matice je fixní a představuje přímo Fourierovu transformaci. Pro účinné komprimované snímání



Obrázek 7: Fantom ve vybraných časech. Je zobrazen první a pak každý čtrnáctý snímek.

tedy zbývají tyto cesty:

1. Konstrukce vhodných trajektorií v diskretizovaném k -prostoru.
2. Nalezení reprezentačního systému, jež má malou vzájemnou koherenci s měřicí maticí.
3. Nalezení reprezentačního systému, který poskytuje řídkou reprezentaci obrazového signálu.

Jelikož poslední dva požadavky jsou do značné míry protichůdné, zaměříme se nyní na konstrukci trajektorií.

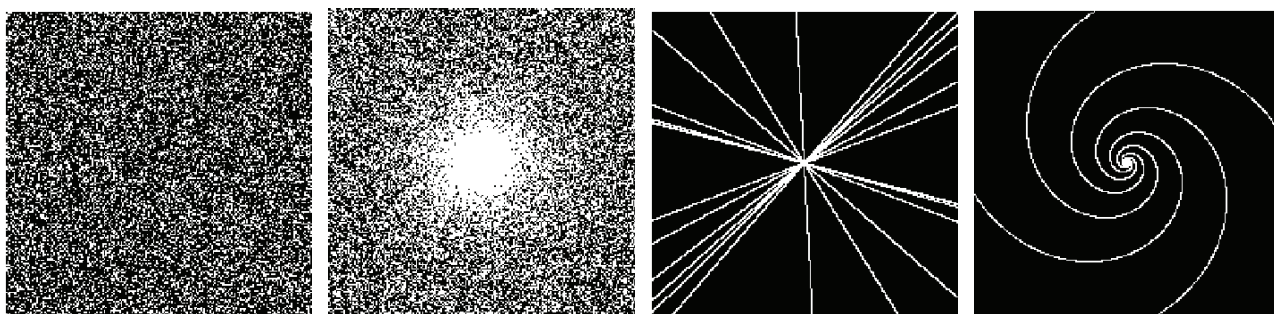
3.6.1 Trajektorie

Na obr. 4 byly prezentovány nejběžnější trajektorie v k -prostoru. V diskrétním chápání můžeme argumentovat, že každé trajektorii odpovídá binární maska (matice nul a jedniček), která informuje, který bod k -prostoru byl změřen (1) a který ne (0).

Pomocí kartézského snímání tak logicky můžeme sejmout všechny body, což vede na perfektní rekonstrukci bez aliasingu. Cenou za to je však velmi nízká rychlost snímání, která je nepřijatelná pro některé aplikace. Proto se kartézské snímání nezřídka podvzorkuje tak, že se snímají se jen některé úsečky. Rekonstrukce běžnými technikami však již zákonitě nese nepříjemné artefakty [36, 26].

Radiální trajektorie provádějí podvzorkování k -prostoru směrem od středu (nulový kmitočet) ven, a v měření převládají kruhově soustředěné nízké kmitočty. Podobně je tomu u spirálních, které jsou konstruovány často tak, aby jejich hustota kolem středu byla vyšší než hustota na okrajích. To je motivováno faktem, že běžné obrazy nesou významně více energie na nízkých kmitočtech.

Na obr. 8 vidíme masky (trajektorie), jež byly použity v simulacích. Tyto masky se



Obrázek 8: Masky měřicích matic: zleva náhodná, nerovnoměrně náhodná, radiální náhodná a spirální. Bílá barva představuje jedničku a černá nulu.

aplikují (násobením po složkách) na Fourierovy koeficienty jednotlivých snímků (tedy na vzorky k -prostoru) – na pozici, kde je jednička, je Fourierův koeficient získán, jinde není. Dvě uvedené náhodné masky přirozeně nemohou vyhovovat fyzikálním a fyziologickým limitům a v reálném měření je nelze sestavit. My je však používáme v simulacích, abychom ověřili asymptotické výsledky publikované jinými autory (víme z předchozích kapitol, že náhoda nám usnadňuje analýzu chování metod).

3.7 Metody pro rekonstrukci signálu z naměřených dat

V této části uvedeme některé postupy pro zrychlené měření perfuzního MRI. Připomínáme, že komprimované snímání je možné pouze za podmínky, že data odpovídají nějakému slabšímu či silnějšímu předpokladu. Bez toho je nerealistické očekávat dobrou rekonstrukci z komprimovaných měření.

3.7.1 L&S-model využívající nízkohodnostní strukturu a řídkost

Tento model, použitý v článku [34], je inspirován novým přístupem k aproximaci dat, který obvykle nese název robustní analýza hlavních komponent [6]. V aplikaci pro MRI je využit obdobný přístup a uvažuje se model, který pracuje se dvěma realistickými předpoklady o perfuzních datech, tak jak byla představena v předchozím textu:

- perfuzní křivky mají sobě podobný průběh v rámci jednoho typu tkáně, přičemž různých tkání v řezu je jen několik,
- perfuzní křivky jsou hladké, neobsahují náhlé změny.

S těmito předpoklady korespondují regularizační členy následně použité v rekonstrukční úloze, a to:

- nukleární norma jako přiblížení zřejmé nízkohodnostní struktury, kterou pozorujeme v přeskládaných obrazových datech,
- norma ℓ_1 aplikovaná na každou jednotlivou perfuzní křivku ve spektrální oblasti jako přiblížení řídkosti spektra, tedy malý počet významných Fourierových koeficientů, viz obr. 6.

Oba požadavky na data klademe současně, odtud označení *L&S*.

Rekonstrukci formulujeme jako konvexní optimalizační úlohu

$$\operatorname{argmin}_{\mathbf{M}} \frac{1}{2} \|\mathbf{EM} - \mathbf{Y}\|_{\mathbb{F}}^2 + \lambda_L \|\mathbf{M}\|_* + \lambda_S \|T\mathbf{M}\|_1. \quad (11)$$

Hledá se taková matice \mathbf{M} , která se ve Fourierově doméně příliš neodchyluje od naměřených perfuzních dat \mathbf{Y} , a zároveň má nízkou hodnotu (malý počet nenulových singulárních čísel) a řídká spektra v řádcích. Matice \mathbf{Y} obsahuje perfuzní data ve Fourierově doméně, tedy tak, jak je poskytuje měření na reálném MR skeneru – jedná se o soubor 2D spekter, přeskládaných do jedné matice. Dále E představuje operátor podvzorkované 2D Fourierovy transformace – ten tedy koresponduje s trajektorií v k -prostoru, zvolenou při měření – a aplikuje se na 2D spektrum každého snímku v datovém tenzoru. Nakonec T je operátor, který aplikuje 1D-Fourierovu transformaci na každý řádek matice \mathbf{M} a vše seřadí do jediného vektoru. Konstanty λ_L, λ_S slouží k balancování míry regularizace vůči sobě a vůči datovému členu.

3.7.2 L+S model využívající nízkohodnostní strukturu a řídkost

V článku [42] je použit tzv. L+S model, který autoři odvozují a používají nejenom pro perfuzní data, ale také pro jiné aplikace v MRI. L+S model staví na obdobných předpokladech jako model L&S, ale vylepšení je v tom, že (hledanou) matici perfuzních dat si představuje jako součet dvou matic, a to matice s nízkou hodnotou \mathbf{L} a matice \mathbf{S} , která má řídké řádkové spektrum. Tato dekompozice dává příčinu označení L+S. Rozdělením na složku „pozadí“ a „dynamickou“ autoři dosáhli v určitém směru zlepšení oproti L&S modelu.

Rekonstrukční úloha má tvar

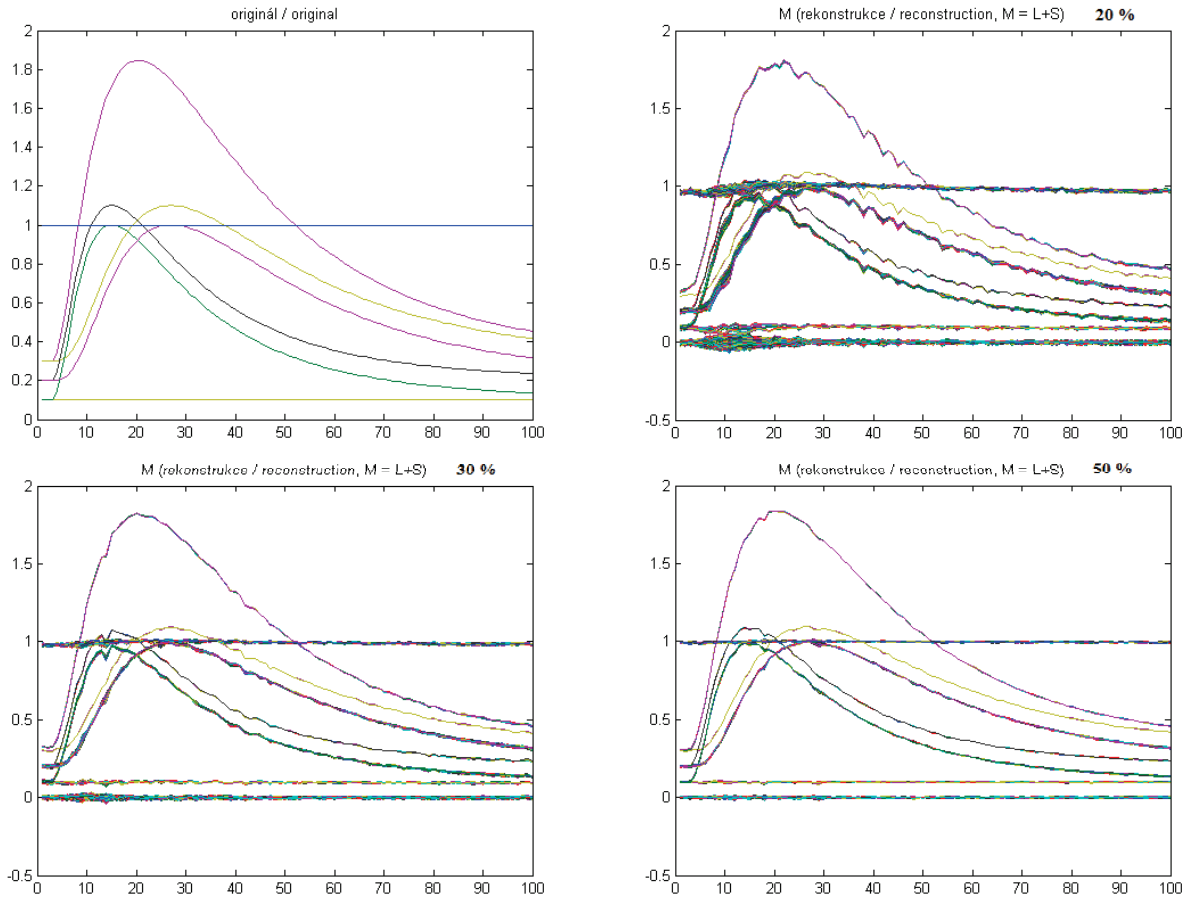
$$\operatorname{argmin}_{\mathbf{L}, \mathbf{S}} \frac{1}{2} \|\underbrace{E(\mathbf{L} + \mathbf{S})}_{\mathbf{M}} - \mathbf{Y}\|_{\mathbb{F}}^2 + \lambda_L \|\mathbf{L}\|_* + \lambda_S \|T\mathbf{S}\|_1, \quad (12)$$

kde \mathbf{L} a \mathbf{S} jsou hledané matice a ostatní symboly jsou shodné s popisem modelu L&S. První člen v účelové funkci obsahuje eukleidovskou normu a vynucuje malou odchylku rekonstrukce $\mathbf{M} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ od naměřených dat (odchylku však připouštíme, např. vlivem šumu). Druhý člen s nukleární normou penalizuje matice \mathbf{L} s vysokou hodnotou, třetí člen s ℓ_1 normou penalizuje perfuzní křivky, které mají příliš husté spektrum.

3.7.3 Numerické řešení

Jelikož vidíme, že úloha (12) je rozšířením (11), uvedeme postup řešení pro složitější případ. Všechny členy jsou konvexní (nikoliv však ryze konvexní), jedná se tudíž o konvexní optimalizaci, a můžeme využít známých proximálních algoritmů, konkrétně dopředně-zpětný algoritmus (forward-backward).

Lipschitzovská konstanta pro datový člen je $\beta = 2$, a pro konvergenci proximální gradientní metody je tedy potřeba zvolit krok $t < 2/\beta = 1$. V simulacích byl použit



Obrázek 9: Originální perfuzní křivky fantomu a totéž po rekonstrukci při měnících se počtech naměřených koeficientů s využitím náhodné masky (použito $\lambda_L = 2$ a $\lambda_S = 0,5$).

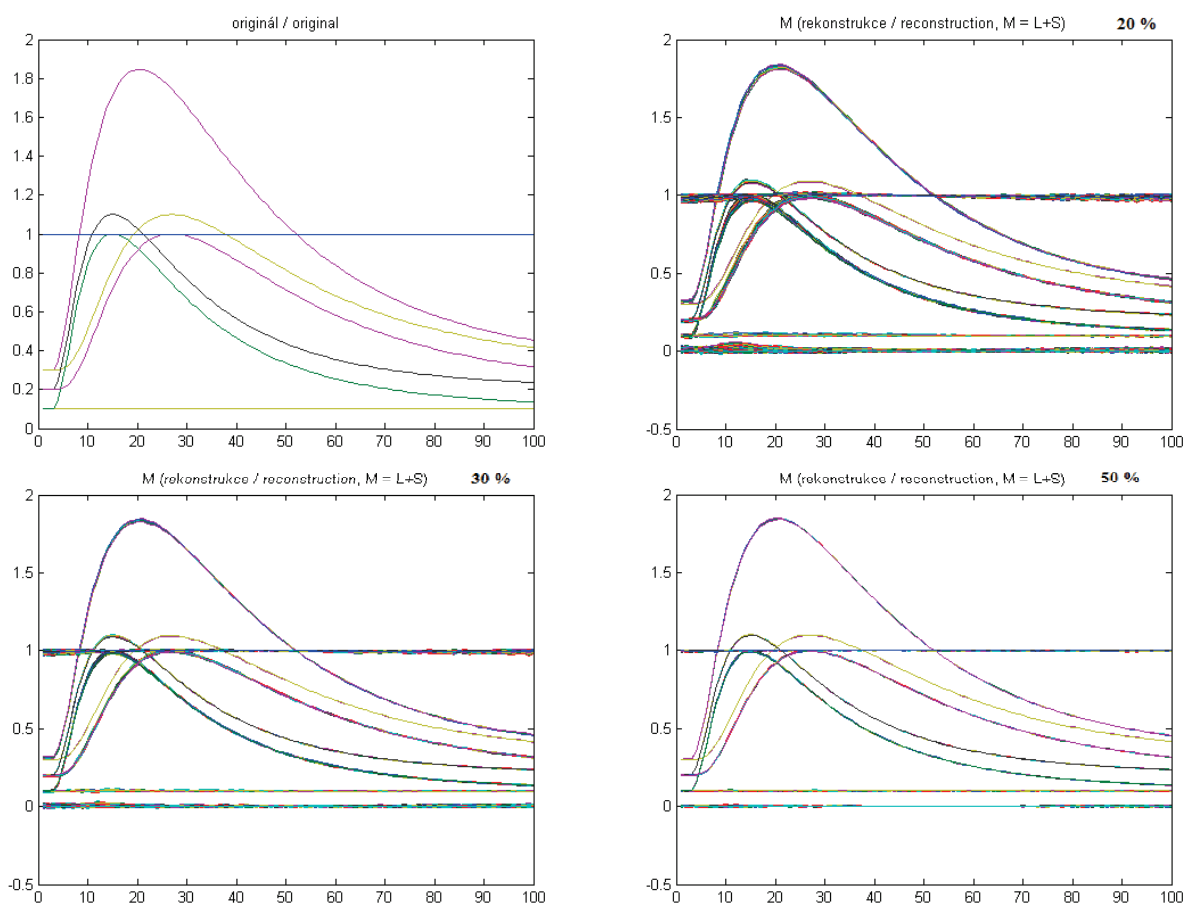
(v čase neměnný) krok $t = 1$, aniž by byla pozorována ztráta konvergence. Výsledný algoritmus tedy zní:

Za počáteční bod bereme $\mathbf{M}^0 = E^* \mathbf{Y}$ a $\mathbf{S}^0 = \mathbf{0}$. V iteraci $k = 1, 2 \dots$ počítáme postupně:

- $\mathbf{L}^k = \text{svt}(\mathbf{M}^{k-1} - \mathbf{S}^{k-1}, \lambda_L)$
To odpovídá proximálnímu operátoru pro nukleární normu.
- $\mathbf{S}^k = T^{-1}(\text{soft}(T(\mathbf{M}^{k-1} - \mathbf{L}^k), \lambda_S))$
To odpovídá měkkému prahování ve Fourierově doméně a následný návrat.
- $\mathbf{M}^k = \mathbf{L}^k + \mathbf{S}^k - E^*(E(\mathbf{L}^k + \mathbf{S}^k) - \mathbf{Y})$
což odpovídá gradientnímu kroku s $t = 1$.

3.8 Výsledky rekonstrukcí L+S modelu a jejich diskuze

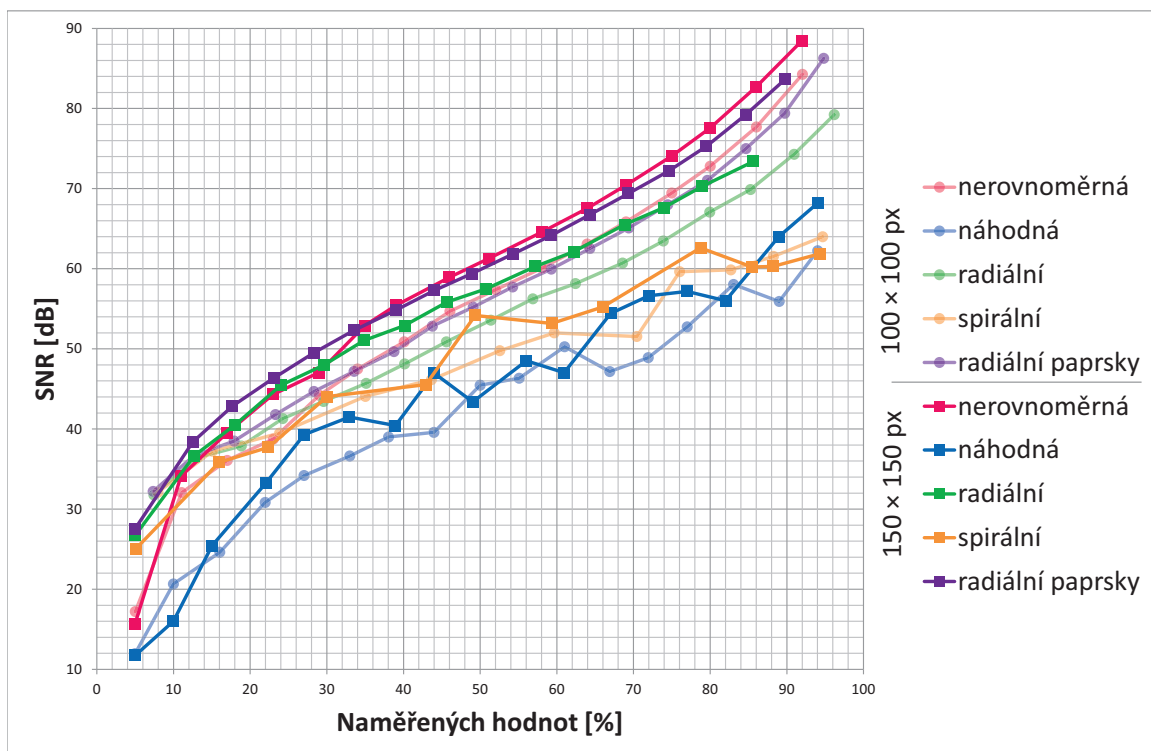
Porovnání úspěšnosti rekonstrukce pro různé poměry měřených koeficientů je na obr. 9 pro náhodnou masku a na obr. 10 pro masku typu radiální paprsky. Je zřejmé a pochopitelné, že kvalita rekonstrukce klesá se snižujícím se počtem koeficientů. Všimněme si však zároveň, že např. pro 20 % koeficientů je kvalita vyšší u radiální trajektorie.



Obrázek 10: Originální perfuzní křivky fantomu a totéž po rekonstrukcích s využitím masky typu radiální paprsky (použito $\lambda_L = 2$ a $\lambda_S = 0,5$).

Jednotlivá měření a rekonstrukce pomocí L+S modelu byla provedena pro velké množství kombinací parametrů a typů masek. Úspěšnost rekonstrukce je ukázána na obr. 11, přičemž pro kvantifikování úspěšnosti bylo použito kritérium odstupů signálu od chyby (SNR).

Z grafu je patrné, že nejlepších výsledků dosahuje při nižším počtu naměřených koeficientů (přibližně do 35 %) maska typu radiální paprsky a při vyšším počtu naměřených dat nerovnoměrná náhodná maska. Jen málo horší je radiální maska a při malém počtu měřených koeficientů také spirální maska. Rekonstrukce dosahuje celkově lepších výsledků pro rozměrnější fantom. Nejhorší výsledky přináší trajektorie odpovídající náhodnému podvzorkování. Je to způsobeno tím, že to vybírá měřené hodnoty rovnoměrně v celém k-prostoru, zatímco ostatní druhy masek mají větší koncentraci měřených vzorků v počátku k-prostoru, kolem stejnosměrné složky, kde spektrum obvyklých obrázků nese vyšší hodnoty koeficientů (při jejich naměření se proto dopustíme menší chyby a tedy lepší aproximace ve smyslu SNR). V grafu lze také pozorovat, že zvyšování množství koeficientů u spirální trajektorie nedochází k tak výraznému zvyšování SNR jako u náhodného či radiálního, což je dáno tím, že spirály nevybírají vzorky, které se nacházejí v „rozích“ k-prostoru.



Obrázek 11: Úspěšnost rekonstrukce v závislosti na procentu měřených koeficientů pro různé trajektorie a dvě velikosti fantomu ($\lambda_L = 2$ a $\lambda_S = 0,5$).

Co se týká subjektivního hodnocení rekonstrukce (což bude důležité např. z pohledu lékaře), zdají se vyhovující rekonstrukce od SNR 36 dB. U masky typu radiální paprsky by tedy stačilo vzít přibližně 10 % vzorků pro fantom 150krát 150 px a 12 % pro fantom 100krát 100 px. Naopak při použití náhodné masky (připomínáme, že to v našem kontextu není realistické) by bylo potřeba alespoň 25 %, resp. 30 % koeficientů.

3.9 Srovnání modelů L&S a L+S

Z hlediska srovnání kvality a rychlosti výpočtu u prezentovaných dvou modelů, lze konstatovat [12], že při shodně nastavených parametrech dosahuje L&S model nižšího SNR než L+S model, ale pokud by parametry u obou modelů byly nastaveny takovým způsobem, že by výpočet trval stejnou dobu, dosahuje použití L&S modelu lepšího SNR než konkurenční model. Jinými slovy, za kvalitu L+S rekonstrukce musíme zaplatit zdatelně delším čekáním na výsledek.

Při nízkém počtu naměřených koeficientů a určité kombinaci parametrů dochází k jevu, že rekonstruované perfuzní křivky nejsou hladké, viz např. obr. 9. To je společné pro oba modely. Takové výsledky však odporují očekávanému fyzikálnímu a fyziologickému průběhu, neboť koncentrace bolusu ve tkáni nemůže opakovaně rychle stoupat a zase klesat. Spíše se očekává, že křivka má pouze jeden náběh a následné odeznění. Tím se dostáváme ke klíčové slabíně obou představených modelů, které nehladkost perfuzních křivek penalizují členem $\|TM\|_1$, resp. $\|TS\|_1$, tedy tlačí re-

konstrukci směrem ke křivkám, jež mají řídké kmitočtové spektrum. Bohužel křivky obsahující rychlé oscilace tuto podmínku splňují. Modely by proto bylo vhodné doplnit tak, aby se v rekonstrukcích oscilace nevyskytovaly.

To můžeme udělat např.

- zesílenou penalizací vysokých kmitočtů použitím váhového operátoru, $\|WTM\|_1$,
- použitím jiného regularizeru vynucujícího hladkost křivek, např. kvadratický Tichonovův regularizer gradientu [4] atd.

V části 3.10 je popsán ještě jiný způsob, kdy hladkost křivky vynutíme pomocí totální variace (která by v ideálním bezšumovém případě měla být rovna dvojnásobku rozdílu minima a maxima křivky).

3.10 L+S model s 1D totální variací

K modelu je jednoduše připojen další penalizační člen obsahující 1D totální variaci všech perfuzních křivek, tedy účelovou funkci zapíšeme jako

$$\min_{\mathbf{L}, \mathbf{S}} \frac{1}{2} \left\| \underbrace{E(\mathbf{L} + \mathbf{S})}_{\mathbf{M}} - \mathbf{Y} \right\|^2 + \lambda_L \|\mathbf{L}\|_* + \lambda_S \|\mathbf{TS}\|_1 + \lambda_{TV} \sum_i \left(\sum_j |m_{i,j+1} - m_{i,j}| \right). \quad (13)$$

Pro nalezení řešení opět použijeme proximální gradientní metodu, kdy do algoritmu je přidán úkon výpočtu proximálního operátoru pro TV-normu. Jelikož se jedná o sérii 1D totálních variací, je pro tento účel možno využít rychlý neiterativní algoritmus [11].

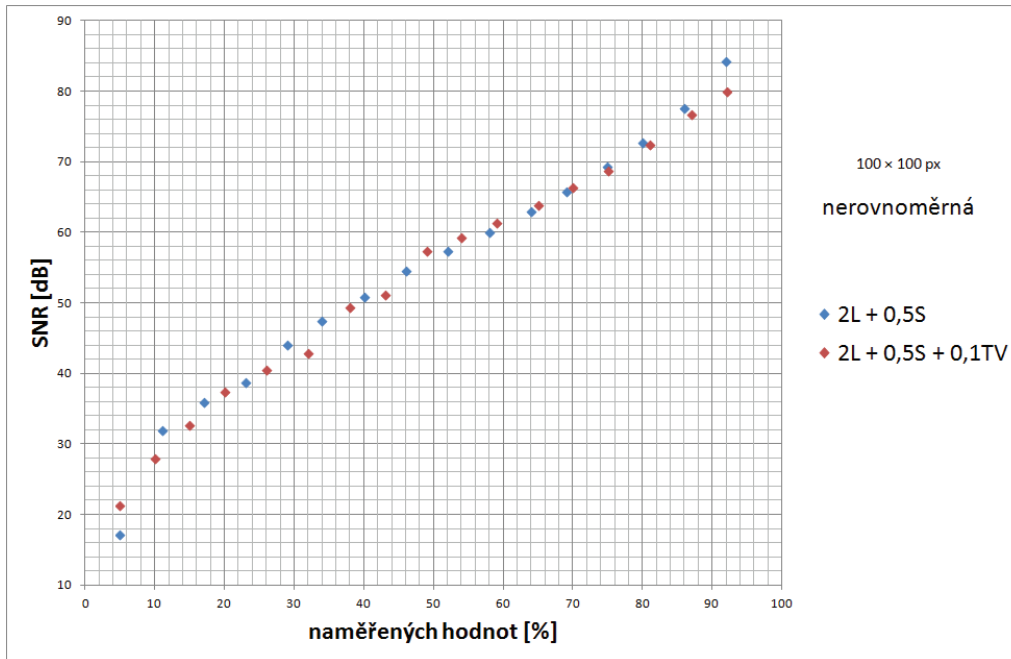
Porovnání tohoto vylepšení s L+S modelem je na grafech 12, 13, 14 a 15. Mírné zlepšení oproti předchozímu modelu nastalo u radiální masky a masky typu radiální paprsky při naměření 15–50 % hodnot a také u spirální masky při 20–70 %, což tedy naplnilo očekávání. U náhodné nerovnoměrné masky totální variace překvapivě zlepšení nepřinesla.

3.11 Použití na reálných datech

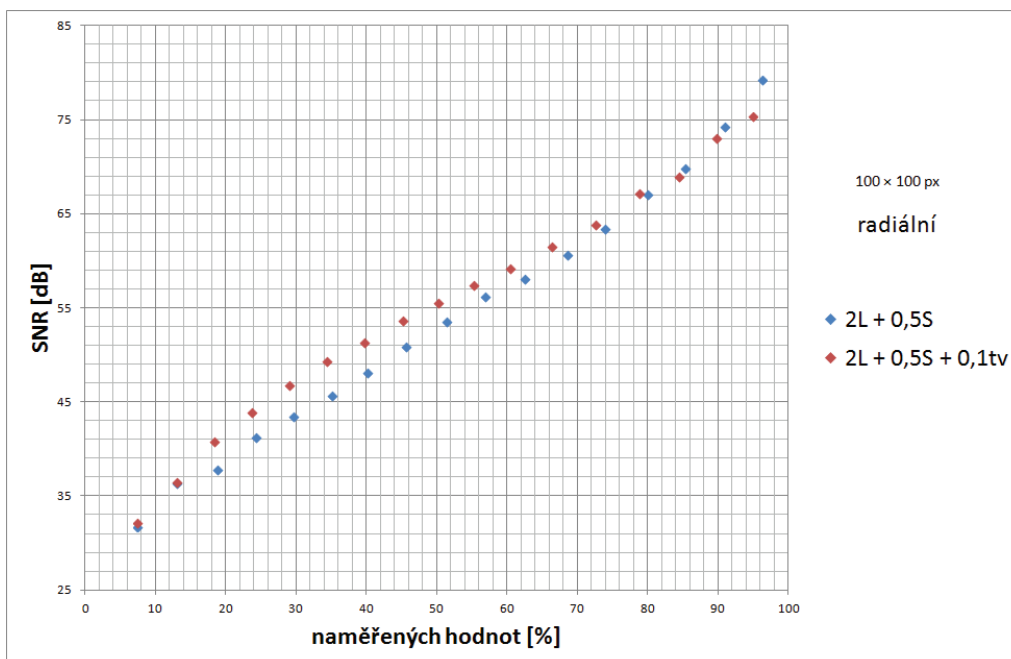
Nakonec byly výše uvedené metody testovány na reálných datech. Data poskytl Ústav přístrojové techniky AV ČR.

Jedná se o perfuzní data získaná snímáním řezů mozku myši v čase po aplikaci kontrastní látky. Jednotlivé dvojrozměrné snímky mají velikost 96×128 pixelů. Celkový počet snímků je 600, jeden snímek je pořízený přibližně za 4 sekundy. Protože se v MRI převážně používají snímky čtvercového rozměru, toolbox vytvořený pro účely těchto analýz a testování [12] je omezen na čtvercové snímky. Pro účely výpočtů bylo využito pouze střední části snímku, tedy velikosti 96 krát 96 pixelů.

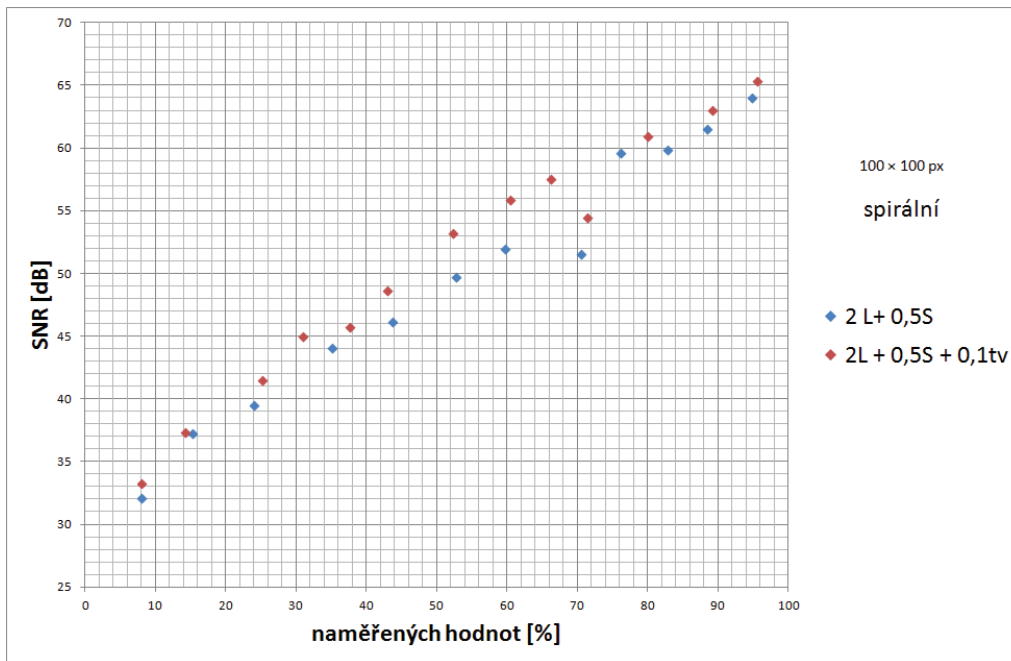
Je dobré doplnit, že tato data byla získána kompletním kartézským vzorkováním k-prostoru pro každý snímek – to znamená, že můžeme pohodlně sledovat, jaký mají



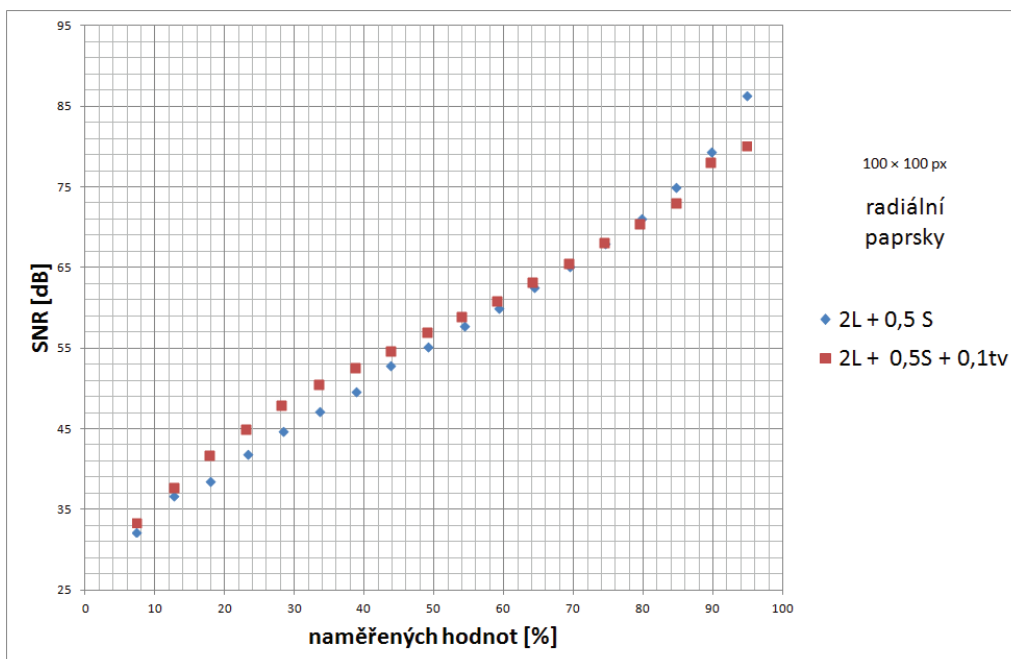
Obrázek 12: Porovnání úspěšnosti rekonstrukce L+S metody s dodatečnou 1D TV pro nerovnoměrnou náhodnou masku. Parametry $\lambda_L = 2$, $\lambda_S = 0,5$ a $\lambda_{TV} = 0,1$.



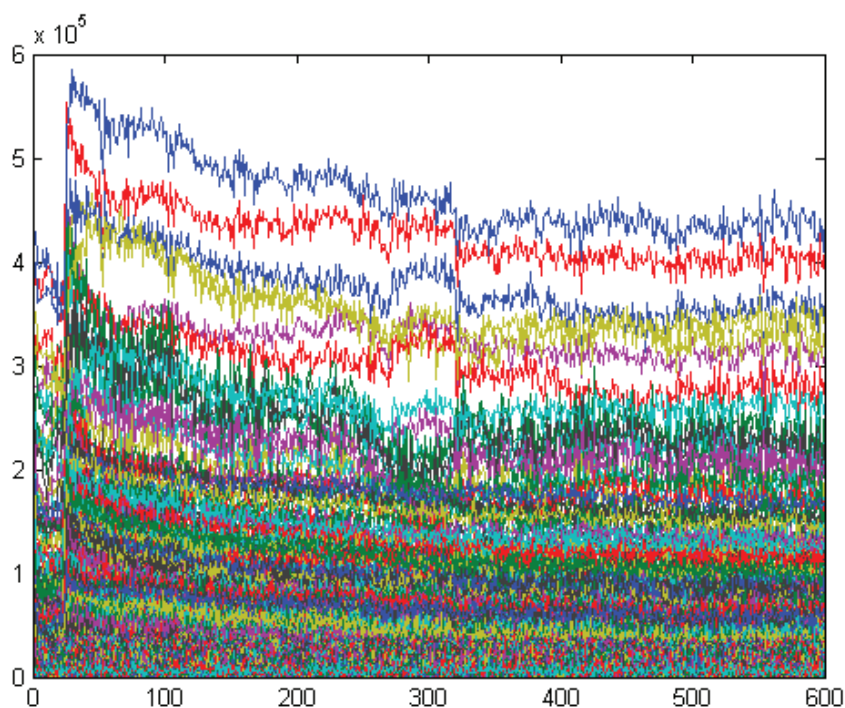
Obrázek 13: Porovnání úspěšnosti rekonstrukce L+S metody s dodatečnou 1D TV pro radiální masku, parametry $\lambda_L = 2$, $\lambda_S = 0,5$ a $\lambda_{TV} = 0,1$.



Obrázek 14: Porovnání úspěšnosti rekonstrukce L+S metody s dodatečnou 1D TV pro spirální masku, parametry $\lambda_L = 2$, $\lambda_S = 0,5$ a $\lambda_{TV} = 0,1$.



Obrázek 15: Porovnání úspěšnosti rekonstrukce L+S metody s dodatečnou 1D TV pro masku typu radiální paprsky, parametry $\lambda_L = 2$, $\lambda_S = 0,5$ a $\lambda_{TV} = 0,1$.



Obrázek 16: Perfuzní křivky myši, vykresleny najednou pro všechny pixely.

jednotlivé metody podvzorkování vliv na rekonstrukci a zejména je porovnat. Je však také dobré dodat, že poskytnutá data jsou už snímky v prostorové doméně, tedy po inverzní Fourierově transformaci. Pro právě zmíněné účely tedy musíme uměle provést dopřednou 2D Fourierovu transformaci v každém snímku.

Vývoj perfuzních křivek v čase je na obr. 16. Odsud je patrné, že perfuzní křivky už nemají ideální modelový průběh.

Pro komprimované snímání byla v k -prostoru použita maska typu radiální paprsky, která se v simulacích ukázala jako nejlepší z realizovatelných. Bylo použito 100 polopřímek, což představuje přibližně 36 % možných měření. Pomocí L+S modelu se podařilo dosáhnout SNR 39,17 dB a pomocí L&S modelu SNR 40,42 dB, což je sice horší výsledek než u simulovaných dat, ale nic jiného nebylo možné očekávat, a především jde stále o dostačující hodnoty. SNR v tomto případě bylo počítáno tak, že namísto perfuzního fantomu P byla použita plně vzorkovaná data.

Shrneme tedy, že se podařilo ověřit, že pomocí komprimovaného snímání a vhodně zvoleného rekonstrukčního modelu lze uspořit snímací čas při zachování dostatečné přesnosti výsledného zobrazení (rekonstrukce).

4 Závěr

Tato práce pojednávala o řídkých a nízkohodnostních reprezentacích signálů.

První aplikační kapitola pojednávala o úloze doplňování (interpolaci) chybějících

audiodat. Bylo ukázáno, že řídkostní metody typicky překonávají kvalitu rekonstrukce dosaženou dosavadními metodami, ale také že zavedení specifických struktur (sociální řídkost) přináší ještě další významná vylepšení.

Druhá aplikace byla v perfuzní analýze pomocí magnetické rezonance. Popisované metody využívají současně nízkohodnostní charakter dat a řídkost perfuzních křivek ve Fourierově doméně a umožňují zrychlení akvizice dat. Stávající metody byly vylepšeny pomocí zavedení penalizačního členu s totální variací.

Poslední roky vývoje v oboru také jasně ukazují, že se trend začíná sklánět k nekonvexní optimalizaci. To samozřejmě může přinést (a v praxi již přináší) bližší aproximaci ℓ_0 -normy a tedy lepší výsledky a možnost např. vyšších kompresních poměrů v komprimovaném snímání. Platí se za to však cena výrazně složitější analýzy numerických algoritmů a za cenu horších záruk, že nalezené optimum je blízké globálnímu. Od nekonvexní optimalizace v našich dvou aplikacích si do budoucna slibujeme další zvýšení úspěšnosti.

5 Abstract

The habilitation thesis of Pavel Rajmic is devoted to sparse and low-rank representations of signals.

In the first application-oriented section, the so-called audio inpainting problem has been introduced and solved by means of sparse Gabor expansions. It has been shown that sparsity-based algorithms overcome the reconstruction quality of traditional methods. Incorporating structure into the coefficients brought even more accuracy into the restoration.

The second application presented is acceleration of acquisition of perfusion imaging in magnetic resonance. The methods described in the thesis utilize simultaneous low-rankness of the data and its spectral sparsity. The state-of-the-art approaches have been improved by introducing the total variation penalty.

Reference

- [1] Adler, A.; Emiya, V.; Jafari, M.; aj.: A constrained matching pursuit approach to audio declipping. In *Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2011 IEEE International Conference on*, 2011, ISSN 1520-6149, s. 329–332, doi:10.1109/ICASSP.2011.5946407.
- [2] Adler, A.; Emiya, V.; Jafari, M.; aj.: Audio Inpainting. *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, ročník 20, č. 3, March 2012: s. 922 –932, ISSN 1558-7916, doi: 10.1109/TASL.2011.2168211.
- [3] Beck, A.; Teboulle, M.: A Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm for Linear Inverse Problems. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, ročník 2, č. 1, 2009: s. 183–202, doi:10.1137/080716542.
- [4] Boyd, S. P.; Vandenberghe, L.: *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004, ISBN 0521833787.
- [5] Brockwell, P. J.; Davis, R. A.: *Time Series: Theory and Methods*. Springer series in statistics, Springer, druhé vydání, 2006.
- [6] Candès, E. J.; Li, X.; Ma, Y.; aj.: Robust Principal Component Analysis? *J. ACM*, ročník 58, č. 3, Červen 2011: s. 11:1–11:37, ISSN 0004-5411, doi:10.1145/1970392.1970395.
URL <http://doi.acm.org/10.1145/1970392.1970395>
- [7] Candès, E. J.; Recht, B.: Exact Matrix Completion via Convex Optimization. *Foundations of Computational Mathematics*, ročník 9, č. 6, 2009: s. 717–772, ISSN 1615-3375, doi:10.1007/s10208-009-9045-5.
URL <http://dx.doi.org/10.1007/s10208-009-9045-5>
- [8] Candès, E. J.; Tao, T.: Decoding by Linear Programming. *IEEE Transactions on Information Theory*, ročník 51, 2005: s. 4203–4215.
- [9] Candès, E. J.; Wakin, M. B.: An introduction to compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, ročník 25, č. 2, 2008: s. 21–30, ISSN 1053-5888.
- [10] Chen, S.; Donoho, D.; Saunders, M.: *Atomic decomposition by basis pursuit*. SIAM J. Sci Comput. 20 (1998), no.1, reprinted in SIAM Review, 2001.
- [11] Condat, L.: A Direct Algorithm for 1-D Total Variation Denoising. *Signal Processing Letters, IEEE*, ročník 20, č. 11, Nov 2013: s. 1054–1057, ISSN 1070-9908, doi:10.1109/LSP.2013.2278339.
- [12] Daňková, M.: *Komprimované snímání v perfuzním zobrazování pomocí magnetické rezonance*. Diplomová práce, Vysoké učení technické v Brně, 2014.
- [13] Daňková, M.; Rajmic, P.; Jiřík, R.: Compressed sensing of MR perfusion imaging. In *New trends in biomedical engineering*, Brno University of Technology, 2013, s. 63–70, in Czech.
- [14] Duarte, M.; Davenport, M.; Takhar, D.; aj.: Single-Pixel Imaging via Compressive Sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, ročník 25, č. 2, 2008: s. 83–91, ISSN 1053-5888.
- [15] Elad, M.: *Sparse and Redundant Representations: From Theory to Applications in Signal and Image Processing*. Springer, 2010, ISBN 9781441970107.
- [16] Elad, M.; Starck, J.; Querre, P.; aj.: Simultaneous cartoon and texture image inpainting using morphological component analysis (MCA). *Applied and Computational Harmonic Analysis*, ročník 19, č. 3, 2005: s. 340–358, ISSN 1063-5203.
- [17] Eldar, Y. C.; Kutyniok, G.: *Compressed sensing: theory and applications*. Cambridge University Press, 2012.

- [18] Etter, W.: Restoration of a discrete-time signal segment by interpolation based on the left-sided and right-sided autoregressive parameters. *IEEE Transactions on Signal Processing*, ročník 44, č. 5, 1996: s. 1124–1135, ISSN 1053-587X, doi:10.1109/78.502326.
- [19] Fannjiang, A. C.; Strohmer, T.; Yan, P.: Compressed Remote Sensing of Sparse Objects. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, ročník 3, č. 3, 2010: s. 595–618.
- [20] Fink, M.; Holters, M.; Zölzer, U.: Comparison of Various Predictors for Audio Extrapolation. In *Proc. of the 16th Int. Conference on Digital Audio Effects (DAFx-13)*, Maynooth, 2013, s. 1–7.
- [21] Fornasier, M.; Rauhut, H.: *Handbook of Mathematical Methods in Imaging*, kapitola Compressive Sensing. Springer, 2011, ISBN 978-0-387-92920-0.
- [22] Foucard, S.; Rauhut, H.: *A Mathematical Introduction to Compressive Sensing*. Applied and Numerical Harmonic Analysis, Springer New York, 2013, doi:10.1007/978-0-8176-4948-7.
- [23] Golbabaee, M.; Arberet, S.; Vandergheynst, P.: Compressive Source Separation: Theory and Methods for Hyperspectral Imaging. *Image Processing, IEEE Transactions on*, ročník 22, č. 12, Dec 2013: s. 5096–5110, ISSN 1057-7149, doi:10.1109/TIP.2013.2281405.
- [24] Harabiš, V.; Kolář, R.; Mézl, M.; aj.: Comparison and evaluation of indicator dilution models for bolus of ultrasound contrast agents. *Physiological Measurement*, ročník 34, 2013: s. 151–162, doi:10.1088/0967-3334/34/2/151.
- [25] Hendee, W. R.; Morgan, C. J.: Magnetic resonance imaging. Part I—physical principles. *The Western journal of medicine*, ročník 141, č. 4, 10 1984: s. 491–500.
- [26] Hrbáček, R.: *Využití řídké reprezentace signálu při snímání a rekonstrukci v nukleární magnetické rezonanci*. Diplomová práce, Vysoké učení technické v Brně, 2013.
- [27] Hrbáček, R.; Rajmic, P.; Veselý, V.; aj.: Řídké reprezentace signálů: komprimované snímání. *Elektrorevue – Internetový časopis*, 2011: s. 1–8.
URL <http://www.elektrorevue.cz/files/200000809-6b46f6c40f>
- [28] Hrbáček, R.; Rajmic, P.; Veselý, V.; aj.: Řídké reprezentace signálů: úvod do problematiky. *Elektrorevue – Internetový časopis*, 2011: s. 1–10.
URL <http://www.elektrorevue.cz/files/200000751-638ac6484b>
- [29] Huber, R.; Kollmeier, B.: PEMO-Q—A New Method for Objective Audio Quality Assessment Using a Model of Auditory Perception. *IEEE Trans. Audio Speech Language Proc.*, ročník 14, č. 6, November 2006: s. 1902–1911, doi:10.1109/TASL.2006.883259.
- [30] Janssen, A. J. E. M.; Veldhuis, R. N. J.; Vries, L. B.: Adaptive interpolation of discrete-time signals that can be modeled as autoregressive processes. *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, ročník 34, č. 2, 4 1986: s. 317–330, doi:10.1109/TASSP.1986.1164824.
- [31] Kaupinnen, I.; Roth, K.: Audio Signal Extrapolation - Theory and Applications. In *Proc. of the 5th Int. Conference on Digital Audio Effects (DAFx-02)*, Hamburg, 2002, s. 105–110.
- [32] Kowalski, M.; Siedenburg, K.; Dörfler, M.: Social Sparsity! Neighborhood Systems Enrich Structured Shrinkage Operators. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, ročník 61, č. 10, 2013: s. 2498–2511, ISSN 1053-587X, doi:10.1109/TSP.2013.2250967.
- [33] Lagrange, M.; Marchand, S.; Rault, J.-b.: Long Interpolation of Audio Signals Using Linear Prediction in Sinusoidal Modeling. *J. Audio Eng. Soc.*, ročník 53, č. 10, 2005: s. 891–905.
URL <http://www.aes.org/e-lib/browse.cfm?elib=13390>

- [34] Lingala, S.; Hu, Y.; DiBella, E.; aj.: Accelerated Dynamic MRI Exploiting Sparsity and Low-Rank Structure: k-t SLR. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, ročník 30, č. 5, May 2011: s. 1042–1054, ISSN 0278-0062, doi:10.1109/TMI.2010.2100850.
- [35] Lukin, A.; Todd, J.: Parametric Interpolation of Gaps in Audio Signals. In *Audio Engineering Society Convention 125*, Oct 2008.
URL <http://www.aes.org/e-lib/browse.cfm?elib=14664>
- [36] Lustig, M.; Donoho, D.; Santos, J.; aj.: Compressed Sensing MRI. *IEEE Signal Processing Magazine*, ročník 25, č. 2, 2008: s. 72–82, ISSN 1053-5888.
- [37] Mach, V.: Digitální restaurace záznamů z janáčkovských fonografických válců a jejich kopií. In *Vzaty do fonografu: slovenské a moravské písně v nahrávkách Hynka Bíma, Leoše Janáčka a Františky Kyselkové z let 1909–1912*, Brno: Etnologický ústav AV ČR, v.v.i., 2012, ISBN 978-80-87112-62-5, s. 153–163.
- [38] Mach, V.: Structured Sparsity for Audio Inpainting. In *Proceedings of the 20th Conference STUDENT EEICT 2014*, Brno, 2014, ISBN 978-80-214-4924-4, s. 41–45.
- [39] Mallat, S.; Zhang, Z.: Matching pursuits with time-frequency dictionaries. *IEEE Transactions on Signal Processing*, ročník 41, č. 12, 1993: s. 3397–3415, ISSN 1053-587X.
- [40] Mishali, M.; Eldar, Y. C.; Tropp, J. A.: Efficient sampling of sparse wideband analog signals. In *IEEE 25th Convention of Electrical and Electronics Engineers in Israel*, 2008, ISBN 978-1-4244-2481-8, ISSN 0899-6156, s. 290–294.
- [41] Neubauer, J.; Veselý, V.: Change point detection by sparse parameter estimation. *INFORMATICA*, ročník 22, č. 1, 2011: s. 149–164.
- [42] Otazo, R.; Candes, E. J.; Sodickson, D.: Low-rank and sparse matrix decomposition for accelerated dynamic MRI with separation of background and dynamic components. *Magnetic Resonance in Medicine*, 2014, submitted to Magnetic Resonance in Medicine.
- [43] Špiřík, J.; Rajmic, P.; Veselý, V.: Repräsentace signálů: od bází k framům. *Elektrorevue – Internetový časopis*, 2010: str. 11.
URL <http://elektrorevue.cz/cz/download/reprzentace-signalu-od-bazi-k-framum/>
- [44] Qian, H.; Bassingthwaight, J. B.: A Class of Flow Bifurcation Models with Lognormal Distribution and Fractal Dispersion. *Journal of Theoretical Biology*, ročník 205, č. 2, 2000: s. 261 – 268, ISSN 0022-5193, doi:<http://dx.doi.org/10.1006/jtbi.2000.2060>.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022519300920605>
- [45] Šroubek, F.; Flusser, J.; Cristóbal, G.: Super-Resolution and Blind Deconvolution For Rational Factors With an Application to Color Images. *The Computer Journal*, ročník 52, č. 1, 2009: s. 142–152, doi:10.1093/comjnl/bxm098, <http://comjnl.oxfordjournals.org/content/52/1/142.full.pdf+html>.
- [46] Shepp, L. A.; Logan, B. F.: The Fourier Reconstruction of a Head Section. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, ročník 21, 1974: s. 21–43.
- [47] Siedenburg, K.; Kowalski, M.; Dorfler, M.: Audio declipping with social sparsity. In *Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2014 IEEE International Conference on*, IEEE, 2014, s. 1577–1581.
- [48] Tauböck, G.; Hlawatsch, F.; Eiwen, D.; aj.: Compressive Estimation of Doubly Selective Channels in Multicarrier Systems: Leakage Effects and Sparsity-Enhancing Processing. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, ročník 4, č. 2, 2010: s. 255–271, ISSN 1932-4553.

- [49] Tibshirani, R.: Regression shrinkage and selection via the lasso. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, ročník 58, č. 1, 1996: s. 267–288.
- [50] Veselý, V.; Tonner, J.; Hrdličková, Z.; aj.: Analysis of PM10 air pollution in Brno based on generalized linear model with strongly rank-deficient design matrix. *Environmetrics*, ročník 20, č. 6, 2009: s. 676–698, ISSN 1180-4009.