

VĚDECKÉ SPISY VYSOKÉHO UČENÍ TECHNICKÉHO V BRNĚ

*Edice Habilitační a inaugurační spisy, sv. 538*

ISSN 1213-418X

**Petr Frantík**

**FYZIKÁLNÍ DISKRETIZACE  
A JEJÍ APLIKACE  
NA ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH ÚLOH**

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta stavební

Ústav stavební mechaniky

**Ing. Petr Frantík, Ph.D.**

**FYZIKÁLNÍ DISKRETIZACE A JEJÍ APLIKACE  
NA ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH ÚLOH**

PHYSICAL DISCRETIZATION AND ITS APPLICATION  
IN THE SOLUTION OF NONLINEAR PROBLEMS

ZKRÁCENÁ VERZE HABILITAČNÍ PRÁCE



BRNO 2016

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

fyzikální diskretizace, deterministický chaos, nelinearita, simulace, dynamický systém

## **KEYWORDS**

physical discretization, deterministic chaos, nonlinearity, simulation, dynamical system

The full version of the thesis is deposited in the archive of the Study division of Dean's office of Faculty of Civil Engineering at Brno University of Technology

# OBSAH

Úvod	4
<b>1 Metody</b>	<b>7</b>
1.1 Zobecněné souřadnice a rychlosti	7
1.2 Pohybové rovnice	7
1.3 Dynamický systém	8
1.4 Řešení dynamického systému	8
1.4.1 Eulerova metoda	9
1.4.2 Symplektická Eulerova metoda	9
1.4.3 Klasická metoda Runge-Kutta	10
1.5 Limitní množina	10
1.6 Poincarého mapa	12
1.7 Bifurkace	12
1.7.1 Vidličková bifurkace	13
1.7.2 Hopfova bifurkace	13
1.7.3 Bifurkace zdvojením periody	13
1.8 Imperfekce a ztráta symetrie	15
1.9 Cyklické souřadnice	15
<b>2 Fyzikální diskretizace</b>	<b>16</b>
2.1 Tuhé dílce	16
2.2 FyDiK2D	17
2.3 Model s hmotnými styčníky	17
2.4 Pseudočástice	18
2.5 FyDiK3D	19
2.6 FyDiKnD	20
<b>3 Konzola zatížená sledující silou</b>	<b>22</b>
3.1 Model	22
3.2 Simulace	24
3.3 Diskuze	27
<b>4 Volný prut</b>	<b>28</b>
4.1 Výsledky	28
4.2 Diskuze	30
<b>5 Stabilita kolejového svršku</b>	<b>30</b>
5.1 Předpoklady výpočtu	31
5.2 Model	34
5.3 Výsledky výpočtu	34
5.4 Diskuze	35
<b>Závěr</b>	<b>37</b>
<b>Literatura</b>	<b>38</b>



# Úvod

Modelování fyzikálních struktur je široce rozvětvený obor zahrnující návrh a posouzení unikátních strojů či staveb i věcí denní potřeby majících charakter prefabrikovaných výrobků. Týká se prakticky všech průmyslových a vědních odvětví. Dnešní teoretické zázemí a možnosti výpočetní techniky spojují fyzikální systémy do jednotného rámce. Pomocí tohoto rámce pak lze (s mírným nadhledem) řešit pohyb, deformaci a lom konstrukcí, předvídat počasí či počítat dráhy kosmických sond.

Historicky a filozoficky vzato lze říci, že díky soustředění západních kultur na rozvoj oblastí s možností lineární analýzy došlo k technické revoluci, která nakonec vyústila ve vznik výpočetní techniky, mostu ke studiu úloh nelineárních<sup>1</sup>, jejichž projevy byly do té doby především doménou kultur východních v téměř metafyzické poloze<sup>2</sup>. Díky výpočetní technice tak již několik desetiletí dochází k synergii mezi těmito filozofiemi, mající kromě jasného přínosu i vedlejší dopady na lidskou společnost<sup>3</sup>.

Habilitační práce se věnuje aplikacím teorie dynamických systémů, které vykazují v případě nelineárních úloh zmiňovaný synergický efekt. Nelineární systémy totiž vyžadují natolik odlišný přístup od systémů lineárních, že vzniklo množství nových paradigmat a bylo třeba vyvinout zcela nové způsoby, jak tyto problémy studovat.

Práce postupně představuje vyvíjené modely speciální i obecné. Dokazuje jejich funkčnost nejprve na teoretických úlohách a poté se věnuje jejich praktickým aplikacím.

## Modelování

V současné mechanice lze vidět dvě větve, kterými se ubírá vývoj matematických a numerických modelů. První větví je snaha modelovat prostředí jako spojitě, druhou větví je modelování prostředí diskrétního. Obě tyto větve mají svůj obraz v diskretizaci při vytváření numerických modelů<sup>4</sup>. Jedná se o:

- *Matematickou diskretizaci*, kdy je reálná látka uvažována jako spojitá a její vlastnosti se diskretizují pomocí parametrizovaných funkcí, které slouží jako aproximace ideálních přesných řešení.
- *Fyzikální diskretizaci*, která rezignuje na představu modelové spojitosti a nahrazuje reálnou látku – i makroskopické celky z ní složené – diskrétními elementy.

V případě silně nelineárních úloh je často robustnějším přístupem diskretizace fyzikální zejména díky její jednoduchosti. Vznikají transparentní numerické modely, které těží z výkonu našich výpočetních systémů.

---

<sup>1</sup>[1] str. 29: „Věda o komplexitě je složitě propojena s počítačovou technikou a rozhodujícím způsobem na ní závisí.“

<sup>2</sup>[2] str. 31: „Orientální myšlení tíhne k jinému filozofickému názoru . . .“ (než je názor západní civilizace).

<sup>3</sup>[3] str. 66: „Někteří zastánci této teorie (chaosu) v ní spatřují i další podstatný krok ke sblížení 'dvou kultur', přírodovědecko-technické na jedné straně a humanitní, umělecké na straně druhé.“, [4] str. 89: „V novověkém myšlení se objevují dvě tendence v pojetí 'chaosu': pozitivní koncepce, především v mystických a některých naturfilozofických spekulacích, anebo naopak odmítavé hledisko v přírodovědných a ranou přírodovědou ovlivňovaných teoriích.“, [5] str. 153: „V karteziánsko-newtonské substanční skutečnosti nikdy nemohlo vzniknout něco skutečně nového.“, [6] str. 184-188: Porovnání historického vnímání světa různými kulturami napříč světem; [1] str. 26: Vliv „tradičního“ redukcionismu a „nové“ komplexity. „Komplexita skrývá holistickou perspektivu . . .“, [7] str. 76-79: Vlastnosti a význam indické kultury.

<sup>4</sup>Detailed systém třídění modelů, viz [8].

## Výstižnost

Schopnost modelů předvídat stav reálných konstrukcí, obecněji systémů, je dvojího druhu<sup>5</sup>. Dělí se na:

- *Kvantitativní*, kdy nám záleží na číselných hodnotách veličin. Požaduje se dostatečná shoda měřených kvantit s výsledky výpočtu pomocí numerického modelu.
- *Kvalitativní*, jež se opírá o výskyt nelineárních jevů. Porovnává se jejich existence či absence. Sledování takových jevů je do značné míry nezávislé na hodnotách měřených kvantit. Navrhují se modely kvalitativně shodné, schopné vysvětlit pozorované jevy<sup>6</sup>.

Kvalitativní hledisko je v mechanice velmi neobvyklé. Jeho uplatnění lze nalézt především v extrémních případech, jakými jsou demolice, lom materiálu, ztráta stability konstrukce, nárazy, výbuchy, výrazné deformace a kmitání, apod.

## Složitost

Složitost modelu a jeho náročnost na výpočet se rovněž rozdělují podle toho, zda se jedná o lineární (slabě nelineární) a (silně) nelineární problém. Důvodem je zejména neznámé chování systému respektive modelu. Dopředu nevíme, co je klíčovou charakteristikou, jež bude určovat použitelnost systému či modelu. Lze totiž říci, že jakmile má systém určité kvalitativní vlastnosti, tak není možné (bez mnoha výpočtů či rozsáhlých experimentů) jej dostatečně dobře poznat. Nelineární deterministický systém totiž může vykazovat:

- *Více výsledných stavů* pro totožné hodnoty jeho parametrů. Systém se může chovat různě při stejném zatížení.
- *Závislost na počátečním stavu*. Více testů se (zdánlivě) stejným nastavením dá zcela různé výsledky.
- *Chaotické chování*, které značně omezuje naši schopnost rozpoznat, posuzovat a předvídat stav systému.
- *Interakce* mezi modelem a metodami řešení. Složitost modelu zásadně ovlivňuje použitelnost výpočetních metod. Ačkoliv řešení existuje, metoda jej za určitých podmínek nalezne a za jiných nikoliv.
- *Bifurkační body* a s nimi spojenou nestabilitu systému i numerických metod v jejich okolí.

Existence těchto jevů vyžaduje velké experimentální či výpočetní kapacity a představuje jeden ze zdrojů překvapení při návrhu a posuzování reálných systémů.

Z hlediska očekávaných vlastností je proto třeba navrhovat buď modely rozsáhlé, projevující se jednoduše, oproti modelům jednoduchým, mající chování výrazně nelineární.

## Datová reprezentace

Štěpení přístupu k mechanickým úlohám se projevuje i na způsobu, jakým jsou reálné systémy a jejich modely reprezentovány ve výpočetních strojích. Lineární (slabě nelineární) systémy se typicky reprezentují hierarchicky, pomocí vyšších matematických entit (jako jsou například matice), na které se aplikují speciální operace s těmito entitami. Nelineární systémy je naopak často vhodné reprezentovat jako skupinu samostatných objektů interagujících v síti.

Zde je rovněž patrná známka vlivu, lze-li to tak říci, filozofie modelování a jejího přesahu do věcí reálného světa. V přehledných alias jednoduchých či klidných případech je hierar-

<sup>5</sup>Poznamenejme, že hodnocení této schopnosti je opět spjato s dříve uvedeným dělením světových filozofií.

<sup>6</sup>[9] str. 62-73: Modelování zemětřesení; [1] str. 125-128: Modelování hydratace cementu.

chické (stromové) uspořádání efektivnější (systémy nadřazenosti). Naopak, pokud je situace nepřehledná a lze očekávat neznámé zvraty a překážky, je síťové (přesněji decentralizované) uspořádání vhodnější<sup>7</sup>.

## Determinismus

Determinismus a (respektive versus) nahodilost je nejobtížnějším zde diskutovaným tématem (opět s širokým filozofickým přesahem). Z hlediska definice i velmi jednoduchý nelineární deterministický systém totiž může produkovat z vnějšího pohledu nahodilý výstup<sup>8</sup>. Lze říci, že deterministický chaos tvoří most mezi determinismem a náhodou<sup>9</sup>.

Vzhledem k možné složitosti chování nelineárních systémů způsobuje uvažování nahodilosti:

- Zastírání jednotlivostí. Při vysokých počtech interagujících objektů může přestat záležet na konkrétním vývoji a vlastnostech těchto objektů. Úloha se díky tomu stává jednodušší.
- Nárůst výpočetní složitosti. Model s parametry danými rozdělením pravděpodobnosti a jejich závislostí představuje další dimenze, ve kterých se úloha proměňuje. Tento nárůst často představuje nepřekonatelnou bariéru.
- Skrytí nejasnosti ve zdroji. Uvažování nahodilosti makroskopických objektů je způsobem, jak se vyhnout zásadní neznalosti stavu či pravidel chování modelovaného objektu.

V práci je nahodilost uvažována pouze při studiu závislosti na počátečním stavu. Některé modely jsou však aplikovány pro řešení stochastických úloh.

## Emergence

Nedílnou součástí studia nelineárních systémů je pozorování vzniku struktur, jejichž existence není patrná z definice systému. Mluví se o jejich spontánním vzniku – emergenci<sup>10</sup>. Emergence je zodpovědná za vznik atraktorů dynamických systémů, bazénů přitažlivosti, kaskád bifurkací, apod. Rovněž makroskopické vlastnosti materiálů (pružnost, pevnost, atd.) vznikly emergencí souborů krystalů (emergentních struktur), či amorfních shluků, které jsou tvořeny soubory atomů a molekul, rovněž považovaných za emergentní struktury<sup>11</sup>.

---

<sup>7</sup>[10] str. 13: „...způsob, jakým normálně navrhujeme počítače, začíná selhávat, když je systém příliš komplikovaný. Právě ony základní principy, které nám umožňují navrhovat počítače, vedou ve svém důsledku k určité křehkosti a neefektivitě. Tato slabost nemá nic společného se základními omezeními výpočetní techniky, je dána omezeními hierarchického způsobu návrhu.“, str. 139: „Spoléhání na přesnou hierarchickou strukturu je Achillovou patou inženýrského způsobu návrhu, protože nevyhnutelně způsobuje onu absenci flexibility, kterou si spojujeme se stroji. . . hierarchické systémy jsou nespolehlivé, neboť jsou náchylné ke katastrofálním selháním. Vše, co naši technologií zkonstruujeme, je nutně 'křehké', protože každá část takto navrženého systému musí přesně dodržovat návrhem předepsané interakce s jinými částmi.“, str. 143: „... činnost (evolučně vyvinutého software) nelze rozložit do hierarchie pochopitelných částí.“, [11] str. 38-39, 85: „Kdykoliv se setkáváme s živými systémy – organizmy, částmi organismů, společenstvy organismů –, můžeme pozorovat, že jejich složky jsou uspořádány v sítích. . . Protože komunikační sítě mohou generovat zpětnovazebné smyčky, mohou získat schopnost se samostatně regulovat.“

<sup>8</sup>[12] str. 251: Chaotické chování „... je plně ekvivalentní náhodnému procesu.“

<sup>9</sup>[12] str. 251: „Můžeme říci, že náhoda a determinismus jsou dialekticky svázány prostřednictvím deterministického chaosu.“

<sup>10</sup>[11] str. 39: „Na začátku 20. let 20. století zavedl C. D. Broad termín 'emergentní vlastnosti' pro ty vlastnosti, které se objevují na určité úrovni komplexity a neexistují na úrovni nižší.“, [1] str. 19: „... interakce (makroskopických souborů jednotek) mají za následek koherentní kolektivní jevy, takzvané emergentní vlastnosti, jež se dají popisovat pouze na vyšších úrovních, než je úroveň individuálních jednotek.“, [2] str. 396-397, 408: „Emergence je zodpovědná za makroskopickou jednoduchost.“

<sup>11</sup>[5] str. 146-164, především str. 149: „Velký třesk a z něho vzniklé rozpínající se silové pole, v němž se postupně tvoří paměť v podobě pravidel, omezující jeho původní neurčitost. . . (pravidla) jsou navzájem

K důsledkům či projevům emergence patří rovněž vznik samoorganizace, kdy se neuspořádaný systém ustálí do uspořádaného stavu, který navíc může vykazovat velmi speciální vlastnosti<sup>12</sup>. Nahlížení na svět hledáním emergentních struktur je v současnosti souhrnně nazýváno jako teorie komplexity<sup>13</sup>.

Z uvedeného vyplývá, že veškeré naše teorie a modely jsou emergentními vlastnostmi pozorovaného světa, našich paradigmat a (často dále zprostředkovaných) smyslových vjemů. Nedílnou součástí modelování by proto měl být experiment a vývoj technik pro odhalení modelových nedokonalostí.

## 1 Metody

Zde uvedené pojmy a metody souvisí s klasickou mechanikou v její modernější podobě (*lagrangeovská mechanika*), teorií dynamických systémů a teorií chaosu, viz např. [14, 15, 16, 17]. Poslední dvě zmíněné teorie přinášejí ke klasické mechanice zejména nástroje ke studiu nelineárních jevů, kvůli kterým bylo zapotřebí vyvinout unikátní prostředky.

### 1.1 Zobecněné souřadnice a rychlosti

Stav fyzikálního systému lze popsat pomocí parametrů, které jednoznačně určují jeho konfiguraci. Těmto parametrům říkáme *zobecněné souřadnice* a jejich derivace podle času označujeme jako *zobecněné rychlosti*. Konkrétní hodnoty zobecněných souřadnic chápeme jako bod v *konfiguračním prostoru*, jehož osy odpovídají jednotlivým zobecněným souřadnicím. Pokud jsou tyto zobecněné souřadnice na sobě nezávislé, pak jejich počet odpovídá stupni volnosti systému.

Systém je často omezen na podmnožinu konfiguračního prostoru v důsledku různých vazeb. Tuto podmnožinu označujeme jako *konfigurační varietu* systému.

Přidáme-li ke konfiguračnímu prostoru, respektive ke konfigurační varietě, zobecněné rychlosti, vytvoříme tzv. *fázový prostor* systému. Rozměry fázového prostoru odpovídají zobecněným souřadnicím a jejich rychlostem.

### 1.2 Pohybové rovnice

Máme-li daný fyzikální systém popsán pomocí zobecněných souřadnic, lze sestavit tzv. *lagrangeián*  $L$ , vyjadřující energetickou bilanci systému:

$$L = E_k - E_p, \tag{1}$$

kde  $E_k$  a  $E_p$  je kinetická respektive potenciální energie systému. Pohybové rovnice systému pak dostaneme užitím vztahu:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{2}$$

kde  $q_i$  je zobecněná souřadnice,  $\dot{q}_i = dq_i/dt$  její zobecněná rychlost a  $t$  je čas.

---

emergentní a tvoří kvalitativně odlišné 'paměťové vrstvy' ...“

<sup>12</sup>[11] str. 89: Struktura konvektivních buněk; [9] str. 86-100: Samoorganizovaná kritikalita.

<sup>13</sup>[1] str. 19-31: Definice.

### 1.3 Dynamický systém

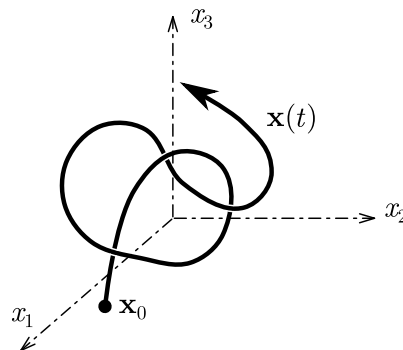
Proměnné, které popisují stav daného fyzikálního systému v čase, nazýváme *stavové proměnné*. Hodnoty těchto stavových proměnných jednoznačně určují stav tohoto systému v daný okamžik. Mezi stavové proměnné typicky řadíme všechny nezávislé zobecněné souřadnice systému spolu s jejich zobecněnými rychlostmi. Stavové proměnné můžeme chápat jako rozměry výše zmíněného fázového prostoru.

Zapíšeme-li pro tyto stavové proměnné soustavu diferenciálních rovnic v kanonickém tvaru:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 &= F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n),\end{aligned}\tag{3}$$

nazveme tuto soustavu *dynamickým systémem*, kde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  je vektor jeho stavových proměnných.

Řešením této soustavy diferenciálních rovnic pro určité počáteční podmínky  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  je vektor funkcí  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  udávající hodnoty stavových proměnných  $\mathbf{x}$  v čase  $t$ . S pomocí nalezeného řešení  $\mathbf{x}(t)$  pak můžeme vývoj systému znázornit ve fázovém prostoru jako spojitou křivku, tzv. *trajektorii systému*, viz obrázek 1.



Obr. 1: Trajektorie systému ve fázovém prostoru.

Trajektorie dynamického systému má zejména tu vlastnost, že se nemůže protínat, jelikož by v průsečíku nebylo možno určit budoucí stav systému. Tato podmínka klade podstatné omezení na dimenzi fázového prostoru. Chování dynamického systému se může plně rozvinout ve fázovém prostoru, který má alespoň tři dimenze. Teprve ve třech dimenzích lze trajektorii „proplétat“, aniž by se protínala, viz např. [15].

### 1.4 Řešení dynamického systému

Dynamické systémy, kterými lze modelovat mechanické konstrukce, mají jednu společnou vlastnost, důležitou pro výběr metod jejich řešení. Touto vlastností je disipace energie. V dynamickém systému je tento jev modelován pomocí tlumení. Dynamické systémy mající tento člen pak nazýváme *disipativní*. Pro řešení disipativních dynamických systémů zpravidla s výhodou postačují explicitní numerické metody.

### 1.4.1 Eulerova metoda

*Eulerova metoda* je základní explicitní jednokrokovou<sup>14</sup> a jednobodovou<sup>15</sup> numerickou metodou pro řešení počátečního problému obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu. Její předpis pro řešení dynamického systému lze psát ve tvaru:

$$x_i(t+h) = x_i(t) + h F_i(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), i = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

kde  $h$  je časový krok metody. Tato metoda je pro řešení dynamických systémů nevhodná, jelikož je málo stabilní.

### 1.4.2 Symplektická Eulerova metoda

Výrazně lepších výsledků dosáhneme úpravou Eulerovy metody díky tomu, že mechanické konstrukce popisují diferenciální rovnice druhého řádu. Mějme například pohybovou rovnici hmotného bodu uchyteného pružnou vazbou ve tvaru:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0, \quad (5)$$

kterou lze upravit na soustavu (dynamický systém):

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\frac{c}{m}v - \frac{k}{m}x, \\ \frac{dx}{dt} &= v. \end{aligned} \quad (6)$$

Takto vytvořený dynamický systém lze řešit popsanou Eulerovou metodou předpisem (4), přičemž obdržíme diferenční vztahy:

$$\begin{aligned} v(t+h) &= v(t) - h \left( \frac{c}{m}v(t) + \frac{k}{m}x(t) \right), \\ x(t+h) &= x(t) + h v(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Tento předpis můžeme snadno upravit na:

$$\begin{aligned} v(t+h) &= v(t) - h \left( \frac{c}{m}v(t) + \frac{k}{m}x(t) \right), \\ x(t+h) &= x(t) + h v(t+h), \end{aligned} \quad (8)$$

za předpokladu, že nejprve vypočteme hodnotu stavové proměnné  $v$  (rychlost posunutí  $x$ ) v čase  $t+h$ . Slovně můžeme tuto úpravu popsat jako užití nově vypočtené rychlosti posunutí

---

<sup>14</sup>Numerická metoda se nazývá  $k$ -kroková, je-li pro výpočet nové hodnoty  $x(t+h)$  zapotřebí znát  $k$  předchozích stavů  $x$ . Například pro dvoukrokovou metodu je třeba znát stav  $x(t)$  a také předchozí stav  $x(t-h)$ .

<sup>15</sup>Numerická metoda se nazývá  $l$ -bodová, je-li pro výpočet nové hodnoty  $x(t+h)$  zapotřebí spočítat  $l$  hodnot funkce  $F(t, x(t))$ .



$v$  pro výpočet nového posunutí  $x$  (tuto úpravu lze snadno zobecnit pro řešení rozsáhlejších soustav diferenciálních rovnic)<sup>16</sup>.

Podobných výsledků (stejně stability metody) dosáhneme opačnou úpravou:

$$\begin{aligned}x(t+h) &= x(t) + h v(t), \\v(t+h) &= v(t) - h \left( \frac{c}{m} v(t) + \frac{k}{m} x(t+h) \right),\end{aligned}\tag{9}$$

obdobně za předpokladu, že nejprve vypočteme hodnotu stavové proměnné  $x$  (posunutí) v čase  $t+h$ . Slovně můžeme opět tuto úpravu popsat jako užití nově vypočteného posunutí  $x$  pro výpočet nové rychlosti posunutí  $v$ . Takto upravené explicitní metody se souhrnně nazývají *semi-implicitní* nebo *symplektické*, viz např. [18, 19].

### 1.4.3 Klasická metoda Runge-Kutta

Přesnější a dobře použitelnou explicitní numerickou metodou je *Klasická metoda Runge-Kutta*, která je jednokroková a čtyřbodová. Metoda aproximuje průběh funkce  $x$  polynomem čtvrtého stupně. Chyba této metody je řádu  $\mathcal{O}(h^5)$ . Má předpis (vyžaduje znát hodnoty funkce  $F(t, x(t))$  ve čtyřech bodech):

$$\begin{aligned}k_1 &= F(t, x(t)), \\k_2 &= F(t + h/2, x(t) + k_1 h/2), \\k_3 &= F(t + h/2, x(t) + k_2 h/2), \\k_4 &= F(t + h, x(t) + k_3 h), \\x(t+h) &= x(t) + h/6 (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).\end{aligned}\tag{10}$$

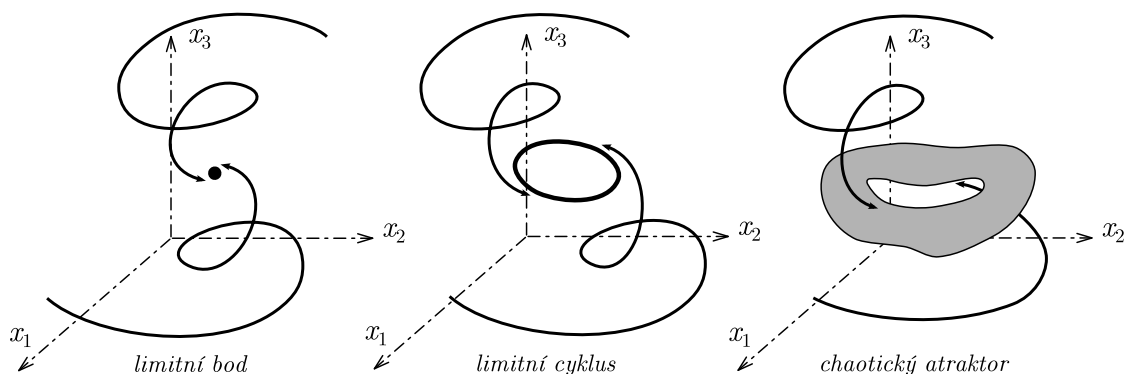
Její zobecnění na řešení soustav rovnic pak vypadá následovně:

$$\begin{aligned}k_{1i} &= F_i(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \\k_{2i} &= F_i(t + h/2, x_1(t) + k_{11}h/2, x_2(t) + k_{12}h/2, \dots, x_n(t) + k_{1n}h/2), \\k_{3i} &= F_i(t + h/2, x_1(t) + k_{21}h/2, x_2(t) + k_{22}h/2, \dots, x_n(t) + k_{2n}h/2), \\k_{4i} &= F_i(t + h, x_1(t) + k_{31}h, x_2(t) + k_{32}h, \dots, x_n(t) + k_{3n}h), \\x_i(t+h) &= x_i(t) + h/6 (k_{1i} + 2k_{2i} + 2k_{3i} + k_{4i}), \quad i = 1, 2, \dots, n.\end{aligned}\tag{11}$$

## 1.5 Limitní množina

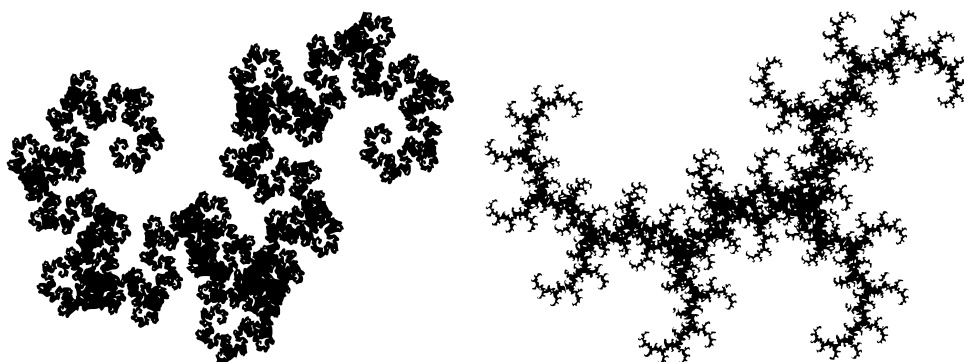
S ubíhajícím časem se trajektorie dynamického systému blíží k *limitní množině* bodů uvnitř fázového prostoru. Je-li dynamický systém spojitý, nelineární, a má-li alespoň tři stavové proměnné, pak se limitní množinou může stát (viz obr. 2):

- *limitní bod*; trajektorie se blíží k tzv. stabilnímu pevnému bodu ve fázovém prostoru,
- *limitní cyklus*, tvořený uzavřenou trajektorií ve fázovém prostoru,
- *kvaziperiodická množina*; systém se při pohybu na kvaziperiodické množině chová stabilně (blízké trajektorie se nevzdalují), avšak nelze nalézt konečnou periodu,
- *chaotický atraktor*; limitní množina se složitou strukturou vyznačující se nestabilním chováním blízkých trajektorií, které se od sebe velmi rychle vzdalují, avšak zůstávají v oblasti s konečným objemem.



Obr. 2: Tři druhy limitních množin.

Nelineární dynamický systém může mít více než jednu limitní množinu. Limitní množina, ke které trajektorie systému konverguje, je dána jeho počátečními podmínkami. Množiny počátečních podmínek vedoucích k jedné limitní množině tvoří tzv. *bazén přitažlivosti* této množiny. Rozhraní mezi bazény přitažlivosti často tvoří *fraktální útvar*. Fraktál je geometrická entita vyznačující se tzv. *soběpodobností*, viz obr. 3. Dílčí část fraktálu je topologicky ekvivalentní celému fraktálu, či jiné jeho části.



Obr. 3: Dvě modifikace tzv. dračí křivky.

Chaotický atraktor je rovněž fraktální množina. Fraktální vlastnosti získává díky nutnosti vměstnat nekonečnou (neopakující se) trajektorii do konečného objemu zároveň s požadavkem vzdalování blízkých trajektorií. Tohoto efektu lze pro představu dosáhnout opakovaným natahováním a skládáním (viz [20, 21]).

Dodejme, že pro fraktální útvary lze stanovit neceločíselnou dimenzi, které se souhrnně říká *fraktální dimenze*. Například okraje dračí křivky na obr. 3 zaujímají konečnou plochu a zároveň je nelze reprezentovat křivkou konečné délky. Tudíž jsou více než jednodimenzionální a méně než plošné.

<sup>16</sup>Tato úprava je podobná úpravě užitě v *Gauss-Seidelově iterační metodě* pro řešení soustavy lineárních algebraických rovnic vycházející z *Jakobiho iterační metody*. Gauss-Seidelova metoda (též nazývaná zrychlená Jakobiho metoda) zahrnuje do výpočtu nové aproximace  $i$ -tého kořene soustavy všechny již vypočtené aproximace kořenů s indexem  $0, \dots, i - 1$ . Tím je dosaženo urychlení konvergence iterační metody.



## 1.6 Poincarého mapa

Fázový prostor dynamických systémů má často mnoho dimenzí. Abychom byli schopni vývoj systému studovat, provádíme projekce trajektorie do prostorů nižší dimenze. V případech, kdy se systém chová složitě (kvaziperiodický nebo chaotický pohyb), není výsledná projekce přehledná.

*Poincarého mapa* je výsledkem řezu trajektorie spojitého dynamického systému nadplochou ve fázovém prostoru. Tato řezná nadplocha se nazývá *Poincarého řezem*. Poincarého mapa je funkce, která přiřazuje danému průsečíku trajektorie následující průsečík trajektorie, a proto se jí rovněž říká *mapa prvního návratu*, viz např. [15]. Zajímavé je, že ji lze chápat jako diskretní dynamický systém.

Na obr. 4 je zobrazen výsledek Poincarého řezu chaotickým atraktorem dynamického modelu ohýbané konzoly s jedním stupněm volnosti zatížené harmonickým buzením, viz [22].



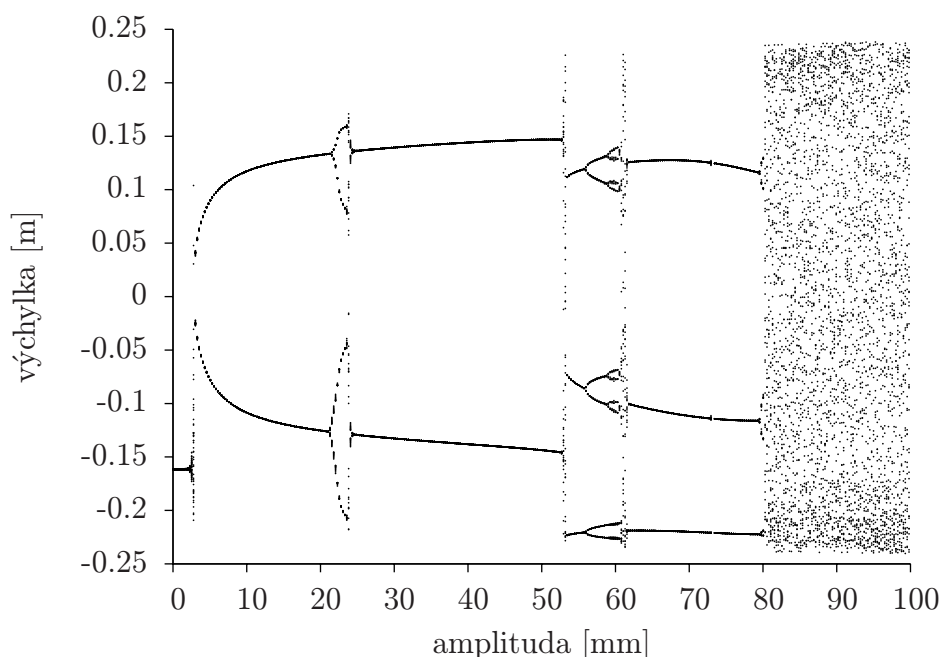
Obr. 4: Poincarého řez chaotickým atraktorem.

## 1.7 Bifurkace

Při spojitě změně parametrů systému  $p_i$  může dojít k náhlé ztrátě stability, která se projeví kvalitativní změnou stavu systému. Toto místo se označuje jako *bifurkační bod* a projevuje se typicky jako rozdělení limitní množiny. Toto rozdělení lze detekovat, pozorovat i zobrazovat pomocí Poincarého mapy.

Vyhledávání bifurkačních bodů je při studiu nelineárních systémů klíčové, jelikož tyto body oddělují oblasti v parametrickém prostoru s kvalitativně odlišným chováním. Jejich přítomnost či absence prokazuje vhodnost a výstižnost různých modelů reálných systémů. Zobrazíme-li pomocí Poincarého mapy vývoj limitní množiny systému v závislosti na (bifurkačním) parametru, obdržíme *bifurkační diagram*.

Na obrázku 5 je znázorněn bifurkační diagram konzolového nosníku buzeného harmonickým pohybem vetknutí, viz [23]. Bifurkační parametr, kterým je amplituda buzení, se nachází na vodorovné ose. Na svislé ose je obrazem průhyb volného konce konzoly z Poincarého mapy (získaný v okamžiku průchodu Poincarého řeznou plochou). Kromě několika bifurkací je z diagramu dobře patrná i tzv. *kaskáda bifurkací* okolo amplitudy 60 mm.

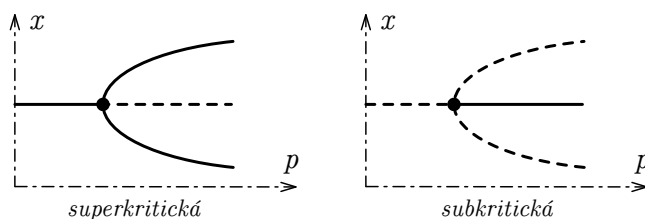


Obr. 5: Bifurkační diagram harmonicky buzené štíhlé konzoly.

### 1.7.1 Vidličková bifurkace

*Vidličková bifurkace* je nejznámějším typem bifurkace v mechanice díky stabilitním problémům vznikajícím při namáhání konstrukčních prvků tlakem. Vyznačuje se rozdělením rovnováhy.

Existují dva typy vidličkové bifurkace, viz obr. 6. *Superkritická* bifurkace rozdějí stabilní stav, přičemž vznikne i jeden stav nestabilní. Upřesněme, že ze dvou vzniklých stabilních stavů se obvykle realizuje jen jeden, viz obr. 7. Naopak *subkritická* bifurkace rozdějí nestabilní stav a objeví se nový stav stabilní.



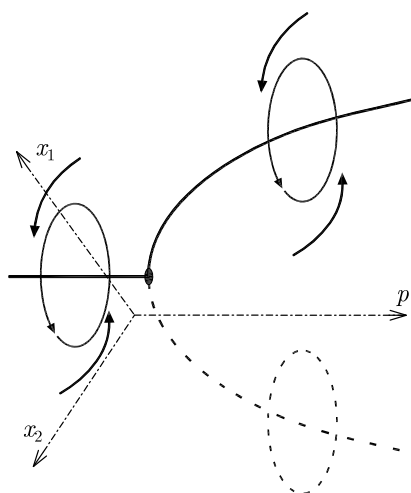
Obr. 6: Typy vidličkové bifurkace; plnou a čárkovanou čarou jsou znázorněny stabilní respektive nestabilní stavy.

### 1.7.2 Hopfova bifurkace

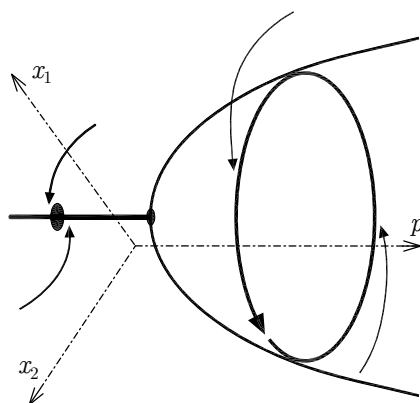
Je v mechanice úzce spjata s kmitáním. Popisuje okamžik, kdy z limitního bodu vzniká limitní cyklus, viz obr. 8. Její výskyt je například patrný na prutu zatíženém sledující silou.

### 1.7.3 Bifurkace zdvojením periody

Limitní cykly nelineárního dynamického systému se mohou náhle rozštěpit, čímž se zdvojnásobí jejich perioda, viz obr. 9. Na bifurkačním diagramu na obr. 5 je těchto bifurkací vidět

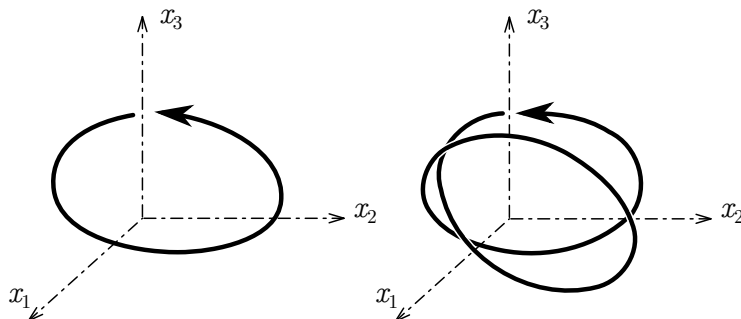


Obr. 7: Superkritická vidličková bifurkace, jak se bude jevit při plynulé změně parametru; čárkovanou čarou je znázorněna stabilní větev, která se pro tento konkrétní příklad nerealizuje.



Obr. 8: Hopfova bifurkace.

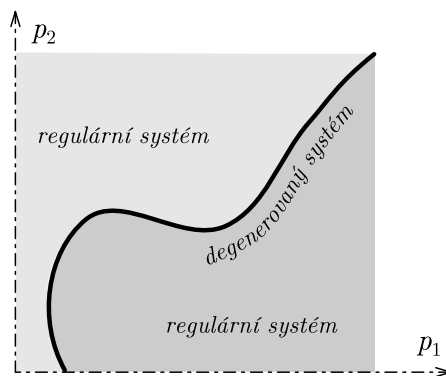
několik. V bifurkačním diagramu se projeví velmi zřetelně oběma větvemi a často tvoří kaskádu bifurkací.



Obr. 9: Bifurkace zdvojením periody.

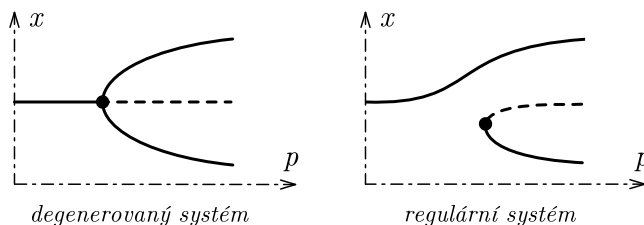
## 1.8 Imperfekce a ztráta symetrie

Idealizované mechanické systémy často obsahují konstrukční celky, které vykazují symetrii. Při řešení těchto systémů pak může docházet ke ztrátě stability, projevující se současně ztrátou symetrie. Reálné systémy však tuto symetrii zpravidla nedodrží v důsledku různých nepřesností, kterým říkáme *imperfekce*. Systémy s imperfekcí označujeme jako *typické* popř. *regulární*. V tomto kontextu je podstatné zmínit, jaký smysl má studium systémů bez imperfekce, které se nazývají *netypické* popř. *degenerované*. Degenerované systémy totiž tvoří v parametrickém prostoru neodstranitelné množiny míry nula na rozhraní mezi regulárními systémy, viz obr. 10. Při změnách parametrů se tudíž nevyhneme přechodům přes tato rozhraní. Je vidět, že degenerované systémy hrají při analýze podobnou roli jako bifurkační body.



Obr. 10: Rozhraní v prostoru parametrů.

Bifurkační body se v důsledku ztráty symetrie mohou zásadně změnit. Na obr. 11 je vidět změna vidličkové bifurkace vlivem imperfekce, podrobněji viz [24].



Obr. 11: Vliv ztráty symetrie na superkritickou vidličkovou bifurkaci.

## 1.9 Cyklické souřadnice

Dynamické zatížení mechanických konstrukcí má často formu harmonické funkce, kterou lze definovat vztahem:

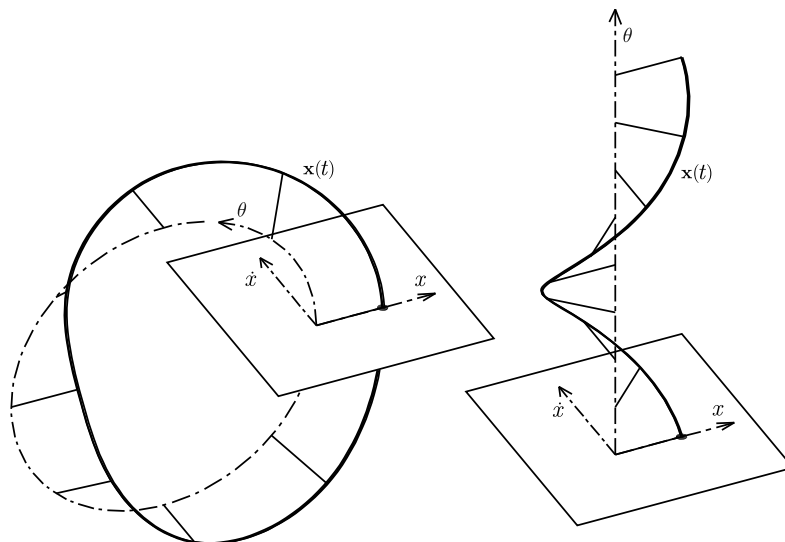
$$F(t) = A \sin(\Omega t + \theta_0), \quad (12)$$

kde  $A$  je amplituda zatížení  $F(t)$ ,  $\Omega$  je jeho úhlová frekvence a  $\theta_0$  jeho počáteční fázový úhel. Fázový úhel  $\theta(t) = \Omega t + \theta_0$  je třeba chápat jako stavovou proměnnou popsanou diferenciální

rovnici:

$$\frac{d\theta}{dt} = \Omega, \quad \theta(0) = \theta_0. \quad (13)$$

Dodejme, že fázový úhel  $\theta$  je tzv. *cyklickou souřadnicí*, kterou lze omezit na interval  $\langle 0, 2\pi \rangle$  a představit si ji jako křivočarou, viz obr. 12.



Obr. 12: Ilustrace cyklické souřadnice.

## 2 Fyzikální diskretizace

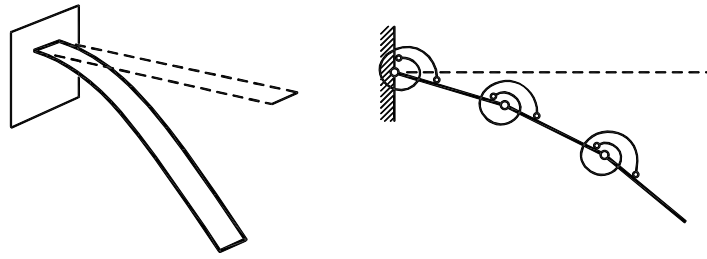
Fyzikální diskretizace je postavena na dvoustupňové představě vytváření matematických po-  
tažmo numerických modelů. Prvním stupněm je vytvoření jednoduchého náhradního fyzikál-  
ního modelu dané reálné konstrukce. Druhým stupněm je matematický popis tohoto náhrad-  
ního modelu včetně jeho diskretizace. Tímto přístupem získáme diskrétní systém, o němž  
existuje jasný a jednoduchý fyzikální obraz.

Výhodou této koncepce je možnost náhradní model reálně vyrobit a ověřit tak přímo jeho  
vlastnosti či chování. Teprve následně je o náhradním modelu uvažováno jako o možné fyzi-  
kální diskretizaci vnitřně složitějšího problému. Výhodou tohoto přístupu je zejména jednodu-  
chost a průhlednost výpočtu jeho stavu, čímž odpadá nutnost použití složitého matematického  
a programového aparátu. Nevýhodou je nutnost obhájit uvažovaný náhradní model a zjevná  
makroskopická neshoda mezi modelem a modelovaným problémem.

Následující podkapitoly v krátkosti shrnují vyvíjené modely, z nichž některé budou po-  
drobněji popsány v samostatných kapitolách.

### 2.1 Tuhé dílce

Pro simulaci ohybového kmitání štíhlého konzolového nosníku a pohybu volného prutu byl  
vytvořen vysoce efektivní model, který cíleně odstraňuje podélné kmitání prutu. Zanedbáním  
kmitů v normálovém směru dochází k výrazné úspoře výpočetního výkonu.

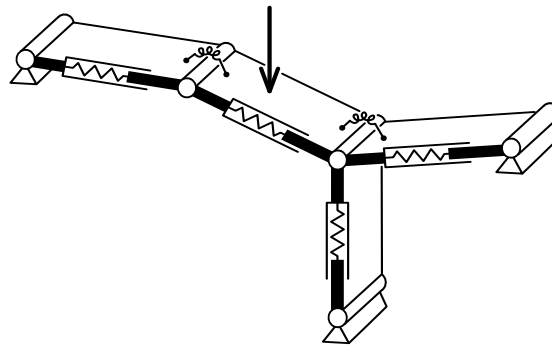


Obr. 13: Konzolový nosník a jeho model z tuhých dílců.

Prut je nahrazen zvoleným počtem absolutně tuhých dílců vzájemně spojených klouby s rotačními pružinami, viz obr. 13. Model se hodí pro dynamické simulace velkých deformací, frekvenční analýzu a stabilitní úlohy.

## 2.2 FyDiK2D

K simulaci chování obecných štíhlých rovinných prutových konstrukcí, jakými jsou rámy a příhradoviny, byl vyvinut model nazvaný FyDiK2D, který, oproti tuhým dílcům, již zohledňuje normálové deformace prutu, ovšem stále zanedbává smykové přetvoření. Model prutu je složen z pružných teleskopických segmentů nazývaných *translační pružiny*, vzájemně spojovaných klouby. Kolem kloubů jsou navinuty *rotační pružiny*, zajišťující ohybovou vazbu mezi dvojicí segmentů stejným způsobem jako u tuhých dílců, viz obr. 14.

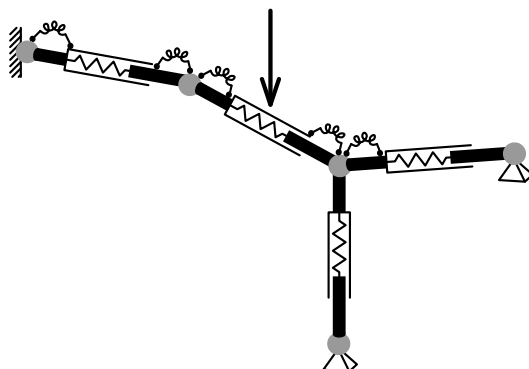


Obr. 14: FyDiK2D model prutové konstrukce.

Model FyDiK2D je vhodný pro řešení nelineárních úloh s obecnými prutovými konstrukcemi. Byl autorem této implementován a zveřejněn pod stejnojmennou aplikací, která je od roku 2007 volně ke stažení na internetu, viz [25].

## 2.3 Model s hmotnými styčníky

V rámci vývoje modelů štíhlých konstrukcí byly navrženy a úspěšně testovány dva prutové modely s hmotnými styčníky, které již umožňují zahrnutí smykového přetvoření prutu. První z nich, původně nazvaný *Metoda hmotných koulí*, vznikl v roce 2001 a byl užít k výpočtu ztrát stability prutových konstrukcí, viz např. [26]. Tento model nahrazuje konstrukci množinou hmotných styčníků (orientovaných koulí), spojených vzájemně translačními pružinami (jako je tomu u modelu FyDiK2D). Styčníky jsou dále napojeny na translační pružiny pomocí rotačních pružin, viz obr. 15.

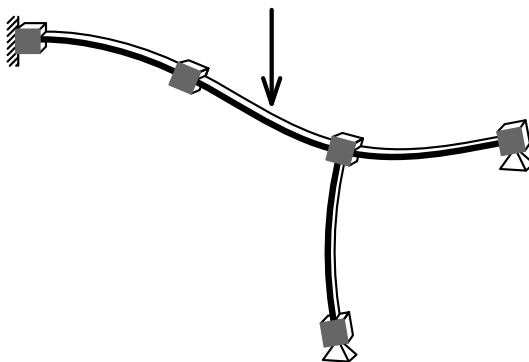


Obr. 15: Model prutové konstrukce s hmotnými koulemi.

Druhý model spočívá v adaptaci prutových elementů užívaných v obecné deformační metodě, viz [27], respektive v metodě konečných prvků, viz např. [28, 29]. Hmotné styčníky jsou propojeny prutovými prvky, které se deformují spojitě dle vybrané báze funkce (nejčastěji kubický polynom), viz obr. 16. Tento model byl rovněž adaptován pro použití v rámci metody *Rigid body spring network*, viz [30, 31].

Modely s hmotnými styčníky mají několik výhod (oproti předchozím modelům). Snadněji se zde vzájemně spojují pruty, jelikož přenos ohybu zprostředkovává styčník. Díky této vlastnosti se také snadněji realizuje vetknutí prutu. Důležitou výhodou je rovněž zahrnutí smykového přetvoření, které se ukázalo být důležitým při modelování lomu, viz [31].

Hlavní nevýhodou je (kromě přidání stupňů volnosti) především další parametr, který kvantifikuje rotační setrvačnost styčníku a komplikuje podmínky stability při numerickém řešení pohybových rovnic.

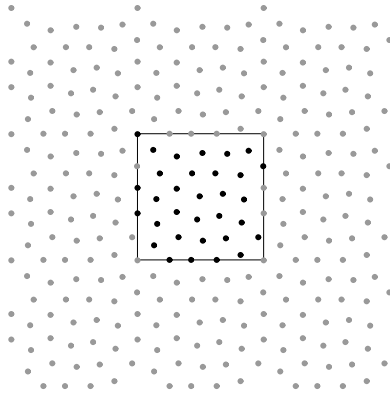


Obr. 16: Model prutové konstrukce s kubickými prutovými prvky.

## 2.4 Pseudočástice

Jedná se zřejmě o nejperspektivnější model díky tomu, že více reflektuje některé vlastnosti atomů, molekul a jejich větších souborů. Částice mohou interagovat každá s každou. Výraznou nevýhodou modelu je jeho výpočetní náročnost, kterou lze snížit využitím různých postupů, viz např. [32].

Na obr. 17 je zobrazen výsledek dynamické simulace mechanické analogie optimálního vzorkování prostoru pro dvě proměnné a 32 simulací vypočtených algoritmem, jenž bere do úvahy interakce mezi všemi dvojicemi částic.



Obr. 17: Optimální vzorkování pro dvě proměnné a 32 simulací.

Analogie spočívá v hledání stabilního rovnovážného statického stavu množiny pseudočástic v oblasti jednotkové hyperkrychle. Částice interagují každá s každou včetně jejich obrazů v sousedních hyperkrychlích (na obr. 17 je rovinná úloha s 8 sousedními čtverci). Dodejme, že každá dvojice částic na sebe působí odpudivou, zcela fiktivní silou  $F$  danou výrazem:

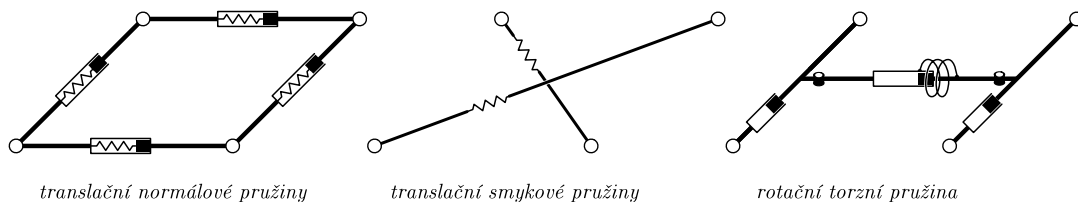
$$F(d) = \frac{2}{d^3}, \quad (14)$$

kde  $d$  je vzdálenost částic v hyperprostoru. Model tak minimalizuje potenciální energii  $E_p$  fiktivního mechanického systému danou výrazem:

$$E_p = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{1}{d_{ij}^2}, \quad (15)$$

## 2.5 FyDiK3D

Úspěšnost rovinného modelu vedla k požadavku zobecnění na model prostorový, který byl rovněž implementován v jazyce Java a zveřejněn pod názvem FyDiK3D. Obdobně jako jeho dvourozměrná analogie je určen zejména pro modelování štíhlých konstrukcí s velkými deformacemi, což jsou především pruty a skořepiny. Na obr. 18 jsou zobrazeny pružiny tvořící obdélníkový skořepinový dílec.

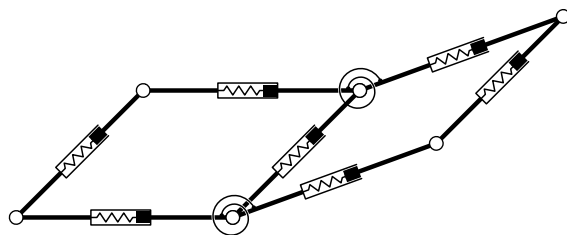


Obr. 18: Schémata vnitřních pružin dílce.

Tyto pružiny jsou dále doplněny rotačními pružinami, spojujícími jednotlivé dílce, viz obr. 19. Množina popsaných pružin zřejmě vytváří model skořepiny reflektující všechny podstatné mechanické vlastnosti.

Na tomto modelu jsou nejzajímavější rotační pružiny, jejichž geometrický popis není zcela triviální, viz následující model FyDiKnD.





rotační ohybové pružiny

Obr. 19: Rotační pružiny propojující dva dílce.

## 2.6 FyDiKnD

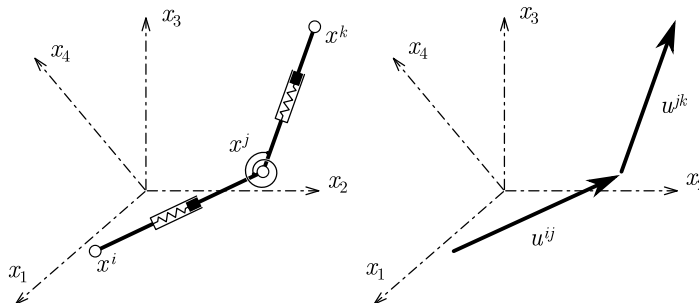
Po zobecnění modelu FyDiK do prostoru se ukázalo, že existuje možnost řešit fiktivní mechanické úlohy v prostorech vyšších dimenzí. Došlo tak k dalšímu zobecnění modelu FyDiK a vznikl *hyperprostorový model*. Model našel uplatnění v řešení problému optimálních singulárních korelačních matic určených počtem proměnných  $N_{\text{var}}$  a počtem simulací  $N_{\text{sim}}$ , viz [33, 34].

V detailu jde o následující: Pro vypočtené korelační matice platí, že pokud je počet proměnných (dimenze  $N_{\text{var}}$ ) větší než počet datových bodů  $N_{\text{sim}}$ , pak musejí být singulární. Korelační matice jsou symetrické a pozitivně semidefinitní. Pro tyto matice lze psát normu optimality  $\rho_{\text{rms}}$  ve tvaru:

$$\left( \frac{N_{\text{sim}}}{2} \right) \rho_{\text{rms}}^2 = \sum_{i=1}^{N_{\text{var}}-1} \sum_{j=i+1}^{N_{\text{var}}} \rho_{ij}^2, \quad (16)$$

kde  $\rho_{ij}$  jsou členy korelační matice.

Korelační matice s minimálním  $\rho_{\text{rms}}$  jsou matice mající  $N_{\text{var}} - N_{\text{sim}}$  shodných kladných vlastních čísel a ostatní vlastní čísla nulová. Mimodiagonální členy těchto matic lze chápat jako kosiny úhlů mezi tyčemi upevněnými jedním koncem ve středu hyperkoule. Mezi každým párem těchto tyčí jsou připevněny *hypersférické rotační pružiny* (viz obr. 20), jejichž potenciální energie je dána právě kosinem úhlu mezi vektory tyčí. Tento mechanický dynamický model pak přirozeně minimalizuje svou potenciální energii, čímž nalezá hledaná optima.



Obr. 20: Pružiny v hyperprostoru.

Dodejme, že pokud počet tyčí  $N_{\text{var}}$  převyšuje dimenzi prostoru  $N_{\text{sim}}$ , nelze najít uspořádání s uvolněnými rotačními pružinami, tj. systém s nulovou potenciální energií.

Tyče jsou v modelu reprezentovány translačními pružinami, jejichž definice je v hyperprostoru zcela analogická jejich definici v rovině. Translační pružina s indexem  $ij$  je dána dvojicí bodů  $i$  a  $j$ , tvořících vektor  $u^{ij}$ , pro který platí:

$$u^{ij} = x^j - x^i, \quad (17)$$

kde  $x^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i)$  je polohový vektor hmotného bodu, ke kterému je pružina připojena a  $n$  je dimenze hyperprostoru. Translační pružina  $ij$  působí na hmotný bod  $x^i$  silou  $F^{ij}$ , pro kterou platí:

$$F^{ij}(l_a) = |F^{ij}(l_a)| \frac{u^{ij}}{|u^{ij}|} = |F^{ij}(l_a)| \frac{u^{ij}}{l_a}, \quad (18)$$

kde  $|F_{ij}(l_a)|$  je velikost působící síly a  $l_a$  je aktuální délka pružiny. V případě uvažování lineárního materiálu platí  $|F_{ij}(l_a)| = k(l_a - l_0)$ , kde  $l_0$  je délka pružiny při nulovém protažení a  $k$  její tuhost.

Doplňme, že pro aktuální délku pružiny  $l_a$  můžeme psát:

$$l_a = |u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}, \quad (19)$$

kde  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ .

Definice rotační pružiny je výrazně komplikovanější. Velikost momentu  $M$  v rotační pružině je funkcí úhlu  $\varphi$ , který svírají teleskopické translační pružiny respektive jejich vektory  $u_{ij}$  a  $u_{jk}$ . Úhel  $\varphi$  se stanoví ze známého výrazu:

$$\cos |\varphi| = \frac{u^{ij} \cdot u^{jk}}{|u^{ij}| |u^{jk}|} = \frac{u^{ij} \cdot u^{jk}}{l_a^{ij} l_a^{jk}}, \quad (20)$$

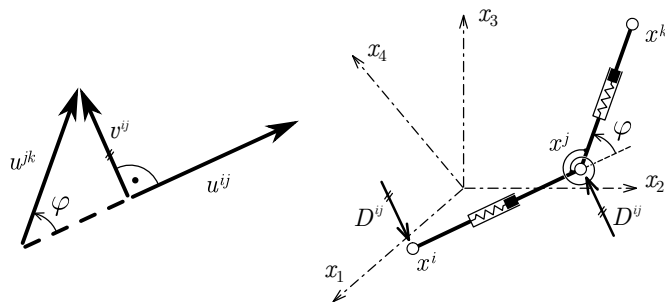
kde symbol tečky mezi vektory značí skalární součin. Pro nanesení tohoto momentu na translační pružiny je nutné nalezení dvou dvojic sil, působících na připojené hmotné body. Každá dvojice sil působí v rovině, která je proložena vektory translačních pružin, na jejichž teleskopická pouzdra je rotační pružina připojena.

Dvojice sil se určí pomocí projekce respektive rejeckce prvního vektoru do druhého, viz obr. 21. Rejeckce  $v^{ij}$ , tj. vektor kolmý na vektor  $u^{ij}$  v rovině vektorů  $u^{ij}$  a  $u^{jk}$ , je dána výrazem:

$$v^{ij} = u^{ij} - \frac{u^{ij} \cdot u^{jk}}{u^{jk} \cdot u^{jk}} u^{jk} = u^{ij} - \frac{u^{ij} \cdot u^{jk}}{(l_a^{jk})^2} u^{jk}. \quad (21)$$

Pro sílu  $D^{ij}$  z první dvojice sil pak lze psát:

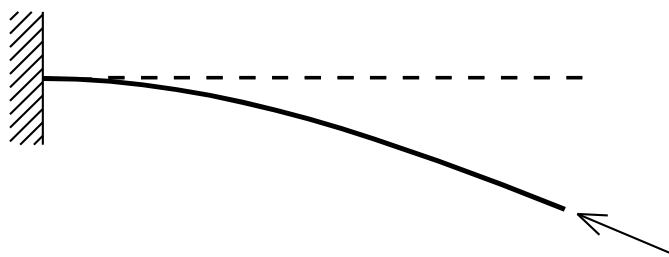
$$D^{ij} = \frac{M(\varphi)}{l_a^{ij}} \frac{v^{ij}}{|v^{ij}|}. \quad (22)$$



Obr. 21: Rejekce vektoru a výsledná dvojice sil.

### 3 Konzola zatížená sledující silou

Stabilita konstrukcí je náročným a zajímavým problémem, i když se soustředíme na ty nej-jednodušší konstrukce. Tento pohled je podložen i historickým vývojem této problematiky, který se neobešel bez překvapivých zvrátů. Jeden z takových zvrátů se týkal tzv. sledujícího zatížení, které mění svůj směr v závislosti na tvaru konstrukce. Až do poloviny dvacátého století nebylo známo, zda-li a za jakých okolností ztrácí konzolový nosník zatížený na volném konci tangenciální sledující silou (anglicky také nazývaný *Beck's column*) svou stabilitu, viz [36]. Tento nosník je znázorněn v deformovaném stavu na obrázku 22.



Obr. 22: Konzolový nosník zatížený sledující silou.

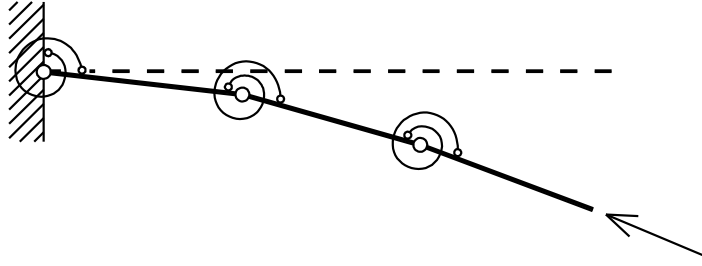
Dnes již je známo, že takto zatížený nosník ztratí stabilitu. Z původně nepohyblivého stavu se rozvine limitní cyklus. Jedná se o Hopfovou bifurkaci (zrod limitního cyklu z pevného bodu), viz např. [17, 15]. Pro tento kritický bod platí [37]:

$$F_{\text{cr,flw}} \approx 20.05 \frac{EI}{l_c^2}, \quad (23)$$

kde  $F_{\text{cr,flw}}$  je kritická hodnota velikosti sledující síly,  $l_c$  je délka nosníku a  $EI$  jeho ohybová tuhost. Tento bifurkační bod, představující kvalitativní změnu stavu nosníku, lze s výhodou použít pro testování numerických modelů.

#### 3.1 Model

Pro modelování nosníku je užit speciální model konzoly, znázorněný na obr. 23. Nosník je uvažován konstantního průřezu, pružný a velmi štíhlý. Smykové přetvoření a konstantní složka normálového přetvoření je zanedbána. Vlastnosti nosníku jsou dány jeho celkovou hmotností  $m_c$ , délkou  $l_c$  a ohybovou tuhostí  $EI$ .



Obr. 23: Model konzolového nosníku se třemi dílci.

Pohybové rovnice modelu lze maticově zapsat v následujícím tvaru:

$$\mathbf{M} \frac{d}{dt} \omega = \mathbf{Q} \omega^2 - \mathbf{K} \varphi + \mathbf{D} + \mathbf{F}, \quad (24)$$

$$\frac{d}{dt} \varphi = \omega,$$

kde  $t$  je čas,  $\varphi$  a  $\omega$  jsou vektory stavových proměnných modelu, přičemž  $\varphi$  je vektor úhlových pootočení jednotlivých dílců a  $\omega$  je vektor jejich úhlových rychlostí.  $\mathbf{D}$  je vektor momentů tlumících sil a  $\mathbf{F}$  je vektor momentů vnějších sil, který lze psát ve tvaru:

$$\mathbf{F} = F_x l \begin{bmatrix} \sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_2 \\ \vdots \\ \sin \varphi_n \end{bmatrix} - F_y l \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 \\ \cos \varphi_2 \\ \vdots \\ \cos \varphi_n \end{bmatrix}, \quad (25)$$

kde  $F_x$  je složka síly  $F$  působící na konci nosníku ve směru osy  $x$  (osa nepřetvořeného prutu) a  $F_y$  je složka síly  $F$  ve směru osy  $y$  (osa kolmá na osu nepřetvořeného prutu v rovině ohybu). Pro tyto složky platí:

$$\begin{aligned} F_x &= F \sin(\alpha + \varphi_n), \\ F_y &= F \cos(\alpha + \varphi_n), \end{aligned} \quad (26)$$

kde  $\alpha$  je úhel sledující síly, který svírá s osou posledního dílce (dílec s volným koncem).

Pro vektor momentů tlumících sil  $\mathbf{D}$  platí:

$$\mathbf{D} = l \begin{bmatrix} \sin \varphi_1 \sum_{i=1}^n D_{x,i} \\ \sin \varphi_2 \sum_{i=2}^n D_{x,i} \\ \vdots \\ \sin \varphi_n D_{x,n} \end{bmatrix} - l \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 \sum_{i=1}^n D_{y,i} \\ \cos \varphi_2 \sum_{i=2}^n D_{y,i} \\ \vdots \\ \cos \varphi_n D_{y,n} \end{bmatrix}, \quad (27)$$

kde  $D_{x,i}$ ,  $D_{y,i}$  jsou složky tlumící síly  $D_i$  pro které platí:

$$\begin{aligned} D_{x,i} &= -c m v_{x,i}, \\ D_{y,i} &= -c m v_{y,i}, \end{aligned} \quad (28)$$

kde  $c$  je koeficient lineárního viskózního útlumu a  $v_{x,i}$ ,  $v_{y,i}$  jsou složky rychlosti  $v_i$   $i$ -tého kloubu (klouby jsou číslovány od vetknutí s indexem 0 po volný konec s indexem  $n$ ). Pro tyto složky rychlosti platí:

$$\begin{aligned} v_{x,i} &= -l \sum_{j=1}^i \omega_j \sin \varphi_j, \\ v_{y,i} &= l \sum_{j=1}^i \omega_j \cos \varphi_j. \end{aligned} \quad (29)$$

Vektor momentů tlumících sil  $\mathbf{D}$  lze s užitím výrazů (27,28,29) upravit:

$$\mathbf{D} = c m l^2 \begin{bmatrix} \sin \varphi_1 \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^i \omega_j \sin \varphi_j) \\ \sin \varphi_2 \sum_{i=2}^n (\sum_{j=1}^i \omega_j \sin \varphi_j) \\ \vdots \\ \sin \varphi_n \sum_{j=1}^n \omega_j \sin \varphi_j \end{bmatrix} + c m l^2 \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^i \omega_j \cos \varphi_j) \\ \cos \varphi_2 \sum_{i=2}^n (\sum_{j=1}^i \omega_j \cos \varphi_j) \\ \vdots \\ \cos \varphi_n \sum_{j=1}^n \omega_j \cos \varphi_j \end{bmatrix}. \quad (30)$$

### 3.2 Simulace

Pro nastavení parametrů numerické simulace pomocí uvedeného modelu byl užit ocelový prut s vlastnostmi odpovídajícími reálnému štíhlému ocelovému nosníku. Hmotnost nosníku  $m_c = 9.03$  g, délka  $l_c = 0.3$  m, tuhost  $EI = 0.0053$  Nm<sup>2</sup>.

Prut byl modelován 15 dílci, přičemž bylo pomocí modelu s 20 dílci ověřeno, zda to je ve zvoleném rozsahu prostoru parametrů<sup>17</sup> dostatečně jemné dělení. Obdobně byl testován krok časové diskretizace, který byl nastaven na jednu desetitisícinu sekundy (ověřován krokem jedné stotisíciny sekundy a změnou numerické metody).

Výstižnost modelu lze charakterizovat porovnáním naměřených a vypočtených kritických sil (tj. významných bifurkačních bodů). Eulerova kritická síla, pro kterou platí  $F_{cr} = \pi^2 EI / 4l_c^2$  byla naměřena 0.1453 N, přičemž teoretická hodnota je na čtyři desetinná místa rovněž 0.1453 N. Kritická síla pro sledující zatížení byla změřena 1.1716 N (20 dílců), které odpovídá teoretická hodnota  $F_{cr,flw} = 1.1807$  N (odchylna přibližně 0.8%). Uvedme, že uvedená kritická hodnota sledující síly odpovídá konzervativnímu systému (bez útlumu). Je totiž závislá na velikosti koeficientu útlumu  $c$ , viz tabulka 1.

$c$ [Nskg <sup>-1</sup> m <sup>-1</sup> ]	$F_{cr,flw}$ [N]
0.001	1.1716
0.01	1.1716
0.1	1.1717
1	1.1721
10	1.1877
100	1.8118

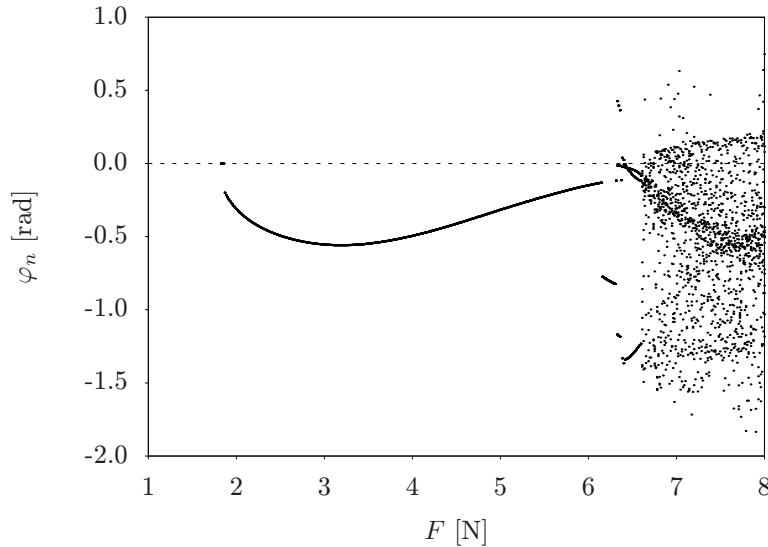
Tab. 1: Závislost kritické síly na útlumu.

Pro sledování vývoje simulace je nutné vybrat vhodné stavové veličiny. Je to obzvláště důležité, je-li chování systému složité. V takovém případě je užitečné provádět zobrazení ve fázovém prostoru a využívat konstrukce Poincarého map, viz [15]. Pro tento účel byly vybrány

<sup>17</sup>Rozsah prohledávaného prostoru lze popsat rozmezím pro parametr tlumení  $c = 0.001$  až  $100$  Nskg<sup>-1</sup>m<sup>-1</sup> a pro sílu  $F = 0$  až  $8$  N. Ovšem horní mez síly je závislá na velikosti útlumu. Uvedená maximální hodnota je pro útlum  $c = 100$  Nskg<sup>-1</sup>m<sup>-1</sup>.

stavové proměnné posledního dílce (dílec s volným koncem), tj.  $\varphi_n$  a  $\omega_n$ . Poincarého mapa je konstruována pomocí podmínky  $y_n = 0 \wedge v_{y,n} > 0$ , kde  $y_n$  je průhyb volného konce konzoly. Ukázalo se, že tento způsob provádění Poincarého mapy dává použitelné výsledky jen do určité úrovně pootočení.

Ze simulací vyplynulo, že nejzajímavější chování vykazují systémy s vysokým útlumem, konkrétně s koeficientem útlumu  $c = 100 \text{ Nskg}^{-1}\text{m}^{-1}$ . Toto zjištění je ale ovlivněno numerickou stabilitou resp. nestabilitou úloh s nízkým útlumem, potažmo jejich časovou náročností. Na obr. 24 je vidět bifurkační diagram pro tuto hodnotu útlumu v rozsahu zatěžující síly  $F = 1$  až 8 N.



Obr. 24: Bifurkační diagram pro koeficient útlumu  $c = 100 \text{ Nskg}^{-1}\text{m}^{-1}$  a rozsah zatěžující síly  $F = 1$  až 8 N.

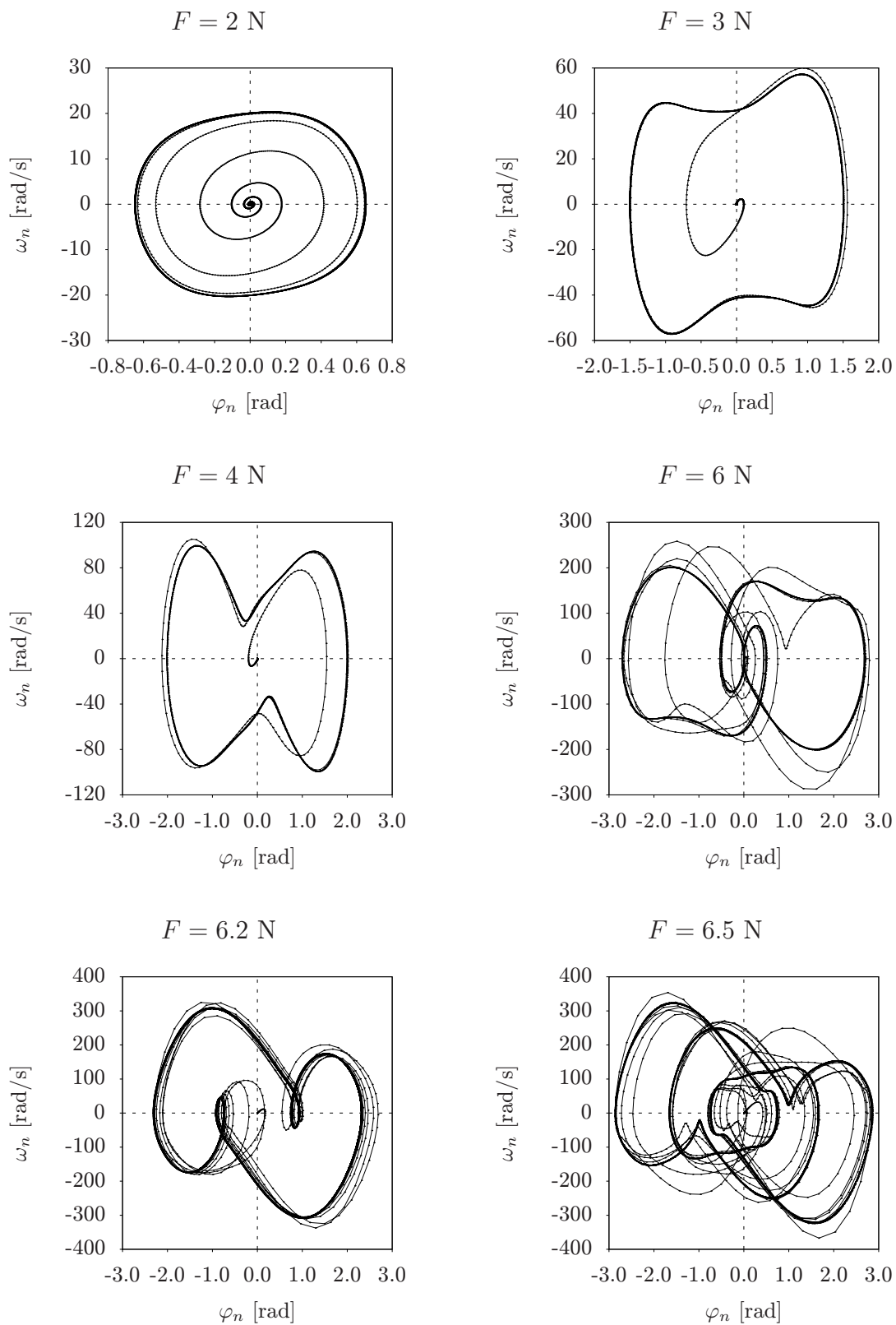
Tento diagram byl vytvořen tak, že pro každou hodnotu parametru velikosti zatěžující síly  $F$  byla znovu spuštěna simulace z počátečního nedeformovaného stavu, který byl opatřen velmi malou imperfekcí<sup>18</sup>. V počáteční fázi diagramu patrný výskyt kritické síly  $F_{\text{cr,flw}} = 1.8118 \text{ N}$ , odpovídající koeficientu tlumení  $c = 100 \text{ Nskg}^{-1}\text{m}^{-1}$ , viz tabulka 1.

Z tohoto diagramu bylo vybráno několik bodů pro zobrazení trajektorií a výsledných limitních cyklů, viz obr. 25. Trajektorie  $F = 2 \text{ N}$  je těsně za bifurkačním bodem. Limitní cykly  $F = 2$  až  $6.2 \text{ N}$  jsou jednoduché s jedním bodem v Poincarého mapě. Avšak limitní cyklus  $F = 6.5 \text{ N}$  má již tři body v Poincarého mapě.

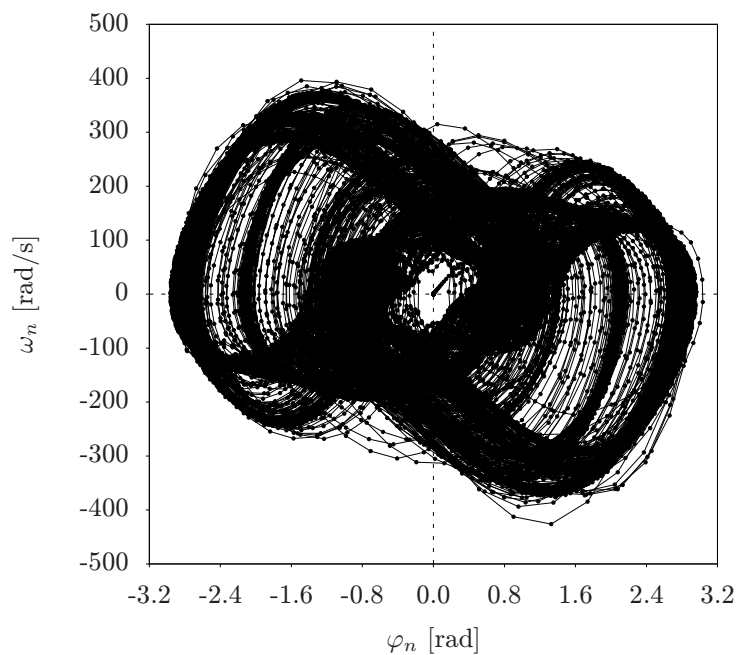
Z chaotické oblasti byl vybrán systém se silou  $F = 7 \text{ N}$ . Odpovídající trajektorie je zobrazena na obr. 26 a Poincarého mapa na obr. 27. Z Poincarého mapy je patrné, že není zvolena zcela optimálně. Ze zobrazení je patrná deformace atraktoru.

Nalezení optimálního způsobu provádění Poincarého mapy není v této úloze jednoduché z důvodu nesnadné identifikace další (alespoň) jedné stavové proměnné. V kapitole 1 bylo uvedeno, že pro vznik chaotického atraktoru je třeba minimálně trojrozměrný fázový prostor. Uvedený numerický model má sice stavových proměnných  $2n$ , nicméně „optimální třetí“ proměnnou žádná z nich jednotlivě zřejmě netvoří. Proto byla vybrána integrální  $y_n$ . Nalezení vhodnější proměnné je tedy otázkou budoucí.

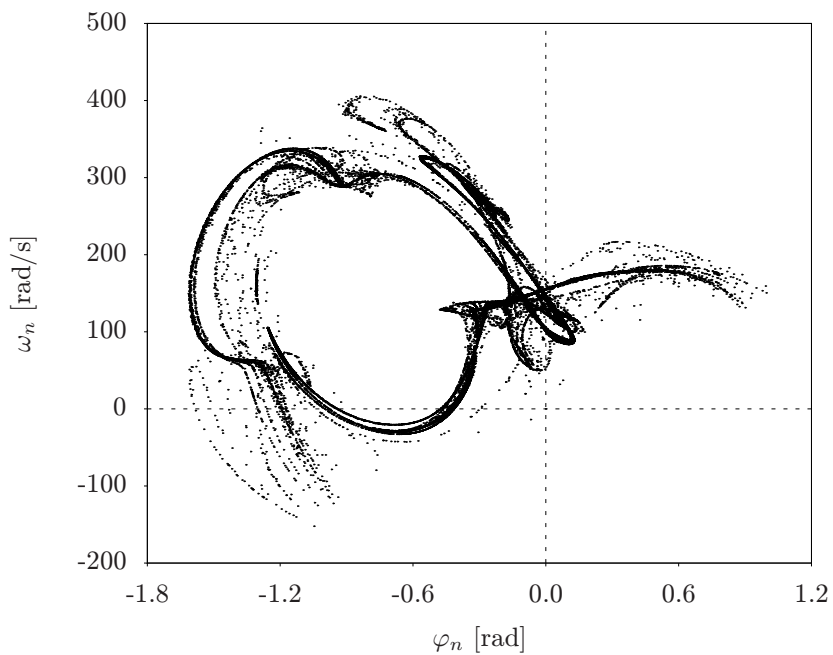
<sup>18</sup>Imperfekce byla zvolena statická ve formě síly působící na volném konci nosníku kolmo na jeho nedeformovanou střednici. Její velikost byla zvolena  $10^{-10} \text{ N}$ .



Obr. 25: Vybrané trajektorie včetně výsledných limitních cyklů pro koeficient útlumu  $c = 100 \text{ Nskg}^{-1}\text{m}^{-1}$ . Body na trajektorích znázorňují její vývoj – časový odstup mezi nimi je konstantní (umístění limitních cyklů je patrné z bifurkačního diagramu na obr. 24).



Obr. 26: Trajektorie chaotického atraktoru  $F = 7$  N.



Obr. 27: Poincarého řez chaotického atraktoru  $F = 7$  N.

### 3.3 Diskuze

Úloha konzolového nosníku zatíženého sledující silou ve vzpěru byla úspěšně a efektivně modelována pomocí tuhých dílců, což bylo mimo jiné dokumentováno shodou s teoretickou hodnotou kritického zatížení.

Byl uveden vliv koeficientu lineárního viskózního útlumu na velikost kritického zatížení. Ukázalo se, že se kritické zatížení výrazně mění až při značně velkém útlumu.

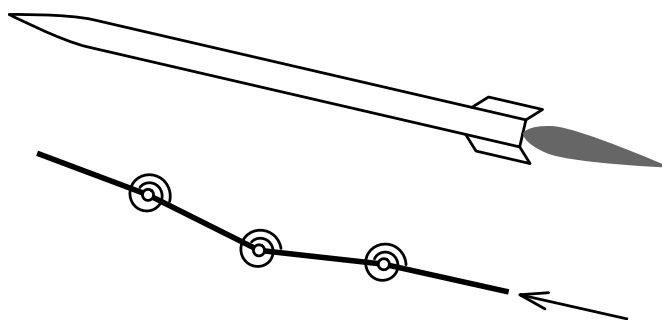


Pro vytvoření bifurkačního diagramu a zobrazení vybraných limitních cyklů resp. chaotického atraktoru byl vybrán systém s nejvyšší sledovanou úrovní tlumení. S tímto souvisela podrobněji rozebraná problematika vytváření Poincarého mapy. Bylo konstatováno, že navržený způsob provádění Poincarého mapy je použitelný, ale nikoliv zcela optimální kvůli deformaci mapy chaotického atraktoru.

## 4 Volný prut

Volný prut zatížený sledující silou je studován jako model štíhlé rakety s pracujícím raketovým motorem, viz obr. 28. Model je tvořen pomocí tuhých dílců. Jeho výsledky jsou porovnávány s analytickým řešením a s modelem FyDiK2D.

Poznamenejme, že model volného prutu z tuhých dílců vznikl rozšířením speciálního modelu konzoly, uvolněním vetknutí. Díky odstranění vazeb modelu přibyly dva stupně volnosti.



Obr. 28: Štíhlá raketa a její deformovaný model.

Prezentované výsledky byly dosaženy díky spolupráci s Ing. Janem Maškem, viz [38]. Práci na tomto tématu inicioval prof. Ardeshir Guran, který se tématu dlouhodobě věnuje viz [39, 40]. Následující tabulky jsou zde přetištěny s laskavým svolením Ing. Jana Maška.

Doplňme, že pro kritickou sílu  $F_{cr}$  volného prutu konstantního průřezu zatíženého sledující silou bylo za předpokladu štíhlého prutu, podléhajícího pouze ohybu metodou konečných diferencí vypočteno (viz [39]):

$$F_{cr} \approx 109.54 \frac{EI}{l_c^2}, \quad (31)$$

kde  $EI$  je ohybová tuhost a  $l_c$  je délka prutu.

### 4.1 Výsledky

Sledovány byly hodnoty kritické síly volného prutu pro ocelový prut o délce  $l_c = 5$  m a ohybové tuhosti  $EI = 100 \text{ Nm}^2$ . Tyto hodnoty dávají kritickou sílu  $F_{cr} = 438.16 \text{ N}$  a vlastní frekvenci  $f_1 = 13.2876 \text{ Hz}$ . Doba simulace byla 200 sekund.

V tabulce 2 a 3 jsou uvedeny výsledné hodnoty kritické síly modelu tuhých dílců respektive modelu FyDiK2D v závislosti na jemnosti dělení. Z tabulek je patrné, že oba modely poskytují při dostatečně jemném dělení velmi dobré výsledky. Dále je patrná značně větší výpočetní náročnost modelu FyDiK2D (zhruba desetinásobná), způsobená zahrnutím normálové deformace prutu.

Počet dílců	Kritická síla [N]	Odchylka [%]	Výpočetní doba [s]
5	326.12	-25.571	1.255
10	411.83	-6.009	2.397
15	426.81	-2.590	4.326
20	432.05	-1.394	7.344
25	434.49	-0.838	12.042
30	435.80	-0.539	18.783
35	436.59	-0.358	27.486
40	437.14	-0.233	38.478
45	437.48	-0.155	51.829
50	437.91	-0.057	71.481

Tab. 2: Závislost vypočtené kritické síly, její odchylky od analytického řešení a výpočetní doby na jemnosti dělení pro model s tuhými dílci, viz [38].

Počet dílců	Kritická síla [N]	Odchylka [%]	Výpočetní doba [s]
10	400.73	-8.543	27.666
20	433.27	-1.116	84.761
30	439.52	+0.310	216.790
40	441.73	+0.815	444.110
50	442.75	+1.048	825.040

Tab. 3: Závislost vypočtené kritické síly, její odchylky od analytického řešení a výpočetní doby na jemnosti dělení pro model FyDiK2D, viz [38].

## 4.2 Diskuze

Oba použité modely se pro simulaci volného prutu zatíženého sledující silou osvědčily. Doporučit lze zejména model tvořený tuhými dílci kvůli jeho výpočetní efektivitě.

Modely lze úspěšně použít nejen pro hledání kritického zatížení, ale také pro postkritické chování štíhlé poháněné rakety, včetně odhalení vlivu různých druhů aerodynamických stabilizátorů a imperfekcí v konstrukčním řešení.

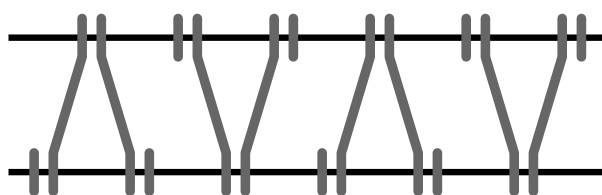
Další možnou aplikací modelů je řešení volného prutu s velmi nízkou tuhostí, respektive s výrazně převládající délkou, jenž bude podléhat velmi velkým deformacím. Lze si představit dlouhé lano kmitající či padající v atmosféře.

Jedním z extrémních projektů s takovou aplikací je návrh *orbitálního výtahu* K. E. Ciolkovského z roku 1895, jehož hlavní částí je lano délky minimálně 35 800 km, mající spolu s vyvažovací hmotou těžiště na geostacionární dráze. Díky nejnovějším příspěvkům na poli materiálové fyziky se možnost realizace tohoto projektu blíží, viz např. [41].

Obdobně extrémním projektem souvisejícím s uvedenými modely je *Lofstromova smyčka*, která je rovněž tvořena tisíce kilometrů dlouhým lanem, nacházejícím se v atmosféře, obíhajícím únikovou rychlostí, viz [42].

## 5 Stabilita kolejového svršku

Z konstrukčních i ekonomických důvodů se při stavbě či rekonstrukci našich regionálních tratí občas uvažuje o použití netradičních lehkých železničních svršků tvořených tzv. Y–pražci, které se vyrábějí z ocelových profilů, viz obr. 29. Pro ověření tohoto konstrukčního řešení bylo zapotřebí porovnat hodnoty kritického zatížení a tvar ztráty stability dvou konfigurací Y–pražců s tradičními příčnými pražci. Tato úloha byla řešena pro společnost INFRAM, viz [43]. Konkrétně pro svršek v přímé trati s bezстыkovou kolejí včetně spolupůsobení štěrkového lože. Zatížením se zde myslí velikost oteplení kolejnic a velikost impulzu síly nutná pro vybočení koleje v horizontálním směru (kolmo na osu koleje).



Obr. 29: Půdorysné schéma krátkého úseku trati s Y–pražci.

Železniční svršek je s ohledem na upřesnění úlohy tvořen (vertikálně řazeno): Kolejnicemi tvaru 49 E 1 (S49) v osové vzdálenosti 1500 mm, systémem pružného upevnění se svěrkou Skl 14, pražci a štěrkovým ložem v odpovídajícím základním tvaru. Pražce tvoří tři různé konfigurace:

- příčné betonové pražce s rozdělením 600 mm (teoretická vzdálenost uzlů upevnění 600 mm),
- ocelové Y–pražce (profil IB 100 S–1) typ 600 mm (teoretická vzdálenost uzlů upevnění 830 mm),
- ocelové Y–pražce (profil IB 100 S–1) typ 650 mm (teoretická vzdálenost uzlů upevnění 880 mm).

## 5.1 Předpoklady výpočtu

Jedná se o určení kritického zatížení dokonale symetrického svršku bezstykové koleje v přímé trati bez určení jeho délky a okrajových podmínek. Modelovaná délka svršku musí být zvolena dostatečná natolik, aby významně neovlivňovala výsledky výpočtu. Určitá nezávislost na této délce má dvě příčiny: Trať je uložena do šterkového lože, které omezuje schopnost trati příčně vybočit a obdobně je pohyblivost trati omezena rovněž v podélném směru. Pro řešení je zvolena délka svršku přibližně 100 metrů.

### Kolejnice

Kolejnice 49 E 1 (S49) jsou uvažovány jako dokonale přímé pružné pruty s parametry:

objemová hmotnost  $7850 \text{ kg/m}^3$ ,  
modul pružnosti  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  
plocha průřezu  $A = 6.297 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ ,  
moment setrvačnosti  $I = 3.2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$ ,  
koeficient teplotní roztažnosti  $\alpha_t = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ .

### Pražce

Pražce plní ve smyslu stability roli distančních vazeb. Tyto distanční vazby jsou uplatněny na dvojici kolejnic prostřednictvím pružného systému upevnění se svěrkou Skl 14, který tuhost distanční vazby podstatně snižuje, viz dále. Poznamenejme, že pražce, spolu se systémem upevnění, přenášejí smykové síly v koleji.

Betonový pražec je uvažován s parametry:

objemová hmotnost  $2500 \text{ kg/m}^3$ ,  
modul pružnosti  $E = 20 \text{ GPa}$ ,  
plocha průřezu  $A = 48.2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ .

Jeden profil IB 100 S–1 ocelového Y–pražce je uvažován s parametry:

objemová hmotnost  $7850 \text{ kg/m}^3$ ,  
modul pružnosti  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  
plocha průřezu  $A = 2.64 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ .

Těmto pražcům pak, pro srovnání, přibližně odpovídá normálová tuhost  $k_{lp} \approx EA/l$ , kde  $l$  je osová vzdálenost upevnění na profil pražce:

betonový pražec  $k_{lp} = 3.7 \cdot 10^8 \text{ N/m}$ ,  
ocelový pražec  $k_{lp} = 6.3 \cdot 10^8 \text{ N/m}$ .

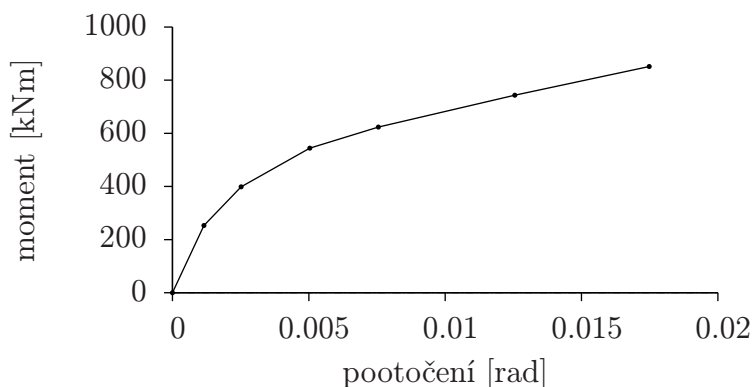
Uvedme, že tyto hodnoty jsou pouze orientační. Není zde uvažován ohyb pražců, excentrické připojení pražců, vyklopení pružné svěrky, stlačení vodící vložky ani tuhost vedlejších připojovacích prostředků (šroub respektive vrut, hmoždina).

## System upevnění

System upevnění je stejný pro všechny tři konfigurace. Tvoří tzv. uzel upevnění, plní roli pružné fixace kolejnic k pražcům a zajišťuje také smykovou tuhost mezi oběma kolejnicemi prostřednictvím kroucí tuhosti ve spojení pražec–kolejnice.

Uzel upevnění se svěrkou Skl 14, viz [44], je dán tuhostí v kroucení, tj. odporem k vzájemnému natočení pražce a kolejnice (viz obr. 30). Dále pak příčnou tuhostí, tj. odporem k vzájemnému posunutí pražce a kolejnice kolmo na osu kolejnice (viz obr. 31).

Vliv podélné tuhosti, tj. odporu k vzájemnému posunutí pražce a kolejnice rovnoběžně s osou kolejnice, se vzhledem k příčnému vybočení koleje a geometrii Y–pražce neuvažuje (samotný Y–pražec tvoří trojúhelníkové ztužidlo).



Obr. 30: Závislost momentu na pootočení ve spoji kolejnice s pražcem pro otáčení kolem vertikální osy (odpor k vzájemnému natočení pražce a kolejnice v horizontální rovině). Převzato z [44].

Příčná tuhost uzlu upevnění  $k_{ls}$  je zde odhadnuta na základě tuhosti v kroucení  $k_f$ . Tento odhad dává horní mez tuhosti, jelikož nezohledňuje zejména vliv vyklopení kolejnice kolem osy kolejnice při pružné deformaci svěrky. Tuhost je odhadnuta ze vztahu (předpoklad rovnoměrného rozdělení napětí v obdélníkovém kontaktu pata kolejnice–vodící vložka):

$$k_{ls} = \frac{A_{eq}}{I_{eq}} k_f = \frac{12}{h^2} k_f, \quad (32)$$

kde  $k_f$  je kroucí tuhost a  $h = 110$  mm je délka uložení kolejnice ve systému upevnění (délka vodící vložky).

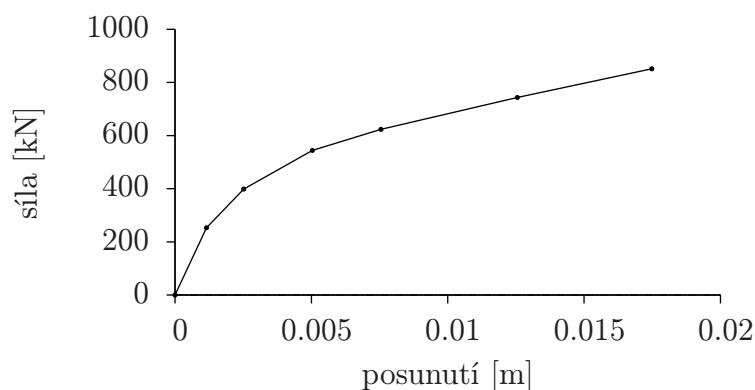
Podle grafu na obr. 30 a 31 se systém upevnění – v daném rozsahu – chová výrazně nelineárně. Tato nelinearita je uvažována jako pružná. Tj. nezáleží na směru ani způsobu zatěžování. Počáteční tuhosti jsou následující:

$$\begin{aligned} \text{kroucí tuhost } k_f &= 2.2 \cdot 10^5 \text{ Nm/rad,} \\ \text{příčná tuhost jedné svěrky } k_{ls} &= 2.2 \cdot 10^8 \text{ N/m.} \end{aligned}$$

## Tuhost distanční vazby

Počáteční tuhost distanční vazby  $k_l$  tvořené pražcem a dvojicí uzlů upevnění lze stanovit ze vztahu:

$$\frac{1}{k_l} = \frac{2}{k_{ls}} + \frac{1}{k_{lp}}. \quad (33)$$



Obr. 31: Závislost síly na posunutí ve spoji kolejnice s pražcem pro posun kolmo k ose kolejnice (odpor k vzájemnému posunutí pražce a kolejnice v horizontální rovině). Zjednodušeně přepočteno dle výrazu (32).

Což dává následující horní odhady hodnot počátečních tuhostí:

betonový pražec  $k_l = 9.3 \cdot 10^7$  N/m,

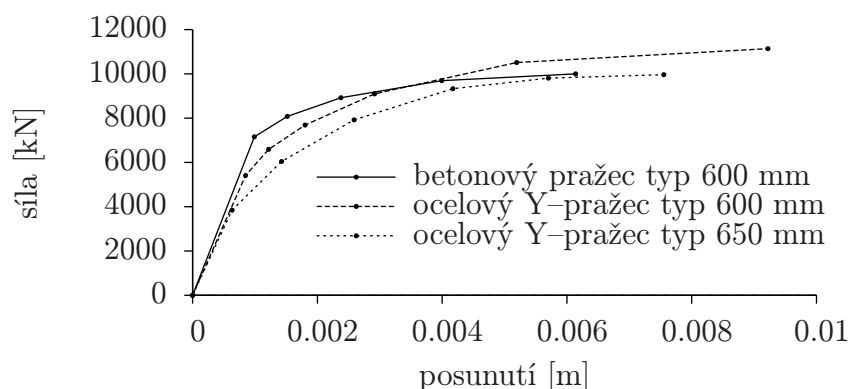
ocelový pražec  $k_l = 8.4 \cdot 10^7$  N/m.

Jako dolní odhad hodnoty počáteční tuhosti se použije:

$k_l = 2 \cdot 10^7$  N/m.

### Štěrkové lože

Štěrkové lože je ve svršku hlavní stabilizační prvek proti příčnému vybočení koleje. Jeho chování je – vzhledem k realitě – značně zjednodušeně vzato jako nelineární pružné, což je dáno zejména neznalostí historie zatěžování. V modelu se pro jednoduchost uvažuje působení štěrkového lože pouze v příčném směru. Na obr. 32 jsou vidět závislosti odporu k posunutí jednoho pražce, uvolněného ze systému upevnění, kolmo na osu koleje (dle typu pražce), který klade tzv. stabilizované štěrkové lože, viz [44].



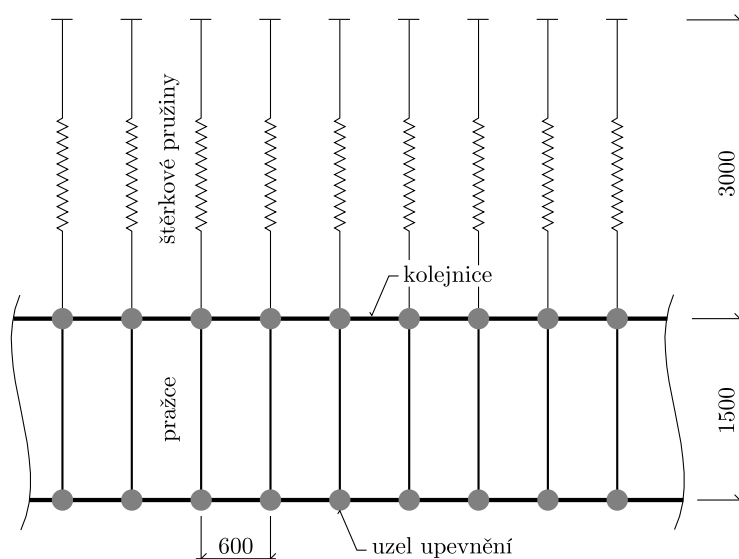
Obr. 32: Závislost síly na posunutí uvolněných pražců ve štěrkovém loži pro směr kolmo k ose kolejnice. Převzato z [44].

Závislosti zobrazené na obrázku 32 jsou v modelu přizpůsobeny tak, že v záporných hod-

notách posunutí mají analogický průběh (symetrický podle počátku souřadnic). V oblasti větších posunutí, než je v grafech uvedeno, se uvažuje konstantní hodnota síly daná posledním zaznamenaným bodem (bodem s největším posunutím).

## 5.2 Model

Pro nalezení kritického zatížení byl využit dynamický prutový model FyDiK2D. Modelován je přímý úsek železničního svršku délky přibližně 100 m. Konkrétně 100.2 m u betonových pražců, 100.845 m u ocelových Y–pražců typ 600 mm a 100.76 m u ocelových Y–pražců typ 650 mm. Kolej je uvažována jako na koncích nepohyblivá (vetknutá). Kolejnice vzdálené 1.5 m jsou diskretizovány po úsecích, jejichž délka odpovídá vzdálenosti uzlů upevnění. Tj. 600 mm u betonových pražců, 830 mm u ocelových Y–pražců typ 600 mm a 880 mm u ocelových Y–pražců typ 650 mm. Pražce včetně systémů upevnění jsou uvažovány pouze jako pružné distanční spoje s geometrií odpovídající tvaru a upevnění pražců. Štěrkové lože je do výpočtu zahrnuto pomocí příčných pružin délky 3 m, viz obr. 33 a 34.



Obr. 33: Schéma diskrétního modelu koleje s betonovými pražci typ 600 mm.

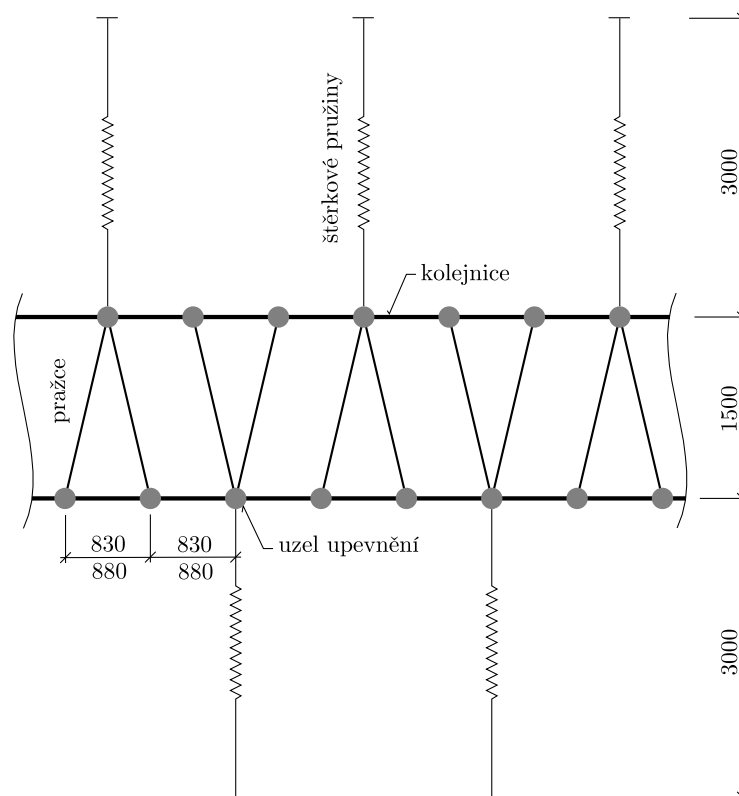
Zatížení oteplením je provedeno po celé délce koleje u obou kolejnic hodnotou  $\Delta t = 60 \text{ }^\circ\text{C}$ . Impuls síly  $I_F$  proměnlivé hodnoty je nanesen na obecně jeden libovolný uzel upevnění ve směru kolmo na kolej, prakticky přibližně uprostřed úseku koleje.

## 5.3 Výsledky výpočtu

Výsledky výpočtu jsou vypsány v následujících třech tabulkách 4 až 6. V tab. 4 jsou uvedeny minimální impulzy pro vybočení koleje při oteplení kolejnic o  $60 \text{ }^\circ\text{C}$ . Tyto impulzy jsou teoretická zatížení, nalezená výpočtem, nutná pro vybočení koleje. Slouží pouze jako porovnávací hodnoty mezi jednotlivými konfiguracemi svršku.

V tabulce 5 jsou odpovídající hodnoty vybočení koleje včetně měřené délky vybočení. Měřenou délkou vybočení je zde myšlena vzdálenost druhých nulových bodů průhybové funkce (počítáno od maximálního vybočení), viz obr. 35 až 37.

Tabulka 6 vypisuje výsledky s největší vypovídací hodnotou – kritické oteplení kolejnic  $\Delta t_{cr}$ . Kritickým oteplením je myšleno nejmenší možné oteplení, pro které kolej ztratí stabilitu přímého tvaru.



Obr. 34: Schéma diskrétního modelu koleje s ocelovými Y–pražci typ 600 mm respektive typ 650 mm (vzdálenost uzlů upevnění 830 mm resp. 880 mm).

Tuhost distanční vazby	spodní odhad		horní odhad	
	50 %	100 %	50 %	100 %
Odpor šterkového lože				
Typ pražce				
Příčné betonové pražce po 600 mm	0.8 kNs	1.5 kNs	0.9 kNs	1.6 kNs
Ocelové Y–pražce po 600 mm	1.2 kNs	1.7 kNs	nevybočí	nevybočí
Ocelové Y–pražce po 650 mm	1.0 kNs	1.4 kNs	nevybočí	nevybočí

Tab. 4: Výsledné hodnoty kritických impulsů.

Tuhost distanční vazby	spodní odhad		horní odhad	
	50 %	100 %	50 %	100 %
Odpor šterkového lože				
Typ pražce				
Příčné pražce	0.49 (18.0) m	0.38 (15.6) m	0.48 (20.4) m	0.36 (16.2) m
Y–pražce po 600 mm	0.42 (22.4) m	0.29 (18.2) m	nevybočí	nevybočí
Y–pražce po 650 mm	0.43 (22.8) m	0.33 (18.5) m	nevybočí	nevybočí

Tab. 5: Výsledné hodnoty vybočení koleje a odpovídající měřená délka vybočení v závorce.

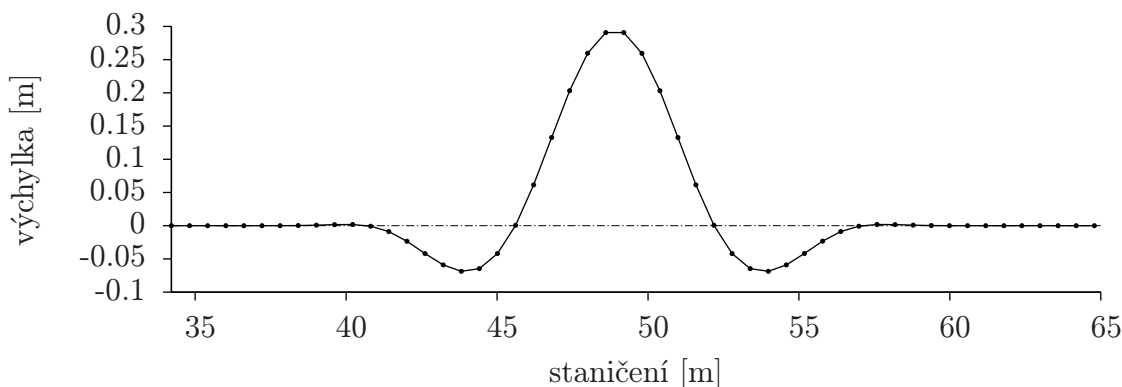
## 5.4 Diskuze

Z uvedených hodnot kritických oteplení vyplývá – pro uvažovaný rozsah příčných tuhostí distanční vazby (tvořené pražcem a upevňovacími prostředky) – vyšší efektivnost ve stabilitní únosnosti Y–pražců oproti betonovým pražcům s kolmým příčným uspořádáním. Tuto

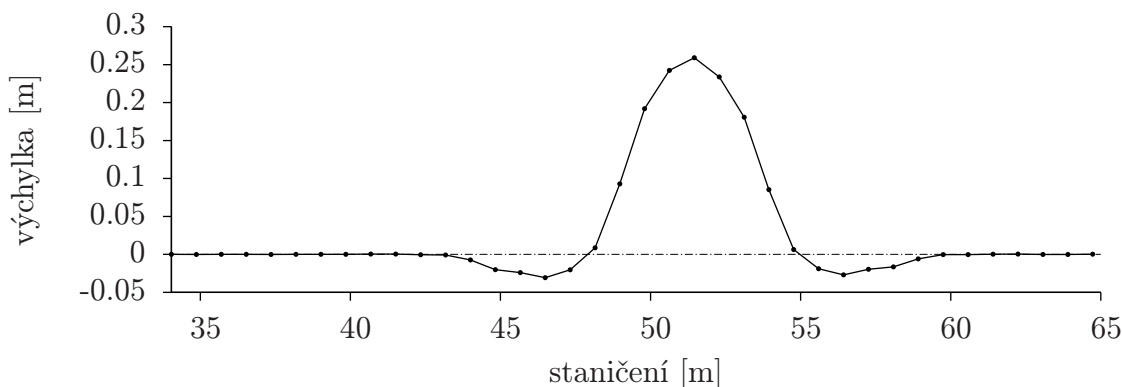


Tuhost distanční vazby	spodní odhad		horní odhad	
Odpor štěrkového lože	50 %	100 %	50 %	100 %
Typ pražce				
Příčné betonové pražce po 600 mm	39 °C	51 °C	39 °C	51 °C
Ocelové Y–pražce po 600 mm	52 °C	59 °C	84 °C	100 °C
Ocelové Y–pražce po 650 mm	50 °C	57 °C	77 °C	85 °C

Tab. 6: Výsledné hodnoty kritického oteplení.



Obr. 35: Typický graf výchylnky koleje s betonovými pražci typ 600 mm (zde konkrétně pro horní odhad příčné tuhosti a 100% odpor štěrkového lože).

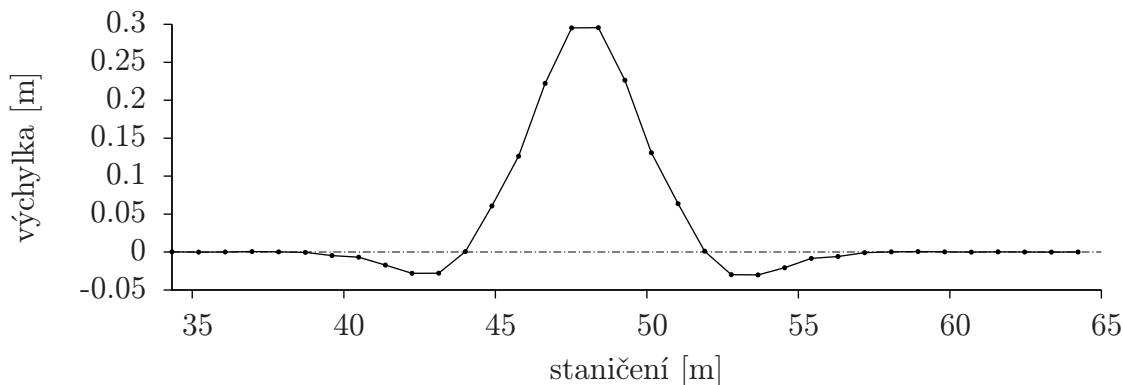


Obr. 36: Typický graf výchylnky koleje s ocelovými Y–pražci typ 600 mm (zde konkrétně pro spodní odhad příčné tuhosti a 100% odpor štěrkového lože).

efektivnost je obtížné kvantifikovat bez znalosti funkce pravděpodobnosti oteplení. I bez této znalosti je ovšem zřejmé, že při extrémních hodnotách oteplení, které se pravděpodobně vyskytují zřídka, mají koleje s Y–pražci přibližně o deset stupňů celsia vyšší kritické oteplení než koleje s pražci betonovými. Zároveň kolej s Y–pražci vyžaduje vyšší hodnotu impulsu síly než kolej s pražci betonovými (při spodním odhadu příčné tuhosti průměrně o 7 % v maximum o 20 %). Tyto rozdíly mohou činit řádově menší pravděpodobnost ztráty stability.

U příčných pražců hraje, vzhledem ke kritickému zatížení, hlavní roli torzní tuhost v systému upevnění. Bez této tuhosti takto uspořádaná kolej nevyužívá výhody složeného prutu.

Efektivnost Y–pražců lze spatřovat hlavně v jejich uspořádání – tvoří trojúhelníkové vztuhy. Tuhost těchto vztuh je ovlivněna příčnou tuhostí uzlu upevnění, která není přesně známa. Poznamenejme, že tyto vztuhy při vybočení zkrucují a smýkají profil kolejnice. Účin-



Obr. 37: Typický graf výchylky koleje s ocelovými Y–pražci typ 650 mm (zde konkrétně pro spodní odhad příčné tuhosti a 100% odpor šterkového lože).

nost dosažených výsledků je významně ovlivněna odhadem příčné tuhosti systému upevnění a schopností Y–pražců tvořit trojúhelníkové výztuhy.

Za povšimnutí stojí podobné výsledky tvaru vybočení u takto odlišných uspořádání pražců (obr. 35 až 37). Zřejmě se jedná o typický stav, do jisté míry nezávislý právě na uspořádání pražců.

Šterkové lože bylo navzdory realitě řešeno jako nelineárně pružné. Zdůvodnění je dvojí. Není známé přesné zatížení, kterým by vybočení bylo vyvoláváno a zadruhé by se úloha stala díky nepružnému charakteru šterkového lože nepřehlednou. Do výpočtu z podobného důvodu nebyl započítán odpor šterkového lože proti podélnému posunutí. Tento odpor má zřejmě význam při větších délkách koleje, čímž se eliminuje přenos napětí na velké vzdálenosti (nebylo ověřováno).

Řešena byla kolej v přímé trati. Důvodem je fakt, že se jedná o symetrický problém, který lépe vypovídá o stabilitě než systém s imperfekcí. Na trať v oblouku lze z hlediska stability totiž pohlížet jako na imperfektovaný systém, jehož příčná výchylka se (zjednodušeně řečeno) při ztrátě stability skládá ze dvou složek: ohybu od imperfekce a ohybu od vybočení vlivem destabilizace. Je pravděpodobné, že při malé imperfekci (malém vzepětí oblouku) bude existovat možnost měřitelného vybočení koleje vlivem ztráty stability. V tomto smyslu lze předpokládat obdobné chování jako u koleje v přímé trati.

## Závěr

Habilitační práce shrnuje výsledky autorova 16-ti letého výzkumu na poli aplikací matematických a numerických nástrojů pro analýzu dynamických systémů, z nichž byly pro demonstraci tři vybrány do těchto tezí. Jde o pokus ukázat jiný pohled na podnětné úlohy zejména z oblasti mechaniky, především stavební, které se standardně řeší a vysvětlují pomocí mechaniky kontinua a návazných numerických metod. Oproti klasickému pohledu na rovnovážný stav konstrukce, deformaci, resp. napjatost, ukazuje uvedený přístup časový vývoj mechanického stavu modelu konstrukce a přináší nové charakteristiky, které umožňují kvalitativní posouzení možných scénářů a jejich klasifikaci. Typickou vlastností nelineárních systémů je jejich silná závislost výsledného stavu na počátečních podmínkách, kterou nelze analyzovat klasickými rovnovážnými přístupy. Součástí práce je množství autorských softwarových nástrojů, které bylo nutno vytvořit pro demonstraci možností potenciálně obsažených i v relativně jednoduchých úlohách. Většina z těchto nástrojů je k dispozici odborné i laické veřejnosti.

## Budoucí práce

Díky rozsahu problematiky nelineárních systémů hodlá autor v příštích letech přispět k rozvoji následujících témat:

- Chaotické chování dynamicky zatížené konstrukce představuje režim, který zasluhuje pozornost v mnoha ohledech. Autor plánuje provádění dalšího podrobného experimentálního výzkumu tohoto fenoménu, přičemž bude třeba vyvinout a aplikovat nástroje jako rekonstrukce fázového portréту z časových řad, výpočet Ljapunovových exponentů, stanovení metod pro identifikaci atraktorů a jejich vlastností, apod. Nelze opomenout ani možnost analýzy výhod plynoucích z uvedení kmitajících konstrukcí do chaotického režimu.
- V habilitační práci je uvedeno několik teoretických úloh, které bude zapotřebí ověřit experimentálně a případně rozšířit kvůli materiálově nelineárním projevům, popř. kvůli imperfekcím a dalším stochastickým aspektům.
- Paralelizace a zpracování úloh vyžadujících mnoho stupňů volnosti patří rovněž k tematice, která se v kontextu nelineárních jevů podrobněji rozvíjí. Autor získal v posledních letech zázemí k tomuto vývoji a pracuje na jeho využití.
- Také fraktální geometrie má stále potenciál k přelomové aplikaci ve stavební mechanice. Jedna její doména je hledání optimální geometrie konstrukcí, druhá souvisí s lomovými procesy a jejich produkty. Pro optimalizace nejrůznějších typů úloh autorův tým vyvíjí genetické algoritmy.

## LITERATURA

- [1] COVENEY P., HIGHFIELD R.: Mezi chaosem a řádem (orig. *Frontiers of Complexity*), nakladatelství Mladá fronta (orig. Faber and Faber, London 1995), edice Kolumbus, Praha, 2003.
- [2] STEWART I.: Hraje Bůh kostky? (orig. *Does God Play Dice? The New Mathematics of Chaos*), nakladatelství Argo a Dokořán (orig. Penguin Books, 1997), Praha, 2009.
- [3] VANĚK J.: K estetice fraktálů, příspěvek sborníku *Chaos, věda a filozofie*, pp. 66-87, nakladatelství Filozofického ústavu AV ČR, Praha, 1999.
- [4] NUSKA B.: Eidolón a chaos, příspěvek sborníku *Chaos, věda a filozofie*, pp. 88-101, nakladatelství Filozofického ústavu AV ČR, Praha, 1999.
- [5] KRÁL M.: Procesně genetický model skutečnosti, příspěvek sborníku *Chaos, věda a filozofie*, pp. 146-164, nakladatelství Filozofického ústavu AV ČR, Praha, 1999.
- [6] PAVELKA J.: Antropocentrismus a pojetí „chaosu“ a „řádu“, příspěvek sborníku *Chaos, věda a filozofie*, pp. 181-198, nakladatelství Filozofického ústavu AV ČR, Praha, 1999.
- [7] SEIFE C.: Nula. Životopis jedné nebezpečné myšlenky. (orig. *Zero. The Biography of a Dangerous Idea.*), nakladatelství Dokořán a Argo (orig. Penguin Group, 2000), Praha, 2005.
- [8] HENRYCH J.: Úplná soustava finitních metod mechaniky a možnosti dalšího rozvoje, studie 6.85 ČSAV, Akademia, Praha, 1985.
- [9] BUCHANAN M.: Všeobecný princip (orig. *Ubiquity*), nakladatelství Baronet (orig. Weidenfeld & Nicholson, Londýn 2000), Praha, 2004.
- [10] HILLIS W. D.: Vzor v kameni. Jednoduché myšlenky, které řídí počítače (orig. *The Pattern on the Stone*), nakladatelství Academia (orig. Basic Books, New York 1998), Praha, 2003.

- [11] CAPRA F.: Tkáň života, nová syntéza mysli a hmoty (orig. The Web of Life. A New Synthesis of Mind and Matter), nakladatelství Academia (orig. HarperCollins Publishers, 1996), Praha, 2004.
- [12] ANDREY L.: Paradigma deterministického chaosu aneb existuje náhoda?, příspěvek sborníku Chaos, věda a filozofie, pp. 245-252, nakladatelství Filozofického ústavu AV ČR, Praha, 1999.
- [13] HÖSCHL C.: Eseje o mechanice, nakladatelství Bor, Technická univerzita v Liberci, 272 stran, Liberec, 2009.
- [14] LEECH J. W.: Klasická mechanika, nakladatelství SNTL (orig. Butler & Tanner Ltd, Frome, 1958), Praha 1970.
- [15] MACUR J.: *Úvod do teorie dynamických systémů a jejich simulace*, skripta, nakladatelství PC-DIR, Brno, 1995.
- [16] WIGGINS S.: *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, Springer Science Business Media, 2003.
- [17] ARNOLD V. I., AFRAJMOVICH V. S., IL'YASHENKO YU. S., SHILNIKOV L. P.: *Bifurcation Theory and Catastrophe Theory*, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [18] HAIRER E.: lectures *Geometric Numerical Integration*, available on [http://www.unige.ch/~hairer/poly\\_geoint/week2.pdf](http://www.unige.ch/~hairer/poly_geoint/week2.pdf), TU München.
- [19] HAIRER E., LUBICH C., WANNER G.: Geometric numerical integration illustrated by the Störmer/Verlet method, *Acta Numerica* 12, 399–450, 2003.
- [20] SMALE S.: Differentiable dynamical systems, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 73 (6): 747–817, 1967.
- [21] RUELE D.: What is a strange attractor? *Notices of the American Mathematical Society*, 53 (7): 764–765, 2006.
- [22] FRANTÍK P.: Chování silně nelineárních stavebních konstrukcí, diplomová práce, VUT v Brně, 2000.
- [23] FRANTÍK P.: Nelineární projevy mechanických konstrukcí, dizertační práce, VUT v Brně, 2004.
- [24] MACUR J., FRANTÍK P.: Stanovení kritické síly vzepjatého nosníku, konference Pravděpodobnost porušování konstrukcí, VUT v Brně, 2004.
- [25] FRANTÍK P.: FyDiK application, <http://www.kitnarf.cz/fydik>.
- [26] FRANTÍK P.: Nestability vybraných systémů, konference Inženýrská mechanika, Svratka, 2002.
- [27] KADLČÁK J., KYTÝR J.: Statika stavebních konstrukcí II. Staticky neurčité prutové konstrukce. Učebnice. Nakladatelství VUTIUM v Brně, 2001.
- [28] TEPLÝ B., ŠMIŘÁK S.: Pružnost a plasticita II. Nakladatelství VUT v Brně, 1993.
- [29] BITTNAR Z., ŠEJNOHA J.: Numerické metody mechaniky I a II, ČVUT, Praha, 1992.
- [30] BOLANDER J. E., YOSHITAKE K., THOMURE J.: Stress analysis using elastically uniform rigid-body-spring networks. *J. Struct. Mech. Earthquake Engng; JSCE*, No. 633/I-49: 25-32.
- [31] ELIÁŠ J.: Discrete simulation of fracture processes of disordered materials, dizertační práce. FAST VUT v Brně, 2009.
- [32] HARRIS M.: CUDA Fluid Simulation in NVIDIA PhysX, NVIDIA Developer Technology 2008. <http://sa08.idav.ucdavis.edu/CUDAphysxfluids.Harris.pdf>.
- [33] VOŘECHOVSKÝ V., FRANTÍK P.: Mechanical model for optimal singular correlation matrices, článek v přípravě.
- [34] ŠMÍDOVÁ M., SADÍLEK V., FRANTÍK P., VOŘECHOVSKÝ M. Estimation of the Lower Bound of Periodic Audze-Eglajs Criterion. Abstract Book of 11th International

- Miklós Iványi PhD & DLA Symposium. Pécs: Pollack Press, Faculty of Engineering and Information Technology, University of Pécs, Hungary, 2015, p. 109.
- [35] FRANTÍK P., VESELÝ V., KERŠNER Z.: Parallelization of lattice modelling for estimation of fracture process zone extent in cementitious composites, *Advances in Engineering Software*, 60-61, 2013, pp 48-57.
  - [36] ELISHAKOFF I.: Controversy Associated With the So-Called "Follower Forces", *Applied Mechanics Review*, vol. 58, p. 117-142.
  - [37] BECK M.: Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedrückten Stabes, *Zeitschrift Angewandte Mathematik und Physik*, Volume 3, Issue 3, p. 225-228.
  - [38] MAŠEK J.: Modelování volného prutu zatíženého sledujícím zatížením, bakalářská práce, Brno, 2014.
  - [39] GURAN A., OSSIA K.: On the stability of a flexible missile under an end thrust. *Math. Comput. Modelling*, Vol. 14, 1990.
  - [40] GURAN A., FRANTÍK P., MAŠEK J.: Dynamic stability of non-conservative elastic system: a reminiscent of Horst Leipholz (1919-1988), 29. conference Computational mechanics, Špičák, Czech republic, 2013.
  - [41] LANDGRAF M.: An Elevator to Space at TEDxRheinMain, TEDxTalks, <http://tedxtalks.ted.com/video/An-Elevator-to-Space-Markus-Lan>.
  - [42] LOFSTROM K.: The launch loop. A low cost earth-to-high-orbit launch system, AIAA conference, 1985.
  - [43] FRANTÍK P.: Stabilita vybraných konfigurací kolejového svršku, výzkumná zpráva, Brno, 2009.
  - [44] INFRAM: Podklady získané od firmy INFRAM, a.s., Česká republika, 2009.