

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
Fakulta strojního inženýrství
Ústav matematiky

Ing. Karel Doubravský

**Matematický model rozložení tvrdosti na
šroubech**
Mathematical model of hardness layout on bolts

Zkrácená verze Ph.D. Thesis

Obor: Matematické inženýrství

Školitel: Doc. RNDr. Bohumil Maroš, CSc.

Oponenti: Prof. RNDr. Ivana Horová, CSc,
Prof. Ing. Radko Samek, CSc,
Doc. Ing. Stanislav Ruzs, CSc.

Datum obhajoby: 4. 5. 2005

KLÍČOVÁ SLOVA

Matematický model, statistická analýza, mikrolegovaná ocel, vysoce pevné šrouby, tváření za studena, tepelné zpracování, rozložení tvrdosti, křivky přetvárného odporu, nerovnoměrnost deformace.

KEYWORDS

Mathematical model, statistic analysis, micro-alloyed steel, high strength bolts, cold forming, heat treatment, hardness layout, stress-strain curves, inhomogeneity of deformation.

MÍSTO ULOŽENÍ DISERTAČNÍ PRÁCE

Oddělení vědy a výzkumu FSI VUT v Brně, Technická 2, 616 69 Brno.

© Karel Doubravský 2005

ISBN 80-214-2965-8

ISSN 1213-4198

Obsah

1	Úvod	5
1.1	Současný stav řešení	5
1.2	Cíle práce	5
2	Tvrдость	6
2.1	Parametry ovlivňující tvrдость	6
2.2	Měření tvrđosti	6
2.3	Zkoušky vnikací	7
2.3.1	Zkouška Vickersova	7
3	Matematická statistika	8
3.1	Testy hypotéz	8
3.2	t rozdělení	10
3.3	F rozdělení	11
3.4	Mnohonásobná porovnávání	12
3.4.1	Scheffého metoda	12
3.4.2	Tukeyova metoda	13
3.4.3	Jednoduché třídění	14
3.4.4	Bartlettův test	16
4	Vytvoření matematického modelu	17
4.1	Model a modelování	17
5	Návrh a plán experimentu	18
5.1	Příprava měření	18
5.2	Křivky přetvárného odporu	19
5.3	Postup měření	20
6	Závěry z měření	20

1 Úvod

Již po tisíciletí jsou kovy nejdůležitějším materiálem v našem denním životě. Odlišují se zcela podstatně nejen vzhledem, ale i všemi vlastnostmi od surovin jiných, což je dáno odlišným způsobem jejich vnitřní stavby. Lze je více namáhat než hmoty původu minerálního (keramika), jsou tedy pevnější. Od všech ostatních hmot se také odlišují svojí houževnatostí, tavitelností, slévatelností a jinými užitečnými vlastnostmi.

Užívání kovů vyžadovalo určitého stupně kultury, neboť se v přírodě vyskytují v ryzím stavu jen zřídka (zlato, stříbro, ...). Ve starověku znali a užívali jen několik málo kovů, vedle zlata, stříbra to byla zejména měď, olovo, cín, rtuť a v malé míře zinek a antimon. Teprve rozvoj přírodních věd od počátku 18. století umožnil objevení kovů dalších, z nichž některé nabyly velké důležitosti. Postupně docházelo k zařazení kovů do běžného života a jejich využití ve výrobcích denní potřeby. S tím jak rostlo použití kovů v řadě výrobních odvětví, bylo nutno zjišťovat jejich kvalitu. Začalo se rozvíjet zkoušení kovů. Nejdříve jen technologicky, později i laboratorně (zkouška tahem, tvrdosti, houževnatosti). Výsledkem těchto zkoušek jsou určité údaje, které je potřeba dále zpracovat a vyhodnotit. K tomu nám slouží metody matematické statistiky.

1.1 Současný stav řešení

V současné době střední a západní Evropa vzdoruje výrobcům spojovacího materiálu a čepových součástí vyráběných v jihovýchodní Asii. V našich podmínkách mohou firmy zaměřené na tuto technologii konkurovat asijským výrobcům zejména výrobou vysoce pevných šroubů tvářených bez finálního zušlechťování. Pro dobré zvládnutí výroby takovýchto šroubů je nutné znát jejich chování (chování ocele, ze které jsou vyrobeny) během výroby. Zvláště nás zajímá jejich pevnost. K získávání potřebných informací o vlastnostech šroubů slouží řada mechanických zkoušek (pěchovací zkoušky, trhací zkoušky). V poslední době se stále častěji využívá i zkoušek tvrdosti. U nichž se ukazuje, že srovnávací číslo, jímž tvrdost charakterizujeme, souvisí s pevností kovu. Lze tak jednoduchým způsobem získat zkouškou tvrdosti přibližného obrazu o pevnosti šroubu.

1.2 Cíle práce

Úkolem této práce je vytvořit vhodný matematický model rozložení tvrdosti na tepelně nezpracovaných šroubech (hledáme závislost mezi hodnotou tvrdosti a polohou na šroubu). Jedná se o vysoce pevné šrouby, jejichž použití je zejména v automobilovém a leteckém průmyslu a všude tam, kde jsou kladeny vysoké nároky na pevnost spojovacích součástí, jejich nízkou cenu a malé rozměry. Jelikož jde o zcela nové typy šroubů, potřebujeme zjistit jejich vlastnosti (pevnost, nerovnoměrnost deformace, pevnostní vruby, ...) a navrhnout metodiku testování. K tomuto účelu využijeme zkoušek tvrdosti. Na podélných osových řezech šroubů změříme tvrdost a takto získaná data budou dále zpracována aparátem *matematické statistiky* a *matematického modelování*. Celá práce je rozdělena do dvou částí. První přípravná část je zaměřena na získání potřebných dat laboratorním měřením, které je prováděno na tvrdoměru. Druhá část je analytická, kdy bude třeba naměřená data vyhodnotit z pohledu matematické statistiky a najít vhodný matematický model rozložení tvrdosti. Na základě takto získaných výsledků

budeme moci navrhnout metodiku experimentálního hodnocení tepelně nezpracovaných šroubů různých typorozměrů a zhodnotit technologii výroby šroubů bez tepelného zpracování.

2 Tvrdost

Tvrdost je definována jako odolnost povrchových oblastí hmoty proti místnímu porušení cizím tělesem. Tato definice však není zcela přesná, a to proto, že je tvrdost vlastností příliš komplexní a jednotlivé její parametry dostatečně neznáme.

2.1 Parametry ovlivňující tvrdost

V této části budou uvedeny nejznámější parametry ovlivňující tvrdost.

Tvar krystalových elementů – u většiny kovů rozhoduje jen vazba kovová, a proto jsou za jinak stejných poměrů nejměkčí. Při současném vlivu jiných vazeb vznikají krystalové soustavy s menší symetrií, jejichž odolnost je větší.

Jemnost krystalizace – čím je kov jemněji krystalizován, tím je v objemové jednotce více rozhraní krystalů, které odolávají vnikání tělesa více a kov je tvrdší.

Teplota – čím vyšší je teplota, tím se vlivem roztahování stávají vazby méně pevné a kov je měkčí.

Cizí příměsi – všechny příměsi snižují plasticitu kovu a tím zvětšují jeho tvrdost.

Zpevnění materiálu – zpevnění materiálu vlivem jeho plastické deformace zvyšuje tvrdost tohoto materiálu např. tváření za studena.

2.2 Měření tvrdosti

K určování tvrdosti je zapotřebí druhého tělesa. To nesmí podléhat plastickým deformacím, musí mít co největší tvrdost a mez pružnosti. Uvedeným požadavkům vyhovují

Materiál	HV	Modul pružnosti	Tvrdost zkouš. materiálu
Diamant	9000 – 13000	–	nad 630 HV
Slituté karbidy	1450 – 1600	55000 – 65000	do 630 HV
Kalené ocele	kolem 900	20000	kolem 450 HV

Místní porušení kovu se může dít několika způsoby.

Vnikací – zatlačování nástroje z tvrdé hmoty klidnou silou ve směru kolmém ke zkoušenému povrchu kovu. Jsou nejčastější, neboť jsou nejpřesnější a jednoduše proveditelné.

Rázové – vnikání indentoru je způsobeno dynamicky, rázem vedeným kolmo ke zkoušenému povrchu kovu. Jsou méně vhodné a užívají se jen ve zvláštních případech.

Vrypové – porušení povrchu zkoušeného kovu je dosaženo pohybem ostrého nástroje rovnoběžně s tímto zkoušeným povrchem, tak aby se vytvořila rýha. Zkoušky jsou vhodné pro hmoty křehké, zvláště minerály.

2.3 Zkoušky vnikací

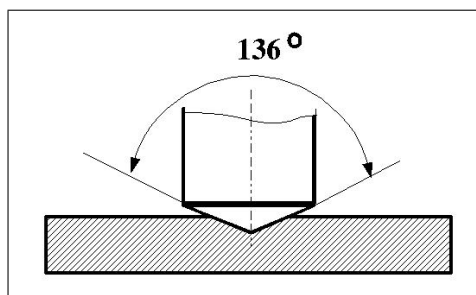
Odolnost proti vnikání cizího tělesa je dána velikostí sil, jimiž jsou atomy kovu navzájem vázány.

Bylo již řečeno, že výsledkem každé vnikací zkoušky je určitá trvalá deformace, jejíž velikost je vedle podmínek pokusu závislá na dvou materiálových hodnotách. Je to výše meze kluzu a schopnost a rychlost zpevnění po překročení této meze. Namáhání je trojosé a v různých místech proměnlivé. Přesto je možno očekávat, že srovnávací číslo, jímž tvrdost charakterizujeme, může nějak souviset s pevností kovu. Vztah mezi pevností a tvrdostí je hlavní příčinnou neobyčejného rozšíření zkoušek tvrdosti. Jednoduchým způsobem lze získat u kovu zkouškou tvrdosti přibližného obrazu o jeho pevnosti.

V dalších kapitolách budou popsány nejčastěji používané vnikací zkoušky, které se od sebe liší tvarem a materiálem indentoru a také velikostí zatížení.

2.3.1 Zkouška Vickersova

Vznikla v Anglii ve stejné době jako Rockwellova. Identorem je čtyřboký diamantový jehlan s vrcholovým úhlem 136° (obr. 2.1). Po provedení vtisku se měří jeho úhlopříčka (obr. 2.2).



Obr. 2.1: Tvar indentoru při Vickersově zkoušce.

Tvrdost podle Vickerse se počítá podle vztahů

$$HV = \frac{F}{S}, \quad (2.1)$$

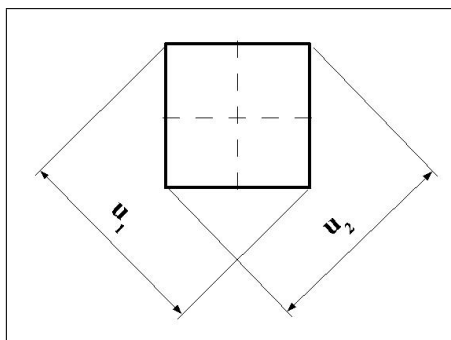
$$u = \frac{u_1 + u_2}{2}, \quad (2.2)$$

$$HV = 1,8544 \frac{F}{u^2}. \quad (2.3)$$

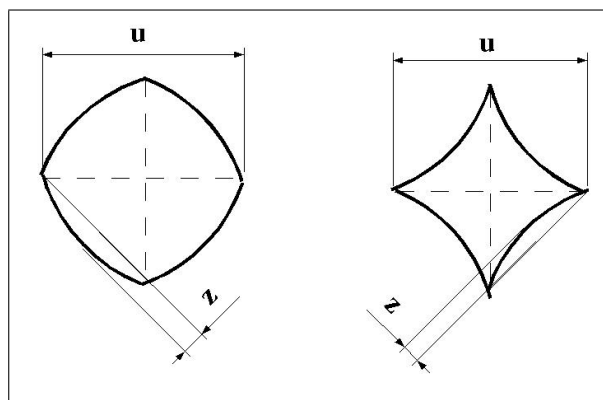
Platnost (2.3) není zcela přesná a to z toho důvodu, že zpevnění není u jehlanu stejnoměrné. Při hranách je jiné než uprostřed ploch. Následkem toho nemusí být průměr vtisku přesně čtvercový. Vtisky mohou být buď vyduté (měkké kovy) nebo vypouklé (kovy zpevněné) (obr. 2.3).

Z tohoto důvodu se vztah (2.3) zapisuje v tvaru

$$HV = 1,8544 \cdot \frac{F}{(u \pm z\sqrt{2})^2}. \quad (2.4)$$



Obr. 2.2: Měření úhlopříček vtisku.



Obr. 2.3: Tvary Vickersových vtisků u kovů měkkých a zpevněných.

Výhody:

- Výsledky jsou nezávislé na velikosti zatížení (v normě se doporučuje zatížení 1, 3, 5, 10, 30 a 50 kg).
- Dává jednotnou stupnici tvrdosti.
- Poměr tvrdosti kovů odpovídá skutečným tvrdostem.
- Vtisky jsou malé, takže nepoškozují významně povrch zkoušeného kovu.

Nevýhody:

- Nehodí se pro velmi hrubozrnné nebo nehomogenní materiály (šedá litina, ložiskové kompozice).

3 Matematická statistika

3.1 Testy hypotéz

V následující kapitole bude na jednoduchých příkladech ukázáno, v čem spočívá podstata statistického testování.

Představme si, že vyšetřujeme nějaké normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Řekněme, že o samotné normalitě nemáme žádné pochybnosti. Pro jednoduchost předpokládejme, že hodnota parametru $\sigma^2 > 0$ je známa. O parametru μ se domníváme, že by mohl být roven danému číslu μ_0 . Nejsme si tím však zcela jisti, a proto tvrzení $\mu = \mu_0$ nazveme *hypotézou*. Vžilo se pro ni označení H_0 a pojmenování *nulová hypotéza*. Její značení se zapisuje ve tvaru $H_0 : \mu = \mu_0$. Tato formulace problému týkajícího se skutečné hodnoty parametru μ však většinou není úplná. Je třeba ještě uvést, s jakou možností vlastně počítáme v případě, že H_0 neplatí. Tuto druhou možnost nazýváme *alternativní hypotéza* a značíme ji H_1 . Na první pohled se zdá, že H_1 musí mít tvar $H_1 : \mu \neq \mu_0$, ale není tomu tak vždy. Může se třeba stát, že předem bezpečně víme, že musí platit $\mu \geq \mu_0$. Za této dodatečné informace má pak alternativní hypotéza tvar $H_1 : \mu > \mu_0$.

Při svém rozhodování o platnosti H_0 nebo H_1 se můžeme dopustit jedné ze dvou chyb. Stane-li se, že zamítneme H_0 , ačkoli je správná, uděláme tzv. *chybu prvního druhu*. Jestliže nezamítneme H_0 , ačkoli správná není, uděláme tzv. *chybu druhého druhu*. Je přirozené požadovat, aby pravděpodobnosti obou těchto chyb byly co možná nejmenší.

Své rozhodnutí zakládáme obvykle na nějakém náhodném výběru X_1, \dots, X_n z uvažovaného rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Je-li však rozsah výběru n pevně stanoven, nelze pravděpodobnosti obou možných chyb udělat současně tak malé, jak bychom si přáli. Obvykle se trvá na požadavku, aby pravděpodobnost chyby prvního druhu byla rovna α , kde α je nějaké číslo z intervalu $(0, 1)$. V praxi se nejčastěji volí $\alpha = 0,05$ nebo $\alpha = 0,01$. Číslu α se říká *hladina významnosti testu*. Celý postup, kterým ověřujeme platnost H_0 , se nazývá *test hypotézy H_0 proti H_1* . Test se samozřejmě snažíme konstruovat tak, aby při zachování požadavku na pravděpodobnost chyby prvního druhu byla pravděpodobnost chyby druhého druhu co nejmenší.

Je-li pravděpodobnost chyby 1. druhu dostatečně malá, jednáme tak, jako by k této chybě nemohlo vůbec dojít. V tomto smyslu má vlastně H_0 výsadní postavení proti H_1 . Na druhé straně však při zmenšování α obvykle roste pravděpodobnost chyby 2. druhu. Nechceme-li se dostat do absurdních situací, nelze volit α neúměrně malé. Uvedené hodnoty $\alpha = 0,05$, resp. $\alpha = 0,01$ se ve většině aplikací osvědčily pro chybu 1. druhu jako dostatečně přísné, ne však přehnaně přísné.

Vraťme se k testování hypotézy $H_0 : \mu = \mu_0$ v případě rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ se známým kladným rozptylem σ^2 . Nechť z tohoto rozdělení byl uskutečněn náhodný výběr X_1, \dots, X_n . Protože \bar{X} je nestranným odhadem parametru μ a protože $\text{var} \bar{X} = \frac{\sigma^2}{n}$ je tím menší, čím více pozorování bylo učiněno, může být \bar{X} při dostatečně velkém počtu měření n kvalitním ukazatelem skutečné hodnoty μ . Bude-li tedy zjištěný průměr \bar{X} blízko předpokládané hodnoty μ_0 , bude to svědčit ve prospěch hypotézy H_0 .

Řekněme, že je třeba testovat $H_0 : \mu = \mu_0$ proti $H_1 : \mu > \mu_0$. Bude-li \bar{X} mít velkou hodnotu, podstatně větší než μ_0 , povede nás to k zamítnutí H_0 . Test bude tedy probíhat takto:

Pokud bude výběr X_1, \dots, X_n takový, že $\bar{X} \geq k$, zamítneme H_0 . Bude-li $\bar{X} < k$, pak H_0 nezamítáme. Číslo k určíme z podmínky, že hladina testu má být α . Jelikož za platnosti H_0 je $\bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n})$, platí $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} \sim N(0, 1)$. Tudíž

$$P(\bar{X} \geq k) = P[\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/\sigma \geq \sqrt{n}(k - \mu_0)/\sigma] = 1 - \Phi[\sqrt{n}(k - \mu_0)/\sigma]. \quad (3.1)$$

Chceme-li, aby platilo $P(\bar{X} \geq k) = \alpha$, musí být $\Phi[\sqrt{n}(k - \mu_0)/\sigma] = 1 - \alpha$. Označme $u(\alpha)$ takové číslo, které náhodná veličina s rozdělením $N(0, 1)$ překročí s pravděpodobností α , tj. číslo s vlastností $1 - \Phi[u(\alpha)] = \alpha$. Označíme-li Φ^{-1} inverzní funkci k funkci Φ , tj. kvantilovou funkci rozdělení $N(0, 1)$, platí zřejmě $u(\alpha) = \Phi^{-1}(1 - \alpha)$. Číslo $u(\alpha)$ se nazývá *kritická hodnota rozdělení $N(0, 1)$ na hladině α* . Kritické hodnoty $u(\alpha)$ pro různá α se mohou vyhledat v tabulkách funkce Φ . U kritických hodnot normálního rozdělení se zpravidla omezujeme jen na $\alpha \in (0; 0,5)$. Dostáváme tedy $\sqrt{n}(k - \mu_0)/\sigma = u(\alpha)$, čili

$$k = \mu_0 + \frac{\sigma u(\alpha)}{\sqrt{n}}. \quad (3.2)$$

Konkrétní provedení testu $H_0 : \mu = \mu_0$ proti $H_1 : \mu > \mu_0$ spočívá v tom, že zjistíme zda platí nerovnost

$$\bar{X} \geq \mu_0 + \frac{\sigma u(\alpha)}{\sqrt{n}}. \quad (3.3)$$

Pokud tato nerovnost platí, zamítáme H_0 na hladině α . Jestliže nerovnost (3.3) neplatí, pak H_0 na základě napozorovaných hodnot zamítnout nemůžeme. Ty výběry, pro které platí nerovnost (3.3), tvoří tzv. *kritický obor* pro test hypotézy H_0 .

Z terminologického hlediska je třeba si všimnout, že nezamítnutí H_0 ještě neznamená, že nás data přesvědčila o správnosti H_0 . K tomu bychom potřebovali mít zaručeno, že pravděpodobnost chyby 2. druhu je předepsaně malá (např. $\beta \leq 0$). Teprve pak bychom mohli hovořit o tom, že H_0 přijímáme. Test $H_0 : \mu = \mu_0$ proti $H_1 : \mu < \mu_0$ by se provedl zcela analogicky.

3.2 t rozdělení

Páteří mnoha statistických postupů týkajících se hodnocení výběru z normálního rozdělení je následující věta.

Věta 3.1 *Nechť X a Z jsou takové nezávislé náhodné veličiny, že $X \sim N(0, 1)$ a $Z \sim \chi_k^2$. Pak náhodná veličina*

$$T = \frac{X}{\sqrt{Z/k}} \quad (3.4)$$

má Studentovo rozdělení o k stupních volnosti. Toto rozdělení stručně značíme t_k a má hustotu

$$f_k(t) = \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})\sqrt{\pi k}} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}, \quad -\infty < t < \infty. \quad (3.5)$$

Poznamenejme, že kritické hodnoty t rozdělení se definují poněkud odlišně od jiných kritických hodnot. Budiž T taková náhodná veličina, že $T \sim t_k$. Kritickou hodnotou t_k rozdělení na hladině α nazýváme takové číslo $t_k(\alpha)$, pro které platí

$$P[|T| \geq t_k(\alpha)] = \alpha. \quad (3.6)$$

Kritické hodnoty $t_k(\alpha)$ jsou tabelovány.

Věta 3.2 Nechť X_1, \dots, X_n je výběr z $N(\mu, \sigma^2)$, kde $n \geq 2$ a $\sigma^2 \geq 0$. Pak náhodná veličina

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S} \sqrt{n} \quad (3.7)$$

má rozdělení t_{n-1} .

Výhodou věty (3.2) je, že veličina T uvedená ve vzorci (3.7), ani její rozdělení v sobě neobsahují již parametr σ^2 . Proto je tento výsledek použitelný zejména v situacích, kdy σ^2 není známo.

3.3 F rozdělení

Věta 3.3 Nechť $X \sim \chi_m^2$, $Y \sim \chi_n^2$ a nechtě X a Y jsou nezávislé. Pak náhodná veličina

$$Z = \frac{\frac{1}{m}X}{\frac{1}{n}Y} \quad (3.8)$$

má Fisherovo–Snedecorovo rozdělení $F_{m,n}$ o m a n stupních volnosti, jehož hustota je rovna

$$f_{m,n}(z) = \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} z^{\frac{m}{2}-1} \left(1 + \frac{m}{n}z\right)^{-\frac{m+n}{2}} \quad (3.9)$$

pro $z > 0$ (pro $z \leq 0$ je tato hustota rovna nule).

F rozdělení má četné aplikace. Následující věta umožňuje ověřování hypotézy, že rozptyly dvou normálních rozdělení jsou stejné.

Věta 3.4 Nechť X_1, \dots, X_n je výběr z $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a Y_1, \dots, Y_m výběr z $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Nechť tyto dva výběry jsou na sobě nezávislé. Předpokládejme, že $n \geq 2$, $m \geq 2$, $\sigma_1^2 \geq 0$, $\sigma_2^2 \geq 0$. Označme $S_X^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{(n-1)}$ a $S_Y^2 = \frac{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}{(m-1)}$. Platí-li $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, pak náhodná veličina

$$Z = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \quad (3.10)$$

má rozdělení $F_{n-1, m-1}$.

Nechť náhodná veličina Z má rozdělení $F_{m,n}$. Číslo $F_{m,n}(\alpha)$, pro které platí $P[Z \geq F_{m,n}(\alpha)] = \alpha$, se nazývá *kritická hodnota* rozdělení $F_{m,n}$ na hladině α . Kritické hodnoty bývají tabelovány pro $0 < \alpha \leq 0,5$. Pro $0,5 < \alpha \leq 1$ se tyto kritické hodnoty počítají pomocí věty:

Věta 3.5 Pro kritické hodnoty F rozdělení platí vztah

$$F_{m,n}(\alpha) = \frac{1}{F_{n,m}(\alpha)}. \quad (3.11)$$

Mějme dva nezávislé výběry X_1, \dots, X_n a Y_1, \dots, Y_m . Nechť první výběr pochází z $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a druhý z $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Předpokládejme, že $n \geq 2$, $m \geq 2$ a pro rozptyly platí $\sigma_1^2 > 0$, $\sigma_2^2 > 0$. Chceme testovat hypotézu $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ proti $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Přitom hodnoty μ_1 a μ_2 nejsou známy. Protože S_X^2 je nestranným

odhadem parametru σ_1^2 a S_Y^2 parametru σ_2^2 , lze očekávat, že za platnosti hypotézy H_0 bude podíl $\frac{S_X^2}{S_Y^2}$ blízký jedné. Proti H_0 budou svědčit buď hodnoty tohoto podílu, které jsou blízké nule, nebo naopak hodnoty velké. Proto H_0 zamítáme, jakmile bude platit $\frac{S_X^2}{S_Y^2} \leq k_1$ nebo $\frac{S_X^2}{S_Y^2} \geq k_2$. Bývá zvykem volit k_1, k_2 tak, aby za platnosti H_0 bylo

$$P\left(\frac{S_X^2}{S_Y^2} \leq k_1\right) = \frac{\alpha}{2}, \quad P\left(\frac{S_X^2}{S_Y^2} \geq k_2\right) = \frac{\alpha}{2}. \quad (3.12)$$

Pak bude samozřejmě pravděpodobnost chyby 1. druhu rovna α . Z věty (3.4) dostaneme, že (3.12) bude platit v případě

$$k_1 = F_{n-1, m-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{F_{m-1, n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \quad k_2 = F_{n-1, m-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right). \quad (3.13)$$

3.4 Mnohonásobná porovnávání

V minulé kapitole jsme řešili situaci, kdy máme dva nezávislé výběry. Jeden z $N(\mu_1, \sigma^2)$ a druhý z $N(\mu_2, \sigma^2)$. Parametr σ^2 nebyl znám a testovala se hypotéza $\mu_1 = \mu_2$. Přitom pravděpodobnost zamítnutí této hypotézy, je-li správná, je rovna α . Často se však stává, že máme dáno I nezávislých výběrů $N(\mu_1, \sigma^2), \dots, N(\mu_I, \sigma^2)$. Parametr σ^2 není znám a je třeba testovat hypotézu $H_0 : \mu_1 = \dots = \mu_I$. Na první pohled se zdá, že tento problém lze snadno převést na předchozí případ. Z daných I výběrů vytvoříme $I(I-1)/2$ dvojic a na každou dvojici aplikujeme dvouvýběrový t test. Jestliže alespoň jedna dvojice dá signifikantní výsledek, zdá se, že můžeme zamítnout H_0 . Tento postup však nespĺňuje podmínku, že pravděpodobnost chyby 1. druhu má být rovna α . Je-li nulová hypotéza správná, pak každý zmíněný t test dá signifikantní výsledek s pravděpodobností α . To je sice pravda, avšak podle uvedeného postupu bychom H_0 zamítli, kdyby alespoň jeden z $I(I-1)/2$ testů dal signifikantní výsledek. Odtud je zřejmé, že pravděpodobnost zamítnutí hypotézy H_0 , pokud je správná, může být větší než α . Z tohoto důvodu se pro test hypotézy H_0 používají jiné metody, které udrží pravděpodobnost chyby 1. druhu na hladině α . Obvykle se řešení provádí ve dvou etapách. V první etapě testujeme hypotézu H_0 , že všechny střední hodnoty μ_1, \dots, μ_I jsou si rovny. Na testový postup klademe požadavek, aby pravděpodobnost chyby prvního druhu byla rovna α . Pokud dojde k zamítnutí hypotézy H_0 , řešíme v druhé etapě problém, které skupiny se od sebe výrazně liší.

3.4.1 Scheffého metoda

V tomto odstavci se omezíme na teoretické základy této metody.

Věta 3.6 *Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)^T$ je takový náhodný vektor, že $\mathbf{X} \sim N(\mu, \sigma^2 \mathbf{V})$, kde $\mathbf{V} > 0$ je známá matice a σ^2 je neznámý kladný parametr. Budiž \mathcal{A} nějaký t -rozměrný podprostor prostoru \mathcal{R}_m . Nechť s^2 je nezávislý odhad pro σ^2 s ν stupni volnosti. Pak pravděpodobnost, že nerovnost*

$$|\mathbf{a}^T \mathbf{X} - \mathbf{a}^T \mu| \leq \sqrt{ts^2 F_{t, \nu}(\alpha) \mathbf{a}^T \mathbf{V} \mathbf{a}} \quad (3.14)$$

platí pro $\forall \mathbf{a} \in \mathcal{A}$ současně a je rovna $1 - \alpha$.

Nechť $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_m)^T$, $\mathbf{V} = (v_{ij})$. Věty (3.6) můžeme použít pro testování hypotézy $H_0 : \mu_1 = \dots = \mu_m$. Nejprve si všimněme, že H_0 platí tehdy a jen tehdy, když $\mathbf{a}^T \boldsymbol{\mu} = 0$ pro všechny takové vektory $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)^T$, které splňují podmínku $a_1 + \dots + a_m = 0$. Množina těchto vektorů tvoří podprostor \mathcal{A} dimenze $t = m - 1$ v \mathcal{R}_m . Řekněme, že chceme ověřit, zda platí $\mu_i = \mu_j$ postupně pro všechny dvojice (i, j) , kde $i \neq j$. Zavedeme vektory \mathbf{a}_{ij} , které mají i -tou složku rovnou 1, j -tou složku rovnou -1 a ostatní složky rovnou nule. Pak $\mu_i = \mu_j$ platí právě tehdy, když $\mathbf{a}_{ij}^T \boldsymbol{\mu} = 0$. Protože $t = m - 1$, $\mathbf{a}_{ij}^T \mathbf{X} = X_i - X_j$, $\mathbf{a}_{ij}^T \mathbf{V} \mathbf{a}_{ij} = v_{ii} + v_{jj} - v_{ij} - v_{ji}$, podle věty (3.6) platí nerovnost

$$|X_i - X_j| \leq [(v_{ii} + v_{jj} - v_{ij} - v_{ji})(m - 1)s^2 F_{m-1, \nu}(\alpha)]^{\frac{1}{2}} \quad (3.15)$$

pro $\forall (i, j)$ současně s pravděpodobností nejméně $1 - \alpha$. Jestliže pro nějakou dvojici (i_0, j_0) platí obrácená nerovnost, tj.

$$|X_{i_0} - X_{j_0}| > [(v_{i_0 i_0} + v_{j_0 j_0} - v_{i_0 j_0} - v_{j_0 i_0})(m - 1)s^2 F_{m-1, \nu}(\alpha)]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.16)$$

zamítneme hypotézu H_0 . Navíc tím máme přímo označenou dvojici (μ_{i_0}, μ_{j_0}) , kde se zamítá rovnost $\mu_{i_0} = \mu_{j_0}$.

V aplikacích se většinou setkáváme se situací, kdy složky vektoru \mathbf{X} jsou nezávislé. Pak matice \mathbf{V} je diagonální a nerovnost (3.16) se redukuje na

$$|X_{i_0} - X_{j_0}| > [(v_{i_0 i_0} + v_{j_0 j_0})(m - 1)s^2 F_{m-1, \nu}(\alpha)]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.17)$$

Velkou výhodou Scheffého metody je její obecnost. Naproti tomu je ji někdy vytýkána menší citlivost.

3.4.2 Tukeyova metoda

Lemma 3.1 *Nechť X_1, \dots, X_m je náhodný výběr z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$. Označme*

$$R = \max_i X_i - \min_i X_i \quad (3.18)$$

tzv. rozpětí. Nechť s^2 je nezávislý odhad rozptylu σ^2 s ν stupni volnosti. Tedy $\nu s^2 / \sigma^2 \sim \chi_\nu^2$, s^2 a $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)^T$ jsou nezávislé. Označme

$$Q = \frac{R}{s} \quad (3.19)$$

náhodnou veličinou, které se říká studentizované rozpětí. Pak rozdělení náhodné veličiny Q , označované symbolem $q_{m, \nu}(\alpha)$, nezávisí na μ a σ^2 .

Věta 3.7 *Nechť X_1, \dots, X_m jsou nezávislé náhodné veličiny. Předpokládejme, že $X_i \sim N(\mu_i, b^2 \sigma^2)$, $i = 1, \dots, m$, kde b je známá kladná konstanta. Nechť s^2 je nezávislý odhad rozptylu σ^2 s ν stupni volnosti, to znamená, že $\frac{\nu s^2}{\sigma^2} \sim \chi_\nu^2$. Položme $T = b q_{m, \nu}(\alpha)$.*

Pravděpodobnost, že platí

$$X_i - X_j - Ts \leq \mu_i - \mu_j \leq X_i - X_j + Ts \quad (3.20)$$

pro všechny dvojice (i, j) současně a je rovna $1 - \alpha$.

Tukeovy věty se používá v souvislosti s testováním hypotézy $H_0 : \mu_1 = \dots = \mu_m$. Platí-li H_0 , pak podle (3.20) všechny intervaly $\langle X_i - X_j - Ts, X_i - X_j + Ts \rangle$ překrývají nulu s pravděpodobností $1 - \alpha$. Jestliže některý z nich nulu nepřekrývá, tzn. že

$$|X_{i_0} - X_{j_0}| > Ts \quad (3.21)$$

pro nějakou dvojici (nějaké dvojice) (i_0, j_0) , vede nás to k závěru, že platí $\mu_{i_0} \neq \mu_{j_0}$. Tento postup má výhodu v tom, že pravděpodobnost chyby prvního druhu je rovna α a v případě zamítnutí hypotézy H_0 přímo ukazuje dvojici (dvojice), která k tomuto zamítnutí vede.

3.4.3 Jednoduché třídění

Předpokládejme, že

$$\begin{array}{rcc} & & \text{je výběr z} \\ Y_{11}, \dots, Y_{1n_1} & & N(\mu_1, \sigma^2) \\ Y_{21}, \dots, Y_{2n_2} & & N(\mu_2, \sigma^2) \\ \vdots & & \vdots \\ Y_{I1}, \dots, Y_{In_I} & & N(\mu_I, \sigma^2) \end{array}$$

Nechť všechny tyto výběry jsou na sobě nezávislé. Je třeba testovat hypotézu $H_0 : \mu_1 = \dots = \mu_I$ proti hypotéze H_1 , že ne všechny střední hodnoty μ_1, \dots, μ_I jsou si rovny. V případě zamítnutí H_0 bývá téměř vždy nutné najít všechny ty dvojice μ_i, μ_j , které toto zamítnutí způsobily (lze statisticky prokázat $\mu_i \neq \mu_j$).

Seřadme nejprve všechny hodnoty $Y_{i,j}$ do jediného vektoru \mathbf{Y} tak, že nejprve napíšeme všechny členy prvního výběru, pak druhého a nakonec posledního. Položme

$$n = n_1 + \dots + n_I \quad (3.22)$$

Vzhledem k učiněným předpokladům dospíváme k modelu

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{e}. \quad (3.23)$$

Vektor \mathbf{e} má n složek a platí pro něj $\mathbf{e} \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I})$. Označme

$$Y_{i.} = Y_{i1} + \dots + Y_{in_i}, \quad y_{i.} = \frac{Y_{i.}}{n_i} \quad (3.24)$$

a

$$Y_{..} = Y_{1.} + \dots + Y_{I.} = \sum_i \sum_j Y_{ij}, \quad \bar{Y} = y_{..} = \frac{Y_{..}}{n}. \quad (3.25)$$

Protože

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \text{diag}\{n_1, \dots, n_I\}, \quad \mathbf{X}^T \mathbf{Y} = (Y_{1.}, \dots, Y_{I.})^T, \quad (3.26)$$

je

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y} = (y_{1.}, \dots, y_{I.})^T. \quad (3.27)$$

Reziduální součet čtverců potom je roven

$$R = \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \mathbf{b}^T \mathbf{X}^T \mathbf{Y} = \sum_i \sum_j Y_{ij}^2 - \sum_i y_{i.} Y_{i.} = \sum_i \sum_j Y_{ij}^2 - \sum_i \frac{Y_{i.}^2}{n_i}. \quad (3.28)$$

Za platnosti H_0 máme model

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U}\gamma + \mathbf{e}, \quad (3.29)$$

kde $\mathbf{U}_{n \times 1} = (1, \dots, 1)^T$ a γ je typu 1×1 . Tentokrát $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = n$, $\mathbf{U}^T\mathbf{Y} = Y_{..}$, takže odhad \mathbf{g} parametru γ metodou nejmenších čtverců činí

$$\mathbf{g} = (\mathbf{U}^T\mathbf{U})^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{Y} = y_{..} \quad (3.30)$$

Reziduální součet čtverců je

$$R_1 = \mathbf{Y}^T\mathbf{Y} - \mathbf{g}^T\mathbf{U}^T\mathbf{Y} = \sum_i \sum_j Y_{ij}^2 - y_{..}Y_{..} = \sum_i \sum_j Y_{ij}^2 - \frac{Y_{..}^2}{n}. \quad (3.31)$$

Proto

$$R_1 - R = \sum_i \frac{Y_{i.}^2}{n_i} - \frac{Y_{..}^2}{n}. \quad (3.32)$$

Hodnost matice \mathbf{X} je I , hodnost matice \mathbf{U} je 1 . Platí-li H_0 , dostáváme, že

$$F_A = \frac{(n - I)(R_1 - R)}{(I - 1)R} \sim F_{I-1, n-I}. \quad (3.33)$$

Praktický výpočet se provádí následovně. Nejprve se vypočte celkový součet čtverců

$$S_T = \sum_i \sum_j Y_{ij}^2 - \frac{Y_{..}^2}{n}. \quad (3.34)$$

Výraz $R_1 - R$ se nazývá řádkový součet čtverců. Je to

$$S_A = \sum_i \frac{Y_{i.}^2}{n_i} - \frac{Y_{..}^2}{n}. \quad (3.35)$$

Reziduální součet čtverců se v modelech tohoto typu místo R zpravidla značí S_e a počítá se podle vzorce

$$S_e = S_T - S_A. \quad (3.36)$$

Výsledky se zapisují do tabulky analýzy rozptylu. Veličina $s^2 = S_e/(n - I)$ je reziduální rozptyl.

variabilita	S	f	S/f	F
skupinová	S_A	$f_A = I - 1$	S_A/f_A	F_A
reziduální	S_e	$f_e = n - I$	S_e/f_e	–
celková	S_T	$f_T = n - 1$	–	–

Tab. 3.1: Analýza rozptylu jednoduchého třídění.

Kde S značí jednotlivé součty čtverců a f počet stupňů volnosti. V případě, že $F_A \geq F_{I-1, n-I}(\alpha)$ zamítáme hypotézu H_0 . Pak je ještě zapotřebí rozhodnout, které dvojice indexů tuto podmínku porušují (platí pro ně $\mu_i \neq \mu_j$).

Nejdříve se podíváme na aplikaci Scheffého metody. Veličiny y_1, \dots, y_I jsou odhady středních hodnot jednotlivých skupin pozorování v základním modelu. Tyto veličiny jsou navzájem nezávislé a $y_i \sim N(\mu + \alpha_i, \sigma^2/n_i)$. Vektor $(y_1, \dots, y_I)^T$

má tedy variační matici $\sigma^2 \mathbf{V}$, kde $\mathbf{V} = \text{diag}\{n_1^{-1}, \dots, n_I^{-1}\}$. Podle (3.17) zamítneme rovnost středních hodnot i -té a j -té skupiny, když

$$|y_{i.} - y_{j.}| > [(n_i^{-1} + n_j^{-1})(I - 1)s^2 F_{I-1, n-I}(\alpha)]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.37)$$

kde

$$s^2 = \frac{S_e}{n - I} \quad (3.38)$$

je reziduální rozptyl.

Při aplikaci Tukeyovy věty rozlišujeme dva případy a to pokud všechny veličiny $y_{1.}, \dots, y_{I.}$ mají stejný rozptyl. To je v případě, kdy $n_1 = \dots = n_I$. Je-li tato podmínka splněna, říkáme, že jednoduché třídění je *vyvážené*. V opačném případě mluvíme o *nevyváženém* třídění.

Označíme-li počet pozorování v každé skupině P (tj. $P = n_1 = \dots = n_I$, což je případ vyváženého třídění), máme $y_i. \sim N(\mu + \alpha_i, \sigma^2/P)$. Ve větě (3.7) tedy máme $b^2 = 1/P$. Podle vzorce (3.21) zamítáme rovnost středních hodnot i -té a j -té skupiny, když

$$|y_{i.} - y_{j.}| > Ts, \quad (3.39)$$

kde

$$T = \frac{1}{\sqrt{P}} q_{I, n-1}(\alpha). \quad (3.40)$$

V případě nevyváženého třídění je

$$T = q_{I, n-1}(\alpha) \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}. \quad (3.41)$$

Vidíme, že můžeme použít buď Scheffého nebo Tukeyovu metodu. Z těchto dvou metod volíme tu, která je v daném případě citlivější. Tukeyova metoda bude výhodnější, když

$$q_{I, n-1}^2(\alpha) < 2(I - 1)F_{I-1, n-1}(\alpha). \quad (3.42)$$

Platí-li obrácená nerovnost, je výhodnější Scheffého metoda.

3.4.4 Bartlettův test

Jedním z předpokladů, které jsme použili k odvození vzorců pro analýzu rozptylu jednoduchého třídění, byla rovnost rozptylů všech I normálních rozdělení, z nichž byly jednotlivé výběry pořizovány. Kdybychom obecně připustili, že Y_{i1}, \dots, Y_{in_i} je výběr z rozdělení $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ pro $i = 1, \dots, I$, vzniká otázka, jak testovat hypotézu $H_0 : \sigma_1^2 = \dots = \sigma_I^2$ proti alternativě H_1 . Bylo odvozeno několik různých testů hypotézy H_0 . Nejčastěji se používá Bartlettův test, který bude popsán v následujícím textu. Nechť

$$s_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \left(\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2 - n_i y_i^2 \right), \quad (3.43)$$

$$s^2 = \frac{1}{n - I} \sum_{i=1}^I (n_i - 1) s_i^2, \quad (3.44)$$

$$C = 1 + \frac{1}{3(I-1)} \left(\sum_{i=1}^I \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{n - I} \right), \quad (3.45)$$

$$B = \frac{1}{C} \left[(n-1) \ln s^2 - \sum_{i=1}^I (n_i - 1) \ln s_i^2 \right]. \quad (3.46)$$

Přitom $s^2 = \frac{S_e}{f_e}$, kde S_e , f_e jsou uvedeny v tabulce analýzy rozptylu (tab. 3.1). Platí-li H_0 , má náhodná veličina B přibližně χ_{I-1}^2 rozdělení. Proto H_0 zamítáme v případě, že $B \geq \chi_{I-1}^2(\alpha)$. Aby bylo možno tohoto výsledku použít, musejí být rozsahy výběrů n_1, \dots, n_I dostatečně velké. V literatuře se obvykle uvádí podmínka, že musí platit $n_i > 6$, pro $\forall i = 1, \dots, I$. V případě $I = 2$ lze použít Bartlettův test pro testování shody dvou rozptylů místo běžného F testu.

Nevýhodou Bartlettova testu je to, že je velmi citlivý na porušení předpokladu *normality*. Proto byly místo něj navrženy robustnější testy (Hartleyův a Cochranův test).

Jsou-li četnosti všech tříd stejné $n_1 = \dots = n_I$, používá se k testování hypotézy H_0 Hartleyův nebo Cochranův test. Položme $\nu = n_1 - 1$.

Hartleyův test je založen na veličině

$$F_{max} = \frac{\max s_i^2}{\min s_i^2}. \quad (3.47)$$

Hypotéza H_0 se zamítá, když je $F_{max} \geq h_{I,\nu}(\alpha)$.

Cochranův test používá testovou statistiku

$$G_{max} = \frac{\max s_i^2}{s_1^2 + \dots + s_I^2}. \quad (3.48)$$

Hypotéza H_0 se zamítá, když $G_{max} \geq c_{I,\nu}(\alpha)$.

4 Vytvoření matematického modelu

4.1 Model a modelování

Pojem model se vyskytuje v odborné literatuře stále častěji. Teorie modelů a modelování nabyla v poslední době značného významu v souvislosti s rozvojem kybernetiky. V současnosti nacházejí modely uplatnění v nejrůznějších oborech. Různé názory na podstatu modelů netvoří ani zdaleka ucelenou teorii s jednotnou terminologií. Konstrukce modelu a její pravidla jsou vázána na řešení určitých konkrétních úloh.

Při sledování jevů a procesů reálného světa si uvědomujeme, že je v naprosté většině nejsme schopni zcela vysvětlit. Velmi obtížně postihujeme zákonitosti jejich vzniku a ještě hůře pronikáme do jejich vazeb a souvislostí. Modelování je tvůrčí lidská činnost spočívající ve zjednodušení a idealizaci dějů reálného světa. Model můžeme chápat jako určitou formu zobrazení skutečnosti. Rozdíl je pouze v tom, jaká je modelovaná skutečnost, jaké jsou modelovací prostředky a k jakému účelu model slouží.

Obvykle bývá snazší pracovat s modelem a ne se skutečností už jen proto, že ovládáme daleko lépe pravidla modelovací techniky, než pravidla nezachytitelné (nepozorovatelné) skutečnosti. Model je nejen prostředek pro získání poznatků,

ale pomocí modelu je též možno rozvinout teorii určité oblasti. Nutností pro vyvození důsledků z modelování skutečnosti je bezesporu existence obdoby mezi modelem a realitou, která je pro poznání skutečnosti nezbytná.

5 Návrh a plán experimentu

Abych mohl naplnit téma mé práce, vytvořit matematický model rozložení tvrdosti na šroubech, bylo zapotřebí změřit na těchto šroubech tvrdost. Pro toto měření byly k dispozici následující typy šroubů (od každého tři vzorky)

typ šroubu	délka šroubu [mm]	průměr výchozího polotovaru [mm]
M8	70,8	9,2
M10	81,25	13,8
M10	56,6	13,8
M10	36,2	13,8
M10	81,0	11,7
M12	83,0	14,0

Tab. 5.1: Šrouby použité k experimentu.

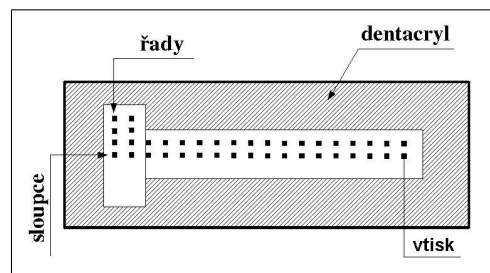
Jedná se o vysoce pevnostní šrouby, které jsou vyráběny novou technologií tváření za studena, bez následného tepelného zpracování. Tato výroba je důležitá zejména z ekonomického hlediska, protože tímto způsobem lze uvedené součásti vyrábět podstatně levněji než stávajícím způsobem s následným zušlechťením. Navíc zušlechťování je provázáno vznikem celé řady výrobních vad, jejichž odstranění výrobek dále prodražuje. Pro tuto výrobu šroubů byla díky moderní technologii válcování firmou VÚHŽ Dobrá a. s. vyvinuta nová mikrolegovaná ocel, která nese označení 8Mn2Si. Tato ocel výrazně zpevňuje do deformace kolem $\varphi = 0,1$. Poté ocel zpevňuje pozvolna, téměř lineárně v intervalu $\sigma \in \langle 800; 1200 \rangle$ MPa pro interval deformace $\varphi \in \langle 0,1; 1,6 \rangle$ podle zvoleného výchozího polotovaru, který byl použit pro výrobu šroubů. Z podrobných experimentů vyplynulo, že tepelně nezpracované šrouby splňují téměř všechny mechanické vlastnosti a charakteristiky, které požaduje evropská norma ČSN EN 20898: Všeobecné požadavky na šrouby a matice. Tato norma je přitom určena pro součásti tepelně zpracované.

5.1 Příprava měření

Vzorky se musely pro zkoušku tvrdosti vhodně upravit. Všechny vzorky byly obrobena do podélné osy frézováním, při kterém musely být dobře chlazeny. Příliš vysoká rychlost brusu, nebo nedostatečné chlazení by mělo za následek změnu strukturních vlastností materiálu, a tím by bylo znemožněno provádění přesného měření tvrdosti. Poté, co byly vzorky takto upraveny, byla jejich opracovaná plocha dále broušena brusným papírem pro získání rovného povrchu a nakonec leštěna. Takto připravené vzorky se zalily do dentacrylu kvůli snadnější manipulaci (upnutí v tvrdoměru).

Před samotnými zkouškami tvrdosti bylo zapotřebí rozvrhnout jednotlivá měření tak, aby se jimi pokryla co největší plocha vzorku. K tomuto účelu se nejprve změřily rozměry vzorků (s přesností na setiny milimetru). Dále bylo provedeno předběžné měření tvrdosti nepěchovaného materiálu Vickersovou metodou

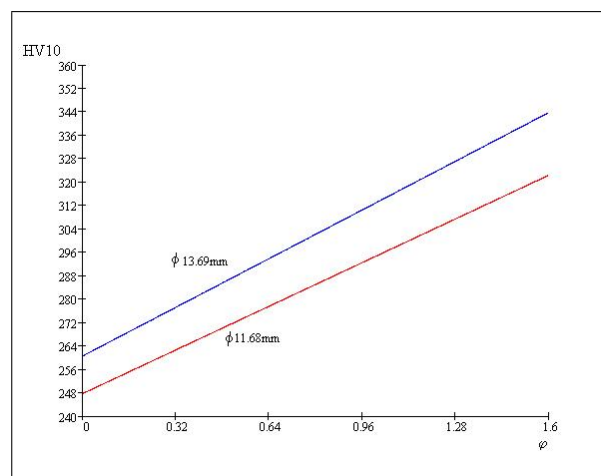
a u vzniklého *kontrolního vtisku* změřena úhlopříčka $u = 0,32 \text{ mm}$. Z této hodnoty, která je jen orientační, se dá vycházet při stanovení množství vtisků na jednom vzorku. Při stanovení množství vtisků na ploše je bezpodmínečně nutné dodržet minimální vzdálenost mezi středem vtisku a krajem zkoušeného vzorku nebo středy sousedních vtisků. Minimální vzdálenost dvou sousedních vtisků je z normy určena jako 2,5 násobek úhlopříčky (kontrolní vtisk). V našem případě vzdálenost sousedních vtisků vychází $z = 0,32 \cdot 2,5 = 0,8 \text{ mm}$. S ohledem na rozměry vzorku a z se tento pokryl myšlenou sítí čar, v jejichž průsečících se nacházely body měření. Jedna z čar vždy procházela osou vzorku, zbytek sítě pak byl na jedné polovině podélného řezu (obr. 5.1). Tento postup jsme si mohli dovolit z toho důvodu, že šroub byl tvářen osově symetricky a o rozložení tvrdostí se předpokládá totéž.



Obr. 5.1: Rozložení vtisků na vzorku šroubu.

5.2 Křivky přetvárného odporu

Před samotným měřením tvrdosti šroubů bylo nutno provést pýchovací zkoušky vzorků ze jmenovaných průměrů výchozích polotovarů (tab. 5.1). Výsledkem těchto zkoušek byly křivky přetvárného odporu pro postupná pýchování. Tato metoda pýchování byla zvolena z důvodu stanovení závislosti střední hodnoty tvrdosti na skutečné deformaci $HV10 = f(\varphi)$ měřené na polovině podélného osového řezu spýchovaných vzorků, tyto závislosti jsou vidět na (obr. 5.2).



Obr. 5.2: Závislost střední hodnoty tvrdosti na skutečné deformaci.

Podle tohoto vztahu je možné ze změřených tvrdostí stanovit lokální hodnoty

skutečné deformace ve šroubech a při znalosti křivky přetvárného odporu, lze určit ze zjištěných tvrdostí i zpevnění v těchto šroubech.

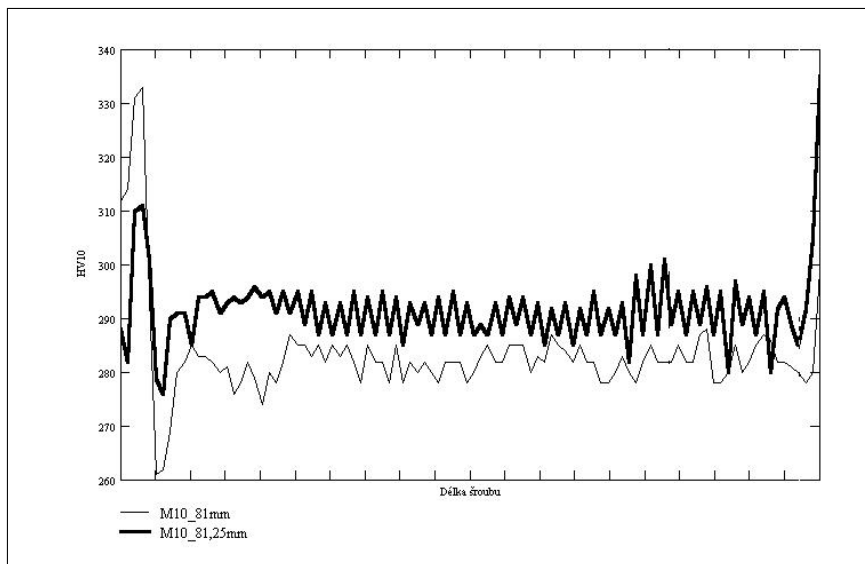
5.3 Postup měření

Zkouška tvrdosti byla prováděna v laboratoři FSI VUT v Brně na přístroji ZWICK 3212 se zatížením $F = 98 \text{ N}$. Tento přístroj je vybaven měřícím stolcem se dvěma suporty s mikrometrickými šrouby zajišťujícími přesný posuv ve dvou na sebe kolmých osách. Ke konci měření byl přístroj vybaven CCD kamerou a propojen s počítačem, což výrazně urychlilo prováděná měření.

Vzorek byl s pomocí vodováhy upnut do svěráku tak, aby jeho plocha byla vodorovně, tedy kolmo na směr vniku indentoru. První měření bylo provedeno v ose vzorku a vzdálenosti z od okraje. Byly změřeny úhlopříčky vtisku a podle vzorce (2.3) spočtena tvrdost. Poté se vzorek pomocí posuvného šroubu posunul o z ve směru osy vzorku a bylo provedeno měření. Tento postup se opakoval až k protější straně vzorku. Pak se vzorek posunul o z ve směru kolmém na osu vzorku. Tento postup byl opakován, dokud nebyla získána všechna měření. Takto podrobné měření zahrnovalo kolem 400 vtisků.

6 Závěry z měření

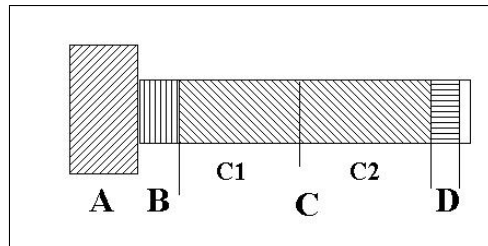
Výsledkem měření je ucelený soubor získaných dat. Tato data byla uložena ve formě matice, jejíž prvky měly nulovou hodnotu na souřadnicích, kde se tvrdost neměřila a hodnotu HV10, kde se tvrdost měřila. Data získaná z měření byla dále statisticky zpracována. Jako první byly měřeny a vyhodnocovány šrouby M10.



Obr. 6.1: Tvrdost v osách šroubů.

Nejdříve byl zvolen vhodný reprezentant, který charakterizuje rozložení tvrdosti na šroubu. Tímto reprezentantem byla zvolena osa šroubu. Z rozložení tvrdosti v osách šroubů viz. (obr.6.1) je patrná existence dvou odlišných částí šroubu: hlavy a dříku. Z tohoto grafického náhledu je vidět, že v hlavě dochází k prudkému nárůstu a poté poklesu tvrdosti. Na dříku se tvrdost vyrovnává a ve střední části je tvrdost téměř konstantní. K vyvrácení nebo potvrzení těchto

experimentálních výsledků nám poslouží aparát matematické statistiky. Všechny naměřené hodnoty tvrdosti na šroubech byly seřazeny do vektorů. Porovnání těchto vektorů pomocí analýzy rozptylu nebylo možné, protože za pomoci Bartlettova testu byla zamítnuta nulová hypotéza o rovnosti rozptylů. Podobně byla zamítnuta i hypotéza o rovnosti rozptylů v případě porovnání tří vzorků stejných typů šroubů. Průměrné hodnoty ze všech naměřených hodnot tvrdosti na celém šroubu pomocí t -testu nebyly porovnávány, protože se u šroubu vyskytují velmi odlišné oblasti a porovnávání průměrných hodnot by mohlo být zavádějící. Proto byl šroub rozdělen na dvě části (hlava, dřík), později byl rozdělen ještě samotný dřík viz. (obr. 6.2).



Obr. 6.2: Rozdělení šroubu.

Hodnoty tvrdosti naměřené na hlavě šroubu M10 byly vloženy do matice a ta byla zpracována pomocí analýzy rozptylu jednoduchého třídění. Nejprve s třídícím faktorem sloupců a poté s třídícím faktorem řad. Analýza rozptylu mohla být použita, protože nebyla za pomoci Bartlettova testu zamítnuta nulová hypotéza o rovnosti rozptylů. Analýza dala tyto výsledky, mezi sloupci neexistuje statisticky významný rozdíl, naopak řady se od sebe významně liší. Pomocí Tukeyovy metody byly získány i konkrétní řady, které se významně liší.

Při vyhodnocování dříku šroubu bylo nutné rozdělit jej na několik částí, protože se při jeho zpracování projevoval problém nesterlnosti rozptylů porovnávaných dat. Pomocí t -testu byly porovnávány průměrné hodnoty v oblastech B, C, C1, C2, D s těmito výsledky: $B < C, C > D, C1 > C2$. V oblasti C byly naměřené hodnoty porovnávány pomocí analýzy rozptylu. Při třídícím faktoru řad neexistuje mezi řadami statisticky významný rozdíl. Třídící faktor sloupců má vliv a pomocí Tukeyovy metody byly zjištěny sloupce, které se od sebe liší. Podobný postup byl zvolen i pro oblasti B a D. Pro zjištění platnosti hypotézy o rovnosti rozptylů byl tentokrát použit Cochranův a Hurltleyův test, protože nebyla splněna podmínka Bartlettova testu. Analýza rozptylu pro oblast B dala tyto výsledky: třídící faktor sloupců nemá vliv, třídící faktor řádků existuje a je způsoben odlišností první řady od všech ostatních. Použití analýzy rozptylu pro oblast D byly získány výsledky: mezi řadami neexistuje statisticky významný rozdíl, zatímco sloupce se od sebe statisticky významně liší.

Ze statistické hodnocení vyplývá, že v hlavě šroubu M10 dochází ke zpevnění v její střední části a na dříku v oblasti B dochází k nárůstu tvrdosti k průměrné hodnotě, v části C tvrdost kolísá kolem průměrné hodnoty a v oblasti D dochází k poklesu tvrdosti. Prudký nárůst tvrdosti na konci dříku je způsoben vyhazovačem. Z těchto výsledků dále vyplývá, že v oblasti C může být síť vtisků řidší než v oblastech A, B a D, což je ekonomická i časová úspora (množství vtisků mohlo být z původních 400 redukováno až na jednu třetinu). V další fázi bude provedena statistická analýza pro šrouby M8 a M12.

Literatura

- [1] Al-Qureshi, H., Marreco, D. Extrusion of Soft Metal Using Elastomer. In: Proceedings of the International Conference on Advanced Materials Processing Technologies (AMPT'01). Spain, 2001. pages 225–231.
- [2] Anděl, J. Matematická statistika, SNTL/ALFA Praha, 1978.
- [3] Anděl, J. Statistické metody, MATFYZPRESS Praha, 1993.
- [4] Bressan, J. Hardness Field in Cold Extrusion of Aluminium. In: Proceedings of the International Conference on Advanced Materials Processing Technologies (AMPT'97). Portugal, 1997. pages 90–95.
- [5] Dobrovici, S. Low Alloy Steels Carbonitriding in Fluidized BED. In: Proceedings of the International Conference on Advanced Materials Processing Technologies (AMPT'01). Spain, 2001. pages 125–129.
- [6] Dowdy, S., Wearden S. STATISTICS FOR RESEARCH. John Wiley&Sons, 1982.
- [7] Erologan, M., Tekeli, S. The Production of dual phase steel structure in the central region of surface-carburized AISI 8620 steel and effect of martensite particle size at constant martensite volume fraction on tensile properties. In: Proceedings of the International Conference on Advanced Materials Processing Technologies (AMPT'01). Spain, 2001. pages 113–124.
- [8] Estrin, Y. Constitutive Modelling of Alloys Implementing Metallurgical Variables. In: Proc. ICAAS-Part 2. France: Grenoble, 1996. pages 1001–1006.
- [9] Gomes, R. Precipitation Strengthening and Mechanical Properties of Hyper-eutectic PIM Al-Si-Cu-Mg Alloys Containing Fe and Ni. In: Proc. ICAAS-Part 2. France: Grenoble, 1996. pages 789–794.
- [10] Hebák, J., Hustopecký, J. Vícerozměrné statistické metody. SNTL/ALFA Praha, 1987.
- [11] Hirose, S. Low Temperature Precipitation of Al-Li-Cu Alloys Containing Additional Elements. In: Proc. ICAAS-Part 2. France: Grenoble, 1996. pages 839–844.
- [12] Janíček, L. Chování oceli 8Mn2Si při výrobě pevnostních šroubů. Sb. konference FORM 2002. Česká republika: Brno, 2002.
- [13] Janíček, L. Vlastnosti pevnostních šroubů tvářených za studena bez konečného tepelného zpracování. Sb. konference FORMING 2002. Česká republika: Luhačovice, 2002.
- [14] Jareš, V. Základní zkoušky kovů a jejich teorie. ACADEMIA Praha, 1966.
- [15] Maroš, B. Empirické modely I. PC-DIR Real, s.r.o. Brno, 1998.
- [16] Mielnik, E. METALWORKING SCIENCE AND ENGINEERING, McGrawHill, Inc., 1991.

- [17] Takeda, M. Precipitation Behaviour of Al–Mg–Si Ternary Alloys. In: Proc. ICAAS–Part 2. France: Grenoble, 1996. pages 815–820.
- [18] Varma, S. Microstructures During Solutionizing and Aging in A6061 Aluminium Alloy Matrix Reinforced with Alumina Particles. In: Proc. ICAAS–Part 2. France: Grenoble, 1996. pages 931–936.
- [19] Wagener. Deep Drawing and Impact Extrusion of Magnesium Alloys at Room Temperature. In: Proceedings of the International Conference on Advanced Materials Processing Technologies (AMPT'01). Spain, 2001. pages 239–245.
- [20] Wilhelm, H. Zusammenhang zwischen Eindringhärte und Formänderung beim Kaltumformen. *Industrie Anzeiger* 91. č. 48, 1969.

Tato práce vznikla jako součást řešení grantu CEZ J22/98: MSM 261100009 *Netradiční metody studia komplexních a neurčitých systémů* a výzkumného záměru č. MSM 262100003 (CZ 300003/2201) *Rozvoj progresivních vysoce přesných technologií.*

Autorovo CV

A Osobní údaje:

Jméno a příjmení: Karel Doubravský
Bydliště: Bušín 30, 789 62
e – mail: karel.d@email.cz
Datum a místo narození: 27. února 1978, Šumperk
Stav: Svobodný

B Dosažené vzdělání:

2001–2005 Doktorské studium – Fakulta strojního inženýrství, VUT v Brně.

- Obor: *Matematické inženýrství*.
- Disertační práce: Matematický model rozložení tvrdosti na šroubech.
- Datum státní doktorské zkoušky: 1. dubna 2004.

1996–2001 Magisterské studium – Fakulta strojního inženýrství, VUT v Brně.

- Obor: *Matematické inženýrství*.
- Diplomová práce: Metrické metody jako podklad pro analýzu silničních nehod.

1992–1996 Gymnázium v Šumperku.

C Praxe: pedagogická

2001–2004 vedení cvičení na FSI VUT v Brně.

D Ostatní znalosti:

- Anglický jazyk: středně pokročilý.
- PC: velmi dobrá (Maple, Delphi, MathCad, Statgraphics, MsOffice, TeX).

Abstract

This thesis deals with the behaviour of new high strength bolts. These bolts are manufactured by cold forming without heat treatment. This fact is important especially from economical point of view. This technology can be much cheaper than the classical one. This bolts are applied in car industry and aircraft industry. For manufacture was selected as material new micro-alloyed steel 8Mn2Si. This steel was developed in VÚHŽ Dobrá a. s. The steel has dominant hardening limited only up to the deformation level $\varphi = 0.1$. Later on, the steel is hardening only at medium rate, almost linearly, at the interval $\sigma \in \langle 800, 1200 \rangle$ MPa, corresponding to the deformation $\varphi \in \langle 0.1, 1.6 \rangle$. Because they are new bolts, we want to find strength (inhomogeneity of deformation, breaking points, ...) out. Behaviour description of bolts is based hardness measurement on. The measurement of Vickers hardness was executed on the half of longitudinal axis cut of the specimens. Such a measurement comprised of a approximately 400 measuring points. The results of the measure had been saved to matrix and they were analysed of statistics (scatter analysis, t - test, Bartlett's test, ...). Further was a mathematical model of hardness layout found. We search dependence Vickers hardness on the position inside bolt. The mathematical model and statistic analysis description tensile properties of bolts.