

VĚDECKÉ SPISY VYSOKÉHO UČENÍ TECHNICKÉHO V BRNĚ

Edice Habilitační a inaugurační spisy, sv. 409

ISSN 1213-418X

Jiří Kytýr

**ANALÝZA DEFORMACE A NAPJATOSTI
SE ZAMĚŘENÍM NA TERMOPLASTY**

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ
ÚSTAV STAVEBNÍ MECHANIKY

Ing. Jiří Kytýr, CSc.

**ANALÝZA DEFORMACE A NAPJATOSTI
SE ZAMĚŘENÍM NA TERMOPLASTY**

STRAIN AND STRESS ANALYSIS
OF THERMOPLASTIC MATERIALS

Teze habilitační práce
Vědní obor: Konstrukce a dopravní stavby



BRNO 2011

KLÍČOVÁ SLOVA

termoplasty, polymery, deformace, napjatost, termodynamika, zákony zachování, stavové rovnice, úloha vedení tepla, proudění tekutiny, úloha pružnosti, variační úloha, diskretizace metodou konečných prvků, princip virtuálních prací, potenciální energie, konstitutivní vztahy, reologie, vazkopružnost, modul tečení, sdružená úloha, teplotní analýza, statická analýza, materiálové charakteristiky, ANSYS

KEY WORDS

thermoplastic materials, polymers, strain, stress, thermodynamics, conservation laws, equations of state, heat conduction problem, fluid flow, elasticity problem, variation problem, discretization with the finite element method, principle of virtual work, potential energy, constitutive equations, rheology, viskoelasticity, creep modulus, coupled problem, thermal analysis, static analysis, material properties, ANSYS

MÍSTO ULOŽENÍ:

Originál habilitační práce je uložen v archivu Oddělení pro vědu a výzkum fakulty stavební Vysokého učení technického v Brně, Veveří 331/95, 602 00 Brno. V tezích je uvedena podstatná část práce a je zdůrazněn její hlavní přínos.

© Jiří Kytýr, 2011

ISBN 978-80-214-4367-9

ISSN 1213-418X

OBSAH

PŘEDSTAVENÍ AUTORA	4
1 ÚVOD	7
1.1 Současný stav řešené problematiky	8
1.2 Cíle habilitační práce	9
2 FORMULACE PROBLÉMU	10
2.1 Úplná soustava rovnic	11
2.2 Stavové rovnice	12
2.3 Počáteční a okrajové podmínky	13
2.4 Vybrané úlohy termodynamiky kontinua	14
2.4.1 <i>Přenos tepla</i>	14
2.4.2 <i>Proudění tekutiny</i>	14
2.4.3 <i>Úloha pružnosti</i>	15
2.5 Přibližné řešení daného problému	16
3 MATERIÁLOVÉ MODELY TERMOPLASTŮ	17
3.1 Základní reologické látky a modely	18
3.2 Nelineární vazkopružnost	18
3.2.1 <i>Princip časové a teplotní podobnosti</i>	19
3.2.2 <i>Boltzmannův princip superpozice</i>	19
3.3 Vybrané reologické modely	20
3.3.1 <i>Maxwellův model</i>	20
3.3.2 <i>Kelvinův model</i>	20
3.3.3 <i>Složený reologický model</i>	21
3.4 Poloempirické konstitutivní vztahy	21
4 APLIKACE	21
4.1 Teplotně závislé materiálové charakteristiky	22
4.2 Výpočet rozdělení teplot v konstrukci	23
4.3 Statický výpočet v čase	24
5 ZÁVĚR	28
POUŽITÁ LITERATURA	29
ABSTRACT	31

PŘEDSTAVENÍ AUTORA

Ing. Jiří Kytýr, CSc.

Narozen: 1. února 1950 v Brně
Kontakt: Ústav stavební mechaniky
Fakulta stavební VUT v Brně
Veveří 331/95, 602 00 Brno
kytyr.j@fce.vutbr.cz



Vzdělání

1965 – 1969 Střední průmyslová škola stavební, Kudelova 8, Brno
1969 – 1974 inženýrské studium, Fakulta stavební VUT v Brně,
studijní obor Konstrukce a dopravní stavby
Diplomová práce: Srovnávací studie desek na různých podkladech
1976 – 1986 externí aspirantura, Fakulta stavební VUT v Brně,
obor 39-01-9 Mechanika tuhých a poddajných těles a prostředí
Disertační práce: Řešení časově závislého přetvoření a napjatosti sypaných zemních
hrází metodou konečných prvků

Praxe

1974 – 1983 statik – programátor, Hydroprojekt Praha, odštěpný závod Brno
1975 – 1988 externí učitel, Fakulta stavební VUT v Brně
1983 – 1988 Výzkumný ústav inžinierskych stavieb Bratislava, pracoviště Brno
od 1988 odborný asistent, Fakulta stavební VUT v Brně

Odborné zaměření

Modelování konstrukcí metodou konečných prvků, statická analýza termoplastových konstrukcí, lanové a membránové soustavy, konstrukce a technologie výstavby odkališť, potenciální proudění kapaliny zemním prostředím, sdružená konsolidace

Pedagogická činnost

Přednášky

Stavební mechanika, Základy stavební mechaniky, Statika stavebních konstrukcí I, Statika stavebních konstrukcí II, Statika I, Statika II, Pružnost II a základy dynamiky, Pružnost a plasticita, Maticová analýza úloh stavební mechaniky

Cvičení

Stavební mechanika, Základy stavební mechaniky, Statika stavebních konstrukcí I, Statika stavebních konstrukcí II, Statika I, Statika II, Stavební mechanika II, Maticová analýza úloh stavební mechaniky, Diplomový seminář, Bakalářský seminář

Vedení bakalářských a diplomových prací, výchova vědeckých pracovníků

Šestnáct výborně hodnocených diplomových prací, tři výborně hodnocené bakalářské práce, dvě úspěšně obhájené disertační práce, školitel dvou dalších studentů doktorského studia

Činnosti související s pedagogickým procesem

Členství v komisích státních závěrečných zkoušek, členství v komisích pro státní doktorskou zkoušku a pro obhajobu disertační práce, člen oborové komise, posudky bakalářských a diplomových prací

Přehled aktivit

Účast na řešení výzkumných a grantových projektů:

ÚTAM ČSAV Praha III-3-2/05 (1990), interní grant č. 8 FAST VUT (1991–1993), granty č. 250024 a 260005 VUT (1995–1996), výzkumný záměr FAST VUT MSM 261100007 (1999–2004), CIDEAS 1M6840770001 (2005–2011), výzkumný záměr FAST VUT MSM 0021630519 (2005–2011)

Vybrané publikace autora

Články v časopisech a sbornících

- Kratochvíl, J., Kytýr, J. Numerické řešení počátečního a okrajového problému vazkoplasticity. *Automatizace řešení základů a zemních těles*. DT ČVTS Ostrava, Brno: 1979, s. 69–78.
- Kratochvíl, J., Kytýr, J., Říha, J. Mathematical Modelling of Structures and Their Foundation Under Simultaneous Creep and Consolidation. *Proceedings of the 1st Conference on Mechanics*. Volume 6. Praha: 1987, s. 41–44.
- Kytýr, J. Aplikace teorie vazkoplasticity při řešení zemních těles formou sdružené konsolidace. *Numerické metody v geomechanice*. Vysoké Tatry: 1987, s. 158–161.
- Kytýr, J., Kadlčák, J. The Automation of Calculation of One-Span Cable. *Vláknové a prútové priestorové konštrukcie*. Piešťany: 1990, s. 205–209.
- Kadlčák, J. and Kytýr, J. The Theory of Calculation of Suspended Cable Roofs. *Thomas Telford 4th International Conference on Space Structures*. London: 1993, s. 892–897.
- Kytýr, J., Kadlčák, J., Kočenda, M. Static Analysis of a Spatially Loaded Cable. *The Fourth ICCS Int. Conf. on Steel-Concrete Composite Structures*. TU v Košicích, Košice: 1994, s. 486–491.
- Kytýr, J., Kadlčák, J. Static Analysis of the Plane Continuous Cable. *International Conference on Lightweight Structures in Civil Engineering*. Warsaw: 1995, s. 670–673.
- Kytýr, J., Špaček, R. Statická analýza zavěšené mostní soustavy. *Vybrané problémy stavební mechaniky*. STU, Bratislava: 1996, s. 155–160.
- Kytýr, J., Kadlčák, J. The Static Analysis of Carrying Elements of Cable Systems by FEM. *VI. věd. konference Kovové a dřevěné konstrukce*, 8. sekce. TU v Košicích, Košice: 1997, s. 211–216.
- Kytýr, J., Nevařil, A., Kadlčák, J. Typy lanových prvků v MKP. *Sborník příspěvků z mezinárodní vědecké konference "60. výročí stavební fakulty STU v Bratislavě"*, sekce č. 1, díl I, Bratislava: 1998, s. 53–58, ISBN 80-227-1135-1.
- Nevařil, A., Kytýr, J. FEM Analysis of Bridge-Type Cable System. *Proc. of IABSE Conference Cable Supported Bridges – Challenging Technical Limits*, Seoul: 2001, s. 154–155, (citováno v *Journal of Civil Engineering and Management*, 2010).
- Nevařil, A., Kytýr, J. Static Analysis of Cable Bridge System. *Proc. of Scientific Session VSU' 2001*, Sofia: 2001, s. 42–47.
- Drnec, M., Kytýr, J. The Modelling of Static Solution of Membrane Systems, *Sborník ze VII. vědecké konference TU v Košicích*, 9. sekce, Košice: 2002, s. 38–41, ISBN 80-7099-815-6.
- Gracza, R., Kytýr, J. Statical Carrying Capacity of Polypropylene Block Structures, *Proc. of International Conference "New Trends in Statics and Dynamics of Buildings"*, Bratislava: 2002, s. 69–74, ISBN 80-227-1790-8.
- Gracza, R., Kytýr, J. The Study of Linear and Nonlinear Stability Analysis of Thermoplastic Element. *Proc. of the 2nd International Conference "New Trends in Statics and Dynamics of Buildings"*, Bratislava: 2003, s. 125–128, ISBN 80-227-1958-7.
- Gracza, R., Kytýr, J. Svařované spoje termoplastových konstrukcí. *Experiment – významný zdroj poznání a verifikace metod navrhování nosných stavebních konstrukcí*, FAST VUT v Brně, Brno: 2004, s. 101–106, ISBN 80-7204-354-4.

- Gratza, R., Kytýr, J. Studie srovnání dvou různých závislostí pro vystižení reologického chování termoplastů, *Proc. of International Conference New Trends in Static and Dynamics of Buildings*, Slovak University of Technology in Bratislava, Bratislava: 2005, s. 65–68, ISBN 80-227-2277-4.
- Kubza, K., Kytýr, J. Analýza kontaktního chování spirálovitého lana. *Modelování v mechanice 2005*, VŠB-TU v Ostravě, Ostrava: 2005, s. 131–134, ISBN 80-248-0776-9.
- Gratza, R., Kytýr, J. Convenience Study of Implicit Creep Material Model for Behaviour Description of Thermoplastics. *JUNIORSTAV 2006, díl 4. Odborná konference doktorského studia*, FAST VUT v Brně, Brno: 2006, s. 189–194, ISBN 80-214-3110-5.
- Gratza, R., Kytýr, J. Stabilita podzemních nádrží z termoplastů. *Sborník vědeckých prací VŠB-TU Ostrava, č. 2, ročník VI, řada stavební*, Ostrava: 2006, 6 s., ISSN 1213-1962.
- Gratza, R., Kytýr, J. Statická analýza nádrží z termoplastů. *CIDEAS – dílčí výzkumná zpráva 2.5.2.2 – 15, 16*: 2006, 14 s.
- Gratza, R., Kytýr, J. Vliv působení teplotních změn na termoplastové konstrukce. *CIDEAS – dílčí výzkumná zpráva 2.5.2.2 – 17*: 2006, 15 s.
- Gratza, R., Kytýr, J. Model podzemní stojaté válcové nádrže z termoplastu. *Experiment – významný zdroj poznání a verifikace metod navrhování nosných stavebních konstrukcí*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno: 2007, s. 87–90, ISBN 978-80-7204-543-3.
- Gratza, R., Kytýr, J. Vliv časového faktoru při zatížení na termoplastové konstrukce. *CIDEAS – dílčí výzkumná zpráva 2.5.2.2 – 31*: 2007, 14 s.
- Gratza, R., Kytýr, J. Podzemní stojaté válcové nádrže z termoplastu. *CIDEAS – dílčí výzkumné zprávy 2.5.2.2–41 a 2.5.2.2–42*: 2008, 11 s.
- Gratza, R., Kytýr, J. Vliv doby působení zatížení na stabilitu termoplastového dílce. *Stavební obzor 10/2009*, Praha: 2009, s. 296–301, ISSN 1210-4027.
- Gratza, R., Kytýr, J. Statické řešení podzemní válcové nádrže z termoplastu. *Stavební obzor 3/2010*, Praha: 2010, s. 70–72, ISSN 1210-4027.

Učebnice a skripta

- Kadlčák, J., Kytýr, J. *Statika stavebních konstrukcí I. Základy stavební mechaniky. Staticky určité prutové konstrukce*. Edice učebnice. VUTIUM, 4. vydání, Brno: 2011, 360 s., ISBN 978-80-214-3419-6.
- Kadlčák, J., Kytýr, J. *Statika stavebních konstrukcí II. Staticky neurčité prutové konstrukce*. Edice učebnice. VUTIUM, 4. vydání, Brno: 2010, 430 s., ISBN 978-80-214-3428-8.
- Kadlčák, J., Kytýr, J. *Statika stavebních konstrukcí III*. Skriptum. Nakladatelství VUT, Brno: 1992, 168 s., ISBN 80-214-0438-8.
- Kadlčák, J., Kytýr, J. *Základy stavební mechaniky. Analýza vnitřních sil na rovinných a prostorových nosnících*. Skriptum. CERM, Brno: 1993, 46 s., ISBN 80-900590-8-2.
- Kadlčák, J., Šmiřák, S., Kytýr, J. *Základy stavební mechaniky*. Skriptum. 1. vydání. VUT v Brně, Brno: 1995, 200 s., ISBN 80-214-0683-6.
- Kadlčák, J., Kolář, A., Kytýr, J., Maurer, E. *Statika stavebních konstrukcí I*. Skriptum. VUT v Brně, Brno: 1996, 254 s., ISBN 80-214-0809-X.
- Kytýr, J., Keršner, Z., Zídek, R., Vlk, Z. *BD01 – Základy stavební mechaniky. Moduly MO1–MO4*. Studijní opory kombinovaného studia. VUT v Brně, Brno: 2004, 176 s., (elektronická forma).
- Kytýr, J., Frantík, P. *BD03 – Statika I*. Studijní opora kombinovaného studia. VUT v Brně, Brno: 2005, 32 s., (elektronická forma).
- Kytýr, J., Frantík, P. *BD04 – Statika II*. Studijní opora kombinovaného studia. VUT v Brně, Brno: 2005, 32 s., (elektronická forma).

1 ÚVOD

Spotřeba plastů ve společnosti neustále roste, a platí to i pro stavebnictví. Plastové výrobky musí splňovat rozmanité funkce. Pro různé oblasti užití lze navrhnout plasty s vhodnými specifickými vlastnostmi pro konkrétní výrobek nebo konstrukci. Ve stavebním oboru se jedná zejména o navrhování a posuzování termoplastových konstrukcí typu nádrží, zásobníků, potrubních systémů či jejich částí. Významnými termoplasty jsou v tomto případě polyetylén (PE), polypropylén (PP), polyvinylchlorid (PVC), popřípadě polyvinylidenfluorid (PVDF) [48], [53], [51], [52]. Termoplasty lze ohřevem opakovaně převádět do tvarovatelného stavu a následně ochlazením do stavu tuhého [28].

Stávající praxe statického posuzování termoplastových konstrukcí, často pouze jako výrobků a nikoli jako stavebních konstrukcí, vede v řadě případů k jejich destruktivním. Např. na obr. 1.1 je zachycena destrukce nadzemní stojaté válcové nádrže z polyetylénu pro kyselinu chlorovodíkovou o objemu cca 30 m³, umístěné ve venkovním prostoru [43]. V tomto případě se jednalo o souhrn více příčin. Byl špatně proveden statický posudek (navrženy nevhodné tloušťky desek a dimenze svarů), konstrukce byla špatně provedena, a to jak z hlediska konstrukčního (nevhodné skružení pláště, nedostatečné odvzdušnění nádrže), tak i technologického (nekvalitní svary). Navíc nádrž nebyla umístěna v záchytném prostoru.



Obr. 1.1 Částečně rozvinutý plášť zničené nádrže [43]

Mezi odborníky často panují pochybnosti o správné funkčnosti termoplastových konstrukcí během celé garantované doby jejich životnosti [11]. Praxe potvrzuje, že termoplasty se hodí pro konstrukce přiměřeně zatěžované a používané za specifikovaných podmínek. Nekvalitní a poddimenzované konstrukce, jejich havárie či ztráta funkčnosti, mohou naopak ohrozit všeobecnou důvěru v plastové konstrukce. Z hlediska provozu termoplastových konstrukcí se ukazuje, že je často podhodnocen vliv změny teploty a časového faktoru v důsledku neznalosti chování materiálu. Pro praktické navrhování

mnohdy chybí jasně definované údaje o používaných plastech, metodika kvalitního návrhu a výroby konstrukcí, požadavek na dodržování příslušné legislativy, vhodný výukový systém apod.

Komplexní analýza k určení deformace a napjatosti, popř. stability, konstrukcí a konstrukčních prvků z termoplastů pro posouzení jejich statického chování je tedy velmi aktuální téma. Pro co nejdůvěrnější vystižení dějů, které probíhají v termoplastových konstrukcích během provozu, je tedy nutné jejich podrobné numerické modelování. Komplexní analýza přitom umožňuje lépe pochopit fyzikální zákony, které tyto děje popisují, matematické prostředky a numerické metody, které poskytují řešení, i vlastnosti, jež charakterizují navrhovaný materiál ve všech jeho stádiích chování. Naléhavá problematika kvalifikovaného posuzování termoplastů proto vyžaduje zpracování sofistikovanějšího přístupu k časově závislým řešením konstrukcí z plastů, a to jak po stránce teoretické, tak i po stránce praktické.

1.1 SOUČASNÝ STAV ŘEŠENÉ PROBLEMATIKY

Konstrukce a prvky z termoplastů se obvykle posuzují podle běžných kritérií [48], zejména na základě kritérií pevnosti, deformace, stability, životnosti, únavy apod. Např. vnitřní, popř. venkovní nadzemní nádrže z termoplastů pro beztlaké ukládání vodu ohrožujících tekutin se často řeší jednoduchým ručním výpočtem [50]. Někdy se využívají jednoduché programy výrobců termoplastů, např. [52] či [53], jejichž výstupem však není statický posudek, ale pouze návrh dimenzí nádrže. Nověji se v běžné praxi více využívají i programy na bázi metody konečných prvků, avšak na různé úrovni propracovanosti numerického modelu. Při návrhu a posouzení konstrukcí z termoplastů je bezpodmínečně nutné rovněž prověřovat ztrátu stability [8], která zejména u podzemních nádrží hraje nezanedbatelnou roli. Podzemní nádrže se vzhledem k posouzení ztráty stability již obvykle řeší pomocí softwaru založeného na metodě konečných prvků. Často je však používán pouze zjednodušený materiálový model [9], [12], [13], [16].

V současné době lze termoplastové konstrukce, stejně jako jiné technické problémy, analyzovat podrobnými numerickými modely s možností vystižení nejrůznějších vlivů. V praxi při aplikaci termoplastů však bohužel výrobci či provozovatelé často nedodržují elementární podmínky správného provedení nebo provozu, takže podrobnější modelování může někdy ztrácet smysl. Navíc velmi často nezanedbatelným hlediskem, třeba i na úkor kvality výrobku či konstrukce, se pro návrh a rozhodování stává cena. Přes uvedené problémy však výzkum v oblasti analýzy chování termoplastových materiálů a konstrukcí za provozu významně posouvá úroveň poznání v tomto oboru. Může tak výrazně přispět ke zlepšení kvality termoplastových konstrukcí i ke zvýšení důvěry v tyto konstrukce.

Podrobné fyzikálně mechanické vlastnosti termoplastů se získávají ze zkoušek, které bývají finančně značně náročné. Výrobci a dodavatelé konstrukcí a částí z termoplastů proto nejčastěji uvádějí hodnoty materiálových charakteristik, které jsou získány z krátkodobých relativně jednoduchých a levných zkoušek zkušebních vzorků. Přitom je nutno uvážit, že podmínky realizace jednoduchých zkoušek, např. podle [45], se mohou z různých příčin značně lišit od provozních podmínek termoplastových stavebních dílců či konstrukcí. Zvláště významná je vazkopružná povaha polymerů, která činí čas a teplotu významnějšími faktory deformačních a destrukčních procesů, než je tomu např. u kovů, skel či keramiky [34]. Doba působení stálých sil, frekvence při působení střídavých sil a rychlosti deformací se projevují při různých teplotách rozdílně podle povahy dané materiálové struktury. Faktory jako tuhost, pevnost či houževnatost jsou pro výrobky z termoplastů většinou rozhodující.

Protože druhů plastů stále přibývá, je náročné získat podrobné údaje mající charakter funkční závislosti, a to na základě zjištěných dlouhodobých hodnot materiálových charakteristik. Přesto je

nezbytné výpočty plastových stavebních dílců požadovat a realizovat výhradně pomocí takto stanovených dat. Ta se nejčastěji získávají z dlouhodobých tahových a ohybových zkoušek [46], [47]. K tomu je nutné znát, jak se konstrukce chová při statickém i dynamickém zatížení, při změně teploty [41], při působení okolního prostředí apod., a to po celou dobu životnosti. Volba použitých hodnot navíc úzce souvisí se způsobem namáhání konstrukce, volbou materiálového modelu apod. Vzhledem k časové a finanční náročnosti dlouhodobých zkoušek, jako je např. dlouhodobá zkouška trubky zatížené vnitřním přetlakem [49], se často získané hodnoty extrapolují.

Významným faktorem ovlivňujícím vlastnosti materiálu je vliv změny teploty, který často limituje použitelnost a hospodárnost termoplastových konstrukcí. Termoplasty se při použití za nízkých teplot stávají křehkými. Dalšími faktory jsou vliv okolního prostředí vyplývající z mnohostranného použití plastů, vliv působení média na svar, vliv záření, doby působení vlivů apod. Ve většině případů dochází ke snížení hodnot fyzikálně mechanických vlastností, zejména při kombinaci jednotlivých vlivů. Styk s různými chemikáliemi může způsobit bobtnání nebo extrakci plastů. Odolnost termoplastů proti chemikáliím pak závisí také na úrovni napětí v namáhané části konstrukce (koroze za napětí) a na úrovni teploty. Uvedené vlivy je nutné rovněž zohlednit při návrhu a posouzení termoplastových konstrukcí.

1.2 CÍLE HABILITAČNÍ PRÁCE

Z analýzy současného stavu je zřejmé, že zjednodušené návrhy či výpočty podle normových předpisů [48], [50] nemusí být vždy dostačující a je třeba používat sofistikovanější přístup k řešení konstrukcí či jejich částí z termoplastů. Pro kvalifikované navrhování a posuzování je nezbytné mít k dispozici metodiku, umožňující komplexnější analýzu s přihlédnutím k současným možnostem numerického modelování a ke specifickým vlastnostem a chování použitého materiálu.

Tvorba co nejuvýstižnějších numerických modelů představuje náročný proces, vyžadující komplexní znalost a pochopení fyzikálních zákonitostí i praktickou erudici v celé oblasti sdruženého problému. Teprve podrobný dostatečně výstižný numerický model umožní získat výsledky nejlépe se přibližující k realitě.

Přitom je nutné zvolit vhodné konstitutivní vztahy (materiálové modely) pro popis chování materiálu v závislosti na napětí, deformaci, teplotě a čase a získat zpřesněné vstupní údaje pro řešení jak termoplastových konstrukcí, tak i jejich detailů. Je třeba přihlídnout k časově závislým řešením, zejména pro vystižení jevů, jakými jsou tečení, relaxace, řešení stability, vliv změny teploty na vlastnosti materiálů i konstrukcí apod.

Dále je potřebné vyzkoušet a určit vhodné výpočetní postupy a numerické modely termoplastových konstrukcí s využitím softwarových systémů, umožňujících vystihnout reálné chování termoplastového materiálu. Nezbytné je posouzení vhodnosti volby a použití vybraných termoplastů pro nosné konstrukce, vhodné volby geometrického tvaru konstrukce včetně vlivu konstrukčních detailů, vlivu prostředí apod.

Pro konkrétní výpočty podle výše nastíněných požadavků lze při využití podrobných prostorových numerických modelů konstrukcí, např. s použitím univerzálního softwarového systému ANSYS, získat u pevnostních výpočtů podrobný a kvalifikovaný obraz o chování termoplastů při současném působení všech rozhodujících faktorů.

Cílem numerického modelování je získat komplexní informace pro co nejlepší vystižení skutečného chování termoplastové konstrukce. Následující kapitoly proto zahrnují matematickou formulaci problému včetně vybraných úloh z termodynamiky kontinua a přibližného řešení problému a dále některé vybrané materiálové modely vhodné pro termoplasty.

2 FORMULACE PROBLÉMU

Základními a výchozími fyzikálními veličinami termodynamiky jsou teplota T a entropie S [29]. Teplota je měřitelná veličina a je mírou střední energie, kterou mezi sebou vyměňují (interagují) elementární částice hmoty. Entropie není přímo měřitelná veličina a je mírou nahodilosti při vnitřní evoluci tělesa. Jediný termodynamický zákon popisující časové chování (evoluci) interagujících systémů je druhý zákon termodynamiky. Tento zákon lze kvalitativně vyjádřit nejlépe pomocí časové změny entropie, jejího toku a produkce. Výchozí evoluční zákon systémů lze psát ve tvaru bilance entropie

$$\frac{dS(t)}{dt} - J(S) = P(S) \geq 0. \quad (2.1)$$

Změna stavu systému v (2.1) je charakterizována časovou derivací entropie S , interakce systému s prostředím je určena tokem entropie $J(S)$ a vnitřní procesy v systému produkcí entropie $P(S)$. Pro nedisipativní (idealizované) procesy platí $P(S) = 0$ a pro procesy disipativní (reálné) platí $P(S) > 0$. Konkrétní tvar (2.1) lze nalézt pomocí definovaných a měřitelných veličin vystupujících v zákonech bilance hmotnosti, hybnosti, energie apod., v závislosti na uvažované struktuře systému.

Matematický model fenomenologické teorie termodynamiky kontinua vychází z pěti základních fyzikálních zákonů bilance [29] pro

- hmotnost,
- hybnost,
- moment hybnosti,
- energii,
- entropii.

V řadě významných fyzikálních, chemických či technických modelů mají zákony bilance charakter zákonů zachování. Základní systémy rovnic vycházející ze zákonů bilance doplňují stavové rovnice. Pro jednoznačné definování výchozího stavu úlohy je nutné zadat počáteční a okrajové podmínky. Matematický model úlohy je tvořen soustavou rovnic různého typu. Věcná přesnost matematického modelu závisí na přesnosti, s jakou matematický popis fyzikálního děje vystihuje reálné vzájemné vztahy jednotlivých stavových veličin a jak výstižně jsou tyto veličiny určeny [30].

Zkoumané těleso se předpokládá jako kontinuum zaujímající objem V , složené z materiálových bodů, uvažovaných jako elementární částice tělesa. V čase $t = 0$ se těleso nachází v referenčním (nedeformovaném, klidovém) stavu a následkem fyzikálního procesu se v čase t bude těleso nacházet v aktuálním (deformovaném, konečném) stavu. V materiálovém bodu jsou udány hodnoty potřebných měřitelných termodynamických parametrů, např. tlak p , objem V , teplota T , složky posunutí materiálového bodu u_i apod. Cílem je nalézt vztah mezi referenčním a aktuálním stavem, např. pro polohu a teplotu materiálových bodů. Polohu materiálového bodu lze vyjádřit buď materiálovým popisem nebo prostorovým popisem [39].

Zákon lokální bilance veličiny v prostorovém popisu je

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial(\varphi v_i)}{\partial x_i} - \frac{\partial j_i(\Psi)}{\partial x_i} - p(\Psi) = 0, \quad (2.2)$$

kde $\Psi(t)$ je celková (globální) hodnota sledované veličiny. Bez ohledu na volbu typu souřadnicového popisu lze vztah (2.2) obecně analyzovat jako univerzální bilanci veličiny [39], kde na levé straně

rovnice představuje první člen rychlost akumulace, druhý člen rychlost odvodu, třetí člen rychlost přívodu a poslední člen rychlost vzniku.

Bilance zachování hmotnosti určuje, jak se mění hustota tělesa v závislosti na deformaci tělesa [36]. Zákon bilance hybnosti se projeví uplatněním d'Alembertova principu formou pohybových rovnic [4]. Bilance hybnosti je ve skutečnosti Newtonův zákon, tj. rovnováha setrvačné síly tělesa se všemi ostatními silami působícími na těleso.

V technické praxi se nejčastěji vyskytují nepolární materiály (bez dipólového momentu) a lokální tvar zákona bilance momentu hybnosti vede k podmínce symetrie tenzoru napětí, což v mechanice kontinua vyjadřuje větu o vzájemnosti tangenciálních napětí. Při zanedbání setrvačných sil se zákon bilance hybnosti a momentu hybnosti redukuje na Cauchyho rovnice rovnováhy a z momentových podmínek rovnováhy plyne symetrie tenzoru napětí σ_{ij} [31].

2.1 ÚPLNÁ SOUSTAVA ROVNIC

V zákonech bilance hmoty, hybnosti, momentu hybnosti, energie a entropie vystupuje 22 neznámých funkcí $x_i, T, u, s, q_i, v_i, \sigma_{ij}, t$ [29]. Pro určení těchto neznámých funkcí je k dispozici těchto devět rovnic v prostorovém popisu: jedna rovnice zákona bilance hmotnosti

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (2.3)$$

jedna rovnice zákona bilance mechanické energie

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{(v_i v_i)}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho v_j \frac{(v_i v_i)}{2} \right) - v_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \rho f_i v_i = 0, \quad (2.4)$$

jedna rovnice zákona bilance vnitřní energie

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j u)}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j}{\partial x_j} - \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \tilde{q} = 0, \quad (2.5)$$

tři rovnice zákona bilance hybnosti

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \rho f_i = 0 \quad (2.6)$$

a tři rovnice zákona bilance momentu hybnosti

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (2.7)$$

Aby byla zajištěna reálnost modelu stavů a procesů v tělese, je třeba zbývajících $22 - 9 = 13$ neznámých funkcí definovat tak, aby vyhovovaly druhému zákonu termodynamiky, tj. jedné nerovnici pro hustotu produkce entropie

$$p(S) = \rho(x_i, t) \frac{ds(x_i, t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{q_i}{T} \right) - \frac{\tilde{q}}{T} \geq 0. \quad (2.8)$$

Nerovnost (2.8) reprezentuje lokální tvar druhého zákona termodynamiky nebo také lokální tvar bilance entropie (nerovnost Clausiova–Duhemova).

Formulaci zákona bilance energie lze s použitím bilance mechanické energie (2.4) a zákona bilance hmotnosti (2.3) převést na obvykle užívaný tvar prvního zákona termodynamiky

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\bar{V}} \rho u \, dv \right) = - \int_{\bar{A}} q_j \, da + \int_{\bar{A}} (\sigma_{ij} v_i) \, da + \int_{\bar{V}} \left[\tilde{q} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v_i v_i}{2} \right) - \rho f_i v_i \right] dv. \quad (2.9)$$

Některé uvedené veličiny jsou určeny tvarem zákonů bilance bezprostředně. Rychlost materiálového bodu v_i je definována při bilanci hybnosti (2.6). Mezi třemi složkami tenzoru napětí σ_{ij} může být zákonem bilance momentu hybnosti zavedena symetrie [29]. Hustota ρ je zavedena zákonem bilance hmotnosti formou rovnice kontinuity (2.3). Zdroj tepla \tilde{q} a vnější objemové síly f_i předpokládáme jako známé ze zadání problému. Pro praktické uplatnění je možné z vnitřní energie u a entropie s přejít na specifické hodnoty termodynamických potenciálů [30], tj. Helmholtzovu volnou energii $f = u - T s$, entalpii $h = u + p v$, a Gibbsův potenciál $g = h - T s$.

2.2 STAVOVÉ ROVNICE

V teorii přenosových jevů je nutné zákony bilance doplnit stavovými rovnicemi [39]. Představují konstitutivní vztahy vázící mezi sebou stavové veličiny. Doplnují počet rovnic na počet neznámých, které se v daném problému vyskytují. Stavové rovnice (fyzikální rovnice) v mechanice kontinua vyjadřují vztah mezi napětím, deformací a rychlostí deformace pro jednotlivé látky [31], [36]. Složité vztahy nastávají u látek ležících na pomezí mezi kapalnými a pevnými látkami [25].

Přenos molekulárním mechanismem není podmíněn makroskopickým pohybem hmot. Nutnou podmínkou je však existence alespoň jednoho z přenosových potenciálů (rychlostního, teplotního či koncentračního gradientu). Tento mechanismus se uplatňuje jak v pevných látkách, tak i v tekutinách. Obecně lze pro hustotu toku $j_i(\Psi)$ zapsat [39]

$$[\text{hustota toku}] = - [\text{součinitel přenosu}] \cdot [\text{potenciál přenosu}]. \quad (2.10)$$

Typickými případy lineárních vazeb mezi hustotou toku a příslušným gradientem (zahrnujícím potenciál přenosu) jsou Newtonův, Fourierův nebo Fickův zákon. Součinitel přenosu (difusivity) pak představuje kinematickou viskozitu χ , teplotní vodivost a_i , nebo součinitel difúze D_i . Hustotu viskózního toku hybnosti lze vyjádřit pomocí Newtonova zákona tření (viskozity)

$$j_i(\rho v) = - \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = - \chi \left[\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_i} \right], \quad (2.11)$$

pro vedení tepla v pevných látkách nebo ve stagnantních tekutinách platí pro hustotu tepelného toku Fourierův zákon

$$j_i(q) = q_i = - k_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = - a_i \frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial x_i} \quad (2.12)$$

a v případě přenosu hmoty molekulární difúzí lze hustotu toku hmoty vyjádřit pomocí Fickova zákona

$$j_i(D) = - D_i \frac{\partial(\rho c)}{\partial x_i}. \quad (2.13)$$

Pro látku ve stavu tekutém se používá nejčastěji Newtonova tekutina, pro látku ve stavu pevném Hookova látka a pro stav nacházející se mezi kapalinou a pevnou látkou se používají lineárně a nelineárně vazkopružné a vazkoplastické modely [25].

Konstitutivní vztahy pro newtonovskou tekutinu vyjadřují celkové napětí σ_{ij} v tekutině jako lineární funkci rychlosti deformace a tlaku $p(x, y, z, t)$ [36]

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \delta_{ij}\lambda \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.14)$$

přičemž $\lambda(\rho, T)$ je koeficient objemové deformace a $\mu(\rho, T)$ koeficient dynamické viskozity.

Lineární kombinaci mezi složkami σ_{ij} tenzoru napětí a složkami ε_{kl} tenzoru deformace (Hookův zákon) lze vyjádřit vztahem

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (2.15)$$

Elastické koeficienty C_{ijkl} v rovnici (2.15) vystihují vlastnosti látky v každém jejím bodě a jsou složkami tenzoru čtvrtého řádu. Obecně všech vzájemně nezávislých složek je $3^4 = 81$ [4], avšak vzhledem k symetrii tenzorů napětí a deformací a dalším podmínkám se počet nezávislých elastických koeficientů zredukuje na 21 a pro izotropní těleso na dva koeficienty – Laméovy konstanty $\hat{\lambda}$ a $\hat{\mu}$, v technické praxi nahrazované moduly pružnosti v tahu (tlaku) E a ve smyku $G = \hat{\mu}$. Pomocí Laméových konstant se rovnice (2.15) změní na zobecněný Hookův zákon pro izotropní těleso

$$\sigma_{ij} = \hat{\lambda}\delta_{ij}\varepsilon_v + 2\hat{\mu}\varepsilon_{ij}. \quad (2.16)$$

2.3 POČÁTEČNÍ A OKRAJOVÉ PODMÍNKY

Matematický model vychází z fyzikálních zákonů (bilancí), popsaných diferenciálními rovnicemi. Nedílnou součástí při tvorbě matematického modelu je formulace počátečních a okrajových podmínek, které se předepisují na hranici oblasti (tělesa) a umožňují získat jednoznačné řešení. Podmínky vyplývají z konkrétních okolností každého problému. Některé podmínky vycházejí přímo ze zadání úlohy, jiné je nutné odvodit s použitím stejných postupů jako při odvozování matematického modelu (pomocí bilancí). Lze definovat, že

- počáteční podmínky určují stav na počátku řešení (v čase $t = t_0$), předepisují na začátku sledovaného děje hodnoty neznámým (hledaným) funkcím ve všech bodech tělesa (uzlech náhradní oblasti),
- okrajové podmínky předepisují stav na hranici tělesa. Geometrické okrajové podmínky (homogenní či nehomogenní) mají charakter kinematických podmínek, tj. předepisují hodnoty neznámých funkcí nebo jejich derivací v určitých bodech tělesa [37].

Rozlišují se tři základní typy okrajových podmínek:

- Dirichletova okrajová podmínka (prvního druhu) předepisuje hodnotu proměnné v určitém místě povrchu tělesa (hranice) známou funkcí souřadnic a času (u nestacionárních úloh).
- Neumannova okrajová podmínka (druhého druhu) předepisuje na povrchu tělesa hodnotu derivace proměnné podle jedné souřadnice známou funkcí ostatních souřadnic a času.

- Newtonova (Fourierova) okrajová podmínka (třetího druhu) předepisuje lineární kombinaci hodnoty proměnné veličiny v bodě $x_{x,0}$ a její derivace podle x_x v místě $x_{x,0}$ jako známou funkci ostatních souřadnic a času.

2.4 VYBRANÉ ÚLOHY TERMODYNAMIKY KONTINUA

Pro numerické modelování deformace, rychlosti deformace a napjatosti konstrukčních prvků z termoplastů je potřebné zvládnout některé úlohy z termodynamiky kontinua. Patří sem zejména úloha přenosu tepla, využitelná při změně teplotního pole, úloha proudění tekutiny, využitelná při modelování procesu svařování a úloha pružnosti jako základní problém mechaniky kontinua.

2.4.1 Přenos tepla

Látky emitují energii různých forem. U tepelného záření (tepelná radiace, sálání) jsou nositelem přenášené energie elektromagnetické vlny. Zásadní rozdíl mezi mechanismy přenosu tepla zářením a vedením spočívá mj. v tom, že přenos zářením mezi dvěma povrchy o různých teplotách probíhá nezávisle na prostředí, které prostor mezi povrchy vyplňuje.

Vyjádríme-li ze vztahu $h = u + p v$ (odst. 2.1) vnitřní energii u , získáme celkovou bilanci vnitřní energie v prostorovém popisu. Po úpravě na diferenciální tvar při vyjádření hustoty tepelného toku pomocí Fourierova zákona (2.12) získáme [32]

$$\begin{aligned} \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x_x} + v_y \frac{\partial T}{\partial x_y} + v_z \frac{\partial T}{\partial x_z} \right) &= \rho T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v_x \frac{\partial p}{\partial x_x} + v_y \frac{\partial p}{\partial x_y} + v_z \frac{\partial p}{\partial x_z} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x_x} \right) + \frac{\partial}{\partial x_y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial x_y} \right) + \frac{\partial}{\partial x_z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial x_z} \right) + \\ &+ 2\mu \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x_x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x_y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x_z} \right)^2 \right] + \mu \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x_y} + \frac{\partial v_y}{\partial x_x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x_z} + \frac{\partial v_z}{\partial x_x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x_z} + \frac{\partial v_z}{\partial x_y} \right)^2 \right] + \tilde{q}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

kde c_p značí měrnou tepelnou kapacitu při konstantním tlaku.

Rovnice (2.17) reprezentuje diferenciální entalpickou bilanci materiálového bodu libovolného spojitého prostředí. Platí bez ohledu na to, je-li v bilancovaném objemu plyn, kapalina nebo pevná látka. Např. u stlačitelného prostředí platí tato rovnice bez ohledu na to, jak složitá je příslušná termická rovnice stavu. V nestlačitelné tekutině, pro niž se využije Newtonův zákon (2.11), platí $(\partial v / \partial T)_p = 0$, čímž se bilance zjednoduší na Fourierovu–Kirchhoffovu rovnici [32].

V pevných látkách, kde jsou složky vektoru rychlosti nulové, se pak získá rovnice [42]

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x_x} \right) + \frac{\partial}{\partial x_y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial x_y} \right) + \frac{\partial}{\partial x_z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial x_z} \right) + \tilde{q}, \quad (2.18)$$

jejíž aplikace slouží především k výpočtu teplotních polí.

2.4.2 Proudění tekutiny

Pohybové rovnice viskózní stlačitelné tekutiny se získají z rovnice hybnosti (2.6) a příslušné konstitutivní rovnice (Newtonova zákona) (2.14). Představují tak Navierovy–Stokesovy rovnice [4]

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] - \rho f_i = 0 \quad (2.19)$$

a vyjadřují pro jednotku hmotnosti protékající kapaliny vztah mezi silami vnějšími, tlakovými, odporovými a setrvačnými.

Celkové napětí v proudící newtonovské tekutině se vyjadřuje jako součet napětí pro ideální tekutinu a napětí vyvolaného prouděním tekutiny. Konstitutivní vztahy pro newtonovskou tekutinu vyjadřují napětí σ_{ij} v tekutině jako lineární funkci rychlosti deformace a tlaku p [36] podle vztahu (2.14). Zanedbáním vlivu objemové deformace vznikne nestlačitelná objemově stálá tekutina a (2.14) nabude často užívaného tvaru

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = -p\delta_{ij} + 2\mu \dot{\varepsilon}_{ij}. \quad (2.20)$$

V úloze proudění figuruje 15 neznámých veličin, a to tři složky vektoru rychlosti v_i , šest složek tenzoru rychlosti deformace $\dot{\varepsilon}_{ij}$ a šest složek tenzoru napětí σ_{ij} (zahrnující i tlak p) [29]. K dispozici je 15 rovnic, a to šest rovnic pro rychlost deformace, šest konstitutivních vztahů (2.14) a tři Navierovy–Stokesovy rovnice. Přitom vnější objemové síly f_i jsou předpokládány jako známé ze zadání problému. Hustota tekutiny ρ je zavedena rovnicí kontinuity (2.3).

2.4.3 Úloha pružnosti

Kontinuum schopné deformace přechází při působení vnějších sil, vyvolávajících deformaci jeho povrchu i stav napětí a deformace uvnitř kontinua, do rovnovážného stavu mezi působícími silami a vnitřními napětími [4]. To vyjadřují tři rovnice rovnováhy pružného kontinua (Cauchyho rovnice) získané z (2.6) zanedbáním časového faktoru

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = 0. \quad (2.21)$$

V každém bodu kontinua schopného deformace platí (2.7), takže tenzor napětí je tenzorem symetrickým a z devíti složek je jen šest nezávislých veličin σ_{ij} . Obecně je nelze určit pouze z podmínek rovnováhy (2.21), neboť to jsou pouze tři rovnice.

V úloze pružnosti figuruje 15 neznámých veličin [37], a to tři složky vektoru posunutí u_i , šest složek tenzoru deformace ε_{ij} a šest složek tenzoru napětí σ_{ij} . K dispozici je 15 rovnic, a to šest geometrických rovnic

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.22)$$

šest fyzikálních rovnic (2.16) a tři rovnice rovnováhy (2.21). Přitom vnější objemové síly f_i a hustota ρ jsou předpokládány jako známé ze zadání problému [29]. Mají-li funkce $\varepsilon_{ij}(x_l)$ popisovat deformaci spojitého tělesa, které zůstane spojitě i po deformaci, musí splňovat rovnice kompatibility deformací, které je nutné připojit k předchozím rovnicím. Pro jednoznačné řešení je nutné zadat okrajové podmínky pro funkce σ_{ij} a u_i . Při řešení úlohy klasické teorie pružnosti se vzhledem k předpokladu o malých deformacích nerozlišuje mezi deformovaným a nedeformovaným stavem tělesa.

Komplexní řešení úlohy přenosu tepla a statického chování lze v některých programech založených na MKP provést dvěma způsoby. V prvním způsobu se nejčastěji výsledky rozdělení teplot z tepelné analýzy uplatní jako teplotní zatížení působící na konstrukci při statickém řešení [13]. Druhou možností je přímé použití tzv. sdružené tepelně statické analýzy, přičemž se výsledky obou analýz vzájemně ovlivňují.

2.5 PŘIBLIŽNÉ ŘEŠENÍ DANÉHO PROBLÉMU

Počítače mohou provádět jen jednoduché operace a na základě toho jsou schopné přímo řešit pouze soustavu lineárních algebraických rovnic. Rovnice popisující fyzikální problémy, pokud je takové rovnice vůbec možné sestavit, však obsahují neznámé parametry v iracionálním tvaru. Dokonce ani po výrazném zjednodušení pomocí Taylorových rozvoju při značně zeslabené geometrické nelinearitě nelze přesné rovnice řešit přímo [19]. Posloupnosti soustav lineárních rovnic využitých v přírůstkových a iteračních krocích se snaží matematicky aproximovat to, co popisují přesné event. zjednodušené nelineární soustavy rovnic. Tím vzniká neodstranitelný rozdíl mezi fyzikálním a matematickým modelem konstrukce.

Otázkou je, zda získané řešení je reálně platné, protože soustavy nelineárních rovnic nemají jednoznačné řešení. Již při nízkém stupni nelinearity existuje velký počet matematicky vyhovujících kořenů. Protože se vychází z počátečního odhadu (obvykle klasického lineárního řešení), kořeny mohou být libovolně blízké, a protože v algoritmu nelze zahrnout žádné intuitivní procesy rozhodování, může u nelineárního řešení dojít k nalezení chybného kořene, který je v jistém smyslu nejbližší k prvotnímu odhadu.

Mezi metodami pro numerické řešení diferenciálních rovnic s počátečními a okrajovými podmínkami hrají důležitou roli variační metody [35]. Z hlediska pojednávaných problémů je numerické řešení parabolických diferenciálních rovnic pomocí variačních metod vzhledem k závislosti na čase na obecnější úrovni než řešení eliptických diferenciálních rovnic. Parabolická rovnice má tvar [35]

$$\frac{\partial v}{\partial t} + Av = f, \quad (2.23)$$

kde A je eliptický operátor, o němž lze pro jednoduchost předpokládat, že nezávisí na čase a je symetrický. K tomu je nutno připojit počáteční a okrajové podmínky.

Při numerickém řešení parabolické rovnice je nutné provést dvojí diskretizaci – časovou a prostorovou. Diskretizuje-li se jen v čase nebo jen v prostoru, jedná se o semidiskrétní metody. Pro prostorovou semidiskretizaci lze využít Galerkinovu semidiskrétní metodu. Přibližné řešení se předpokládá ve tvaru

$$v_N = \sum_{k=1}^N c_k(t) \omega_k. \quad (2.24)$$

Vznikne soustava lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. To je důsledek nezávislosti bilineární formy na čase. Úloha se obvykle řeší numericky. Prostorovou diskretizaci lze provést metodou konečných prvků. Přibližné řešení lze např. získat tak, že pro řešení časové úlohy se použije buď implicitní Eulerova metoda [35], nebo Crankova–Nicholsonova metoda [42]. Pro přechod z časové úrovně $k-1$ na úroveň k se v obou případech řeší soustava algebraických rovnic pro neznámé koeficienty hledaného řešení.

Při variační formulaci problému vedoucího na eliptické rovnice se uvažuje eliptická diferenciální rovnice ve tvaru

$$Av = f \quad (2.25)$$

s okrajovými podmínkami Neumannova či Dirichletova typu, nebo jejich kombinací.

Variační metody jsou založené na poznatku, že funkce $v = v_0$ je řešením rovnice (2.25) právě tehdy, když v_0 minimalizuje funkcionál energie [35]. Možnost použít při řešení okrajových úloh méně hladkých funkcí je jedním z důležitých rysů variačních metod. Princip minima potenciální energie lze využít pro řešení stacionárních rovnic pružnosti, gravitačního pole, vedení tepla, Maxwellovy–Stokesovy rovnice apod. Mezi základní přibližné variační metody se řadí metoda Ritzova a metoda Galerkinova. Se speciální volbou konečnědimenzionálního podprostoru tvoří základ metody konečných prvků.

V každém okamžiku musí být vyšetřovaná soustava rovnovážná, tedy i její přírůstek v čase musí být rovnovážný. To umožňuje použít inkrementální metodu, přičemž hlavním problémem se stane způsob, jak fyzikálně nezávadně sčítat přírůstky napětí, deformací či posunutí, dochází-li k velkým deformacím. V nelineárních úlohách mechaniky je nutné použít přírůstkové a iterační metody, jako jsou např. často využívané varianty Newtonovy–Raphsonovy metody, metody délky oblouku aj.

Dobrych výsledků lze dosáhnout zejména užitím metod funkcionální analýzy. Současný software metody konečných prvků umožňuje simulovat na počítači nejrůznější fyzikální procesy.

3 MATERIÁLOVÉ MODELY TERMOPLASTŮ

Nedílnou součástí matematického modelu jsou rovnice popisující deformaci a porušování termoplastového materiálu [17], [38]. Reálně je konstitutivní rovnice jako vztah mezi napětím a deformací nelineární, podle příslušného typu materiálu dochází k rozdílnému chování při zatěžování a odtěžování, projevují se nepružné účinky, dochází k trvalým deformacím v důsledku plastických deformačních procesů či ke změně tuhosti v důsledku vzniku a rozvoje trhlin. Výrazně se projevuje vliv doby působení zatížení, časová proměna a rovněž rychlost, s jakou změny probíhají, což vede na reologické modely. Reologie má proto zvláštní význam pro dlouhodobé deformování termoplastů.

Z reologického hlediska se stává rozhraní mezi pevnou látkou a kapalinou relativním pojmem [38]. Látky se složitější molekulární strukturou nemají ostrý přechod mezi kapalinou a pevnou fází ani z termodynamického hlediska. Pro reologický popis látek ležících na pomezí mezi kapalinami a pevnými látkami se zavádějí modely kombinující vlastnosti obou látek. Pro rozlišení obou druhů látek se zavádí bezrozměrné Debořino číslo [38], které je podílem doby relaxace a doby pozorování [32]

$$De = \frac{t_{\text{relax}}}{t_{\text{proces}}} \quad (3.1)$$

Je-li pozorovací doba velká nebo doba relaxace velmi malá, jeví se látka jako kapalina. Je-li doba relaxace látky větší než doba pozorovací, jeví se látka jako pevná. Čím větší je De , tím je látka pevnější, čím je De menší, tím se látka jeví tekutější.

U řady termoplastů dochází pod vlivem konstantního napětí k postupnému nárůstu deformace, tj. dotvarování. V materiálech, které mají tendenci dotvarovat, nastává při konstantní deformaci úbytek napětí – relaxace. Dotvarování a relaxace spolu úzce souvisejí a jsou způsobeny tím, že deformační procesy ve skutečnosti probíhají s určitým zpožděním. Konstitutivní vztahy nemusejí být vyjádřeny

pro každý časový okamžik zvlášť, ale zahrnují i předchozí vývoj napětí a deformace až po vyšetřovaný časový okamžik, v němž se druhá veličina (deformace či napětí) vyhodnocuje.

Při řešení plošných či prostorových konstrukcí by bylo vhodné uvažovat konstitutivní vztahy při víceosé napjatosti. Časová závislost vazkých deformací při obecné napjatosti však není zatím přesně definována, neboť dosud nebyl přijat všeobecně uznávaný jednotný model [17]. Proto se využívají jednoosé modely, které jsou nejpracovanější. Další úvahy se týkají jednoosého namáhání.

3.1 ZÁKLADNÍ REOLOGICKÉ LÁTKY A MODEL Y

Protože přímé analytické vyjádření reologických procesů je často nesmírně složité, využívají se reologické modely, umožňující názornou interpretaci deformačních vlastností jednotlivých materiálů, včetně matematického vyjádření a skládání účinků jednotlivých vlastností. Ve většině případů však nelze vyjádřit jednotným matematickým vztahem reologické deformace při opakovaném zatěžování a odtěžování. Proto se pro modelování reologického chování využívají základní reologické látky s odpovídajícími modely a diagramy [25], [38]. Samostatně se základní reologické látky ve skutečnosti vyskytují jen zřídka. Jedná se spíše o abstrakce vhodné pro vystižení jednotlivých podstatných reologických vlastností. Skládáním jednoduchých modelů základních reologických látek se pak získávají složitější reologické modely, umožňující přiblížit se k vystižení reologických vlastností reálných látek.

Podle chování za zvýšených teplot se polymery dělí na termoplasty, reaktoplasty, elastomery a termoplastické elastomery.

Termoplasty při zvyšování teploty postupně přecházejí ze stavu tuhého, křehkého nebo tvrdého do stavu kaučukovitě elastického, dále do stavu plastického a pak se mění na tekutinu (taveninu). Lze je opakovaně roztavit a ochlazením převést do tuhého stavu. Termoplasty se nacházejí ve dvou základních fázových stavech – krystalickém a amorfním. Krystalický stav je uspořádaný tuhý stav. Amorfní stav je buď sklovitý s neuspořádaným tuhým stavem, nebo kaučukovitý jako přechodový stav mezi sklovitým a kapalným, anebo plastický s neuspořádaným kapalným stavem.

Reaktoplasty setrvávají i při zvyšování teploty v tuhém stavu. Nevyskytují se v elastickém nebo plastickém stavu, ani je není možno převést do taveniny. Elastomery při stoupající teplotě poněkud měknou, aniž by však vlivem zvýšené teploty přecházely do plastického nebo kapalného stavu. Elastomer lze za běžných podmínek malou silou značně zdeformovat bez jeho porušení. Přitom deformace je převážně vratná. Termoplastické elastomery mají vlastnosti elastomerů, jsou však tavitelné a mohou se tedy zpracovávat obdobně jako termoplasty.

Reologické vlastnosti makromolekulárních látek značně ovlivňuje molekulová hmotnost polymeru, délka molekulových řetězců, rozložení molekulové hmotnosti, pohyblivost segmentů molekulových řetězců, ohebnost řetězců, velikost mezimolekulárních sil, mechanická zaklesnutí molekul, stupeň síťování polymerů, stupeň krystalizace, obsah plniv a změkčovadel aj. Podstatný vliv na vazkopružné vlastnosti vysokomolekulárních látek má teplota. S rostoucí teplotou látka měkne, deformace se zvětšují, moduly tečení a součinitele vazkosti se zmenšují.

3.2 NELINEÁRNÍ VAZKOPRUŽNOST

Nejjednodušším modelem pro popis reologického chování při smykovém namáhání je Newtonova vazká kapalina, u níž v případě jednoosého stavu platí pro smykové napětí [25]

$$\tau = \mu \frac{dv_x}{dy} = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dy} \right), \quad (3.2)$$

kde μ je newtonovská viskozita a dv_x/dy je rychlost smykové deformace. Většina polymerních látek se během toku taveniny chová newtonovsky jen při velmi nízkých rychlostech smykové deformace.

Při zvyšování rychlosti smykové deformace začíná být viskozita taveniny závislá na rychlosti smykové deformace a přechází do neneutronovského chování. Nejznámější rovnicí aproximující tok neneutronovských látek je mocninný model (rovnice Ostwaldova–de Waaleova) ve tvaru [25]

$$\tau = C_1(T) \left(\frac{dv_x}{dy} \right)^{C_2}, \quad (3.3)$$

kde C_1 je konzistentní faktor [Pa s^{C_2}] vyjadřující tekutost látky, C_2 je mocninný index neneutronovského chování ($C_2 > 1$ dilatantní, $C_2 < 1$ pseudoplastické použitelné pro většinu polymerních tavenin, $C_2 = 1$ newtonovské, takže $C_1 = \mu$). Při extrémně vysokých rychlostech smykové deformace taveniny lze opět uvažovat newtonovské chování.

Důležitým reologickým modelem je rovněž Binghamův model. Popisuje chování látek, jež se začnou deformovat (téci) až po překonání jisté úrovně smykového napětí τ_0 . Platí [25]

$$\tau = \tau_0 + \mu \frac{dv_x}{dy}. \quad (3.4)$$

Binghamův model lze použít pro newtonovské, pseudoplastické nebo dilatantní látky.

Kromě mocninného modelu se často používá také Birdův–Carreauův–Yasudaův model [33]. V mnoha případech je nekonečná smyková rychlost viskozity u tohoto modelu zanedbatelná a model se redukuje na tříparametrový. Původní Birdův–Carreauův–Yasudaův model byl Mengesem, Wortbergem a Michaelim modifikován pro teplotní závislost Williamsovým–Landelovým–Ferryho vztahem (odst. 3.2.1).

Teorii lineární vazkopružnosti lze využít pro polymery, u nichž lze uvažovat malé deformace. V této teorii se pro polymery využívají dva principy, a to princip časové a teplotní podobnosti a Boltzmannův superpoziční princip.

3.2.1 Princip časové a teplotní podobnosti

Pro modelování teplotní závislosti u termoplastů se využívá empirického poznatku, že odezva chování materiálu při zatížení je při působení vyšší teploty po kratší dobu stejná jako při působení nižší teploty po delší dobu [32]. K vystižení časové a teplotní podobnosti lze využít Williamsovu–Landelovu–Ferryho (WLF) rovnici

$$\log \frac{t}{t_{\text{ref}}} = - \frac{C_1(T - T_{\text{ref}})}{C_2 + (T - T_{\text{ref}})}, \quad (3.5)$$

kde značí t a t_{ref} skutečný a srovnávací čas, C_1 a C_2 materiálově závislé konstanty, T a T_{ref} skutečnou a srovnávací teplotu.

3.2.2 Boltzmannův princip superpozice

Podle Boltzmannova superpozičního principu je celková deformace dána součtem dílčích deformací od různých zatížení působících po určitou dobu v určitých časech [32], takže

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t - t_0) + (\sigma_1 - \sigma_0) J(t - t_1) + \dots + (\sigma_i - \sigma_{i-1}) J(t - t_i) + \dots, \quad (3.6)$$

kde J je funkce poddajnosti materiálu. Rovnici (3.6) lze, při respektování změny napětí nejprve se skokem na počátku zatěžování (v čase t_0) z nulové hodnoty na σ_0 , a nadále se spojitým vývojem, přepsat do integrálního tvaru [32]

$$\varepsilon(t) = J(t, t_0) \sigma_0 + \int_{t_0}^t J(t, t') \frac{\partial \sigma(t')}{\partial t'} dt'. \quad (3.7)$$

Materiál, u něhož funkce poddajnosti J závisí pouze na čase $t - t'$, je označován jako materiál bez stárnutí a jeho typickým představitelem jsou termoplasty, pokud se nezohledňuje jejich případná degradace ve velmi dlouhém časovém období.

3.3 VYBRANÉ REOLOGICKÉ MODELY

Složené vazkopružné modely jsou základem popisu tečení a relaxace termoplastů při dlouhodobém zatížení. V modelech lze zahrnout i vliv stárnutí, tj. proměnu vlastností materiálu v čase. Vazkopružné a pružnoplastické modely jsou založeny na předpokladu, že deformující se těleso zůstává spojitě a lze jej popsat v rámci teorie kontinua. Dojde-li k poškození, jeho rychlý rozvoj obvykle vede ke změkčování materiálu, tj. poklesu napětí za rostoucí deformace.

3.3.1 Maxwellův model

Reologické schéma Maxwellova modelu vznikne sériovým zapojením pružného a vazkého prvku [38], [17]. Oba prvky přenášejí stejné napětí ($\sigma = \sigma_e = \sigma_v$) a celková deformace ε je součtem dílčích deformací jednotlivých prvků, a to složky pružné a vazké ($\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v$). Pro rychlé procesy se zdeformuje pouze pružina a vazká deformace nemá čas se rozvinout, naopak pro pomalé procesy vazká deformace naroste do velkých hodnot, proti nimž je pružná deformace zanedbatelná. V případě vyjádření tohoto vztahu v rychlostech deformace představuje součet rychlostí deformace pružného i vazkého prvku základní reologickou rovnicí Maxwellova modelu [32]

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta}, \quad (3.8)$$

kde η je materiálová konstanta – normálová viskozita [17]. Poměr $t_R = \eta/E$ je relaxační čas. Maxwellův model je schopen postihnout okamžitou deformaci, a jeho vlastností je, že deformace v čase narůstá konstantní rychlostí, což odpovídá spíše chování vazké kapaliny než pevné látky [17].

3.3.2 Kelvinův model

Reologické schéma Kelvinova modelu vznikne paralelním zapojením pružného a vazkého prvku. Oba prvky jsou podrobeny stejné deformaci ($\varepsilon = \varepsilon_e = \varepsilon_v$) a celkové napětí je součtem příspěvků pružného a vazkého prvku [38]

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_v = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (3.9)$$

Pro rychlé procesy se Kelvinův model chová téměř jako vazký tlumič a pro pomalé skoro jako pružina. Přitom rychlost či pomalost procesu přetváření závisí na porovnání délky jeho trvání s charakteristickým časem, kterým je u Kelvinova modelu retardační čas (vazké zpoždění), vyjádřený poměrem $t_R = \eta/E$. Retardační čas zhruba vymezuje hranici mezi rychlými procesy ($t < 0,05 t_R$)

a pomalými procesy ($t > 3 t_R$), kdy nejsou téměř vůbec aktivovány vazké účinky. Kelvinův model nemá schopnost postihnout okamžitou deformaci po skokovém zvýšení napětí [17].

3.3.3 Složený reologický model

Protože v reálném materiálu probíhají různé fyzikální procesy s rozdílnými charakteristickými časy, je nutné ve výstižném modelu použít více článků s rozdílnými retardačními časy. Sériovým zapojením několika Kelvinových článků vznikne Kelvinův řetězec, který se osvědčil jako užitečný reologický model. Přidáním sériově připojené Hookovy látky (pružiny) předřazené před jednotlivé Kelvinovy články se odstraní hlavní nevýhoda jednoduchého Kelvinova modelu, a to neschopnost vystihnout okamžitou deformaci.

Sečtením deformací všech článků Kelvinova řetězce s doplněním vlivu předřazené pružiny získáme výraz

$$\varepsilon(t) = \frac{\hat{\sigma}}{E_0} + \sum_{i=1}^N \frac{\hat{\sigma}}{E_i} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right), \quad (3.10)$$

kde N je počet Kelvinových článků. Pravá strana v (3.10), představující Pronyho řadu, umožňuje aproximovat v dobré shodě širokou oblast časových intervalů, které se mohou lišit o mnoho řádů [17].

3.4 POLOEMPIRICKÉ KONSTITUTIVNÍ VZTAHY

Pro vystižení dotvarování (creepového chování) se často používají různé konstitutivní vztahy poloempirického charakteru. Jako příklad je uveden Nortonův model [33]

$$\varepsilon(t) = k(T) \sigma^{C_1} t^{C_2}, \quad (3.11)$$

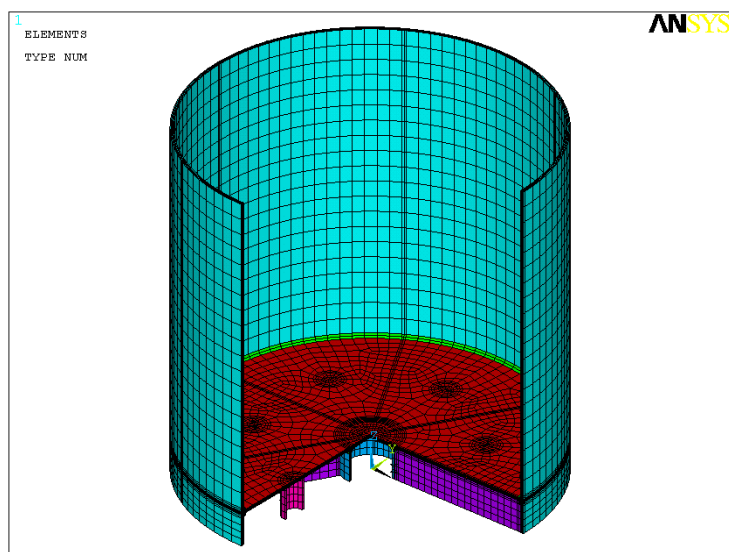
kde k , C_1 , C_2 jsou materiálově závislé charakteristiky. Přitom pro řešení v čase se používá Eulerova dopředná metoda, Eulerova zpětná metoda, popř. jiné metody. Časové kroky se volí s ohledem na přesnost, časovou náročnost a numerickou stabilitu výpočtu.

Pro řešení praktických problémů je výhodné mít k dispozici metodu, která umožní získat s přijatelnou chybou přibližnou aproximaci výsledného stavu v jediném kroku a jednoduchým způsobem [17], např. výpočet s využitím modulu tečení. Modul tečení se přiřazuje podle úrovně napětí, podle stavu teplotního pole v tělese a podle příslušného času.

4 APLIKACE

V této kapitole je ukázka komplexnějšího řešení úlohy přenosu tepla a statické analýzy v čase. Jak je uvedeno v odst. 2.4.3, řešení tohoto problému lze provést dvěma způsoby. V častějším jednodušším způsobu se výsledky teplotního pole získané z analýzy přenosu tepla uplatní jako teplotní zatížení působící na konstrukci a následně se řeší statická analýza v čase. Tento způsob je uplatněn i v následujícím příkladu. Pro nádrže z termoplastů je typická aplikace jednodušší varianty, neboť statická analýza neovlivňuje rozložení teplotního pole [13].

Tepelně statický výpočet stojaté válcové nadzemní nádrže bez víka je proveden na modelu podle obr. 4.1. Nádrž je z polyetylénu (PE-HD) pro ohřátou vodu s objemem cca $2,5 \text{ m}^3$, výška nádrže je 1650 mm, průměr nádrže je 1500 mm, tloušťka dna a pláště je 10 mm.

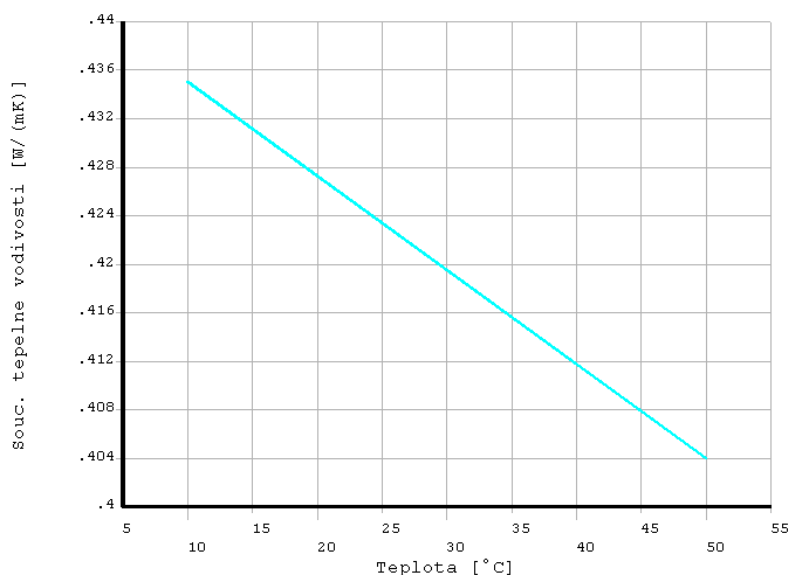


Obr. 4.1. Část modelu konstrukce nádrže

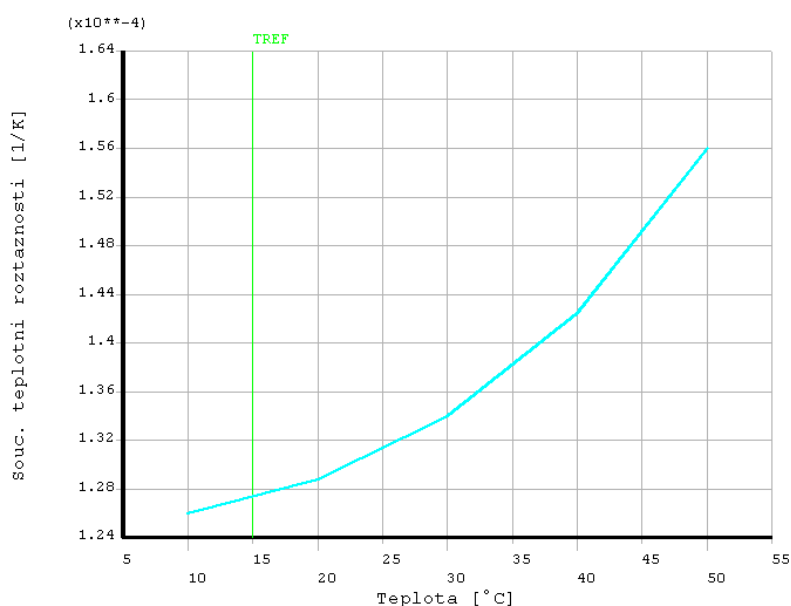
Zatížení bylo uvažováno hydrostatickým tlakem kapaliny při plné nádrži, teplota kapaliny 50 °C a okolního prostředí 20 °C, přičemž výpočtový proces simuloval dobu zatěžování 10 000 hodin a teploty zůstaly nezměněny. Montážní teplota byla uvažována hodnotou 15 °C.

4.1 TEPLTNĚ ZÁVISLÉ MATERIÁLOVÉ CHARAKTERISTIKY

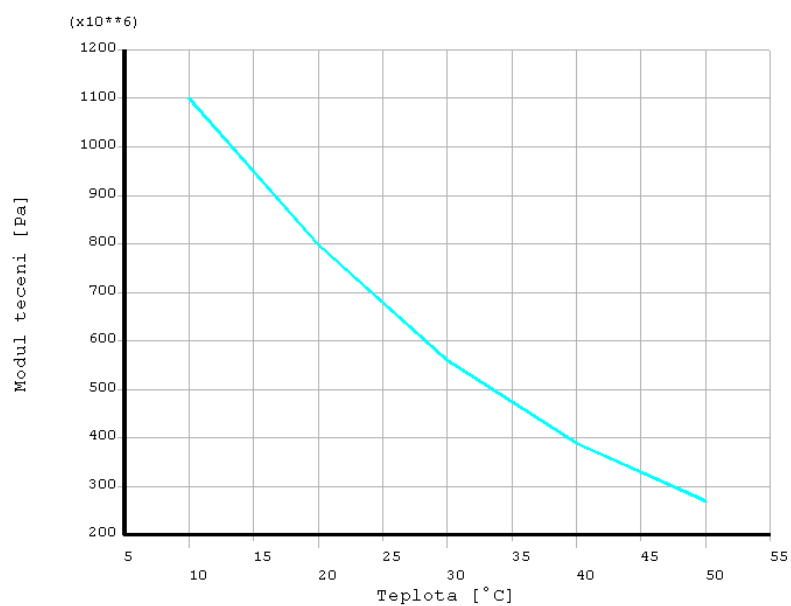
Většina materiálových charakteristik byla uvažována s hodnotami teplotně závislými, získanými ze zdrojů [50], [53], [32], [33]. Týká se to zejména součinitele tepelné vodivosti k_i (obr. 4.2), součinitele teplotní roztlačnosti α_T (obr. 4.3), modulu tečení E_c výrazně závislého také na napětí a čase (na obr. 4.4 je ukázka pro daný čas a úroveň napětí) a dále Poissonova součinitele ν (obr. 4.5).



Obr. 4.2. Závislost součinitele tepelné vodivosti k_i polyetylénu PE-HD na teplotě



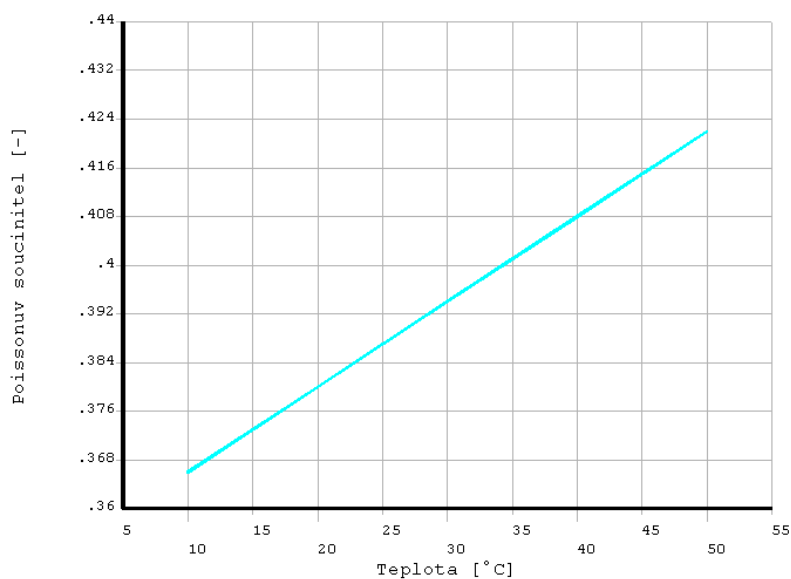
Obr. 4.3. Závislost součinitele teplotní roztaznosti α_T polyetylénu PE-HD na teplotě



Obr. 4.4. Závislost modulu tečení E_c polyetylénu PE-HD na teplotě v čase 0,1 h pro úroveň napětí 2 MPa

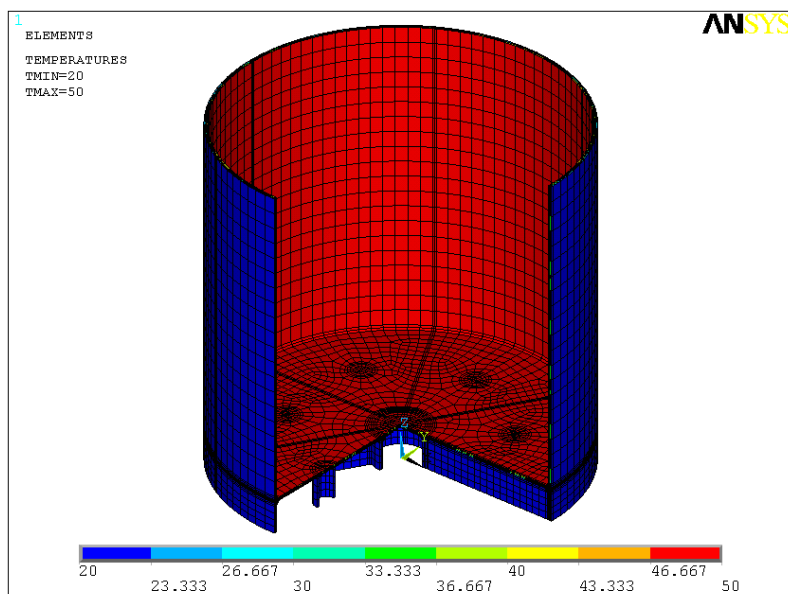
4.2 VÝPOČET ROZDĚLENÍ TEPLŮT V KONSTRUKCI

Z bilance energie pro pevnou látku při současném uplatnění Fourierova zákona pro konduktivní mechanismus sdílení tepla a při zanedbání či neuvažování některých jiných forem energie byla v odst. 2.4.1 získána rovnice (2.18) pro přenos tepla. Tato rovnice byla v dané úloze využita k výpočtu teplotních polí. Pro samostatnou stacionární teplotní analýzu byl v systému ANSYS použit 3D prvek SOLID70.



Obr. 4.5. Závislost Poissonova součinitele v polyetylénu PE-HD na teplotě

Okrajové podmínky byly v teplotní analýze zvoleny tak, že vnitřnímu povrchu nádrže byla přiřazena teplota 50 °C (ohřátá voda) a u vnějšího povrchu byla uvažována teplota 20 °C (okolní vzduch). Po změně typu prvků při aplikaci zjednodušeného způsobu řešení bylo získané teplotní pole (obr. 4.6) použito pro statický výpočet v čase.



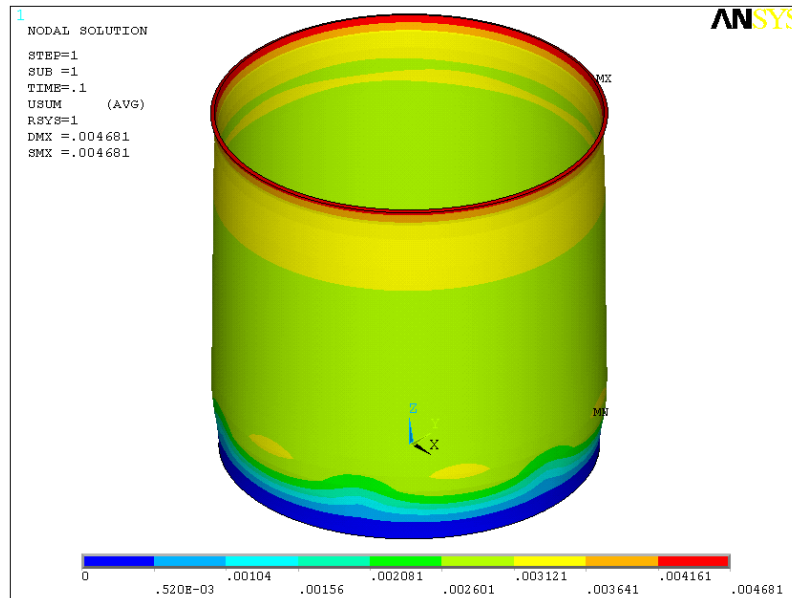
Obr. 4.6. Rozdělení teplot po konstrukci nádrže

4.3 STATICKÝ VÝPOČET V ČASE

Zatížení pláště a dna vycházelo z hydrostatického tlaku kapaliny při plné nádrži a z teplotního pole získaného řešením stacionární teplotní úlohy. Pro statickou analýzu byl použit 3D prvek SOLSH190

programového systému ANSYS, přičemž ve spodní části nádrže bylo zabráněno všem posuvům.

Na obr. 4.7 a 4.8 jsou uvedeny výsledky celkového posunutí a Misesova napětí z geometricky a fyzikálně nelineárního výpočtu v čase 0,1 hodiny. Tento stav byl brán jako výchozí (počáteční) pro statické řešení v čase.



Obr. 4.7. Celkové posunutí, geometricky a fyzikálně nelineární výpočet v čase 0,1 h

U statické analýzy v čase jsou v řešené úloze funkce napětí použité pro vazkopružný materiálový model z [42], využívající pro aproximaci smykových a objemových modulů tečení Pronyho řadu [1], [42], dány v integrálním tvaru. Pro použitý izotropní vazkopružný materiál je konstitutivní vztah pro tenzor napětí $[\sigma(t')]$ vyjádřen rovnicí

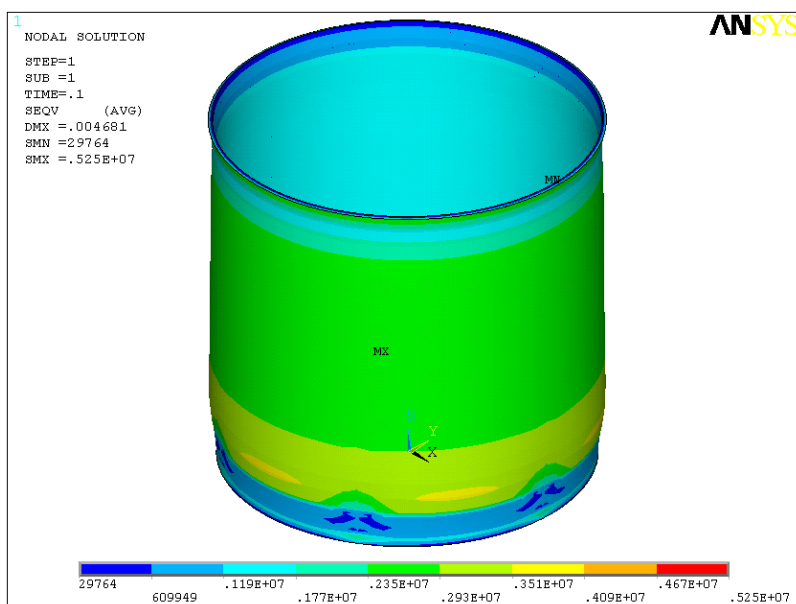
$$[\sigma(t')] = \delta_{ij} \int_{t_0}^t K_C(t') (t-t') \dot{\varepsilon}_v(t') dt' + 2 \int_{t_0}^t G_C(t') (t-t') [\dot{\varepsilon}(t')] dt', \quad (4.1)$$

kde $\dot{\varepsilon}_v(t')$ je rychlost objemové deformace a $[\dot{\varepsilon}(t')]$ tenzor deviatoru rychlosti deformace. Smykový a objemový sečný modul tečení v (4.1) jsou vyjádřeny pomocí Pronyho řady ve tvarech [3], [42]

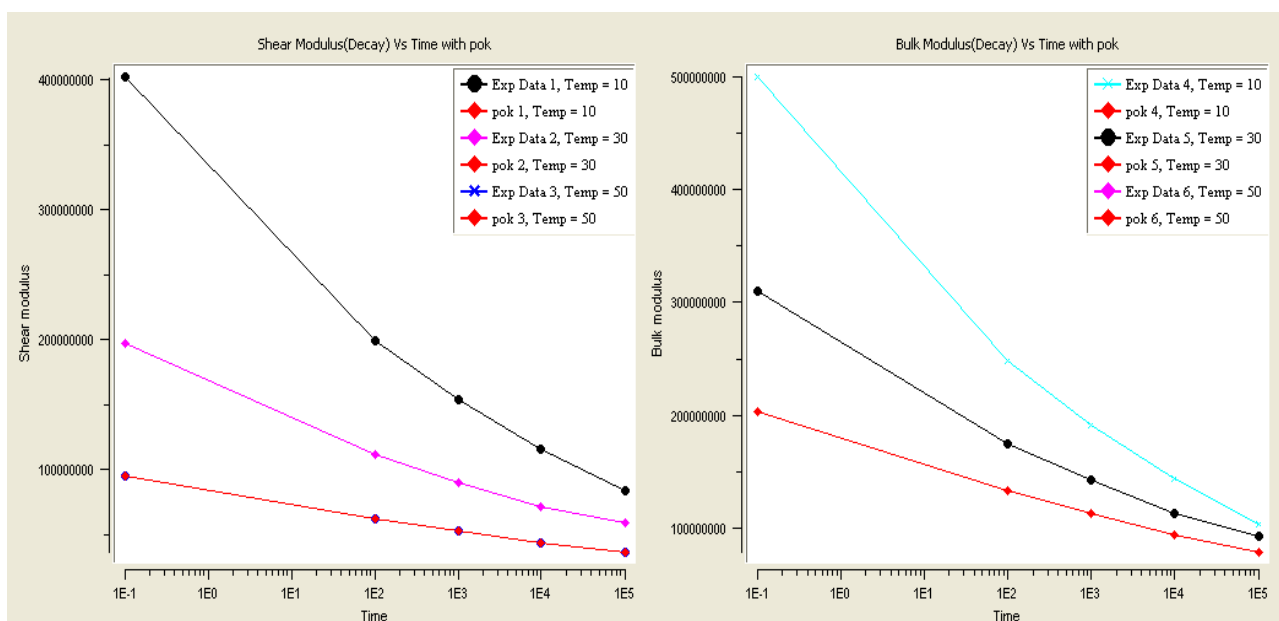
$$G_C(t') = G_\infty + \sum_{i=1}^{n_G} G_i e^{-\frac{t}{t_i^G}}, \quad (4.2)$$

$$K_C(t') = K_\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i e^{-\frac{t}{t_i^K}}, \quad (4.3)$$

kde G_∞ a K_∞ jsou smykový a objemový sečný modul tečení na konci časového intervalu a horní meze sumací udávají počet Maxwellových vazkopružných modelů. Hodnoty modulu tečení se ve výpočtu v časových krocích automaticky mění podle zadaných diagramů jako na obr. 4.9.



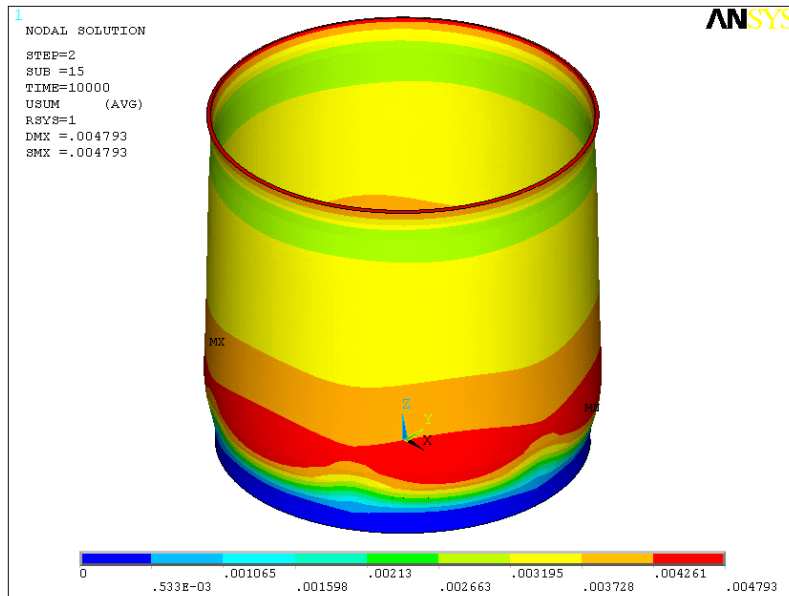
Obr. 4.8. Misesovo napětí, geometricky a fyzikálně nelineární výpočet v čase 0,1 h



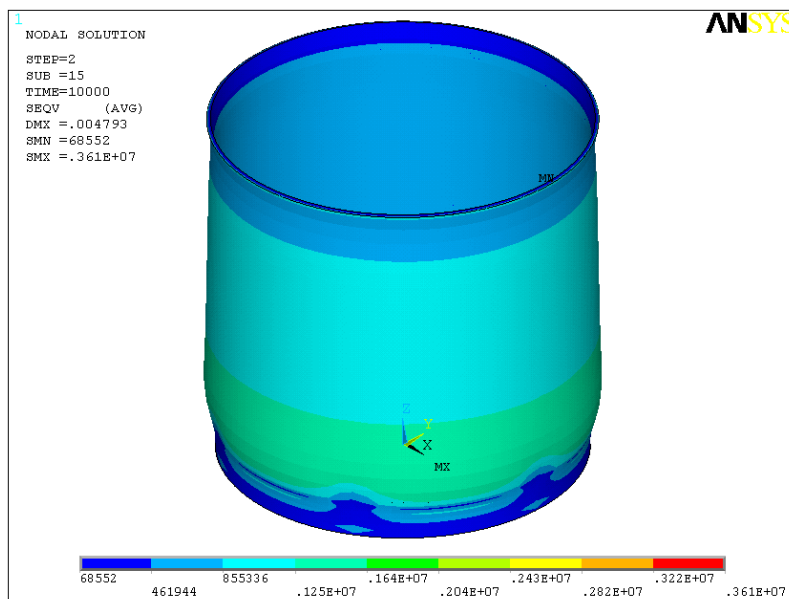
Obr. 4.9 Závislost smykového a objemového modulu [Pa] termoplastu PE-HD na čase [h]

Podle odst. 3.2.1 je pro vyjádření závislosti veličin vazkopružného materiálového modelu na změně teploty využít princip časové a teplotní podobnosti. Proto byla v numerickém modelu pro urychlení výpočtu využita jako funkce závislosti materiálových hodnot na teplotě funkce WLF (3.5). Vazkopružný materiálový model byl získán aproximací experimentálních dat pomocí nelineární regrese, a to zadáním objemových a smykových sečných modulů tečení pro určité časy a teploty. Na obr. 4.9 je dokumentována shoda vložených experimentálních dat závislosti smykového a objemového modulu tečení termoplastu PE-HD na čase pro úroveň napětí 2 MPa s aproximací použitou v systému

ANSYS [42] při nelineární regresi po 1 000 iteracích. Na obr. 4.10 a 4.11 jsou pak zobrazeny výsledky celkových posunů a Misesova napětí z nelineárního statického řešení v čase po 10 000 hodinách.



Obr. 4.10. Celkové posuny, geometricky a fyzikálně nelineární výpočet po 10 000 h



Obr. 4.11. Misesovo napětí, geometricky a fyzikálně nelineární výpočet po 10 000 h

Postup výpočtu realizovaný pomocí teplotní analýzy s následným převedením výsledků rozdělení teplot po konstrukci do statické analýzy řešené v čase se ukazuje jako vhodný pro aplikaci na termoplastové konstrukce [13]. Přitom lze ve výpočtech uvažovat materiály, jejichž vlastnosti jsou závislé na teplotě, čase i napětí. Výpočtový model nadzemní nádrže z PE-HD tak umožnil v čase

komplexněji analyzovat konstrukci včetně detailů pomocí objemových prvků při zatížení hydrostatickým tlakem i změnou teploty.

5 ZÁVĚR

V práci jsou shrnuty teoretické zákonitosti, které je nutné zvládnout pro kvalifikovanou analýzu statického chování a posuzování únosnosti termoplastových konstrukcí či jejich částí. Termoplasty jsou ve většině případů vhodné pro stavební konstrukce a části přiměřeně zatěžované a provozované. V praxi se však ukazuje, že často podstatným kritériem při volbě termoplastu pro konkrétní použití je cena finálního výrobku.

Prokázalo se, že výpočet termoplastových konstrukcí i jejich detailů je nutné realizovat pomocí dlouhodobých hodnot materiálových charakteristik. Data mají charakter funkční závislosti, jako problematické se však jeví získávání údajů v této podobě, neboť druhů plastů a jejich modifikací je stále více. Přitom zkoušky pro jejich získání jsou velmi náročné a většinou těžko dostupné od firemních subjektů.

Změna teploty je výrazně dominantním vlivem a má zásadní význam pro konstrukce z termoplastů. Při provozu je teplota často limitujícím faktorem pro jejich použitelnost. Spolu s životností pak teplotní vlivy určují meze hospodárnosti termoplastových konstrukcí. Vliv teploty se projevuje hlavně ve změně materiálových vlastností, jako je pevnost a modul tečení. Závislost modulu tečení na teplotě je přitom zásadní pro analýzu stability. Při spolupůsobení různých materiálů hraje také podstatnou roli jejich rozdílná teplotní roztažnost.

Při kvalifikovaném navrhování termoplastových konstrukcí je nezbytné respektovat fyzikální a geometrickou nelinearitu, vystižení charakteru reologického chování materiálu, věnovat pozornost kontaktním úlohám, řešení stability či optimalizaci. Ve statické analýze je vedle vlivu změny teplotního pole rovněž nezbytné postihnout vliv záření, vliv technologie výroby materiálu a způsob spojování se vznikem reziduálního pnutí, vliv vhodnosti navrhovaného geometrického tvaru a důležitosti celé konstrukce včetně konstrukčních detailů, způsob uložení konstrukce, dobu působení zatížení, vliv okolního prostředí, fáze výstavby s nejnepříznivějšími kombinacemi zatěžovacích stavů, odpovědně zvážit výběr použitého materiálu, vhodnost jeho konkrétního použití apod. [9].

Pro praktické navrhování a posuzování termoplastových konstrukcí se ukazuje, že v mnoha případech postačuje použití zjednodušeného výpočtu pomocí dovoleného napětí a modulu tečení [48], [15], které jsou stanoveny jedinou hodnotou podle odhadu závislosti na čase, úrovni teploty a okolním prostředí. Podle provedených numerických analýz [12] se v těchto případech jeví jako dostačující realizovat u termoplastových nádrží řešení se skořepinovým prostorovým modelem s náhradním zatížením. Přitom lze postupovat v krocích, počínaje lineárním výpočtem, přes výpočet lineární stability až po ověření geometricky nelineárního řešení, přičemž je vhodné provést i elementární kontrolu ručním výpočtem. V případě podrobnějšího a přesnějšího numerického modelování se naopak osvědčilo modelování pomocí objemových konečných prvků s řešením v čase a s využitím sdružené teplotní analýzy se statickou analýzou.

Přestože lze v současné době konstrukce z termoplastů analyzovat velice podrobným numerickým modelem, může někdy podrobnější modelování ztrácet smysl. Nastává to v případech, kdy je poměrně často při praktické aplikaci použit nevhodný materiál nebo nekvalitní svářecí stroje, je nedostatečná či dokonce žádná kvalifikace svářečů a technologů, chybí specifikace postupu svařování, výrobní dokumentace či návod k použití apod. Vzhledem k některým poddimenzovaným či nekvalitně provedeným konstrukcím tak v důsledku jejich destrukcí či nefunkčnosti může dojít ke ztrátě důvěry v termoplastové konstrukce všeobecně.

POUŽITÁ LITERATURA

- [1] Belytschko, T., Liu, W.K., Moran, B. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley & Sons Ltd., New York: 2000.
- [2] Bittnar, Z., Šejnoha, J. *Numerické metody mechaniky 1, 2*. Vydavatelství ČVUT, Praha: 1992.
- [3] Bower, A. F. *Applied Mechanics of Solids*. 2008. <http://solidmechanics.org/contents.htm>.
- [4] Brdička, M., Samek, L., Sopko, B. *Mechanika kontinua*. Třetí vydání, Academia, Praha: 2005, 799 s., ISBN 80-200-1344-X.
- [5] Crawford, R. J. *Plastics Engineering*, Elsevier, Great Britain, Oxford: 1998.
- [6] Felippa, C. A. *Introduction to Finite Element Methods*, University of Colorado, Boulder: 2004. <http://www.colorado.edu/engineering/Aerospace/CAS/courses.d/IFEM.d/>.
- [7] Fish, J., Belytschko, T. *A First Course in Finite Elements*. John Wiley & Sons Ltd, Chichester: 2007, ISBN 978-0-470-03580-1.
- [8] Gratza, R. Analýza únosnosti konstrukcí a prvků z termoplastů. *Disertační práce*, FAST VUT v Brně, Brno: 2007.
- [9] Gratza, R., Kytýr, J. Statická analýza nádrží z termoplastů. *CIDEAS – dílčí výzkumná zpráva 2.5.2.2 – 15*, 16: 2006, 14 s.
- [10] Gratza, R., Kytýr, J. Vliv působení teplotních změn na termoplastové konstrukce. *CIDEAS – dílčí výzkumná zpráva 2.5.2.2 – 17*: 2006, 15 s.
- [11] Gratza, R., Kytýr, J. Vliv časového faktoru při zatížení na termoplastové konstrukce. *CIDEAS – dílčí výzkumná zpráva 2.5.2.2 – 31*: 2007, 14 s.
- [12] Gratza, R., Kytýr, J. Podzemní stojaté válcové nádrže z termoplastu. *CIDEAS – dílčí výzkumná zpráva 2.5.2.2 – 41, 42*: 2008, 11 s.
- [13] Gratza, R., Kytýr, J. Statické řešení termoplastové nádrže. *Modelování v mechanice*, Ostrava: 2009, s. 43–44, ISBN 978-80-248-2016-3.
- [14] Gratza, R., Kytýr, J. Statické řešení částí potrubních systémů z termoplastu. *CIDEAS – dílčí výzkumná zpráva 2.5.2.2 – 52*: 2009, 11 s.
- [15] Gratza, R., Kytýr, J. Vliv doby působení zatížení na stabilitu termoplastového dílce. *Stavební obzor 10/2009*, Praha: 2009, s. 296–301, ISSN 1210-4027.
- [16] Gratza, R., Kytýr, J. Statické řešení podzemní válcové nádrže z termoplastu. *Stavební obzor 3/2010*, Praha: 2010, s. 70–72, ISSN 1210-4027.
- [17] Jirásek, M., Zeman, J. *Přetváření a porušování materiálů. Dotvarování, plasticita, lom a poškození*. Nakladatelství ČVUT, Praha: 2006, ISBN 80-01-03555-7.
- [18] Kolář, V., Kratochvíl, J., Leitner, F., Ženíšek, A. *Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků*. 2. vydání, SNTL, Praha: 1979, 544 s.
- [19] Kolář, V., Němec, I., Kanický, V. *FEM – Principy a praxe metody konečných prvků*. Vydavatelství Computer Press, Praha: 1997, 401 s. ISBN 80-7226-021-9.
- [20] Kolektiv autorů *ANSYS Thermal*. SVS FEM, s.r.o., Brno: 2005.
- [21] Kolektiv autorů *Nelinearity II*. SVS FEM, s.r.o., Brno: 2005.
- [22] Kolektiv autorů *Nelinearity IV*. SVS FEM, s.r.o., Brno: 2006.
- [23] Krebs, J. *Teorie zpracování nekovových materiálů*. Technická univerzita v Liberci, Liberec: 2001.
- [24] Křen, J., Rosenberg, J. *Mechanika kontinua*. Vydavatelství ZČU, Plzeň: 2002. <http://www.kme.zcu.cz/granty/biofrvs/interakce.html>.
- [25] Kvasnica, J., Havránek, A., Lukáč, P., Sprušil, B. *Mechanika*. Druhé vydání, Academia, Praha: 2004, 476 s., ISBN 80-200-1268-0.
- [26] Kytýr, J., Gratza, R. A Study of Time-Dependent Stability Loss of a Thermoplastic Reservoir

- Segment. *International Journal of Materials and Structural Reliability*, Thailand, Bangkok: 2009.
- [27] Kytýr, J., Gratza, R. A Study of an Underground Self-Carrying Thermoplastic Reservoir. *International Journal of Materials and Structural Reliability*, Thailand, Bangkok: 2010.
- [28] Loyda, M., Šponer, V., Ondráček, L. a kol. *Svařování termoplastů*. UNO Praha s.r.o., Praha: 2001.
- [29] Maršík, F. *Termodynamika kontinua*. Academia, Praha: 1999, 318 s., ISBN 80-200-0758-X.
- [30] Maršík, F., Dvořák, I. *Bietermodynamika*. Druhé přepracované vydání, Academia, Praha: 1998, 270 s., ISBN 80-200-0664-8.
- [31] Němec, I. *Nelineární mechanika*. Modul OD7 – M01 Základy nelineární mechaniky, studijní opory FAST VUT v Brně, Brno: 2006, 70 s.
- [32] Osswald, T. A., Menges, G. *Materials Science of Polymers for Engineers*. 2nd Edition, Carl Hanser Verlag, Munich: 2003, 622 s. ISBN 3-446-22464-5.
- [33] Osswald, T. A., Baur, E., Brinkmann, S., Oberbach, K., Schmachtenberg, E. *International Plastics Handbook*. 2nd Edition, Carl Hanser Verlag, Munich: 2006, 902 s. ISBN-10: 3-446-22905-1.
- [34] Pokluda, J., Kroupa, F., Obdržálek, L. *Mechanické vlastnosti a struktura pevných látek*. VUT v Brně, Brno: 1994.
- [35] Rektorys, K. a spolupracovníci *Přehled užití matematiky I, II*. Sedmé vydání, Nakladatelství Prometheus, Praha: 2000, 1594 s., ISBN 80-7196-179-5.
- [36] Říha, J. a kol. *Matematické modelování hydrodynamických a disperzních jevů*. Skriptum, VUT v Brně, Brno: 1997, 185 s., ISBN 80-214-0827-4.
- [37] Servít, R. a kol. *Teorie pružnosti a plasticity I, II*. SNTL/ALFA, Praha: 1981 a 1984, 876 s.
- [38] Sobotka, Z. *Reologie hmot a konstrukcí*. Academia, Praha: 1981, 499 s.
- [39] Šesták, J., Rieger, F. *Přenos hybnosti, tepla a hmoty*. Skriptum, Vydavatelství ČVUT v Praze, Praha: 2004.
- [40] Šmiřák, S. *Pružnost a plasticita I pro distanční studium*. Skriptum, PC-DIR, Brno: 1995, 210 s., ISBN 80-214-0739-5.
- [41] Šuba, O. K otázkám zohlednění specifičnosti mechanického chování termoplastů při posuzování plošných konstrukcí. Seminář *Zásady navrhování konstrukcí z termoplastů*, Skalský dvůr: 2002, s. 48–63.
- [42] Theory Reference – ANSYS, release 12.0.
- [43] UNO Praha, s.r.o., *Svářečská škola plastů*. Praha: 2005.
- [44] Zienkiewicz, O. C. *The Finite Element Method*. The third edition, McGRAW-HILL Book Company, London: 1977, ISBN 0-07-084072-5.

Normy a směrnice

- [45] ČSN EN ISO 527-1 *Plasty – Stanovení tahových vlastností – Část 1: Základní principy*. 1997.
- [46] ČSN EN ISO 899-1 *Plasty – Stanovení kríповého chování – Část 1: Kríp v tahu*. 2004.
- [47] ČSN EN ISO 899-1 *Plasty – Stanovení kríповého chování – Část 2: Kríp v ohybu při třibodovém zatížení*. 2004.
- [48] ČSN EN 1778 *Charakteristické hodnoty pro svařované konstrukce z termoplastů – Stanovení dovoleného namáhání a modulů pro navrhování svařovaných dílů z termoplastů*. 2002.
- [49] DIN 16887 *Prüfung von Rohren aus thermoplastischen Kunststoffen; Bestimmung des Zeitstand-Innendruckverhaltens*. 1990.
- [50] DVS – *Merkblätter und Richtlinien Fügen von Kunststoffen*. Band 68/IV, 2006.

Internetové stránky

[51] www.georgefischer.com

[52] www.roechling.de

[53] www.simona.de

ABSTRACT

The consumption of plastic materials keeps increasing, their use being frequent also in civil engineering. Plastic products have to fulfill a number of functions. For different areas of use, plastics with specific properties suitable for a particular product or a particular structure can be designed. In civil engineering, it is basically the design and evaluation of thermoplastic structures such as vessels, piping systems or their parts. It is to be found out that thermoplastic materials are mostly suitable for building structures and their parts which are adequately loaded and used. In this case, polyethylene, polypropylene, polyvinyl chloride or polyvinylidene fluoride are significantly used.

Currently, static evaluation of thermoplastic structures (or frequently only of thermoplastic products, not building structures) often leads to destructions in thermoplastic vessels, in particular. For this reason, experts sometimes doubt whether plastic structures function properly during the whole guaranteed period of their service life. Poor quality or underdimensioned structures, their failure or loss of functionality might jeopardize trust in plastic structures. As far as the use of plastic structures is concerned, there are frequent underestimations of temperature change and time factor due to lack of knowledge of the material behaviour during design. A practical design often lacks clearly defined data on the plastics used, methodology of a good quality design and of thermoplastic structures manufacturing, a requirement to observe the corresponding legislation, etc.

For this reason, a detailed numerical modelling of strain and stress (or stability) analysis of thermoplastic structures and their parts in order to evaluate their static behaviour is an up-to-date problem, requiring a complex approach, both theoretical and practical, to time dependent analyses of thermoplastic structures. In practice, however, manufacturers and/or users often violate elementary conditions for an adequate manufacturing or use and, thus, a detailed modelling might be useless. Moreover, when choosing a thermoplastic material for a given use, the dominant criterion, which is often at the expense of the product or structure quality, is the price of a final product.

Current advanced computational software offers a number of possibilities for numerical modelling of different physical phenomena. For efficient use and functioning of computational systems, it is necessary mainly to understand the physical nature and physical processes of the analysed problem. Using a simplified and adequate numerical model, physical principles and properties of suitably applied finite elements have an influence on the approximation of the processes going on in a real structure. These are mainly modelling of 3D elements, temperature field distribution in the structure, rheological behaviour consideration, interactions with the surrounding, etc. The understanding of physical and chemical properties is needed in order to classify the material, to obtain suitable data for computation and, also, it is necessary to follow the standards. To make a qualified decision about the properties of a numerical model and to interpret the results obtained, it is also necessary to be familiar with the corresponding numerical methods.

To describe the processes in thermoplastic structures adequately when they are used, for numerical modelling it is needed to carry out a complex analysis which would make it possible to understand the physical laws describing these processes, a mathematical apparatus and numerical methods. This would enable to analyze thermoplastic structures and properties defining the designed material at all stages of its behaviour.

This work summarizes the theoretical background and the mathematical apparatus needed to conduct an analysis of static behaviour and to evaluate the load-carrying capacity of thermoplastic structures and their parts. The aim is to create adequate numerical patterns with the best approximation to the reality. It is a demanding process requiring full knowledge and understanding of the physical principles as well as practical erudition in this problem in its complexity.

An integral part of qualified numerical modelling is the use of adequate constitutive equations of material behaviour with regard to strain, stress, temperature and time. As a number of plastic types keeps growing, detailed data expressing a function are difficult to obtain from long-term tests of material properties. In spite of this, it is necessary to perform analyses of plastic segments based exclusively on the data determined in this way. Such data are obtained mostly from long-term tension and bending experiments. For this, it is necessary to understand the behaviour of the structure under static and dynamic load, under temperature changes, during the interaction with its surrounding, etc. during the whole service life. Moreover, the choice of the values used is closely related to the type of structure loading, to a material model, etc. Since long-term tests are usually expensive and time consuming, the values obtained from short-term tests are often extrapolated.

Simple mechanical tests are more accessible; however, their conditions have to be agreed. Also, these tests provide only discrete data; functions regarding time and temperature parameters cannot be obtained from them. Some manufacturers and users of thermoplastic materials, however, tend to consider such data which are not based on a qualified analysis suitable for designing and evaluating thermoplastic structures. Nevertheless, it is necessary to take into account the fact that, for many reasons, the conditions under which simple tests are carried out may differ considerably from the conditions under which thermoplastic segments or structures are used.

Viscoelastic nature is of particular importance because it makes time and temperature more significant factors of deformative and destructive processes in comparison with metals, glass or ceramics, for example. The period of the force action, the frequency of dynamic load and strain rate have different nature at different temperatures according to the given material structure. The factors such as stiffness and toughness usually play a decisive role in thermoplastic products.

Temperature has a dominant influence for thermoplastic structures. This can be found mainly in the change of material properties which depend on temperature, in particular with regard to stiffness and creep modulus. The temperature dependence of the creep modulus is fundamental for stability analysis. In case of temperature changes, also a different thermal expansion must be considered if different materials interact. The influence of temperature change often limits the use of thermoplastic structures. Temperature influences together with service life determine the economy limits of thermoplastic structures.

For numerical analysis of thermoplastic structures or their parts, in practice, it proved useful first to test constitutive relations describing material models which describe rheological behaviour of thermoplastic materials using simple numerical patterns. If the adequate constitutive relations of the material cannot be obtained by an approximation of the experimental data (stress, strain, temperature, time), for verification, it proved useful to use a simplified material model, using, for example, a secant creep modulus. When opting for a material model, it must be taken into account if the creep moduli are more or less dependent on the achieved level of stress, for instance. Loading and unloading must always be considered. It is also needed to consider if the properties of the rheological behaviour of the given material are suitable.