

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES,  
MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

**Ing. LUKÁŠ POHANKA**

**VÝVOJ NOVÝCH TYPŮ OKRAJOVÝCH PODMÍNEK PRO  
INTERAKCI TĚLES S TEKUTINAMI  
A JEJICH IMPLEMENTACE DO KOMERČNÍCH  
VÝPOČTOVÝCH SYSTÉMŮ**

NEW TYPES OF BOUNDARY CONDITIONS FOR SOLUTION  
OF FLUID STRUCTURE INTERACTION PROBLEMS AND  
THEIR IMPLEMENTATION IN COMMERCIAL  
SIMULATION SOFTWARE

ZKRÁCENÁ VERZE DISERTAČNÍ PRÁCE

OBOR	INŽENÝRSKÁ MECHANIKA
ŠKOLITEL	prof. Ing. EDUARD MALENOVSKÝ, DrSc.
OPONENTI	prof. Ing. FRANTIŠEK POCHYLÝ, CSc. doc. Ing. PAVEL RUDOLF, Ph.D. prof. Ing. JAROSLAV ZAPOMÍL, DrSc.
DATUM OBHAJOBY	12. 9. 2012

**Klíčová slova**

Interakce těles a tekutin, Přídavná hmotnost, Přídavné tlumení, ANSYS, metoda ALE

**Keywords**

Fluid structure interaction, Added mass, Added damping, ANSYS, ALE method

**Místo uložení práce**

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, VUT v Brně, Technická 2, Brno

©Lukáš Pohanka, 2012

ISBN 978-80-214-4606-9

ISSN 1213-4198

# Obsah

<b>1</b>	<b>ÚVOD</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>CÍLE PRÁCE</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>MATEMATICKÝ MODEL</b>	<b>9</b>
3.1	Úvod . . . . .	9
3.2	Přídavná hmotnost . . . . .	10
3.3	Tlumení . . . . .	12
3.4	Výsledný model . . . . .	13
<b>4</b>	<b>MODELOVÁ ÚLOHA</b>	<b>14</b>
4.1	Jednostranně vetknutý prut . . . . .	15
<b>5</b>	<b>TECHNICKÁ APLIKACE</b>	<b>21</b>
<b>6</b>	<b>ZÁVĚR</b>	<b>23</b>



# 1 ÚVOD

Pohyb tělesa (nebo soustavy těles) lze výpočtově popsat pohybovou rovnicí. Ta vyjadřuje rovnováhu setrvačných, elastických a vnějších sil. Působením těchto sil může docházet k pohybu. Tento výpočtový model pak určuje sérii frekvencí, pro které amplitudy tohoto pohybu rostou nade všechny meze. Tyto frekvence se nazývají vlastní frekvence. V praxi ovšem ke zvětšení amplitud do nekonečna nedochází, protože působí ještě jeden jev a tím je tlumení. Jedná se o disipaci energie pohybu a to přímo v materiálu, nebo vnějšími příčinami. I to lze zahrnout do pohybové rovnice, která pak popisuje tlumené kmitání. Zohledněním tlumení v modelu se frekvence, při kterých dochází k lokálnímu extrému velikosti amplitudy, mírně sníží a amplitudy nabývají konečných hodnot. Takovým modelem se obvykle popisuje dynamické chování reálných těles.

Způsobů zahrnutí tlumení do výpočtového modelu je celá řada. Je výhodné ho vyjadřovat například ve formě proporcionálního útlumu a to z důvodu výhodnosti při matematickém řešení. V tomto případě se zavádí dva koeficienty  $\alpha$  a  $\beta$  kterými je určena úměra mezi velikostí tlumení a maticí hmotnosti respektive tuhosti v pohybové rovnici. Toto vyjádření je široce využíváno v případech, kdy je tlumení v modelu určeno na základě experimentu. Toho se v praxi využívá velice často, protože výpočtově modelovat konkrétní členy způsobující disipaci energie v reálných soustavách bývá velice obtížné až nerealizovatelné.

Řešení lineární pohybové rovnice lze provést v časové, nebo frekvenční oblasti. Obvykle se řeší dva případy a to volné kmitání a vynucené kmitání. V prvním případě jsou vnější síly považovány za nulové a v druhém se harmonicky mění s frekvencí stejnou jako je frekvence kmitání buzeného tělesa. Řešení v obou případech je pak provedeno za předpokladu, že veličiny popisující stav tělesa se harmonicky mění danou frekvencí. Výsledkem jsou vlastní čísla (odpovídají vlastním frekvencím) a vlastní tvary kmitání, nebo velikost amplitudy příslušné dané frekvenci buzení. V případě tlumené (nekonzervativní) soustavy je řešení možné provést převodem do stavového prostoru (snížení řádu diferenciální rovnice). Vlastní čísla pak mají nenulovou reálnou část, která odpovídá tlumení.

Řešení v časové oblasti se provádí v jednotlivých časových krocích. Podle typu diskretizace času je možné jej rozdělit na řešení explicitní a implicitní. Je tak možné řešit přechodové kmitání, kdy má pravá strana rovnice (vnější síly) libovolný tvar a kmitání není harmonické. V tomto případě je téměř vždy nutné numerické řešení. Výsledkem jsou veličiny popisující pohyb tělesa v průběhu času.

Schopnost výpočtově určit dynamické vlastnosti má v technické praxi velký význam. Pokud totiž reálný stroj bude delší dobu kmitat v oblasti svých vlastních frekvencí může dojít k jeho poškození nebo dokonce totální destrukci. Tomu předcházíme tak, že frekvence vnějšího buzení (například otáčkové frekvence) stanovujeme mimo tyto nebezpečné oblasti. I tak se jim ovšem nelze zcela vyhnout. Výpočtové modelování má proto značný význam pro zefektivnění konstruování nových strojů nebo pro úpravu strojů stávajících.

Na dynamické vlastnosti mají kromě vlastností tělesa vliv i jeho vazby k okolí a prostředí, ve kterém se nachází. Jejich působení se do výpočtových modelů může zohledňovat buď na pravou nebo levou stranu pohybové rovnice. Na pravou stranu se působení zohlední ve formě vnějších sil. Použití tzv. přidavných účinků (zohlednění na levou stranu pohybové rovnice) je výhodnější. Tento přístup vyžaduje, aby vnější působení šlo vyjádřit úměrně poloze, rychlosti a zrychlení tělesa. Pak je možné použít standardní metody řešení ve frekvenční oblasti, což výrazně zrychluje výpočet a usnadňuje vyhodnocení výsledků.

Zohlednění vlivu okolí na dynamické vlastnosti ve formě přídavných účinků je dáno spíše historickým vývojem, kdy neexistovaly metody ani prostředky pro komplexní modelování chování složitějších soustav (přímá numerická integrace pohybových rovnic s modelem okolí), což už dnes částečně neplatí. Mnoho vazeb k okolí i prostředí, ve kterém se těleso nachází ve formě přídavných účinků vyjádřit nelze, nebo lze pouze za cenu značného zjednodušení reálného chování. To se také často využívá. Ostatně jakýkoli model reálné soustavy je vždy zjednodušený výběr jejich podstatných vlastností a jde pouze o to do jaké míry je tento model schopen poskytovat výsledky odpovídající reálnému chování, popřípadě jak moc je pro nás případná odchylka významná.

Použití přídavných účinků má stále značné výhody, kterými jsou jednoduchost (výpočtová nenáročnost), spolehlivost dosažení věrohodných výsledků, a také značná úspora času. Uplatní se také v případech, kdy není použití přímé integrace v časové oblasti vhodné.

Jedním z technicky důležitých případů je ten, kdy je pohybující se elastické těleso<sup>1</sup> částečně (nebo úplně) obklopeno tekutinou. Pokud se těleso v tekutině pohybuje způsobuje současně i pohyb tekutiny. Tento její pohyb vyvolává tlakové změny v tekutině, a tím zpětné působení na těleso. Tekutina tímto mechanismem zapříčiní změnu jeho dynamických vlastností.

Je-li tekutina neviskózní a rychlost jejího proudění je malá, vyvolá její působení takzvaný efekt „přídavné hmotnosti“. Pokud tekutina proudí nebo je viskózní je zohlednění jejího vlivu poněkud komplikovanější. V případě proudící tekutiny je možné považovat její proudění za nevířivé a zohlednit její působení ve formě přídavné hmotnosti a přídavné tuhosti. Přídavné tlumení lze získat popisem viskózní tekutiny pomocí Navier-Stokesovy rovnice se zanedbáním konvektivního členu.

Tyto zjednodušení mají ovšem značná omezení. Jsou proto použitelná pouze za určitých předpokladů.

V poslední době dochází k odklonu od těchto linearizovaných modelů a k přechodu k numerickému řešení působení tekutiny na těleso v časové oblasti. Tekutina je zde popsána nelineární Navier-Stokesovou rovnicí. Ta je postupně v časových krocích řešena souběžně s deformací tělesa. Silové působení tekutiny je tedy zahrnuto na pravou stranu pohybové rovnice.

Vznikly dva základní přístupy k řešení. První je takový, u kterého je deformace tělesa a proudění v tekutině řešena v jedné soustavě rovnic<sup>2</sup>. Je vhodný pro úlohy se „silnou“ interakcí, kde se domény výrazně navzájem ovlivňují. Nevýhodou je nutnost řešit rozsáhlé soustavy rovnic.

Druhý přístup, kde řešení proudění v tekutině a deformace tělesa probíhá odděleně a je prováděna vzájemná výměna zatížení prostřednictvím okrajových podmínek<sup>3</sup>. Algoritmus může probíhat tak, že pro každý časový krok proběhne pouze jedno řešení tzv. „weak coupled“ (explicitní řešení) nebo pro každý časový krok proběhne několik iterací mezi řešením jednotlivých domén tzv. „strong coupled“ (implicitní řešení). Výhodou je možnost použití již existujících programů pro řešení proudění tekutiny a řešení deformace těles mezi nimiž je nutné vytvořit pouze přenos zatížení. Umožňují řešit výrazně rozsáhlejší úlohy. Také je zde možné použít rozdílný časový krok jednotlivých částí řešení.

<sup>1</sup>deformovatelné těleso s lineární závislostí mezi vnějším zatížením a deformací

<sup>2</sup>v anglické terminologii se jedná o tzv. „monolithic approach“

<sup>3</sup>v anglické terminologii se jedná o tzv. „partitioned approach“

Tyto přístupy již umožňují řešení úloh, kdy úlohy deformace tělesa i proudění v tekutině jsou nelineární (což se zvláště uplatní například v biomechanice).

V oblasti FSI (Fluid Structure Interaction)<sup>4</sup> také získává dominantní postavení ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) pro popis proudění v tekutině s pohyblivou hranicí. Lagrangeův popis se z historického pohledu užívá v případě mechaniky těles a Eulerův pro mechaniku tekutin. ALE spojuje vlastnosti obou těchto pohledů. Proto se jí využívá ve zvláštních případech jak v mechanice těles, tak tekutin. Při řešení FSI se ovšem dá setkat i s mnoha přístupy k řešení, kde se pro obě domény používá stejný pohled nebo dokonce i stejné veličiny.

Je také možné (pokud jsou deformace malé) k řešení použít klasický Eulerův přístup s pevnou hranicí tekutiny a na rozhraní použít různých speciálních okrajových podmínek (Transpiration, Immersed boundary method, ...). Tyto přístupy přinášejí usnadnění a zrychlení výpočtu ovšem s nevýhodou nižší přesnosti v oblasti hranice.

Použití metod řešení v časových krocích je velice perspektivní, neboť umožňují řešit téměř jakýkoli problém. Stále ovšem mají i omezení a těmi jsou jednak značná časová náročnost výpočtu dále špatná konvergence a numerická stabilita. Nezanedbatelná je také poněkud komplikovanější interpretovatelnost výsledků. Proto je jejich použití v praxi zatím omezené a výpočet přídatných účinků si stále uchovává svůj význam.

---

<sup>4</sup>Interakce tělesa a tekutiny

## 2 CÍLE PRÁCE

Cílem práce je vytvořit postup, kterým bude při výpočtovém modelování možné ekvivalentně nahradit vliv nestlačitelné viskózní tekutiny na dynamické vlastnosti elastického tělesa pomocí tzv. přídavné hmotnosti, přídavného tlumení a přídavné tuhosti. Tato náhrada umožní efektivně určovat dynamické vlastnosti těles obklopených tekutinou. To s využitím rozvoje do vlastních tvarů a nezávislém řešení deformace tělesa a proudění v tekutině. Tento postup implementovat do stávajících výpočtových programů.



# 3 MATEMATICKÝ MODEL

## 3.1 Úvod

Snaha používat k určování přídavných účinků běžné komerční CFD (Computer Fluid Dynamics)<sup>1</sup> software bez komplikovanějších úprav je motivována několika důvody. Ne vždy musí být k dispozici specializovaný software pro jejich řešení. Jeho pořízení může být nákladné a navíc může být jednoúčelový, což je neefektivní. Komerční CFD software je dnes již naopak relativně dostupný a navíc má obvykle významně širší možnosti vytváření modelů. Velké softwarové systémy pro technické výpočty metodou konečných prvků jako například ANSYS nebo ADINA obvykle nabízejí i několik nástrojů pro řešení interakčních úloh. Ty ovšem nemusí být pro některé případy efektivně použitelné a nějaké uživatelské zásahy do těchto programů jsou velice obtížné. Naopak poměrně snadné je použít pro výpočet základní moduly těchto programů a řídit je z nějaké vnější nadřazené struktury.

Výchozí pro tuto práci byl postup vyvinutý Pochylým [23]. Postupem vývoje došlo k několika modifikacím. Struktura výpočtu zůstává stejná, ale došlo k úpravě ve výchozích rovnicích a odlišnému způsobu jejich řešení.

V případě, že těleso je vyrobené z oceli (v technické praxi zatím nejrozšířenější případ) lze jeho chování velice dobře popsat pomocí modelu lineárně elastického materiálu a tekutinou voda dobře odpovídající Newtonovu modelu kapalin. Pohyb nestlačitelné Newtonovské kapaliny je pak popsán Navier-Stokesovou rovnicí. Ta obsahuje dva parametry charakterizující tekutinu a tím je hustota a viskozita. Pro určování přídavných účinků je nutné tuto rovnici linearizovat zanedbáním nelineárních konvektivních členů. Tím se řešení omezí pouze na neproudící tekutiny. Za těchto okolností (jak ukazuje [7]) je možné vzájemně oddělit řešení tzv. přídavné hmotnosti od přídavného tlumení. Vlastní frekvence je možné velice efektivně určit pouze použitím modelu ideální (neviskózní) kapaliny, kdy tekutina způsobuje pouze tzv. přídavnou hmotnost. Vliv tlumení (i jeho případnou nelinearitu) od relativně málo viskózní kapaliny na velikost vlastní frekvence lze bezpečně zanedbat.

Naopak určování tlumení pomocí tohoto modelu se ukazuje jako nevhodné (respektive použitelné pouze pro rychlosti blízké nule, přičemž v praxi budou tyto rychlosti výrazně větší). Pro získání reálné hodnoty tlumení bude nutné použití kompletní N-S rovnice a navíc s využitím ALE (a to i v případě, že výchylky budou relativně malé). Bez použití ALE je problematické stanovení okrajových podmínek na rozhraní, kde dochází ke styku tělesa popsaného Lagrangeovským popisem a tekutiny, u které je použit popis Eulerův. Při využití nějakého typu zjednodušených okrajových podmínek nemusí být výsledné rychlostní a tlakové pole tekutiny realistické. V takovém případě i výsledné síly na těleso působící nemusí být realistické. Potom už ovšem nelze určit tlumení ve formě přídavných účinků (problém je z podstaty ALE nelineární), tím se připravujeme o nesporné výhody tohoto způsobu.

Cestou jak použít nelineární model, a zároveň přídavné účinky může být zavedení efektivní rychlosti, kterou budeme předpokládat, že se těleso v tekutině pohybuje (ve skutečnosti se jeho rychlost harmonicky mění). Pro tuto rychlost poté určíme konstantní přídavné účinky postupem podobným jako v případě lineárního proudění ovšem s využitím nelineárního modelu. Provedeme tak jakousi linearizaci ve zvoleném pracovním bodě. Není

---

<sup>1</sup>program na řešení proudění v tekutině

použito klasického postupu pomocí Taylorova rozvoje. Bylo by to poměrně komplikované a přínos vzhledem k dále popsaným komplikacím při výpočtu by byl diskutabilní. V našem případě je obecný tvar tlumení nahrazen modelem vazkého tlumení.

V případě harmonického kmitání elastického tělesa v tekutině nelze pomocí komerčních programů na řešení tekutiny přímo číselně určit hodnoty přídatných účinků, které by se po přidání do modelu tělesa mohly následně použít pro výpočet jeho dynamických vlastností. Vyjádření přídatné hmotnosti ve formě matice obsahující řešení proudění v tekutině by vyžadovalo speciální software, nebo komplikovaný zásah do softwaru stávajícího.

Přímo číselně lze přídatné účinky určit pouze ve speciálním případě tuhého osově symetrického tělesa v symetrické nádobě. Je to dáno tím, že neznáme vlastní tvar kmitů soustavy těleso tekutina. Pokud bychom tento vlastní tvar znali, je pohyb tělesa plně zadán (předpokládáme, že se těleso pohybuje harmonicky) a lze tím pádem bez obtíží číselně určit přídatné účinky.

Iterační postup pro jeho nalezení vypracoval Kasahara [13]. Výpočet začíná předpokladem, že těleso v tekutině má stejný vlastní tvar kmitání jako samostatné těleso. Dále je vypočtena přídatná hmotnost (akustický model tekutiny). Po jejím přidání do modelu je vypočten nový vlastní tvar. Takto proběhne několik iterací. Tento postup bude ovšem pravděpodobně použitelný pouze pro jednoduché vlastní tvary a u složitějších (s větším počtem uzlů) bude jeho konvergence problematická.

V této práci bude použit nejjednodušší předpoklad umožňující oddělení elastického tělesa od tekutiny. Tímto předpokladem je to, že těleso kmitá harmonicky vlastním tvarem shodným s vlastním tvarem samostatného tělesa [23] (řešení je provedeno rozvojem do vlastních tvarů kmitání). To bude pro výpočet vlastních tvarů příslušným nejnižším vlastními frekvencím vyhovující.

## 3.2 Přídatná hmotnost

V případě interakce látek typu ocel — neproudící voda (velký modul pružnosti a hustota proti nízké viskozitě) a za předpokladu malých výchylek z rovnovážného stavu je možné zanedbat vliv „tlumení“ tekutiny na velikost vlastní frekvence. Potom lze vlastní frekvenci soustavy těleso neproudící tekutina vypočítat relativně snadno pouze s použitím tzv. přídatné hmotnosti.

Nestlačitelná neviskózní tekutina je popsána Eulerovou rovnicí, u které postupně zanedbáme členy, ve kterých vystupuje rychlost tekutiny, kterou považujeme za malou (konvektivní člen). Vzniklá rovnice má tvar (3.1). K ní připojíme rovnici kontinuity (3.2). Vznikla lineární soustava rovnic. Konvenční postup řešení pak vede na Laplaceovu rovnici.

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{c} = 0 \quad (3.2)$$

Okrajové podmínky:

$$\begin{aligned} \gamma &: \frac{1}{\rho} \nabla p = \ddot{\mathbf{u}} \\ \Gamma &: p = 0 \end{aligned}$$

Takto naformulovaný problém ((3.1) a (3.2)) je možné řešit i dalším způsobem. K řešení je použit komerční program, který řeší kompletní N-S rovnici. Výpočet pak probíhá jako nestacionární. Výchozími rovnicemi tedy jsou (3.3) a (3.4).

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla \mathbf{c} - \nu \nabla^2 \mathbf{c} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{c} = 0 \quad (3.4)$$

Okrajové podmínky:

$$\begin{aligned} \gamma &: \mathbf{c} = a_e t \hat{\mathbf{w}} \\ \Gamma_1 &: \mathbf{c} = \mathbf{0} \\ \Gamma_2 &: p = 0 \end{aligned}$$

Okrajová podmínka na rozhraní je taková, že rychlost v tekutině odpovídá rychlosti pohybu hranice tělesa. Tato rychlost je takovou funkcí času, aby výsledné zrychlení bylo konstantní. V praxi je rychlost v programu během časových kroků měněna tak, aby výsledné zrychlení mělo požadovanou hodnotu.

Všechny rychlosti jsou zadávány blízké nule. Zde je možné použít na rozhraní tělesa a tekutiny jak okrajovou podmínku typu zdroj/propad a zadávat rychlost tekutiny, tak i ALE (rovnice (3.5) (3.6) a (3.7)), kde je zadávána poloha (do výpočtového programu je zadávána poloha, v rovnicích vystupuje rychlost) pohybující se hranice proměnná v časových krocích. Výsledky mají v obou případech stejnou velikost.

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + (\mathbf{c} + \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{m}}) \cdot \nabla \mathbf{c} - \nu \nabla^2 \mathbf{c} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (3.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{c} = 0 \quad (3.6)$$

$$\nabla(k_m \nabla \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{m}}) = 0 \quad (3.7)$$

Okrajové podmínky:

$$\begin{aligned} \gamma &: \mathbf{u}_{\mathbf{m}} = \frac{a_e t^2}{2} \hat{\mathbf{w}} \quad ; \quad \mathbf{c} = \mathbf{0} \\ \Gamma_1 &: \mathbf{u}_{\mathbf{m}} = \mathbf{0} \quad ; \quad \mathbf{c} = \mathbf{0} \\ \Gamma_2 &: \mathbf{u}_{\mathbf{m}} = \mathbf{0} \quad ; \quad p = 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{f}_{\mathbf{m}} = - \int_{\gamma} p \mathbf{n} dS \quad (3.8)$$

$$\mathbf{a} = a_e \hat{\mathbf{w}} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{M}_{\text{add}} = \begin{bmatrix} \frac{f_{mx}}{a_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f_{my}}{a_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f_{mz}}{a_z} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Na zbytku hranice je poté zadána nulová rychlost tekutiny, referenční tlak zvolen 0. Tímto postupem je zajištěno, že při výpočtu budou významné pouze členy vystupující v rovnici (3.1). Je nutné také zadat počáteční podmínky, které jsou ve všech případech nulové, a proto nejsou uváděny.

Výsledná síla (vzniklá integrací tlaku přes rozhraní) je během časových kroků téměř konstantní (dochází k zanedbatelnému nárůstu z důvodu postupného zvyšování rychlosti v tekutině) a je možné z ní určit přídavnou hmotnost. Přídavná hmotnost je pro každý uzel výpočtové sítě určena jako číselná hodnota. Takto jednoduchý tvar je dán počátečním předpokladem o pohybu tělesa.

Metodu lze mírně vylepšit použitím vlastního tvaru z modelu popsaného v [Sch?]. V takovém případě ovšem tento výpočet vlastních frekvencí ztrácí smysl a uplatní se pouze výpočet tlumení.

### 3.3 Tlumení

Výpočet tlumení je poněkud náročnější. Výpočet z linearizované Navier-Stokesovy rovnice [7], [23] se jeví použitelný pouze pro extrémně malé rychlosti pohybu a amplitudy kmitání. Tyto amplitudy budou v praxi ovšem výrazně větší. V takovém případě (kdy je rychlost tekutiny zanedbatelně velká) již bude problém nelineární a jako nezbytné se také jeví použití ALE.

Nahrazení účinků tekutiny ve formě přídavného tlumení není vyhovující a je možné ho použít pouze jako zjednodušení za některých omezujících předpokladů.

Tímto předpokladem bude volba efektivní amplitudy kmitání (rychlosti pohybu tělesa), pro kterou je přídavné tlumení vypočteno. Dalším předpokladem je pak to, že při výpočtu lokální zrychlení neovlivňuje tvar rychlostního a tlakového pole.

$$(\mathbf{c} + \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{m}}) \cdot \nabla \mathbf{c} - \nu \nabla^2 \mathbf{c} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (3.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{c} = 0 \quad (3.12)$$

$$\nabla(k_m \nabla \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{m}}) = 0 \quad (3.13)$$

Dopouštíme se tak významného zjednodušení, protože reálné tlumení se pravděpodobně mění i v průběhu jedné periody kmitu (v závislosti na rychlosti). Samotné kmitání tělesa ve viskózní tekutině pak není harmonické.

Výpočet je opět proveden jako nestacionární s využitím komerčního programu. Je nutné použití ALE, protože výsledné rychlostní a tlakové pole při použití stacionárního výpočtu a okrajových podmínek typu zdroj/propad nejsou realistická. Vychází se proto z pohybové rovnice (3.11) a rovnice kontinuity (3.12). Použitý program CFX opět řeší

kompletní rovnice (3.14), (3.15) a (3.16). Při výpočtu je měněna poloha hranice během časových kroků tak, aby její výsledná rychlost zůstala konstantní. To způsobí, že nestacionární člen v rovnicích nebude významný.

Z výsledného tlakového a rychlostního pole je určena síla působící na těleso (rovnice (3.17)) a následně vypočteno odpovídající přídatné tlumení (rovnice (3.20)).

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + (\mathbf{c} + \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{m}}) \cdot \nabla \mathbf{c} - \nu \nabla^2 \mathbf{c} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (3.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{c} = 0 \quad (3.15)$$

$$\nabla(k_m \nabla \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{m}}) = 0 \quad (3.16)$$

Okrajové podmínky:

$$\gamma : \mathbf{u}_{\mathbf{m}} = v_e t \hat{\mathbf{w}} ; \mathbf{c} = \mathbf{0}$$

$$\Gamma_1 : \mathbf{u}_{\mathbf{m}} = \mathbf{0} ; \mathbf{c} = \mathbf{0}$$

$$\Gamma_2 : \mathbf{u}_{\mathbf{m}} = \mathbf{0} ; p = 0$$

$$\mathbf{f}_{\mathbf{b}} = - \int_{\gamma} \mathbf{D} \mathbf{n} \, dS \quad (3.17)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} p & \rho\nu \frac{\partial c_x}{\partial y} & \rho\nu \frac{\partial c_x}{\partial z} \\ \rho\nu \frac{\partial c_y}{\partial x} & p & \rho\nu \frac{\partial c_y}{\partial z} \\ \rho\nu \frac{\partial c_z}{\partial x} & \rho\nu \frac{\partial c_z}{\partial y} & p \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{v} = v_e \hat{\mathbf{w}} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{B}_{\text{add}} = \begin{bmatrix} \frac{f_{bx}}{v_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f_{by}}{v_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f_{bz}}{v_z} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

### 3.4 Výsledný model

Vypočtené přídatné účinky jsou pak zohledněny v pohybové rovnici tělesa 3.21 (diskretizována pomocí MKP) přidáním dalších konečných prvků do odpovídajících uzlů na rozhraní tělesa a tekutiny. Toto je výrazně méně náročné než tvorba speciálního konečného prvku (pro řešení ve smyslu MKP) a přesnost výpočtu se tím významně nesníží (za předpokladu, že je síť dostatečně jemná).

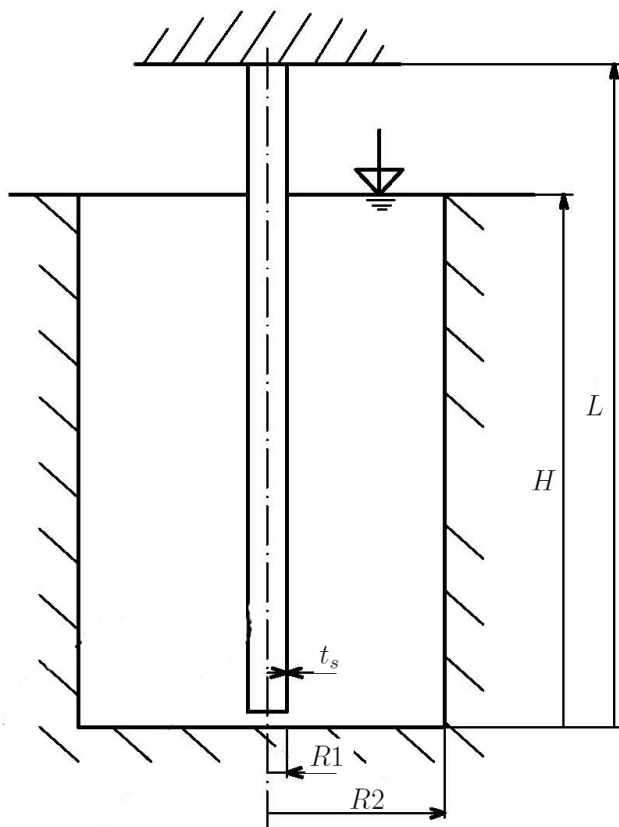
Tím obdržíme výpočtový model lineárního systému popisujícího dynamické vlastnosti tělesa pohybujícího se v tekutině za v předchozím textu uvedených předpokladů.

$$[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{u}} + [\mathbf{B}]\dot{\mathbf{u}} + [\mathbf{K}]\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (3.21)$$

## 4 MODELOVÁ ÚLOHA

V této části jsou popsány dvě úlohy řešené modelem popsáným v předchozí kapitole. Je zde detailně popsán postup výpočtu pomocí programů ANSYS Classic 11 a CFX 11. Kde jsou vhodná data k dispozici jsou obdržené výsledky porovnány i s výsledky experimentu.

Úkolem je určení první a druhé nejnižší vlastní frekvence a příslušného koeficientu tlumení jednostranně vetknutého prutu mezikruhového průřezu vyrobeného z oceli. Prut je centricky umístěn do válcové nádoby obsahující tekutinu (v tomto případě vodu) viz obrázek 4.1. Použité materiálové charakteristiky shrnuje tabulka 4.1. Základní rozměry pak tabulka 4.2. V úloze je proměnná výška vody  $H$  od 0 do 1000mm s krokem 100mm. Také se mění průměr nádoby s tekutinou viz tabulka 4.3. Tím vzniká celkem padesát možných kombinací. Stěny vnější nádoby jsou považovány za tuhé. Vliv pohybu hladiny (free surface moving) je zanedbán. Také vzdálenost konce prutu od dolní stěny nádoby a její vliv na výsledky je zanedbán.



Obr. 4.1: Rozměry prutu

	Ocel	Voda
$E$	$2,1 \cdot 10^{11} Pa$	
$\mu$	0,3	
$\rho$	$7800 kg/m^3$	$1000 kg/m^3$
$\nu$		$0,8899 \cdot 10^{-6} m^2 s^{-1}$

Tab. 4.1: Materiálové charakteristiky

Označení	Rozměr [mm]
$L$	1100
$R1$	16,9
$t_s$	2

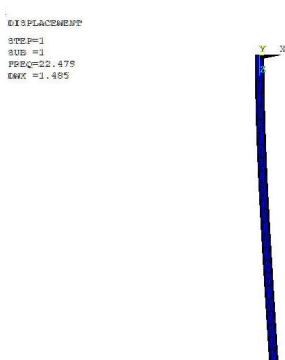
Tab. 4.2: Rozměry úlohy

Nádoba	$R2$ [mm]
1	20
2	25
3	35
4	50
5	105

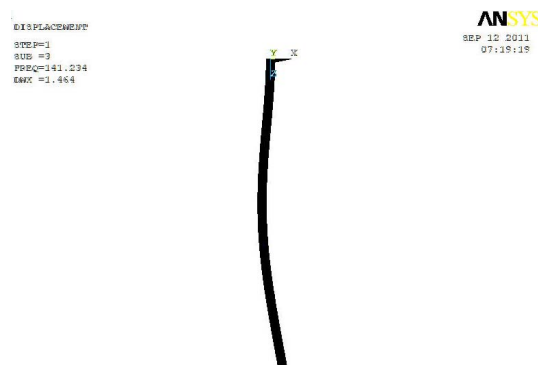
Tab. 4.3: Rozměry nádob

## 4.1 Jednostranně vetknutý prut

Popsaný model umožňuje řešit přídavné účinky pro tělesa libovolného tvaru. Prvním krokem je výpočet příslušného vlastního tvaru samostatného tělesa (obr. 4.2 a 4.3). Ten probíhá v programu ANSYS. Tento vlastní tvar je exportován ve formě textového souboru obsahujícího posunutí uzlů sítě na rozhraní tělesa a tekutiny. Procedura v programu MATLAB tento soubor přeformátuje do tvaru, který je možné načítat programem ANSYS CFX (soubor s příponou .csv obsahující formátovaný text).



Obr. 4.2: Výchozí první tvar kmitů



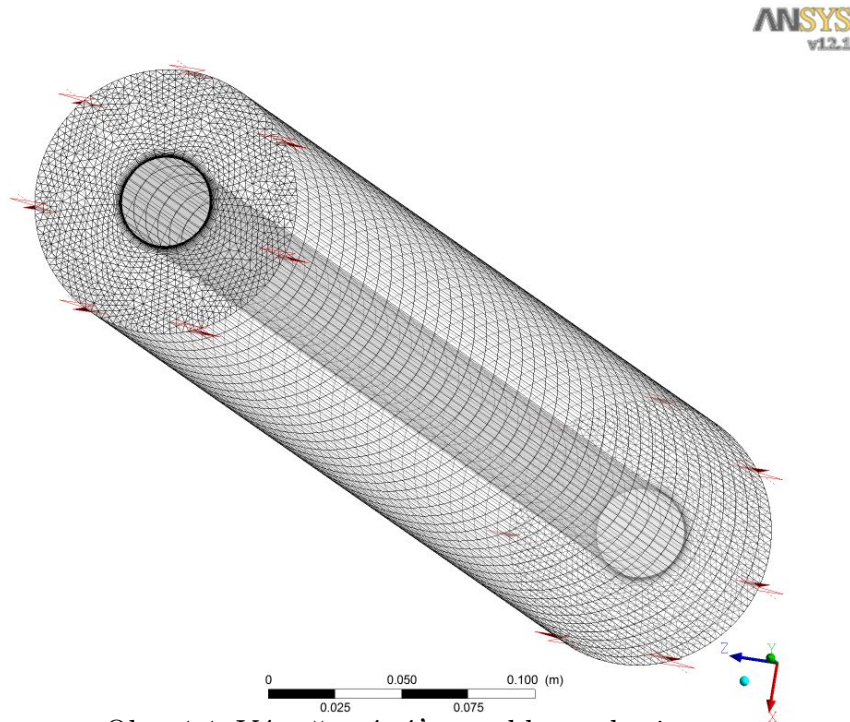
Obr. 4.3: Výchozí druhý tvar kmitů

Výpočet přídatných účinků probíhá v tomto programu. Výpočtovou síť na oblast tekutiny znázorňuje obr. 4.4. Na horním i spodním okraji je předepsána okrajová podmínka „symetrie“ (rovnice (4.1) a (4.2)). Na obvodu potom nulová rychlost, stejně jako na rozhraní (4.3). Zde je také zadáván posun hranice zatím co na obvodu je hranice pevná.

$$\Gamma_1 : c_n = 0 \quad (4.1)$$

$$\Gamma_1 : \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (4.2)$$

$$\Gamma_2 : \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (4.3)$$



Obr. 4.4: Výpočtová síť pro oblast tekutiny

Pro výpočet přídatné hmotnosti jsou zadány okrajové podmínky pomocí funkce programu, která je umožňuje zadávat ve formě profilu interpolovaného ze sítě hodnot (vektorů) zadaných pro dané body prostoru. Tato funkce z původních hodnot vektorů posunutí příslušných bodům výpočtové sítě použité pro výpočet vlastních tvarů vytvoří vektory příslušné bodům výpočtové sítě tekutiny.

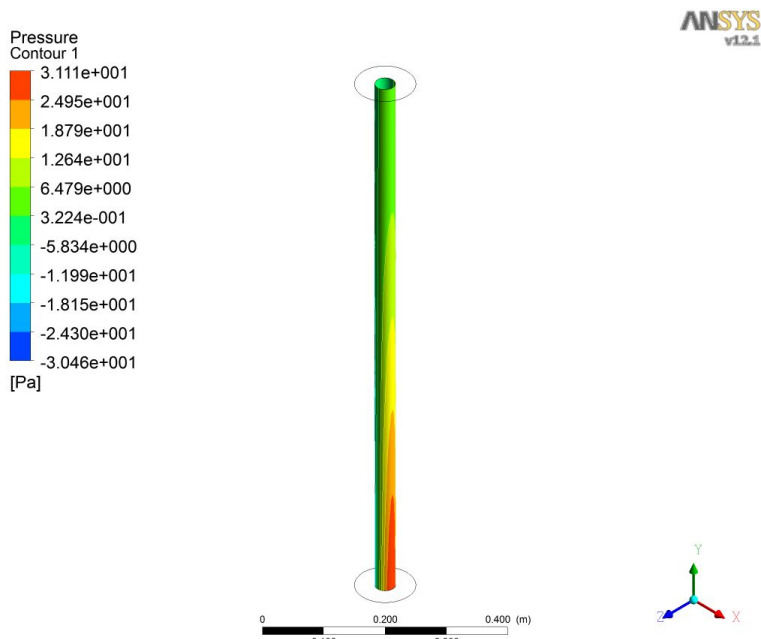
Polohu daného místa hranice v daném čase popisuje funkce

$$\gamma : \mathbf{u} = \frac{a_e t^2}{2} \hat{\mathbf{w}} \quad (4.4)$$

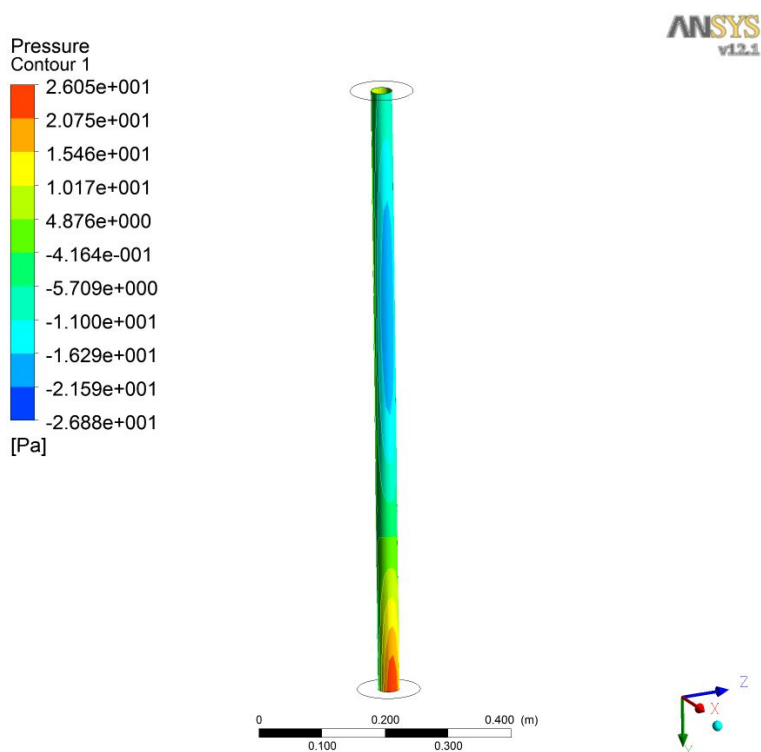
Tlakové pole vzniklé tímto pohybem pro první a druhý tvar ukazují obrázky 4.5 a 4.6. Výsledné síly (získané integrací tohoto tlakového pole) pro jednotlivé uzly hranice jsou exportovány do souboru (formátovaný text s příponou \*.csv). Výpočet přídatné hmotnosti probíhá v programu MATLAB. Přídatná hmotnost je do modelu vložena pomocí prvku Matrix27 (obr. 4.7).

To je dvouuzlový prvek, který nemá definovanou geometrii a umožňuje vkládat do modelu tuhost, tlumení a hmotnost ve formě matic příslušných každému uzlu. Uzly mají



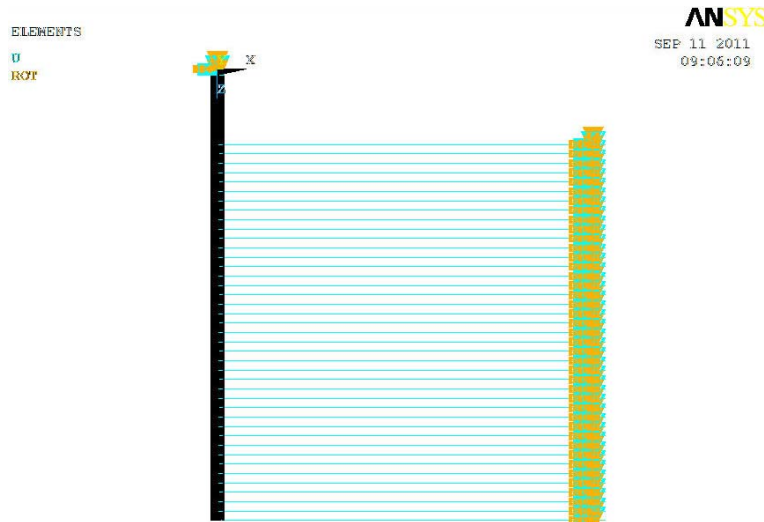


Obr. 4.5: Výsledné tlakové pole (první tvar)



Obr. 4.6: Výsledné tlakové pole (druhý tvar)

obecně šest stupňů volnosti. Pro tento prvek se tedy obecně doplňuje matice parametrů o rozměru 12x12. V popisovaném případě je vždy použit pouze jeden z uzlů, zatímco druhému jsou odebrány všechny stupně volnosti, proto je doplňována pouze část matice tohoto prvku o rozměru 6x6. I u tohoto uzlu ovšem nejsou uvažovány rotace, a proto je v praxi nutné doplnit pouze 9 prvků matice 3x3.



Obr. 4.7: Model tělesa s přidánými prvky Matrix27

Na doplnění matic prvku Matrix27 vytvořeny speciální algoritmy v programu MATLAB. Ty mají zabránit hlavně problémům s dělením malými čísly, které by mohly nastat v případě, že složky vektoru síly jsou jednoduše poděleny složkami vektoru zrychlení, přičemž je doplněna pouze diagonála matice. Tyto vektory totiž mohou navzájem svírat značný úhel nebo být na sebe i kolmé.

Je vytvořen textový soubor ve formátu který může načítat program ANSYS Classic, který obsahuje všechny složky matic prvku MATRIX 27 pro určité body na rozhraní.

Ten je načten programem ANSYS. Vzhledem k tomu, že výpočtová síť použité pro řešení proudění v tekutině a pro řešení deformace tělesa nejsou na rozhraní shodné je nutná interpolace mezi těmito sítěmi. Jako nejspolehlivější se ukázalo prosté přiřazení hodnot z uzlů jedné sítě do nejbližšího uzlu druhé sítě.

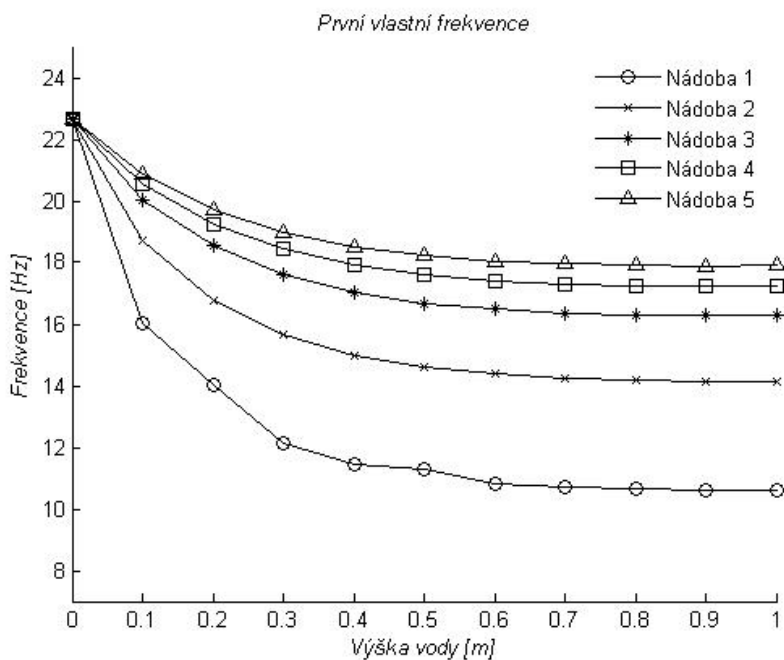
K řešení vlastních čísel takto sestaveného modelu je použit „unsymmetric eigensolver“ (viz [1]). Výsledkem jsou vlastní frekvence kmitání viz obrázky 4.8 a 4.9.

Následuje řešení hodnot tlumení. V programu CFX je použit stejný model jako v předchozím případě. Poloha hranice na rozhraní (4.5) je zadávána tak, aby jeho výsledná rychlost byla konstantní. Rychlost je zvolena podle vypočtené vlastní frekvence, vlastního tvaru izolovaného tělesa a zvolené amplitudy podle vztahu (4.6).

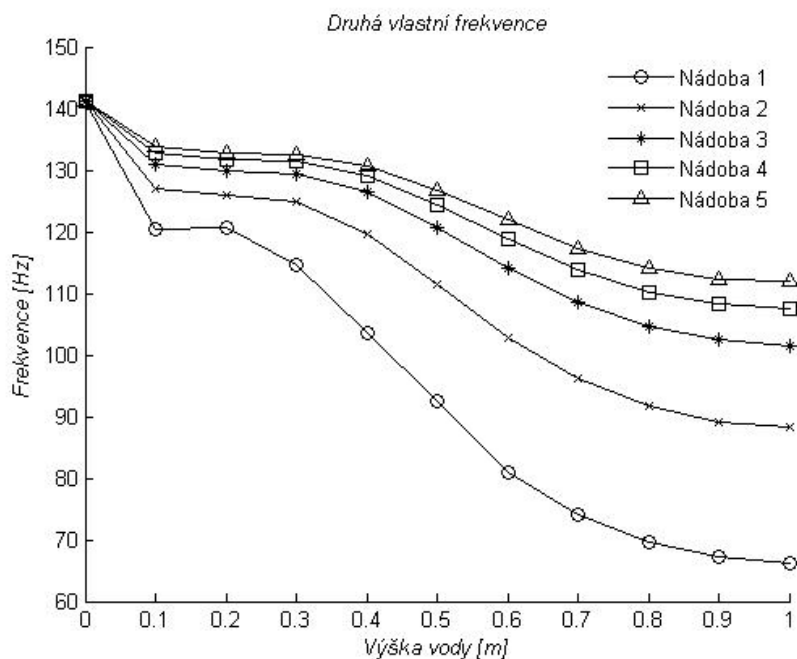
$$\gamma : \quad \mathbf{u} = u_e \Omega_n t \hat{\mathbf{w}} \quad (4.5)$$

$$\gamma : \quad \mathbf{v} = u_e \Omega_n \hat{\mathbf{w}} \quad (4.6)$$

Okrajové podmínky opět zadány ve formě profilu. Výsledkem je silové zatížení rozhraní. Vektory síly působící na jednotlivé uzly jsou z programu vyexportovány ve formě textového souboru obsahujícího formátovaná data (\*.csv). Tento soubor je načten procedurou vytvořenou v programu MATLAB a je vypočteno přídavné tlumení. Výsledkem jsou prvky matic konečných prvků Matrix27. Jejich přenos do programu ANSYS a vytvoření prvků představujících přídavné tlumení probíhá obdobně jako v případě přídavné hmotnosti. Je použit stejný model jako při předchozím výpočtu vlastní frekvence prutu s přídavnou hmotností. Takto nově vzniklý model obsahuje jak vypočtenou přídavnou hmotnost, tak tlumení.



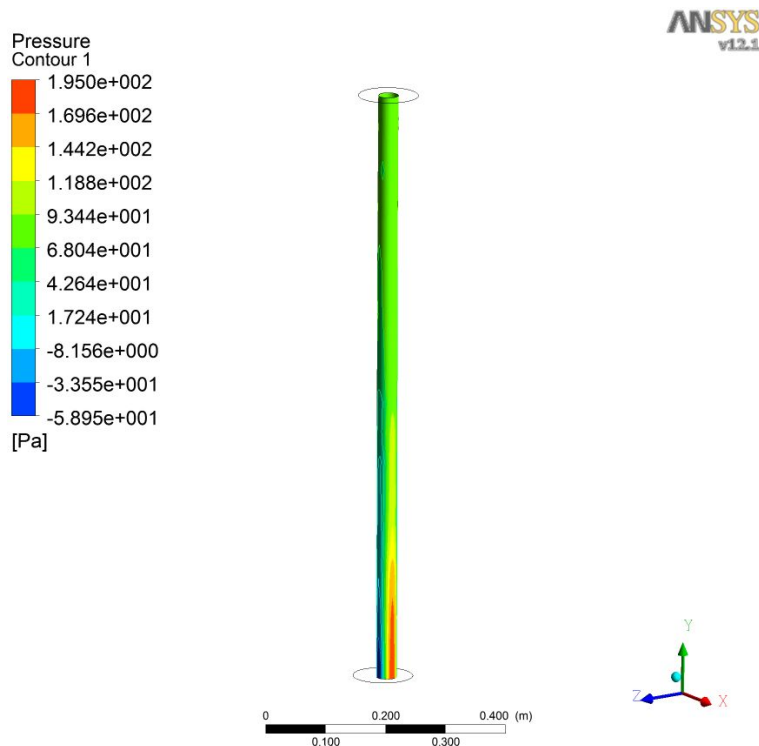
Obr. 4.8: Závislost vypočtené první vl. frekvence na výšce vody



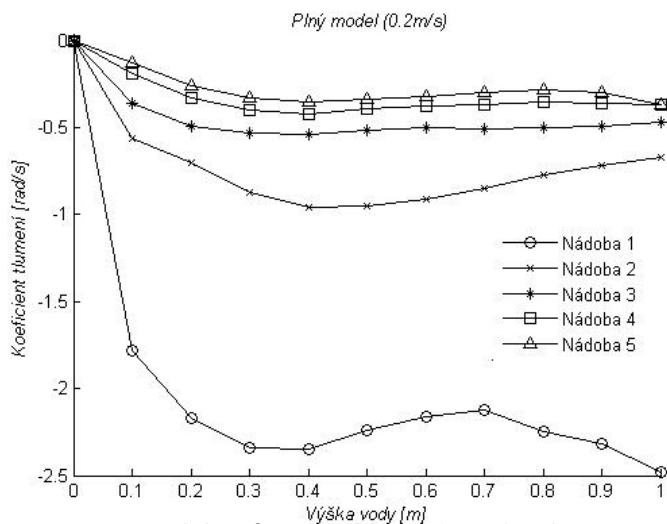
Obr. 4.9: Závislost vypočtené druhé vl. frekvence na výšce vody

Výpočet koeficientu tlumení odezvy tohoto modelu probíhá v časové oblasti. Buzení i vyhodnocení výsledné odezvy probíhá vychýlením konce prutu o zvolenou amplitudu a následným uvolněním a proložením obálky výsledné odezvy metodou nejmenších čtverců.

Výsledky výpočtů shrnuje graf 4.11.



Obr. 4.10: Výsledné tlakové pole (pohyb konstantní rychlostí)



Obr. 4.11: Vypočtený koeficient tlumení v závislosti na výšce vody

## 5 TECHNICKÁ APLIKACE

Postup popsaný v kapitole 4.1 byl aplikován i na těleso komplikovanějšího tvaru, kterým je rotor vírové turbíny. Ten se skládá z ocelového hřídele, uchycené na obou koncích v ložiscích, a mosazného nákrůžku se dvěma lopatkami, který je na něj nalisován. Výpočtový model rotoru byl převzat z [11]. Model je sestaven v programu ANSYS a skládá se z osmi-uzlových konečných prvků s lineární bází Solid45. Hřídel i olopatkovaný disk tvoří jednu výpočtovou síť, ovšem s oblastmi s rozdílnými mechanickými vlastnostmi, které shrnuje tabulka 5.1. Síť se skládá z 57 018 elementů a byla vytvořena dle možností co nejrovnoměrnější. Uchycení v ložiscích je považováno za ideálně tuhé a je modelováno jako zamezení posuvů uprostřed ložiskových čepů. Na dolním čepu jsou zamezeny všechny posuvy a na horním pouze posuvy v radiálním směru. Pro řešení vlastních frekvencí a tvarů byl použit algoritmus Block Lanczos.

	Ocel	Mosaz	Voda
$E$	$2,1 \cdot 10^{11} Pa$	$1 \cdot 10^{11} Pa$	
$\mu$	0,3	0,34	
$\rho$	$7800 kg/m^3$	$8800 kg/m^3$	$1000 kg/m^3$
$\nu$			$0,8899 \cdot 10^{-6} m^2 s^{-1}$

Tab. 5.1: Materiálové charakteristiky

Byly řešeny pouze první vlastní frekvence rotoru v klidu, protože tyto hodnoty lze porovnat s provedeným experimentem. Vypočtený první tvar kmitu samotného tělesa je použit jako vstupní parametr pro výpočet přídatných účinků od okolní tekutiny.

Rotor je umístěn do válcové nádoby na obou koncích navázané na potrubí. Pracovním médiem je voda, která byla modelována jako nestlačitelná newtonská kapalina. Úloha byla řešena pro stav, kdy se rotor neotáčí a tekutina se nachází v klidu (v případě, že se rotor nepohybuje). Model tekutiny je vytvořen v programu CFX. Výsledné tlakové pole, z něž je vyhodnocena přídatná hmotnost je znázorněno na obr. 5.1.

Výsledný model byl opět vytvořen v programu ANSYS s přídatnou hmotností zohledněnou pomocí prvků Matrix27. Použití prvků Matrix27 v nesymetrické formě si stejně jako v předchozím případě vyžaduje řešení vlastních čísel pomocí algoritmů na řešení vlastních čísel nesymetrických matic (v ANSYSu to je „unsymmetric eigensolver“ viz [1])

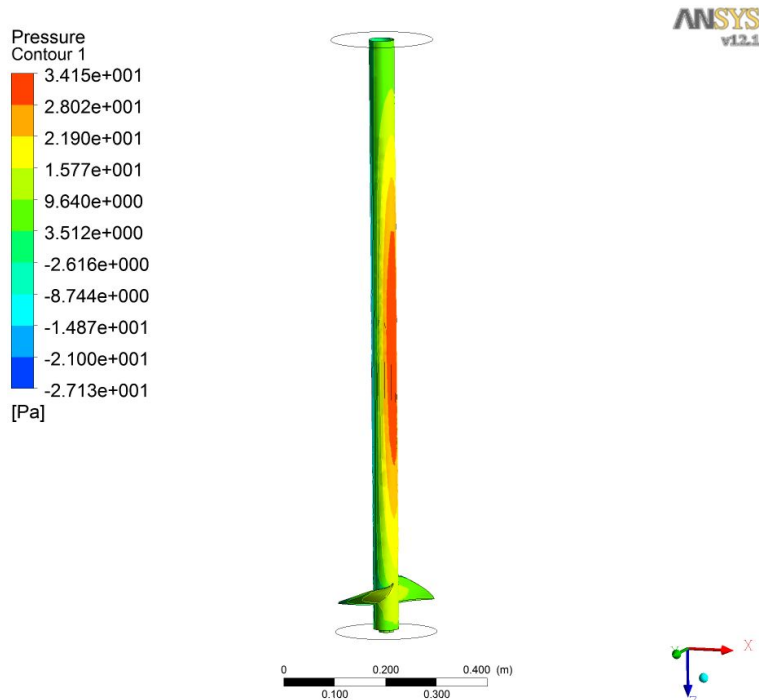
Výsledky výpočtu první vlastní frekvence a jejich porovnání s výsledky experimentu (viz [16]) nabízí tabulky 5.2 a 5.3. Rotor se dvěma lopatkami je nesymetrický. První vlastní frekvenci proto odpovídají dvě frekvence. Jedna nižší příslušná rovině procházející lopatkami (s vyšším momentem setrvačnosti). Druhá, mírně vyšší frekvence odpovídá kmitání v rovině kolmé. Pro každou tuto frekvenci byl proveden samostatný výpočet přídatných účinků.

	Bez vody Hz	S vodou Hz
Experiment	79,4	74,1
Výpočet	80,5	75,4

Tab. 5.2: První vlastní frekvence rotoru vírové turbíny ve směru lopatek

	Bez vody Hz	S vodou Hz
Experiment	80,0	75,5
Výpočet	81,0	75,8

Tab. 5.3: První vlastní frekvence rotoru vírové turbíny kolmo na směr lopatek



Obr. 5.1: Vypočtené tlakové pole na povrchu rotoru v kontaktu s tekutinou

## 6 ZÁVĚR

Již delší dobu jsou známy efektivní metody pro numerický výpočet vlastních frekvencí a vlastních tvarů elastických těles v kontaktu s ideální neproudící tekutinou a to jak stlačitelnou, tak nestlačitelnou. Je to dáno tím, že v tomto případě lze tlak v tekutině popsat lineární Laplaceovou respektive Vlnovou rovnicí. Dnes nejpoužívanější je použití MKP jak pro diskretizaci oblasti tělesa, tak tekutiny. Následně lze celý problém zapsat do jedné soustavy a řešit problém vlastních hodnot.

Jedná-li se o tekutinu reálnou, lze pro popis jejího chování také použít linearizovaný model. Kromě ovlivnění matice hmotnosti v tomto případě dochází i k ovlivnění matice tlumení. Následující řešení je výrazně komplikovanější než v předchozím případě. Nevýhodou takovýchto řešení je, že jsou odvozena pro rychlosti proudění (respektive amplitudy kmitání) blízké nule. V praxi ovšem je nutné tyto rychlosti považovat za reálné. Výsledné tlumení pak je nelineární funkce rychlosti a komplikace v tomto případě také přináší volba okrajových podmínek na rozhraní tělesa a tekutiny. Obdobné je to i v případě proudící tekutiny.

Přístup prezentovaný v této práci si klade za cíl určení přídatných účinků neproudící reálné tekutiny tak, aby byl spolehlivý, relativně snadno realizovatelný a výsledek byl uplatnitelný v praxi. Vliv tekutiny na chování elastického tělesa je tedy zohledněn ve formě tzv. přídatných účinků. Nejsou ovšem řešeny komplexní matice obsahující kompletní řešení tlakového pole v tekutině, ale je provedeno úplné oddělení tekutiny od tělesa. Toho je dosaženo za předpokladu, že těleso v tekutině kmitá harmonicky vlastním tvarem shodným s vlastním tvarem samotného tělesa. Takto je možné číselně určit přídatné účinky od tekutiny. Výsledkem pak není matice přídatných účinků v pravém slova smyslu, ale pouze přídatné účinky odpovídající kmitání shodného s na počátku předpokládaným. Vyjádření komplexních matic přídatných účinků by vyžadovalo vytvoření speciálního softwaru a to se vzhledem k omezením, který tento přístup má (viz dále) nejevilo jako efektivní.

Řešení je rozděleno do konečného počtu vlastních tvarů kmitání, přičemž probíhá pouze pro jeden zvolený. Jejich výpočet je proveden za předpokladu platícího pro lineárně se chovající (zanedbán vliv konvektivního členu) reálnou tekutinu. Zavedením tohoto předpokladu lze řešit matici přídatné hmotnosti odděleně na základě vlastností ideální tekutiny. Stejně tak tlumení lze řešit samostatně.

Počáteční určení vlastního tvaru samostatného tělesa je provedeno v programu ANSYS. Ve stejném programu s využitím stejného modelu budou také na závěr určovány vlastnosti již s přídatnými účinky. K jejich stanovení je použit program ANSYS CFX. Určování přídatné hmotnosti probíhá nestacionární simulací, při které je postupně zvyšována rychlost hranice (rychlost v jednotlivých bodech rozhraní úměrná vlastnímu tvaru) tak, aby bylo dosaženo konstantního jednotkového zrychlení. A to za podmínky, že tyto rychlosti se co nejvíce přibližují nule. Integrací vzniklého tlakového pole jsou určeny síly odpovídající přídatné hmotnosti.

Při výpočtu přídatného tlumení došlo k odchýlení od předpokladů linearizovaného proudění (z důvodu přiblížení se realitě). Při výpočtu je využito ALE a hranice tekutiny je postupně v časových krocích posouvána tak, aby bylo dosaženo konstantní rychlosti (opět odpovídající vlastnímu tvaru). Časový krok i délka simulace byly voleny pokud možno co nejkratší. Rychlost je volena tak, aby odpovídala jakési efektivní rychlosti kmitání danou vlastní frekvencí (získanou v předchozím kroku modální analýzou tělesa) a předpokládanou amplitudou kmitání tělesa.

## ZÁVĚR

Příslušné přídatné účinky jsou do výchozího výpočtového modelu vloženy formou přidání dalších konečných prvků.

Použitelnost výsledného modelu je značně omezena. Je to nutností zavést předpoklad o typu a tvaru kmitání. Vliv tekutiny způsobí pravděpodobně jistou změnu vlastního tvaru (zvláště výraznou u tvarů příslušných vyšším frekvencím). Také použití postupů platných pouze pro lineární model je značně zjednodušující. Pokud těleso kmitá v reálné tekutině nebude jeho pohyb harmonický.

V případech, kdy je těleso relativně málo poddajné a tekutina má relativně malou viskozitu (kombinace ocel-voda) a jednoduché vlastní tvary se jeví tento postup jako použitelný. Jeho nepřesnosti jsou vykoupeny hlavními výhodami. Těmi jsou hlavně relativně malá náročnost na výpočtový čas a také relativně slušná spolehlivost při dosažení věrohodných výsledků (zvláště tlumení).

Řešení problémů interakce těles a tekutin se dnes přesouvá do časové oblasti s využitím ALE, kde je možné řešit i případy, kdy se tekutina (případně i těleso) chová nelineárně. Tento přístup slibuje významně lepší výsledky pro případ reálné tekutiny. Ta je zde popsána Navier-Stokesovou rovnicí, řešení probíhá v časových krocích a výsledkem je odezva (deformace) systému na buzení v časové oblasti.

Zásadním problémem, který zatím omezuje jejich použitelnost vyjma značných nároků na výkon počítačů a výpočtový čas je hlavně špatná stabilita a konvergence výpočtů. Výpočtový čas nutný k výpočtu takovýchto úloh je o několik řádů vyšší, než v případě dříve popsaných přístupů. Proto tyto postupy zatím mají omezené využití pro velice jednoduché úlohy nebo ve specifických případech jako například v biomechanice.



## Použité označení

$\lambda$	$[rad\ s^{-1}]$	koeficient tlumení
$\nu$	$[m^2\ s^{-1}]$	kinematická viskozita
$\rho$	$[kg\ m^{-3}]$	hustota
$\Omega_n$	$[rad\ s^{-1}]$	úhlová frekvence odpovídající zvolenému tvaru kmitání
$a_e$	$[m\ s^{-2}]$	volené zrychlení
$\mathbf{a}$	$[m\ s^{-2}]$	vektor zrychlení
$a_x$	$[m\ s^{-2}]$	složka vektoru $\mathbf{a}$
$a_y$	$[m\ s^{-2}]$	složka vektoru $\mathbf{a}$
$a_z$	$[m\ s^{-2}]$	složka vektoru $\mathbf{a}$
$\mathbf{B}$	$[Ns\ m^{-1}]$	matice tlumení
$\mathbf{B}_{add}$	$[Ns\ m^{-1}]$	přídavné tlumení
$\mathbf{c}$	$[m\ s^{-1}]$	vektor rychlosti
$\mathbf{c}_n$	$[m\ s^{-1}]$	vektor normálové rychlosti
$\mathbf{D}$	$[Pa]$	matice
$\mathbf{f}$	$[N]$	vnější síly
$\mathbf{f}_b$	$[N]$	tlumící síla
$f_{bx}$	$[N]$	složka vektoru $\mathbf{f}_b$
$f_{by}$	$[N]$	složka vektoru $\mathbf{f}_b$
$f_{bz}$	$[N]$	složka vektoru $\mathbf{f}_b$
$\mathbf{f}_m$	$[N]$	síla urychlující tekutinu
$f_{mx}$	$[N]$	složka vektoru $\mathbf{f}_m$
$f_{my}$	$[N]$	složka vektoru $\mathbf{f}_m$
$f_{mz}$	$[N]$	složka vektoru $\mathbf{f}_m$
$H$	$[m]$	výška nádoby
$\mathbf{K}$	$[N\ m^{-1}]$	matice tuhosti
$k_m$		tuhost sítě
$L$	$[m]$	celková délka prutu
$\mathbf{M}$	$[kg]$	matice hmotnosti
$\mathbf{M}_{add}$	$[kg]$	přídavná hmotnost
$\mathbf{n}$		normálový vektor
$p$	$[Pa]$	tlak
$R_1$	$[m]$	poloměr prutu
$R_2$	$[m]$	poloměr nádoby
$S$	$[m^2]$	plocha
$t$	$[s]$	čas
$t_s$	$[m]$	tloušťka stěny prutu
$\mathbf{u}$	$[m]$	posunutí
$\dot{\mathbf{u}}$	$[m\ s^{-1}]$	rychlost
$\ddot{\mathbf{u}}$	$[m\ s^{-2}]$	zrychlení
$u_e$	$[m]$	amplituda kmitání
$\mathbf{u}_m$	$[m]$	posunutí vztažné soustavy
$\dot{\mathbf{u}}_m$	$[m]$	rychlost vztažné soustavy
$v_e$	$[m\ s^{-1}]$	volená skalární rychlost
$\mathbf{v}$	$[m\ s^{-1}]$	vektor rychlost pohybu hranice

## POUŽITÉ OZNAČENÍ

$v_x$	$[m s^{-1}]$	složka vektoru $\mathbf{v}$
$v_y$	$[m s^{-1}]$	složka vektoru $\mathbf{v}$
$v_z$	$[m s^{-1}]$	složka vektoru $\mathbf{v}$
$\hat{\mathbf{w}}$		vektor obsahující složky vlastního vektoru

## Jiná označení

$\gamma$	hranice oblasti tekutiny přiléhající k tělesu
$\Gamma$	hranice oblasti tekutiny nepřiléhající k tělesu
$a$	skalár
$\mathbf{a}$	vektor
$\mathbf{A}$	matice
$\cdot$	skalární součin vektorů
$\nabla$	gradient
$\nabla \cdot$	divergence
$\nabla^2$	Laplaceův operátor
$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$	derivace libovolné veličiny ve směru $\mathbf{n}$

# Literatura

- [1] *ANSYS CFX, Release 12.1, Documentation*, [PDF manual]. Canonsburg (PA), ANSYS Inc., 2009
- [2] Au-Yang, M. K. Response of fluid-elastically coupled coaxial cylindrical shells to external flow, *Journal of Fluids Engineering* 1977, Volume 99, Issue 2, s. 319–324
- [3] Bao, W., Wang, X., Bathe, K. J., On the Inf-sup condition of mixed finite element formulations for acoustic fluids, *Mathematical models and methods in applied science*, 2001, Vol. 11, No. 5, s. 883–901
- [4] Bathe, K.J., Zhang, H. Finite element developments for general fluid flows with structural interactions, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, Vol. 60, Issue 1, s. 213–232
- [5] Cho, J.R., Song, J.M. Assessment of Classical Numerical Models for the Separate Fluid- Structure Modal Analysis, *Journal of Sound and Vibration*, February 2001, Vol. 239, Issue 5, s. 995–1012.
- [6] Codina, R., et al. The Fixed-Mesh ALE approach for the numerical approximation of flows in moving domains, *Journal of Computational Physics*, March 2009, Volume 228, Issue 5, s. 1591–1611
- [7] Conca, C., Osses, A., Planchard, J. Added Mass and Damping in Fluid-Structure Interaction, *Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 15 July 1997, Vol. 146, Issues 3–4, s. 387–405
- [8] Donea, J., Huerta, A., Ponthot, J. P. Arbitrary Lagrangian Eulerian methods, In *Encyclopedia of Computational Mechanics*, Volume 1: Wiley, 2004, Chapter 14, ISBN: 0-470-84699-2.
- [9] Fritz, R.J. *Effect of Liquids on the Dynamic Motions of Immersed Solids*, Journal of Engineering for Industry, Trans. Of the ASME, Feb. 1972, s. 167–173
- [10] Horáček, J., Kruntcheva, M. Finite element modelling of the damping of cylindrical shells vibrating in contact with an annular fluid region, *Journal of Sound and Vibration*, 1997, Vol. 203, No. 4, s. 723–727
- [11] Chlud, M. *Dynamické vlastnosti rotoru kmitajícího v tekutině*, 2010, 56 s. Diplomová práce na Vysokm učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Vedoucí diplomové práce prof. Ing. Eduard Malenovský, DrSc.
- [12] Jeong, K.H. Natural Frequencies and Mode Shapes of two Coaxial Cylindrical Shells Coupled With Bounded Fluid, *Journal of Sound and Vibration*, 1998, Vol. 215, No. 1, s. 105–124.
- [13] Kasahara, M. *An Analysis of Fluid Structure Coupled Vibration Considering Modal Added Mass*, C? 03875024 60 571 743 748 1994-03-25
- [14] Liang, Q.W., et al., Numerical simulation of fluid added mass effect on a francis turbine runner, *Computers & Fluids*, 2007, Vol. 36, s. 1106–1118

## LITERATURA

- [15] van Loon, R., et al. Comparison of various fluid–structure interaction methods for deformable bodies, *Comput Struct*, 2007, Vol. 85, No. 11–14, s. 833–843
- [16] Malenovský, E., et al. New approach to the numerical analysis of the swirl water turbine and experimental verification, In *Proceedings of The 8th IFToMM Rotordynamics 2010*, Seoul, Korea, 2010, s. 502–508
- [17] Malenovský, E., Pochylý, F. New approach to the analysis of dynamic behavior of rotor dynamic systems in hydraulic machines , In *Proceedings of the X. International Conference on the Theory of Machines and Mechanisms*, Liberec, September 2008
- [18] Matthies, H., Steindorf, J. Partitioned strong coupling algorithms for fluid-structure interaction, *Computers and Structures*, May 2003, Volume 81, Issues 8–11, s. 805–812
- [19] Novotný, J., Horáček, J., Damašek, A. Numerical Solution of Fluid-Structure Interaction using Finite Element Method , In *Proceedings of the Engineering aero-hydroelasticity*, Prague, August 30-September 3 1999, s. 316–321
- [20] Païdoussis, M.P., Misra, A.K. Chan, S.P. Dynamics and stability of coaxial cylindrical shells conveying viscous fluid. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 52, 1985, s. 389–396
- [21] Paidoussis, M. P. *Fluid-Structure Interactions*, Volume 2 Academic Press, 1 edition, 2004, 1040 s. ISBN 0-12-544361-7
- [22] Pohanka, L., Malenovský, E. Added mass and damping of incompressible viscous fluid, In *Proceedings of the 17th International Conference Engineering Mechanics 2011, Svatka Czech Republic 9–12 May 2011* , s. 471–474
- [23] Pochylý, F., Malenovský, E. New Mathematical and Computational Model of Fluid-Structure Interaction using FEM , In *Proceedings of the 9th International Conference on Flow Inducted Vibration, Prague, 2008*
- [24] Sigrist, J.F., Broc, D., Laine, Ch. Modal analysis of a nuclear reactor with fluid with fluid structure interaction: added mass and added stiffness effects, In *Proceedings of the 18. International conference on Structural mechanics in reactor technology (SMiRT 18) Beijing, China, August 7–12, 2005*, s. 3645–3656
- [25] Souli, M., Benson, J. D. *Arbitrary Lagrangian Eulerian and Fluid-Structure Interaction: Numerical Simulation*, Iste and Wiley, 2010, 320 s., ISBN 978-1-84821-131-5
- [26] Wang, X., Bathe, K.J. Displacement/pressure based mixed finite element formulations for acoustic fluid-structure interaction problems, *International journal for numerical methods in engineering*, 1997, Vol. 40, s. 2001–2017
- [27] Wang, X. *On Mixed Finite Element Formulation for Fluid-Structure Interactions* , PhD Thesis Massachusetts Institute of Technology, Department of Ocean Engineering, 1995
- [28] Zienkiewicz, O. C., Newton, R. E. *Coupled vibration of a structure submerged in a compressible fluid* , In *Proc. Int. Symp. on Finite Element Techniques*, Stuttgart, 1969, s. 1–15.

## Seznam publikovaných prací autora

MALENOVSKÝ, E.; POCHYLÝ, F.; POHANKA, L.; CHLUD, M.:  
USING THE DYNAMIC COMPLIANCE METHOD FOR MODAL ANALYSIS AND  
STEADY STATE VIBRATION IN THE FLUID-STRUCTURE INTERACTION  
IFTToMM 2011, Guanajuato  
článek ve sborníku  
akce: The 13th World Congress in Mechanism and Machine Science, Guanajuato, México,  
19–25 June, 2011

POHANKA, L.; MALENOVSKÝ, E.:  
ADDED MASS AND DAMPING OF INCOMPRESSIBLE VISCOUS FLUID  
Engineering Mechanics 2011, s. 471–474, ISBN 978-80-87012-33-8, Svratka  
článek ve sborníku  
akce: 17th International Conference Engineering Mechanics 2011, Svratka Czech Republic,  
May 9–2 2011

MALENOVSKÝ, E.; POCHYLÝ, F.; POHANKA, L.; CHLUD, M.:  
APPLICATION OF THE DYNAMIC COMPLIANCE METHOD FOR FLUID STRUCTURE  
INTERACTION  
COMPUTERS & FLUIDS, Vol.44, (2011), No.1, pp.143-152, ISSN 0045–7930  
článek v časopise

MALENOVSKÝ, E.; POCHYLÝ, F.; RUDOLF, P.; POHANKA, L.; CHLUD, M.:  
NEW APPROACH TO THE NUMERICAL ANALYSIS OF THE SWIRL WATER TUR-  
BINE AND EXPERIMENTAL VERIFICATION  
IFTToMM Rotordynamics 2010, p.p 502-508, ISBN 978-89-5708-187-7 (2010)  
článek ve sborníku  
akce: The 8th IFTToMM International Conference on Rotor Dynamics, Soul - Korea, Sep-  
tember 12–15 2010

POHANKA, L.:  
SIMULATION OF AN ELASTIC STRUCTURES VIBRATING IN FLUID  
ENGINEERING MECHANICS 2009, ISBN 978-80-86246-35-2, (2009)  
článek ve sborníku  
akce: Engineering Mechanics 2009, Svratka, 11.05.2009–14.05.2009

MALENOVSKÝ, E.; POCHYLÝ, F.; POHANKA, L.; NEW APPROACH TO THE ANA-  
LYSIS OF THE DYNAMICS BEHAVIOR OF A FLUID STRUCTURE INTERACTION  
IUTAM Symposium 2009, p.p. 78–87, ISBN 987-94-007-0019-2  
článek ve sborníku  
akce: IUTAM Symposium on Emerging Trends in Rotor Dynamics, New Delphi – India,  
March 23–26, 2009

POHANKA, L.; POCHYLÝ, F.; MALENOVSKÝ, E.:  
ASSESSMENT OF NEW APPROACH TO ANALYSIS OF DYNAMIC BEHAVIOUR  
OF ELASTIC BODY IMMERSSED IN INCOMPRESSIBLE FLUID

## LITERATURA

Computational Mechanics, ISBN 978-80-7043-824-4, (2009), Západočeská univerzita v Plzni

abstrakt

akce: Výpočtová mechanika 2009, Hrad Nečtiny, 09.11.2009–11.11.2009

POHANKA,L.; MALENOVSKÝ,E.:

ANALÝZA DYNAMICKÝCH VLASTNOSTÍ VÁLCOVÝCH TĚSNÍCÍCH SPÁR

Sborník Konference diplomových prací 2007, ISBN 978-80-214-3406-6, (2007), VUT Brno

článek ve sborníku

akce: Konference diplomových prací 2007, Ústav konstruování, Fakulta strojního inženýrství, VUT v Brně, 05.06.2007–06.06.2007

# Životopis autora

## Osobní údaje

Jméno	Lukáš Pohanka
Národnost	česká
Narozen	18.4.1983 v Novém městě na Moravě

## Dosažené vzdělání

2007–dosud	doktorské studium: FSI VUT Brno, obor Inženýrská Mechanika  <i>Téma disertační práce:</i> Vývoj nových typů okrajových podmínek pro interakce těles s tekutinou a jejich implementace do stávajících výpočtových programů
2002–2007	magisterské studium: FSI VUT Brno, obor Aplikovaná Mechanika  <i>Téma diplomové práce:</i> Analýza dynamických vlastností válcových těsnících spár
1998–2002	SPŠ Strojnická a VOŠ Technická Sokolská 1, Brno, obor Všeobecné strojírenství

## Pracovní zkušenosti

-

## Školení a kurzy

2010	Spisová Služba pořadatel: MěÚ Tišnov
2009	CzechPOINT pořadatel: MěÚ Velké Meziříčí

## Řešené projekty

2011	Projekt specifického výzkumu VUT - Problémy pevnosti a dynamiky moderních materiálů a konstrukcí řešitel
2010	Projekt 556/2010 FRVŠ - Rozšíření výuky výpočtového modelování problémů mechaniky těles o problémy interakce těles a tekutin. Hlavní řešitel
2009	Projekt 1436/2009 FRVŠ - Inovace předmětů Nelineární mechanika a Počítačové metody mechaniky- implementace experimentální částí do cvičení Hlavní řešitel

## Abstrakt

V této práci je popsán nový přístup k výpočtovému modelování dynamických vlastností elastických těles nacházejících se v nestlačitelné viskózní neproudící tekutině. Výpočet je založen na určení konstantních přídatných účinků (přídatná hmotnost a přídatné tlumení), které jsou vloženy do modelu tělesa a nahrazují působení tekutiny. Je při tom využito běžných komerčních výpočtových programů. Jeho podstatou je stanovení dvou tlakových polí v tekutině. Jedno pro případ pohybu tělesa jednotkovým zrychlením a druhé pro pohyb jednotkovou rychlostí. Ze silového působení těchto polí na těleso jsou následně určeny přídatné účinky. V praxi se ovšem ukázalo, že pro určování přídatného tlumení se bude nutné odchytil od předpokladů lineárního proudění a použít model nelineární (Navier-Stokesova rovnice ve formě ALE). Pak je vypočtené přídatné tlumení platné pouze pro případ kmitání s předem zvolenou amplitudou.

## Summary

New approach for computational modeling of the dynamic behavior of elastic body immersed in incompressible viscous stagnant fluid is described in this work. It is based on determination of added effects (added mass and added damping). These effects are inserted into computational model and they replace influence of the fluid. Commonly used commercial computational software may be used. Approach is based on assumption appropriate for the linear flow. Two pressure fields are determined. One for movement of the unit acceleration of the fluid boundary and the second for unit velocity. Nonlinear model (Navier-Stokes equation in ALE form) had to be used for determination of the added damping, hence results are valid only for pre-selected amplitude of vibration.

POHANKA, L. *Vývoj nových typů okrajových podmínek pro interakci těles s tekutinami a jejich implementace do komerčních výpočtových systémů*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2012. 126 s. Školitel prof. Ing. Eduard Malenovský, DrSc.