

VĚDECKÉ SPISY VYSOKÉHO UČENÍ TECHNICKÉHO V BRNĚ

*Edice Habilitační a inaugurační spisy, sv. 437*

*ISSN 1213-418X*

**Miroslav Vořechovský**

**SPOLEHLIVOST A VLIV VELIKOSTI  
KVAZIKŘEHKÝCH KOMPOZITŮ**

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta stavební

Ústav stavební mechaniky

**doc. Ing. Miroslav Vořechovský, Ph.D.**

**SPOLEHLIVOST A VLIV VELIKOSTI  
KVAZIKŘEHKÝCH KOMPOZITŮ**

RELIABILITY AND SIZE EFFECT  
OF QUASIBRITTLE COMPOSITES

TEZE PŘEDNAŠKY K PROFESORSKÉMU JMENOVACÍMU ŘÍZENÍ  
A OBORU KONSTRUKCE A DOPRAVNÍ STAVBY



BRNO 2012

## KLÍČOVÁ SLOVA

*pravděpodobnost poruchy, spolehlivost, statistická analýza, citlivostní analýza, návrh experimentů, adaptivní vzorkování, simulace Monte Carlo, Latin Hypercube Sampling, náhodná pole, teorie extrémních hodnot, statistická závislost, kombinatorická optimalizace, simulované žíhání, stochastická metoda konečných prvků*

*vliv velikosti (měřítko), kvazikřehké konstrukce, beton, textilní beton, mnohovláknité svazky, modely svazku vláken, nelineární lomová mechanika, kohezivní trhлина, poškození, Weibullova teorie, charakteristická délka, adaptivita sítí konečných prvků, interakce škálovacích délek*

## KEY WORDS

*failure probability, reliability, statistical analysis, sensitivity analysis, design of experiments, adaptive sampling, Monte Carlo simulation, Latin Hypercube Sampling, random fields, theory of extreme values, statistical dependence, combinatorial optimization, simulated annealing, stochastic finite element method*

*size effect (scale), quasibrittle structures, concrete, textile reinforced concrete, multi-filament yarns, fiber bundle models, nonlinear fracture mechanics, cohesive crack, damage, Weibull theory, characteristic length, adaptive finite element method, length scales interaction*

© Miroslav Vořechovský, 2012

ISBN 978-80-214-4643-4

ISSN 1213-418X

Typeset by L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub>

# OBSAH

<b>PŘEDSTAVENÍ AUTORA</b>	<b>4</b>
<b>1 ÚVOD</b>	<b>6</b>
<b>2 CÍLE A STRUKTURA TEZÍ</b>	<b>7</b>
<b>3 SIMULACE NÁHODNÝCH VELIČIN A VEKTORŮ</b>	<b>8</b>
3.1 Úvod . . . . .	8
3.2 LHS: vzorkování a statistická korelace . . . . .	8
3.3 Stochastická optimalizace korelace metodou simulovaného žíhání . . . . .	9
3.4 Chyba korelace při náhodném pořadí vzorků . . . . .	10
3.5 Dolní meze chyby korelace při malých počtech simulací . . . . .	11
3.6 Metoda postupného přidávání simulací v LHS . . . . .	14
<b>4 SIMULACE NÁHODNÝCH POLÍ</b>	<b>15</b>
4.1 Úvod . . . . .	15
4.2 Nová metoda pro simulaci vzájemně korelovaných náhodných polí . . . . .	16
<b>5 TEXTILNÍ BETON A VÝZTUŽNÉ MNOHOVLÁKNITÉ SVAZKY</b>	<b>18</b>
5.1 Zavedení délkového měřítka do Weibullový teorie poškození . . . . .	19
5.2 Identifikace efektivní délky výztužného svazku . . . . .	22
<b>6 INTERAKCE ENERGETICKÉHO A STATISTICKÉHO VLIVU VELIKOSTI PŘI KVAZIKŘEHKÉM PORUŠENÍ</b>	<b>23</b>
6.1 Případová studie tažených betonových vzorků tvaru psí kosti . . . . .	23
6.2 Analytický vztah pro statisticko-energetický vliv velikosti a jeho využití . . . . .	26
6.3 Pravděpodobnostní metoda konečných prvků s adaptivitou sítě . . . . .	28
<b>7 SEKVENČNĚ LINEÁRNÍ METODY APLIKOVANÉ NA MŘÍŽKOVÉ A ČÁSTICOVÉ MODELY</b>	<b>29</b>
<b>8 PROGRAMOVÝ SYSTÉM FReET</b>	<b>31</b>
<b>9 Python PRO VĚDECKOTECHNICKÉ VÝPOČTY: KNIHOVNA SPIRRID</b>	<b>32</b>
<b>10 ZÁVĚRY</b>	<b>33</b>
<b>11 VÝSLEDKY PŘI INDIVIDUÁLNÍM VEDENÍ STUDENTŮ</b>	<b>37</b>
<b>12 KONCEPCE DALŠÍ VĚDECKÉ A PEDAGOGICKÉ ČINNOSTI</b>	<b>38</b>
<b>Summary in English</b>	<b>39</b>

# PŘEDSTAVENÍ AUTORA

**Osobní údaje** Miroslav Vořechovský  
Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební  
Vysoké učení technické v Brně  
Veveří 95, 602 00 Brno  
Tel.: 541 147 370, Fax.: 541 240 994  
E- mail: Vorechovsky.M@fce.vutbr.cz  
Web: <http://www.fce.vutbr.cz/STM/vorechovsky.m>  
Narozen 7. února 1977 v Brně  
ženatý (Dita), dvě děti (Martin \*2008, Hana \*2011)



## Vzdělání

- 06/2000 „Ing.“ Fakulta stavební VUT v Brně, obor Konstrukce a dopravní stavby. Diplomová práce: „K problematice výpočtu spolehlivosti u nelineárních úloh mechaniky kontinua“
- 09/2004 „Ph.D.“, Fakulta stavební VUT v Brně, obor Konstrukce a dopravní stavby, částečně RWTH Aachen, Německo a Northwestern University, USA. Doktorská dizertační práce v angličtině: „Stochastic Fracture Mechanics and Size Effect“
- 06/2007 „doc.“, Fakulta stavební VUT v Brně, obor Konstrukce a dopravní stavby. Habilitační práce v angličtině: „Stochastic Computational mechanics of Quasibrittle Structures“

## Ocenění, uznání a stipendia

► 6/2000: Cena rektora, Uznání děkana za studijní výsledky, Uznání děkana za diplomovou práci, VUT v Brně ► 01/2001: Doktorské stipendium Hlávkovy nadace, Praha ► 05/2001: Electricité de France, Conference Stipend of Excellence, FraMCoS, Paříž ► 04/2002: Cena Josefa Hlávky, Hlávkova nadace, Praha ► 05/2002: Cestovní stipendium Hlávkovy nadace, Scotland, Dundee ► 9/2002–6/2003: stipendium *Preciosa* ► 09/2002: Cena za vynikající článek, 4<sup>th</sup> International Ph.D. Symposium in Civil Engineering, Mnichov, Německo ► 05/2003: M.I.T. Young Researcher Fellowship (award), Boston, USA ► 06/2003: *Cerra award*, Int. Civil Engineering Risk and Reliability Assoc., San Francisco, USA ► 09/2003–03/2004: Fulbrightovo doktorské stipendium pro studia na Northwestern University, Evanston, USA ► 09/2004: Cena rektora, VUT v Brně ► 02/2005: Trimo Research Award 2005 za dizertační práci, Slovinsko ► 2007: Cena inženýrské akademie ČR za nejlepší článek v časopise Inženýrská mechanika v roce 2006 ► 2008: vítěz univerzitní soutěže „Top 10 Excellence VUT 2007“ v kategorii publikační, VUT v Brně ► 2012: šesté místo v univerzitní soutěži „Top 10 Excellence VUT 2010“ v kategorii publikační, VUT v Brně

## Výzkumné zaměření

Nelineární lomová mechanika se zaměřením na stochastické aspekty. Vlivy velikosti/měřítko (rozměrový efekt) konstrukcí na pevnost a jiné charakteristiky. Chování vláken, svazků a kompozitů vztužených vláknou. Pokročilé metody spolehlivostního inženýrství, prostředky matematické statistiky (náhodné veličiny, náhodná pole a procesy, teorie extrémních hodnot) ve spojení s metodami nelineární lomové mechaniky (studium chování kvazikřehkých konstrukcí/materiálů). Metody stochastické optimalizace, bezpečnost a spolehlivost konstrukcí, simulační metody typu Monte Carlo, genetické algoritmy. Programování a vývoj softwaru.

## Pedagogická činnost

Vedení přednášek i cvičení: ► BD01 Základy stavební mechaniky, ► BD02 Pružnost a pevnost (anglicky i česky) ► 0D7 a 6D0 Nelineární mechanika ► D31 Reliability of Structures (anglicky) ► 5D5 Spolehlivost stav. konstrukcí ► BD52, BD53, CD51, CD55 a 5D4 Vybrané statě ze stav. mechaniky I, II, (K) a (K,S) ► CD04 a ZD51 Spolehlivost konstrukcí ► CD06 Teorie spolehlivosti ► CD57 Spolehlivost a teorie porušování materiálů ► CD59 Teorie spolehlivosti stavebních materiálů

Vedení cvičení: ► 0D1 Stavební mechanika I ► 0D2 Pružnost a plasticita ► 0D3 Statika stavebních konstrukcí 1

Individuální vedení studentů: ► 3 obhájené bakalářské práce ► 4 obhájené diplomové práce ► 2 obhájené dokt. dizertační práce (oba absolventi ihned našli uplatnění na VŠ), aktuálně studují dva doktorandi

Pedagogická činnost v zahraničí: ► Northwestern University, USA ► RWTH Aachen (Německo – E/S) ► TU Dresden (Německo – E/S) ► Koszalin (Polsko – E/S) ► Alicante (Španělsko – E/S)

## Výzkumné projekty

Zodpovědný řešitel, klíčová osoba nebo vedoucí týmu ► 2004–2007: MŠMT Clutch 1K04110 „Statistické aspekty vlivu velikosti konstrukcí“ ► 2006–2008: GAČR 103/06/P086 „Probabilistic nonlinear finite element method with h-adaptivity“ (hodnoceno jako vynikající) ► 2009–2011: GAAVČR KJB2017209 02 „Rozvoj numerických metod analýzy problémů stochastické výpočtové mechaniky“ (hodnoceno jako vynikající) ► 2009–2012: GAČR GD103/09/H085 „Moderní kompozitní konstrukce“ (hlavní řešitel: prof. Štěpánek) ► 2010–2012: Mezinárodní GAČR P105/10/J028 „Vývoj a implementace výpočtové platformy pro simulaci kvazi-duktilních kompozitů kombinujících krátká vlákna se strukturovanou průběžnou výztuží“ (s RWTH Aachen) ► 2010–2012 Mezinárodní MŠMT Kontakt ME10030: „StruRel - Spolehlivost konstrukcí s použitím statistické mechaniky“ (Northwestern University, USA) Projekty Typu FRVŠ: ► FRVŠ 2164/2007/A/a (kapitálový projekt pro zřízení laboratoře) ► FRVŠ G1 801/2008 ► FRVŠ G1 2378/2010 ► FRVŠ G1 1089/2012 Projekty Specifického výzkumu: ► FAST-S-11-56 (2011) ► FAST-S-12-5 (2012)

Člen řešitelského týmu národní projekty 18, mezinár. nebo zahraniční projekty: 6, projekty specifického výzkumu: 4.

## Členství v organizacích, pořádání konferencí

► od 09/2000: člen mezinárodní společnosti pro lomovou mechaniku betonu FRAMCOS ► od 01/2004: člen ASCE (Americká společnost stavebních inženýrů) ► od 02/2005: člen České společnosti pro mechaniku ► 1997–1999: člen studentské komory Akademického senátu FAST VUT (za obor Konstrukce a dopravní stavby) ► 09/2000: člen organizačního výboru: Workshop 3RE, VUT Brno a Weimar Uni, Germany ► 06/2005: člen organizačního výboru: 2<sup>nd</sup> International symposium Nontraditional cement & concrete, VUT v Brně ► 06/2012: předseda a organizátor mezinárodní konference REC2012 – The fifth conference on Reliable Engineering Computing, Brno

## Aktivní mezinárodní spolupráce podpořená společnými výzkumnými projekty

od roku 2003 Prof. Z. P. Bažant Northwestern University, Evanston, Illinois, USA: stochastická mechanika kvazikřehkých materiálů

od roku 2003 Dr. R. Chudoba, Technical University of Aachen (RWTH Aachen), Německo: stochastická lomová mechanika textilního betonu, počítačová mechanika, vývoj software

od roku 2010 Dr. Jialiang Le, University of Minnesota, Minneapolis, USA: vliv velikosti/měřítko kvazikřehkých materiálů

## Výzkumné pobyty v zahraničí (celkem cca 4 roky)

07/2001–08/2001 Výmar, Německo – letní škola „Advanced Studies in Structural Engineering and CAE“, 9<sup>th</sup> European Summer Academy 2001

08/2001–09/2001 Záhřeb, Chorvatsko, společnost *Dalekovod* – professional 6-week training IAESTE

2003–2012 RWTH Aachen, Cáchy, Německo – hostující vědec pozvaný na vývoj teorie stochastické pevnosti textilního betonu. Mnoho pobytů přesahujících délkou vždy dva měsíce, v součtu asi tři roky

2003–2012 Northwestern University, Evanston, IL, USA – hostující vědec pozvaný ke spolupráci s prof. Z.P. Bažantem, 4× vždy na 1 měsíc

07/2003–08/2003 University of Philadelphia, USA – Fulbright preacademic training

08/2003–04/2004 Northwestern University, Evanston, IL, USA – hostující vědec podporovaný Fulbrightovým stipendiem včetně prodloužení pobytu z prostředků Northwestern University

## Publikační činnost

Články v časopise rozděleno do skupin podle Impakt faktoru časopisu (IF), celkem 22 článků:  
IF > 2,0: 4 články  
IF > 1,0: 10 článků  
IF > 0,5: 2 články  
bez IF: 6 článků

Kapitoly v knize: 2

Příspěvky ve sbornících konferencí: zahraničí 100, ČR a Slovensko 56

Výzkumné zprávy, skripta: zprávy 9×, skripta 1×

Citační ohlas: *H-index* podle ISI WoS a Scopus: 7, podle Google Scholar (GS): 12. Počet citací podle GS: 471.

# 1 ÚVOD

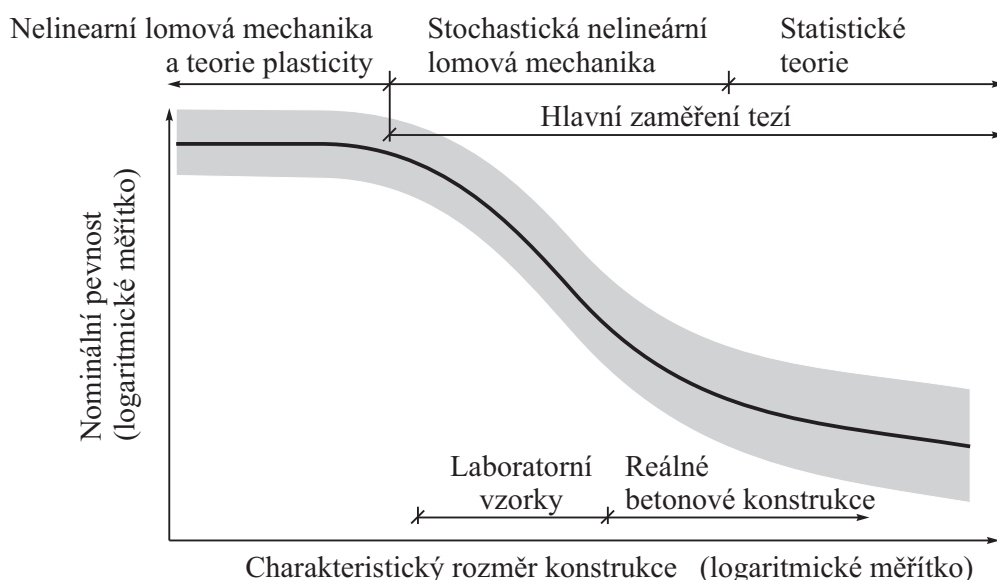
Zatížení konstrukcí, materiálové vlastnosti, geometrie a další parametry konstrukcí nebo jiných inženýrských děl často vykazují značnou variabilitu, neboť se jedná o veličiny, které jsou v podstatě nahodilé, nepřesně známé nebo variabilní. Navíc materiály, jako je například beton a podobné kompozity, lze charakterizovat jako heterogenní s neuspořádanou vnitřní strukturou. Racionální metody řešení pomocí počítačové mechaniky, které jsou založené na pravděpodobnostních postupech a metodách matematické statistiky, jsou proto předmětem zájmu výzkumu i praxe několik posledních desetiletí.

Pro inženýrskou praxi jsou zapotřebí vhodné metody pro modelování propagace nejistot vstupních parametrů na cílové výstupní proměnné, které charakterizují chování konstrukce. Tyto metody je navíc často zapotřebí integrovat do nejrozšířenějších výpočetních postupů, jako je např. metoda konečných prvků, tedy metoda, která je dnes široce akceptována v inženýrské komunitě, a to jak ve výzkumu, tak v praxi a v normativních předpisech.

Středem zájmu výzkumu několika posledních dekád byly rovněž efektivní metody pro numerickou analýzu betonových konstrukcí a konstrukcí vyrobených z moderních kompozitů na silikátové bázi. Zde byla a částečně zůstává největším problémem materiálová nelinearita. Hlavním cílem je věrně modelovat kompletní mechanickou odezvu konstrukce, a to jak ve fázi před dosažením maximální únosnosti (často doprovázeno rozptýleným potrháním konstrukce), tak pro vrchol samotný a dále ve fázi po překonání maxima, kdy často dochází k propojování trhlinek v poškozených oblastech a lokalizaci makrotrhlin. Jedním z oborů, který se mezitím značně rozvinul a jehož nástroje byly na uvedený problém aplikován je *lomová mechanika*. V posledních letech se na trhu objevily počítačové programy založené na nelineární metodě konečných prvků, které implementují postupy jako např. metoda šířky pásu trhlin [5] apod. Tyto nástroje však obvykle zůstávají na deterministické úrovni, což není vhodné pro věrný popis jevů ve jmenovaných materiálech. Na druhou stranu, požadavky z praxe prozatím motivují zejména k efektivní implementaci jednoduchých a známých materiálových modelů, strategií řešení, metod diskretizace řešené domény a k interpretaci výsledků. Uvedená témata tak zůstávala pro výrobce komerčního softwaru prioritními. Ovšem v posledních letech se na trhu objevují výjimky, které zaběhlé preference porušují, a pokročilí výrobci programů jako např. ATENA [8] nebo DIANA [25] rozšiřují možnosti komerčního softwaru o pravděpodobnostní metody a pokročilé metody počítačové mechaniky. Dalším důležitým tématem pro stavební inženýrství je trvanlivost konstrukcí a návrh s přihlédnutím nejen ke stavu konstrukce těsně po realizaci, ale v celém jejím životním cyklu. Jedním z důležitých aspektů, který ovlivňuje právě degradaci betonových konstrukcí, je rozvoj trhliny jako útvaru, který zprostředkovává rychlejší postup agresivních činitelů způsobujících degradaci výztuže.

Významným rysem kvazikřehkých materiálů je komplexní vliv velikosti na pevnost konstrukce i na jiné charakteristiky. Vliv velikosti se projevuje výraznou závislostí nominální pevnosti konstrukce (zatížení při porušení) na charakteristické dimenzi (rozměru) konstrukce stejného tvaru, viz obr. 1.

Navíc tato nominální pevnost má jistou náhodnou proměnlivost způsobenou přirozenou variabilitou (nejistotou) parametrů konstrukce. Tato proměnlivost pevnosti je navíc různá pro konstrukce různých velikostí, což je částečně způsobeno tím, že mechanismus porušení tvarově podobných konstrukcí různých velikostí bývá jiný. Navíc i zdroje nahodilosti se mohou různit. Vliv velikosti má značný dopad na bezpečný a ekonomický návrh konstrukcí, a to zejména proto, že není podchycen běžně používanými teoriemi pro pevnost konstrukcí (např. teorie elasticity nebo plasticity). Problém je, že velké konstrukce se obvykle porušují při menší úrovni zatížení než laboratorní vzorky. Moderní racionální a ekonomický návrh konstrukce podle norem se však děje s určitou předem stanovenou pravděpodobností poruchy [48, 49], která odpovídá nevyhnutelným rizikům, kterým lidé musí v běžném životě čelit. Právě proto kombinace detailnější lomově-mechanické analýzy v kombinaci s postupy spolehlivostního inženýrství (pravděpodobnostní metody) jsou jednoznačně budoucím trendem při navrhování a posuzování stavebních konstrukcí.



Obr. 1: Ilustrace vlivu velikosti na nominální pevnost konstrukce

## 2 CÍLE A STRUKTURA TEZÍ

Název předložené práce „Spolehlivost a vliv velikosti kvazikřehkých kompozitů“ naznačuje, že zde budou diskutovány jak metody spolehlivostního inženýrství, které se převážně opírají o počet pravděpodobnosti a matematickou statistiku, tak metody používané pro studium a modelování nelineárního chování kvazikřehkých materiálů. Mezi kvazikřehké materiály používané v inženýrství se řadí především beton a podobné kompozity na silikátové bázi. Do stejné skupiny však spadají i horniny, sníh, led, houževnatá keramika apod.

Dalším materiálem s komplexním chováním, kterému autor věnoval značnou pozornost, je *textilní beton*. Jedná se o moderní kompozit, u kterého roli výztuže přebírá textilie tkaná z mnohovláknitých svazků vyrobených z uhlíkových vláken, alkalivzdorného skla, polyethylenu apod. Už jen odezva výztužného svazku na tahové zatížení je komplikovaný problém, neboť se jedná o materiál s mnoha zdroji nahodilosti a neuspořádanosti. Analýza chování celého kompozitu je pak výrazně složitější, než např. chování železobetonu.

Předložený text prezentuje výsledky dosažené při studiu a vývoji teorie nebo softwaru z obou oblastí, tedy jak pravděpodobnostních metod a jejich aplikací na inženýrské problémy, tak právě studium nelinearity a zejména metody počítačové mechaniky. Vytvořené nástroje mají sloužit k analýze konstrukcí takových velikostí, kdy hrají významnou roli jak náhodnost, neurčitost či neuspořádanost, tak i značná nelinearita pocházející z fyzikálních vlastností materiálu, viz přechodová zóna na obr. 1.

Následující dvě kapitoly 3 a 4 se zabývají čistě pravděpodobnostními metodami (zejména simulační nástroje typu Monte Carlo). Při vývoji těchto metod se objevily i čistě matematické problémy k vyřešení bez vazby na konstrukce nebo mechaniku a pro úplnost jsou představeny i některé z těchto výsledků. Rovněž je představena nová metoda pro simulaci vzájemně korelovaných náhodných polí. Tyto metody jsou používány jako nástroj v následujících kapitolách, kde se aplikují pro mechanickou analýzu reálných staveních materiálů. Další text pojednává právě o textilním betonu (kapitola 5), a to jak z pohledu experimentování, tak modelování. Následující kapitola 6 se zabývá interakcí statistických a deterministických zdrojů vlivu velikosti na pevnost konstrukce a příslušnými dopady na spolehlivost návrhu konstrukcí. Dále je krátce diskutován rozvoj počítačové platformy využívající metody konečných prvků. Tato platforma implementuje inovativní adaptivitu sítě konečných prvků řízenou rozvojem náhodně vznikajících lomových procesních zón. Jako poslední třída metod analýzy mechanické odezvy jsou zmíněny metody fyzikální diskretizace (mřížkové a částicové modely), viz kapitola 7. Text pokračuje představením dvou rozsáhlejších programových systémů, na jejichž vývoji se autor podílí (kapitoly 9 a 10). Závěry jsou shrnuty v kapitole 10.



## 3 SIMULACE NÁHODNÝCH VELIČIN A VEKTORŮ

### 3.1 Úvod

Vzorkování (generování realizací, výběru z) náhodných vektorů je důležité nejen pro statistiky, ale i pro celou řadu odborníků v různých oborech jako např. inženýrství, ekonomie, návrh experimentů nebo operační výzkum. Schopnost výběru optimálních reprezentantů z mnohazměrného prostoru je také téma při diskretizaci prostorů. Společným jmenovatelem bývá právě výpočet různých integrálů přes vícerozměrné domény. To platí také pro statistické, citlivostní a spolehlivostní analýzy. Optimální výběr vzorků se však používá také při generaci náhodných polí, kdy se často realizacemi pokrývá prostor nějakých základních náhodných veličin. Jedním z významných faktorů vzorků je schopnost vystihnout správně statistické závislosti mezi náhodnými veličinami z výběru.

Cílem statistické a spolehlivostní analýzy libovolného inženýrského problému je zejména odhad statistických parametrů výstupních proměnných a odhad pravděpodobnosti poruchy. Inženýrské problémy lze často zformulovat matematicky jako výpočtový algoritmus  $g(\mathbf{X})$  – funkce náhodného vektoru  $\mathbf{X}$  a případně dalších deterministických parametrů, kterými se dále nebudeme zabývat. Nejobecnější a doposud jedinou univerzální třídou metod je metodika Monte Carlo. Prostá metoda Monte Carlo nemůže být s úspěchem aplikována pro výpočtově náročné problémy  $g$ , neboť pro získání statisticky významných výsledků je u ní zapotřebí velké množství simulací (vzorků vektoru  $\mathbf{X}$  a následné vyčíslení  $g$ ). Řešením jsou metody redukce rozptylu (*variance-reduction techniques*), např. metoda stratifikovaného výběru reprezentantů Latin Hypercube Sampling (LHS) [21, 14, 1].

Jedná se o zvláštní verzi metody Monte Carlo, při níž jsou vzorky vybírány rovnoměrně vzhledem k pravděpodobnosti (z vrstev distribuční funkce o stejné pravděpodobnosti). Je známo, že stratifikace při výběru vzorků-representantů nikdy nezvyšuje rozptyl odhadů v porovnání s prostou metodou Monte Carlo. Naopak, ve většině případů je rozptyl odhadu nižší. Účinnost metody byla poprvé prezentována v práci [21], a to pro nekorelované veličiny ve vektoru  $\mathbf{X}$ .

Autoři publikace [15] našli způsob, jak pozměnit vzájemné pořadí vzorků tak, aby byly zredukovány absolutní hodnoty mimodiagonálních členů odhadnuté korelační matice  $\mathbf{A}$ . Jejich technika je založena na lineární transformaci normálního vektoru za pomoci Choleského transformace. Postup je prezentován ve spojení se Spearmanovým koeficientem pořadové korelace.

Autor se ve spojení s metodou LHS zabýval v minulosti třemi aspekty: zlepšení vzorkování na úrovni každé marginální veličiny, dále vývojem teorie a algoritmu pro kontrolu nad korelační strukturou vzorkovaného vektoru  $\mathbf{X}$ , aby při generování vzorků došlo k maximální shodě mezi požadovanými charakteristikami a jejich odhady ze vzorku. Rovněž se zabýval vývojem metody pro přidávání dalších simulací ke stávajícím simulacím.

### 3.2 LHS: vzorkování a statistická korelace

V metodě LHS je v prvním kroku zapotřebí pro každou veličinu zvlášť vybrat  $N_{\text{sim}}$  realizací (vzorků) dané veličiny. V druhém kroku pak lze upravit vzájemné pořadí těchto vektorů hodnot tak, aby bylo dosaženo požadovaného párování (korelací).

Zvláštností stratifikovaného výběru je to, že v prvním kroku je obor pravděpodobnosti distribuční funkce (interval 0–1) rozdělen do  $N_{\text{sim}}$  intervalů o stejné délce a z každého intervalu je vybrán právě jeden reprezentant. Intervaly všechny shodně reprezentují stejnou pravděpodobnost  $1/N_{\text{sim}}$ . Zpravidla je proveden výběr vzorku na základě střední pravděpodobnosti, tedy jakýsi medián dlíhého intervalu:

$$x_{i,j} = F_i^{-1}((j - 0.5) / N_{\text{sim}}), \quad j = 1, \dots, N_{\text{sim}}, \quad (1)$$

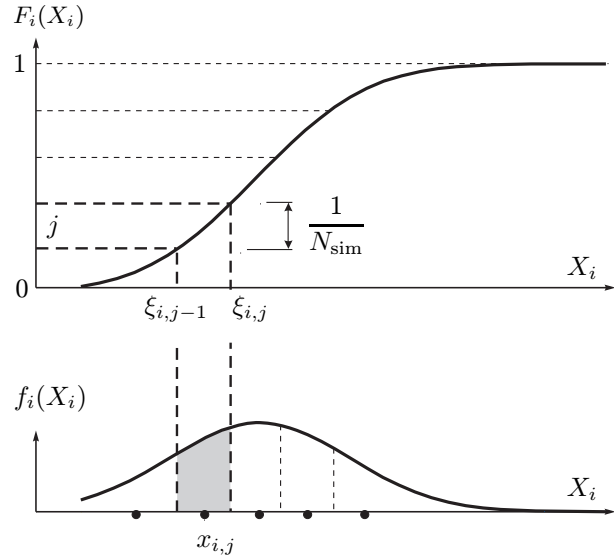
kde  $x_{i,j}$  je  $j$ -tý vzorek  $i$ -té náhodné veličiny  $X_i$  ( $i = 1, \dots, N_{\text{var}}$ ),  $F_i^{-1}$  je inverzní distribuční funkce veličiny  $X_i$ . Takový výběr lze vylepšit výběrem středních hodnot intervalů, což ukázal např. [13]:

$$x_{i,j} = N_{\text{sim}} \int_{\xi_{i,j-1}}^{\xi_{i,j}} x \cdot f_i(x) dx, \quad (2)$$

kde  $f_i$  hustota pravděpodobnosti veličiny  $X_i$  a limity integrace jsou dány vztahem:  $\xi_{i,j} = F_i^{-1}(j/N_{\text{sim}})$ .

Uvedený výběr těžišť intervalů vede na lepší reprezentaci veličiny pomocí vzorků. Např. střední hodnota odhadnutá aritmetickým průměrem vzorků je splněna přesně. Odhadnutý rozptyl je blíže požadovanému rozptylu. Jak bylo ukázáno v práci autora [34], integrál (2) lze pro mnohá rozdělení vyřešit analyticky (např. pro normální, exponenciální, Laplaceovo, logistické, Paretovo a další). V ostatních případech se čas strávený numerickým řešením při výběru reprezentantů vrátí v kvalitnějších odhadech řešeného problému  $g$ .

Vzorky vybrané oběma metodami jsou v oblasti okolo středních hodnot téměř identické a liší se zejména ve chvostech rozdělení [34]. Obecně, v obou případech, pravidelnost pokrytí oboru pravděpodobnosti zajišťuje dobrý výběr vzorků a tím i následné odhady statistik  $g$ .



Obr. 2: Vzorky jako těžiště dílčích intervalů

V okamžiku, kdy jsou vybrány vektory reprezentující všechny z  $N_{\text{var}}$  náhodných veličin (realizaci vektoru označme pro jednoduchost také  $\mathbf{X}$  a bude se jednat o matici rozměru  $N_{\text{var}} \times N_{\text{sim}}$ ), je zapotřebí uzpůsobit vzájemné pořadí – párování tak, aby odhadnutá korelační matice  $\mathbf{A}$  byla co nejbližší požadované korelační matici  $\mathbf{T}$ . Často se totiž stává, že i když je vzájemné pořadí vzorků náhodné, mezi veličinami spontánně vznikne i silný vzor závislosti (např. korelace až 0.6). Problémem náhodné korelace se autor velmi důkladně zabýval v práci [44] a problém je také zmíněn dále v textu. V některých aplikacích je navíc požadována konkrétní nejednotková korelační matice  $\mathbf{T}$ . V další kapitole je krátce představen velmi účinný algoritmus pro zavádění korelace za pomoci kombinatorické optimalizace.

### 3.3 Stochastická optimalizace korelace metodou simulovaného žhání

Zavedení požadované závislosti mezi vzorky reprezentující jednotlivé marginální náhodné veličiny vektoru lze chápat jako problém kombinatorické optimalizace [56, 34, 44, 54]. Předpokládejme totiž, že vzorky jednotlivých veličin v matici  $\mathbf{X}$  nelze změnit. Předpokládejme navíc, že dostupná informace o náhodném vektoru je omezená na marginální hustoty a požadovanou korelační matici  $\mathbf{T}$ . Vzhledem k tomu, že vzorky reprezentující jednotlivé veličiny jsou dané (viz např. výše zmíněná metoda LHS), zbývá jenom najít vhodné vzájemné pořadí těchto vzorků tak, aby bylo dosaženo co nejlepší shody mezi požadovanou korelační maticí  $\mathbf{T}$  a korelační maticí  $\mathbf{A}$  odhadnutou ze vzorku vektoru. Pro vzdálenost matic je vhodné zavést vhodnou skalární míru.

Konzervativní míru chyby v korelační matici lze definovat jako absolutní hodnotu největšího rozdílu odpovídajících si členů matic:

$$\rho_{\max} = \max_{1 \leq i \leq j \leq N_{\text{var}}} w_{i,j} |T_{i,j} - A_{i,j}| \quad (3)$$

Běžně užívanou maticovou normou je také střední kvadratická odchylka, která zohledňuje rozdíly všech korelačních koeficientů. Upravenou verzi této normy lze zavést takto (ozn. *root mean*

square error – rms):

$$\rho_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_V-1} \sum_{j=i+1}^{N_V} w_{i,j} (T_{i,j} - A_{i,j})^2}{\sum_{i=1}^{N_V-1} \sum_{j=i+1}^{N_V} w_{i,j}}} \quad (4)$$

V obou normách figurují váhy jednotlivých korelačních koeficientů, které jsou zavedeny pro případy, kdy je např. větší jistota v požadovaných korelacích podložená reálnými daty, zatímco význam jiných korelací lze potlačit. Dále uvažujme pouze jednotkové váhy, takže  $\rho_{\text{rms}}$  je odmocněným součtem čtverců chyb dělených počtem mimodiagonálních členů matice  $N_c$ , viz dále.

Normy (buďto  $\rho_{\text{max}}$  nebo  $\rho_{\text{rms}}$ ) je třeba minimalizovat. Z pohledu optimalizačního problému je vybraná norma cílovou funkcí *objective function* a proměnné jsou vztaženy k vzájemnému pořadí vzorků v matici  $\mathbf{X}$ . Jedná se tedy o problém kombinatorické optimalizace. Pro každou veličinu z celkového počtu  $N_{\text{var}}$  máme k dispozici  $N_{\text{sim}}$  hodnot (vzorků), a proto je třeba vybrat vhodné vzájemné pořadí vzorků z následujícího celkového počtu možností:

$$(N_{\text{sim}}!)^{N_{\text{var}}-1} \quad (5)$$

Projít všechny tyto možnosti a vybrat nejvhodnější, tedy pořadí s minimální chybou, není prakticky možné z důvodu vysoké komplexity. Je tedy zapotřebí vybrat nějaké suboptimální řešení, a to v reálném čase. Ukázalo se, že deterministické optimalizační algoritmy selhávají, neboť obvykle uvíznou v nějakém lokálním minimu odpovídajícím nedostatečně dobrému řešení. Proto byl pro řešení zvolen [56, 34] heuristický algoritmus založený na metodě simulovaného žíhání [22]. Jeho aplikace na uvedený problém zavádění korelace je mimořádně úspěšná. Vyvinutý optimalizovaný algoritmus má totiž podstatně lepší výkonnost než jiné doposud známé publikované a používané algoritmy, viz obr. 3.

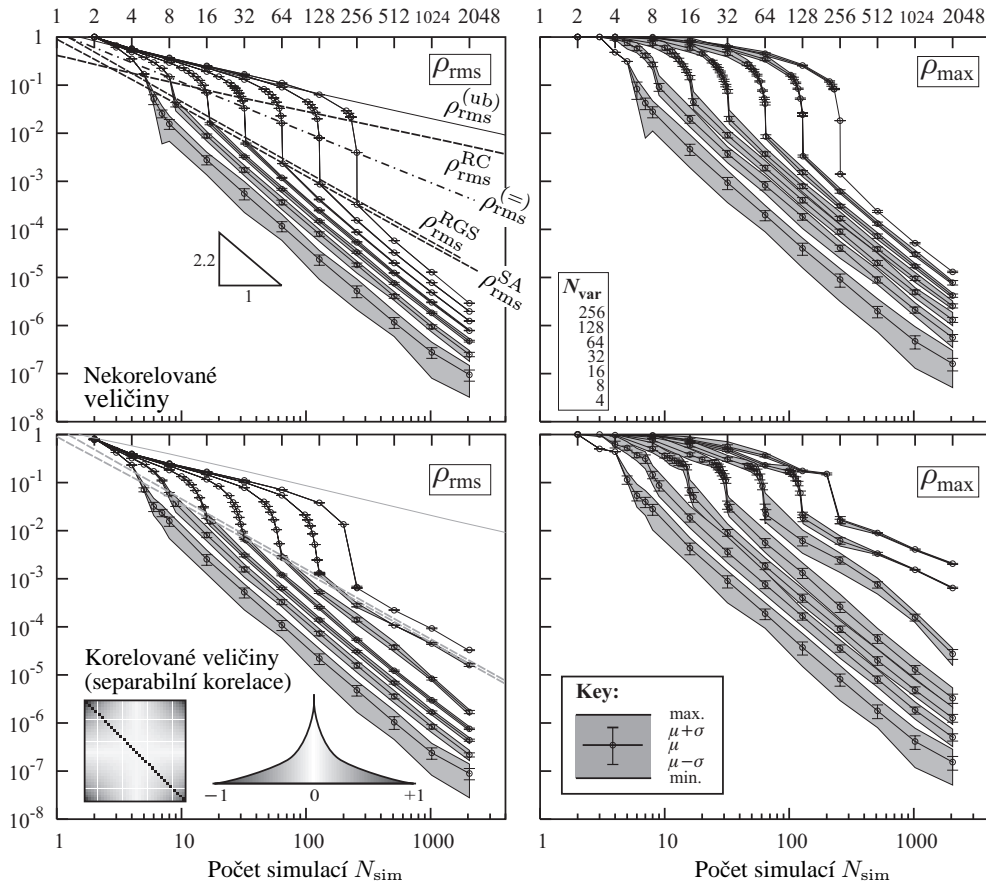
### 3.4 Chyba korelace při náhodném pořadí vzorků

Patrně nejrozšířenější metoda pro generování vzorků nezávislých náhodných vektorů v inženýrských aplikacích i ve výzkumu je prostá: pro každou veličinu je separátně vygenerováno  $N_{\text{sim}}$  realizací, např. metodou LHS. Tyto realizace jsou pak náhodně seříděny s tím, že je očekáváno, že korelační matice  $\mathbf{A}$  odhadnutá z matice  $\mathbf{X}$  sdružující uvedené vektory pro všech  $N_{\text{var}}$  veličin bude blízka jednotkové matici. Jinými slovy, je očekáváno, že náhodné „zamíchání“ vzorků (simulovaných hodnot) povede ke statistické nezávislosti mezi vektory. Zodpovězení otázky do jaké míry je předpoklad správný byl jedním z cílů práce představené v publikaci [44]. Práce se mj. zaměřuje na dvě výše definované maticové normy, tedy skalární chyby korelace  $\rho_{\text{max}}$  a  $\rho_{\text{rms}}$  a pro obě tyto normy jsou rigorózně odvozeny vztahy pro asymptotické rozdělovací funkce pro  $N_{\text{sim}} \rightarrow \infty$ . Patrně nejdůležitějším výsledkem je, že střední hodnota chyby  $\rho_{\text{rms}}$  je asymptoticky nezávislá na počtu náhodných veličin  $N_{\text{var}}$  a směrodatná odchylka této chyby je nepřímo úměrná  $N_{\text{var}}$ :

$$\lim_{N_{\text{sim}} \rightarrow \infty} \mu_{\text{rms}} = N_{\text{sim}}^{-1/2} \quad (6)$$

$$\lim_{N_{\text{sim}} \rightarrow \infty} \sigma_{\text{rms}} = N_{\text{sim}}^{-1/2} N_{\text{var}}^{-1} \quad (7)$$

Je ukázáno, že rozdělení této náhodné chyby následuje  $\chi$  (chí) rozdělení, neboť  $\rho_{\text{rms}}$  je v podstatě úměrná odmocnině ze součtu čtverců normálních náhodných veličin. Poněkud složitější je odvození rozdělení chyby, která odpovídá v absolutní hodnotě největší chybě v korelaci  $\rho_{\text{max}}$ . Zde byla uplatněna teorie extrémních hodnot a bylo odvozeno, že norma  $\rho_{\text{max}}$  konverguje ke Gumbelovu rozdělení se střední hodnotou rovněž úměrnou  $N_{\text{sim}}^{-1/2}$ . Hledá se totiž v podstatě extrém z  $N_c = \binom{N_{\text{var}}}{2} = \frac{N_{\text{var}}(N_{\text{var}}-1)}{2}$  normálně rozdělených nezávislých náhodných veličin. Zmíněný článek [44] přináší další teoretické i numerické výsledky ohledně korelačních koeficientů a korelačních matic. Po představení a

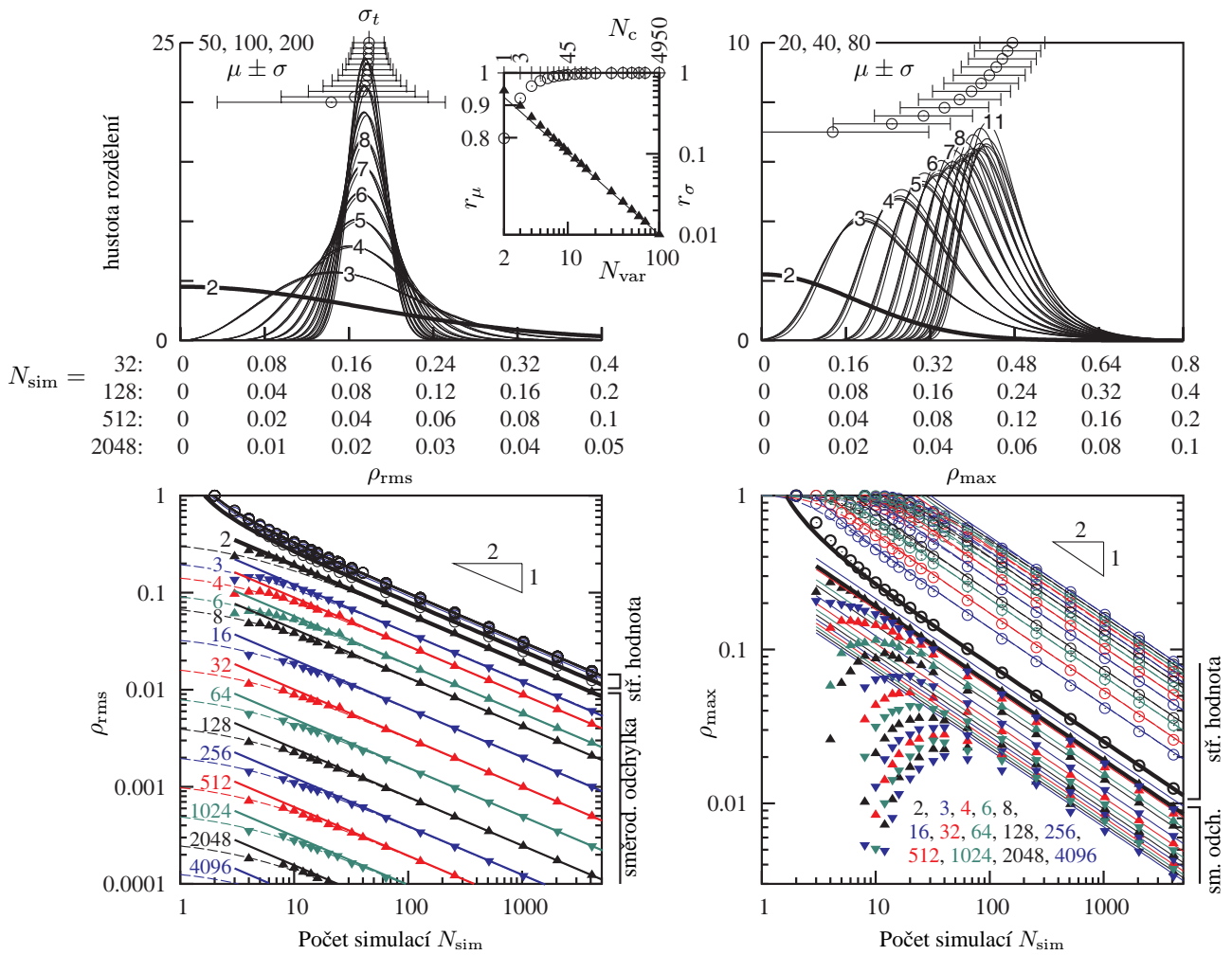


Obr. 3: Výsledky numerické studie výkonnosti navrženého algoritmu. Nahoře: nekorelované veličiny; dole: korelované veličiny. Vlevo:  $\rho_{\text{rms}}$ ; vpravo:  $\rho_{\text{max}}$ . Vlevo dole: vizualizace požadované matice (absolutní hodnoty členů  $T_{i,j}$  a rozdělovací funkce výskytu korelací v matici)

zevrubně analýze bodových odhadů Pearsonova, Spearmanova a Kendallova korelačního koeficientu jsou zformulovány obecné závěry na nejmenší možnou chybu libovolné korelace v závislosti na  $N_{\text{sim}}$ . Je odvozeno, že náhodný korelační koeficient má asymptoticky normální rozdělení a v případě náhodného vektoru s  $N_{\text{var}}$  marginálními veličinami jsou tyto veličiny přibližně nezávislé. Tyto informace pomohly při velmi přesném odhadu počtu návrhů, které vedou na splnění požadavku, aby odhadnutá korelační matice  $\mathbf{A}$  byla rovna přesně jednotkové matici. Je ukázáno, že pro jednotlivé typy korelačních koeficientů existuje značné množství takových optimálních návrhů. Problémem však je, že tyto návrhy je obecně obtížné nalézt, neboť z pohledu kombinatorické optimalizace se jedná o tzv. *np-hard* problém. Použité metody analýzy se liší pro koeficienty pořadové korelace (byl použitý klasický počet pravděpodobnosti) a pro Pearsonův koeficient korelace (diskrétní matematika a kombinatorika).

### 3.5 Dolní meze chyby korelace při malých počtech simulací

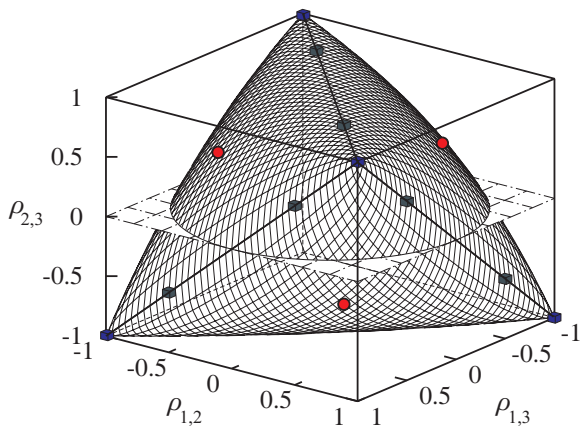
V simulacích metodou Monte Carlo jakož i v aplikacích metod *designs of experiments* je běžným požadavkem snížení počtu realizací/simulací (úrovň faktorů). Často se stává, že počet simulací  $N_{\text{sim}}$  (bodů v prostoru) je menší nebo roven počtu náhodných veličin  $N_{\text{var}}$  (dimenzí prostoru). V oboru *design of experiments* se hovoří o tzv. *supersaturated design*. Navíc, v pravděpodobnostní mechanice narůstá zájem o aplikace modelu náhodných polí pro praktické problémy. Simulace náhodných polí je pak další příklad aplikace, kde počet náhodných veličin potřebných pro expanzi náhodného pole výrazně převyšuje počet simulací, se kterými lze praktické úlohy počítat (např. v metodě stochastických konečných prvků).



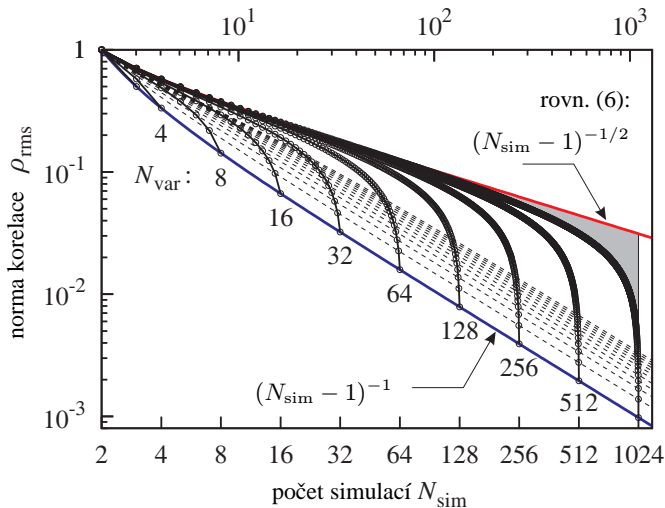
Obr. 4: Konvergence chyb korelace  $\rho_{\text{rms}}$  a  $\rho_{\text{max}}$  při náhodném třídění vzorků. Nahoře: stroboskopický vývoj rozdělovací funkce chyby pro  $N_{\text{var}} = 2, 11(1)$  a různé počty  $N_{\text{sim}}$ . Dole: porovnání numericky odhadnutých středních hodnot (prázdné kroužky) a směrodatných odchylek chyb (plné trojúhelníčky) s odvozenými analytickými vztahy.

Jak již bylo zmíněno výše, cílem je pokrýt  $N_{\text{var}}$ -rozměrný prostor co nejrovnoměrněji  $N_{\text{sim}}$  body. Rovnoměrnost pokrytí lze měřit různými způsoby a velmi rozšířené kritérium je blízkost odhadnuté korelační matice  $\mathbf{A}$  jednotkové matici. Požadavek nekorelovanosti lze totiž vnímat jako relaxovaný požadavek vzájemné nezávislosti mezi veličinami (faktory). Pro vzdálenost matice  $\mathbf{A}$  od jednotkové matice lze s výhodou využít dvou norem definovaných dříve, tedy  $\rho_{\text{max}}$  a  $\rho_{\text{rms}}$ . Při přípravě souboru bodů (generování simulací) je tedy třeba dbát na minimalizaci těchto dvou norem. Cílem zde diskutované práce prezentované v článku [45] bylo nalezení optimálních matic, které uvedené normy minimalizují, nebo obecněji metodiky výpočtu či analytických předpisů pro tyto matice. Zároveň jsou studovány vlastnosti těchto optimálních matic. Ukazuje se, že se často vyskytují symetrické Toeplitzovy matice.

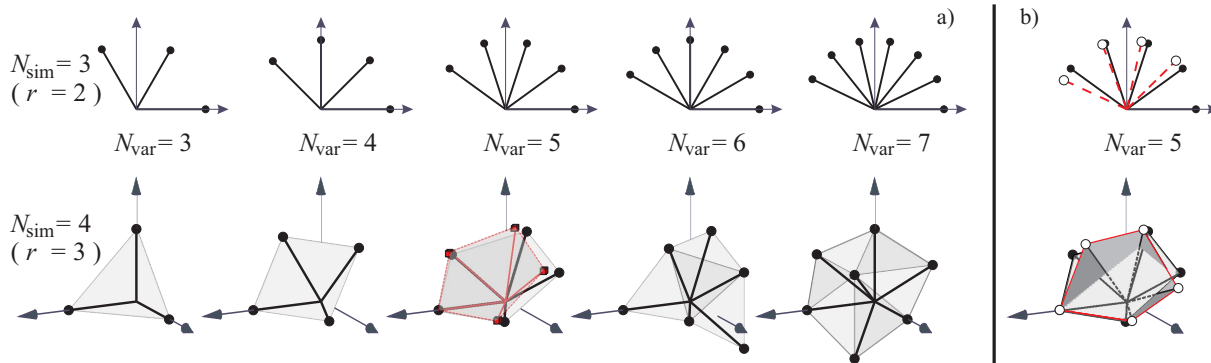
Při odvozování bylo použito spektrálního rozkladu odhadnuté korelační matice  $\mathbf{A}$  na vlastní vektory a vlastní čísla. Vzhledem k tomu, že  $N_{\text{sim}} \leq N_{\text{var}}$ , je jisté, že korelační matice bude mít některá vlastní čísla nulová (jedná se o pozitivně semidefinitní singulární symetrické matice). Je vysvětleno, že počet nulových vlastních čísel je roven nejvyšší možné hodnotě matice  $\mathbf{A}$ , tedy číslu  $r = N_{\text{sim}} - 1$ . Optimality ve smyslu normy  $\rho_{\text{rms}}$  se dosáhne, pokud jsou si nenulová vlastní čísla



Obr. 5: Hranice množiny všech tří-dimenzionálních pozitivně definitních korelačních matic (vodorovné řezy jsou elipsy). Plné krychličky vyznačují numericky dosažitelné korelační matice pro případ  $N_{\text{sim}} = N_{\text{var}} = 3$ .



Obr. 6: Dolní mez chyby korelace  $\rho_{\text{rms}}$  (matice  $\mathbf{R}$ ) dané rovnicí (8) v porovnání s numerickými výsledky. Šedá oblast reprezentuje rozpětí mezi dolní a horní mezí korelační chyby pro  $N_{\text{sim}} = 1024$ .



Obr. 7: Vizualizace optimálních singulárních korelačních matic pomocí navržené analogie k modelu tuhých tyčí. a)  $\mathbf{R}^M$  (plné kroužky). Všechna tato řešení představují rovněž matice  $\mathbf{M}$  kromě případu  $N_{\text{var}} = 5$  a  $N_{\text{sim}} = 4$  (ten je vizualizován pomocí plných čtverečků). b) Příklady optimálních matic  $\mathbf{R}$  (prázdná kolečka) v porovnání s řešením  $\mathbf{R}^M$ . Horní řada je pro:  $N_{\text{sim}} = 3$  (dimenze  $r = 2$ ). Dolní řada je pro:  $N_{\text{sim}} = 4$  (dimenze  $r = 3$ ).

matice  $\mathbf{A}$  rovna. V publikaci [45] je odvozeno, že pro dolní mez chyby platí

$$\rho_{\text{rms}} \geq \rho_{\text{rms}}(\mathbf{R}) = \sqrt{\frac{N_{\text{var}} - (N_{\text{sim}} - 1)}{(N_{\text{var}} - 1)(N_{\text{sim}} - 1)}} \quad (8)$$

Shoda mezi numericky získanými řešeními za pomoci hrubé výpočtové síly a odvozenou analytickou predikcí je patrná z obr. 6, kde prázdné kroužky získané pro jednotlivé kombinace  $N_{\text{var}}$  a  $N_{\text{sim}}$  zakrývají plnou čáru (rovnice 8). Pro optimální matice  $\mathbf{R}$  platí řada dalších vlastností, které jsou v uvedeném článku [45] rovněž osvětleny. Je také ukázáno, že řešení problému není jednoznačné a že mezi všemi maticemi  $\mathbf{R}$  minimalizujícími chybu  $\rho_{\text{rms}}$  lze nalézt ty, které mají dále nejmenší absolutní odchylku od nulové korelace, tedy minimální  $\rho_{\text{max}}$ . Takové matice jsou označeny  $\mathbf{R}^M$ . Článek ukazuje několik možností, jak tyto matice nalézt, např. pomocí iterací vlastních vektorů matice, během kterých se vnucuje známé spektrum vlastních čísel a požadavky na jednotkovou diagonálu a symetrii výsledné matice.

Velmi zajímavým aspektem, který je v článku [45] navržen a vysvětlen, je existence analogie mezi jednoduchým mechanickým modelem tyčí spojených klouby v jediném bodě a po párech

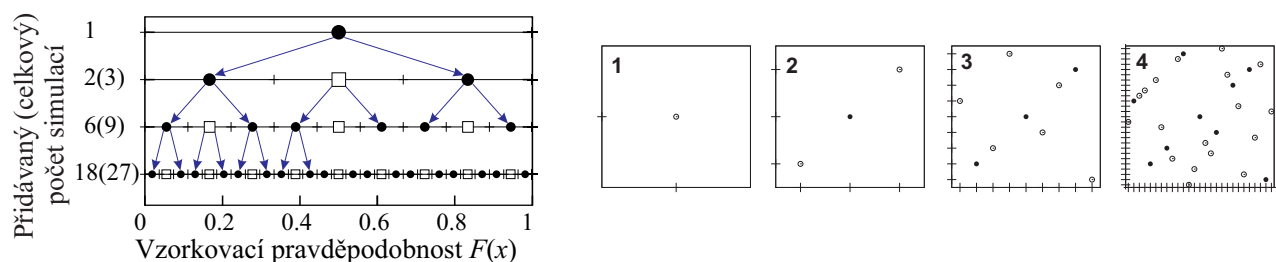
spojených rotačními pružinami a právě optimálními singulárními korelačními maticemi, viz obr. 7. Dimenze prostoru, ve kterém tyče interagují, je rovna číslu  $r$  a počet tyčí je roven počtu náhodných veličin  $N_{\text{var}}$ . Jednotková korelační matice by odpovídala situaci, kdy jsou všechny tyče navzájem kolmé. Toho však nelze dosáhnout, neboť počet tyčí je vyšší než dimenze prostoru. To způsobuje obecně nenulové napětí v pružinách. V textu je odvozeno, jak lze pomocí vybrané minimalizované chyby korelace zformulovat předpis pro potenciální energii, ze kterého lze jednoduchým derivováním získat konstitutivní zákony pro rotační pružiny. Jednoduchá dynamická simulace s modelem tyčí pak automaticky vyřeší hledané optimální korelační matice.

V příloze článku jsou číselně prezentovány optimální singulární matice pro počet veličin  $N_{\text{var}} \in (2; 9)$ , čímž je pokryta většina praktických aplikací.

### 3.6 Metoda postupného přidávání simulací v LHS

Praktickým problémem při aplikacích metody LHS na výpočtově náročné problémy  $g$  je volba počtu simulací  $N_{\text{sim}}$ . Příliš malý počet nemusí být dostačující z pohledu statistické významnosti výsledků, zatímco příliš rozsáhlý vzorek je zbytečně výpočtově drahý. Jako příklad lze uvést velmi náročné simulace za použití nelineární metody konečných prvků [51, 33], které budou dále představeny v tomto textu. Tím, že není předem známa variabilita výsledku, není možné stanovit počet simulací předem – *a priori*. Velice často se pak stává, že uživatel z opatrnosti začne raději s malým počtem simulací, aby si ověřil chování modelu, a když se ukáže, že má zájem o přesnější výsledky (obvykle), musí dosavadní práci zahodit a začít znovu. Možnost rozšířit vzorek, tedy navýšit počet simulací s tím, že doposud provedené výpočty se uplatní, je mimořádně praktická. V prosté metodě Monte Carlo tato možnost je, ale za flexibilitu při volbě  $N_{\text{sim}}$  se platí méně kvalitními výsledky v porovnání s LHS (při stejném počtu vyčíslení modelu  $g$ ). Proto autor vyvinul [59, 60] jednoduchý algoritmus přidávání vzorků do metody LHS tak, že přidání dodatečných simulací tvoří celek (sadu), který je plně ekvivalentní vzorkům LHS simulovaných v celkovém počtu naráz. Princip metody je jednoduchý a lze jej rozdělit do dvou kroků. V prvním kroku je zahuštěn výběr pro každou veličinu jednotlivě (jsou dodány nové simulace). V druhém kroku je pak aplikován výše popsany heuristický algoritmus pro hledání optimálního pořadí přidávaných vzorků – párování pouze přidávaných vzorků (lze předpokládat, že s dosavadními vzorky již byl proveden výpočet funkce  $g$ ). Numerické studie provedené s různými typy matematických funkcí i složitými modely ukazují, že agregovaný vzorek přináší prakticky stejně hodnotné výsledky, jako by byl simulován v jediném běhu metody LHS. Výhodou je, že zahuštění lze přepsat na úrovni vzorkovacích pravděpodobností (v prostoru jednotkové hyperkrychle s rovnoměrnou pravděpodobností), takže vyvinutou metodu lze bez rozdílu použít pro libovolná vstupní rozdělení veličin.

Obrázek 8 ilustruje princip zahuštění vzorkovacích pravděpodobností na několika krocích, počínaje pouhou jednou simulací ( $N_{\text{sim}} = 1$ ). Výhodnou tedy je, že přidávání simulací probíhá sekvenčně v libovolném počtu kroků. Simulace s přidáváním tedy mohou běžet automaticky a uživatel je může zastavit např. až po splnění kritéria pro statistickou významnost výsledku, nebo po vypršení času vyhrazenému výpočtům. Metodu lze s výhodou aplikovat také při návrhu experimentů nebo při postupném učení neuronových sítí při zpětné identifikaci parametrů nebo pro sestavení metamodelů. Autor metodu implementoval do programu FReET, o kterém je pojednáno dále.



Obr. 8: Vlevo: zjemnění gridu vzorkovacích pravděpodobností pro veličinu v metodě LHS (prázdné symboly představují stávající simulace). Vpravo: tytéž čtyři kroky zjemnění pro dvojici veličin.

## 4 SIMULACE NÁHODNÝCH POLÍ

### 4.1 Úvod

Prostorovou variabilitu fyzikálních nebo geometrických parametrů systému, nebo intenzitu zatížení, lze věrně modelovat pomocí náhodných polí. Pokud se model náhodných polí používá v metodě konečných prvků, hovoříme pak o stochastické metodě konečných prvků (*stochastic finite element method* – SFEM). Vzhledem k diskrétní povaze modelů konečných prvků je pak zapotřebí vhodně diskretizovat a reprezentovat také vzorky náhodných polí. V minulosti bylo vyvinuto několik metod pro diskretizaci polí v souvislosti s metodou SFEM [24, 19]. Účinné metody pro generování vzorků náhodných polí pro řešení problémů stochastické mechaniky bylo středem zájmu mnoha vědců – matematiků a matematicky orientovaných inženýrů. Jedna z rozšířených metod simulací normálních polí je založena na Karhunen-Loèevově rozkladu kovarianční funkce (matice) do vlastních tvarů (vektorů) a vlastních čísel [19]. Diskrétní verzi metody je také ortogonální transformace kovarianční matice. V uvedené metodě se provádí transformace z prostoru nekorelovaných standardních normálních náhodných veličin do prostoru korelovaných normálních vektorů za pomoci vlastních funkcí (vektorů). Jednotlivé vlastní funkce (vektory) jsou tedy násobeny náhodnými veličinami s rozptyly, které odpovídají příslušným vlastním číslům, a poté jsou superponovány (lineární kombinace, má analogii ke skládání vlastních tvarů kmitů v dynamice). Matematicky lze popsán postup zapsat následovně. Pro jednoduchost zvolme diskretizovanou verzi metody. Nejdříve je proveden rozklad korelační matice  $\mathbf{C}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}$  na příslušné ortogonální vlastní vektory  $\Phi$  a vlastní čísla  $\Lambda$ :

$$\mathbf{C}_{\mathbf{X}\mathbf{X}} = \Phi \Lambda \Phi^T, \quad (9)$$

kde  $\Phi$  obsahuje vlastní vektory (sloupce) korespondující s vlastními čísly v diagonální matici  $\Lambda$ . Dále je zapotřebí vygenerovat v příslušném počtu vzorky nekorelovaných standardizovaných normálních veličin  $\mathbf{Y}$ . Obvykle není zapotřebí výpočet všech vlastních čísel korelační matice (její řád odpovídá počtu diskretizačních bodů  $N$ ), neboť stačí vzít tolik vlastních tvarů s největšími vlastními čísly, aby jejich postupný součet dosáhl, řekněme, 0,95 násobku stopy korelační matice (=  $N$ ). Tím se zajistí, že bude podchyceno 95% variability pole; fluktuace s malými rozptyly lze při skládání tvarů zanedbat. Počet náhodných veličin ve vektoru  $\mathbf{Y}$  tedy odpovídá redukovanému počtu vlastních tvarů. Míra redukce závisí zejména na poměru tzv. korelační délky a velikosti diskretizované domény. Jak autor v minulosti ukázal v publikacích [57, 58], pro generaci vzorků vektoru  $\mathbf{Y}$  lze s výhodou použít metodu LHS, neboť se tím zajistí přesnější splnění požadovaných statistik vzorků polí, a tudíž se zvýší účinnost metody.

Označme počet standardizovaných normálních náhodných veličin ve vektoru  $\mathbf{Y}$  symbolem  $N_{\text{var}}$ . Jejich transformace do korelovaného prostoru (náhodné pole  $\mathbf{X}$ ) pak proběhne lineární transformací:

$$\mathbf{X} = \Phi (\Lambda)^{1/2} \mathbf{Y} \quad (10)$$

Výsledkem je tedy matice rozměru  $N \times N_{\text{sim}}$ , která tak obsahuje  $N_{\text{sim}}$  realizací (sloupců) standardního normálního náhodného pole diskretizovaného do  $N$  bodů. Na prostorové dimenzi nezáleží, korelační matice musí být vypočtena s přihlédnutím k autokorelační funkci a souřadnicím diskretizačních bodů. Pro ilustraci je uvedena typická autokorelační funkce se separabilními korelacemi v jednotlivých třech nezávislých směrech. Označme vzdálenosti dvou bodů v jednotlivých směrech  $|\Delta x|$ ,  $|\Delta y|$  and  $|\Delta z|$ . Potom je autokorelace rovna:

$$R_{aa}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \exp \left[ - \left( \frac{|\Delta x|}{d_x} \right)^{\text{pow}} - \left( \frac{|\Delta y|}{d_y} \right)^{\text{pow}} - \left( \frac{|\Delta z|}{d_z} \right)^{\text{pow}} \right], \quad (11)$$

kde  $d_x$ ,  $d_y$  and  $d_z$  jsou kladné konstanty nazývané korelačními délkami. Volně lze říci, že s narůstající korelační délkou se prodlužují náhodné vlny (zesiluje se korelace pro stejnou vzdálenost bodů). Za mocninu  $\text{pow}$  lze vzít např. 1 (exponenciální autokorelační funkce), nebo 2 (mocinná exponenciální funkce, diferencovatelná).



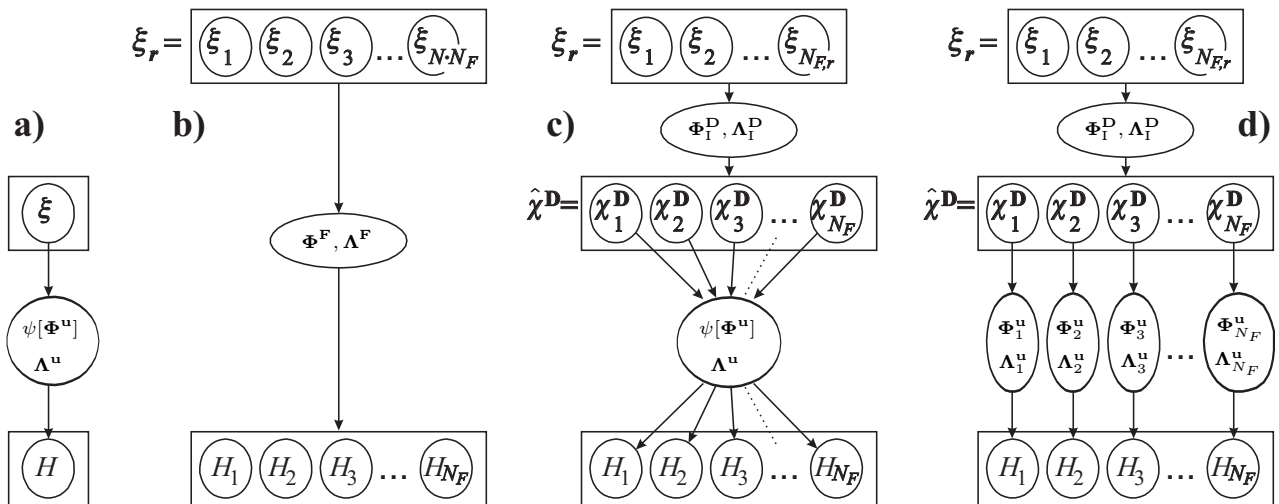
V praxi se často objevuje požadavek pro simulaci nenormálních (neGaussovských) náhodných polí. Čím více je rozdělení polí nesymetrické, tím větší problém to představuje pro standardní metody simulace založené na kombinacích normálních veličin (většina metod). Prakticky se obvykle postupuje tak, že je nejdříve simulováno normální náhodné pole, a to je pak transformováno do požadovaného rozdělení pomocí izopravděpodobnostní transformace (ozn. jako *memoryless transformation – translation*). Aby bylo dosaženo požadované korelační struktury po transformaci, je zapotřebí modifikovat autokorelační strukturu normálního pole  $X$ . Toho se dosahuje pomocí tzv. Natafova modelu, nebo ekvivalentně modifikací výkonového spektra (připomeňme Wiener-Khinchinův teorém).

## 4.2 Nová metoda pro simulaci vzájemně korelovaných náhodných polí

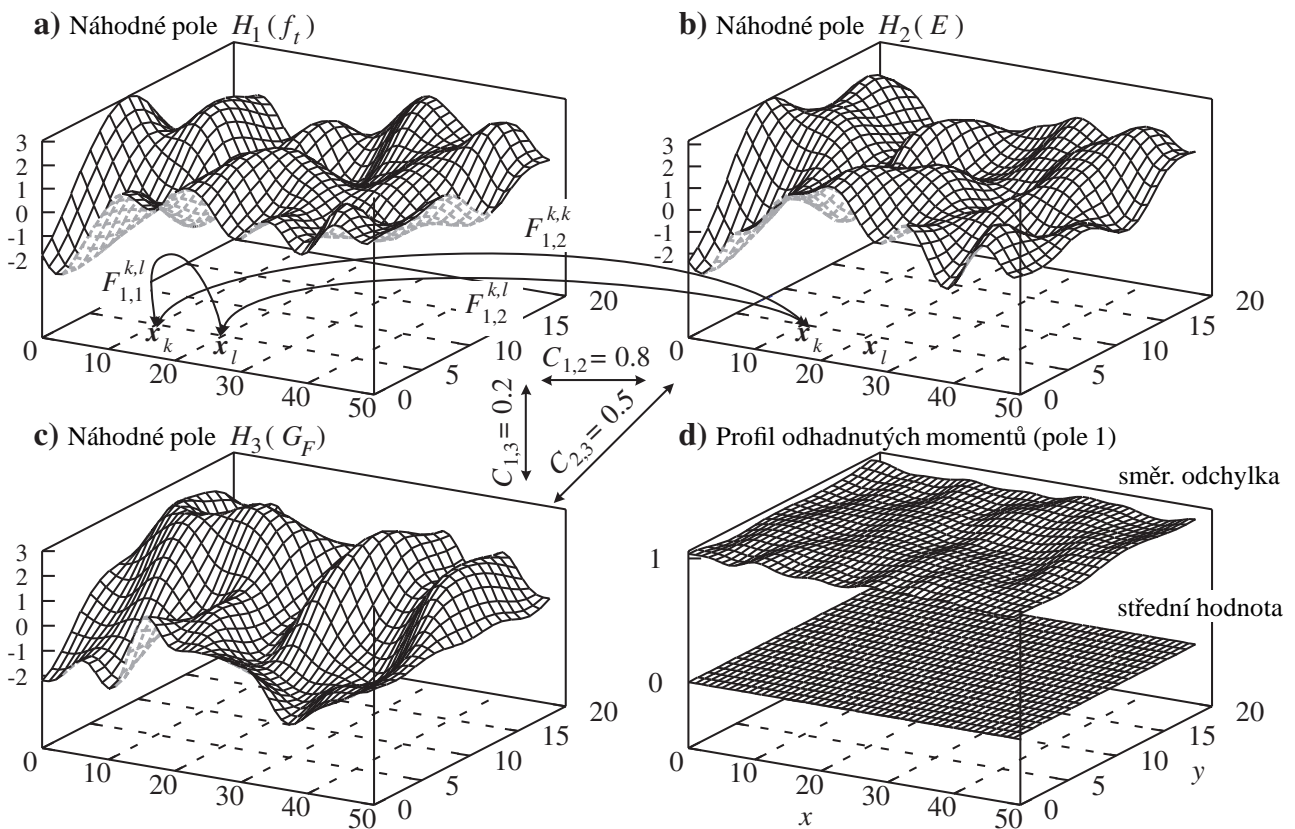
V praktických aplikacích se objevuje požadavek pro simulaci vektorových náhodných polí. Jedná se o situaci, kdy několik vlastností jednoho modelu má být popsáno jednotlivými náhodnými poli. Konkrétně uvažujme např. trojici tahová pevnost  $f_t$ , modul pružnosti  $E$  a lomová energie  $G_F$ . Každé náhodné pole (parametr) má vlastní autokorelační strukturu. Také je požadováno, aby existoval vztah mezi jednotlivými vlastnostmi. Může se stát, že všechny tři vlastnosti mají stejnou autokorelační funkci a vztah mezi těmito vlastnostmi je popsán korelační maticí řádu 3.

Řešení uvedeného problému poskytuje metoda publikovaná autorem v článku [36]. Metoda využívá ortogonální transformace představené v úvodu této kapitoly, avšak rozšiřuje ji na vzájemně korelovaná náhodná pole. Jednou z možností, jak problém řešit, je transformace všech tří náhodných polí naráz, viz schématický obrázek 9b. V praktických aplikacích je však taková transformace často neproveditelná, neboť je zapotřebí vypočítat vlastní vektory a vlastní čísla rozsáhlé korelační matice popisující korelační strukturu všech tří náhodných polí současně. Její řád je roven součinu počtu diskretizačních bodů a počtu náhodných polí. V práci [36] je však vysvětleno, že zavedení globální struktury závislosti lze provést dvěma po sobě následujícími transformacemi, a to nejdříve (i) zavedením vzájemné závislosti mezi soubory veličin reprezentujících jednotlivá náhodná pole, a pak teprve transformací, která (ii) zavede požadovanou autokorelační strukturu pro každé z nich. Tím dojde k mimořádné úspoře počítačového času a ke značnému nárůstu přesnosti řešení, neboť rozsáhlý problém hledání vlastních čísel a vektorů se rozpadne na dva podstatně menší problémy. Obrázky 9c a 9d ilustrují metodu pro případ, kdy jednotlivá pole sdílejí stejnou rozdělovací funkci a kdy mají různé rozdělovací funkce. Matematický popis metody je dosti zdlouhavý, a proto je zde uvedeno pouze schématické znázornění kroků metody. Obrázek 10 pak ilustruje výsledek – je ukázána jedna realizace trojice náhodných polí, která jsou vzájemně korelována (viz korelační koeficienty vepsané uprostřed). Obrázek má demonstrovat, do jaké míry se realizace tří polí tvarem přibližují v závislosti na míře vzájemné korelace.

V některých aplikacích se také vyskytuje požadavek reprezentace náhodného pole na předem neznámém diskretizačním gridu, nebo pro případ, kdy se body gridu přemísťují (např. díky adaptivitě sítě konečných prvků). Práce [36] řeší i tento případ tak, že nabízí aplikaci krigování (*kriging*). Jedná se o metodu, ve které se náhodné pole reprezentuje na nezávislém, pro tento účel optimálním, gridu a při reprezentaci hodnot pole se využívá regrese na funkcích, které přímo vycházejí z autokorelační funkce. Tím se zajistí optimalita regrese, přesněji: střední hodnota rozdílu aproximovaného a požadovaného pole je nulová a rozptyl tohoto rozdílu je minimalizován. Metoda je známa jako *expansion optimal linear estimation* (EOLE). Při expanzi pole mimo body gridu (uzly), ve kterém jsou známy uzlové hodnoty, je třeba vypočítat malou korelační matici mezi požadovaným bodem a uzly z jeho okolí. Jedná se o mimořádně rychlý výpočet, takže flexibilita a optimalita dosažená volbou zvláštního gridu pro náhodná pole není nijak penalizována.



Obr. 9: a) Simulace jednoho náhodného pole pomocí  $N_{\text{var}}$  vlastních funkcí (vektorů); b) Ilustrace metody pro simulaci mnoha vzájemně korelovaných náhodných polí jedinou transformací; c) Navržená metoda dvojice transformací pro vektorová pole, kde složky sdílejí pravděpodobnostní rozdělení; d) Navržená metoda pro obecnou situaci mnoha vzájemně korelovaných polí s různými rozděleními.



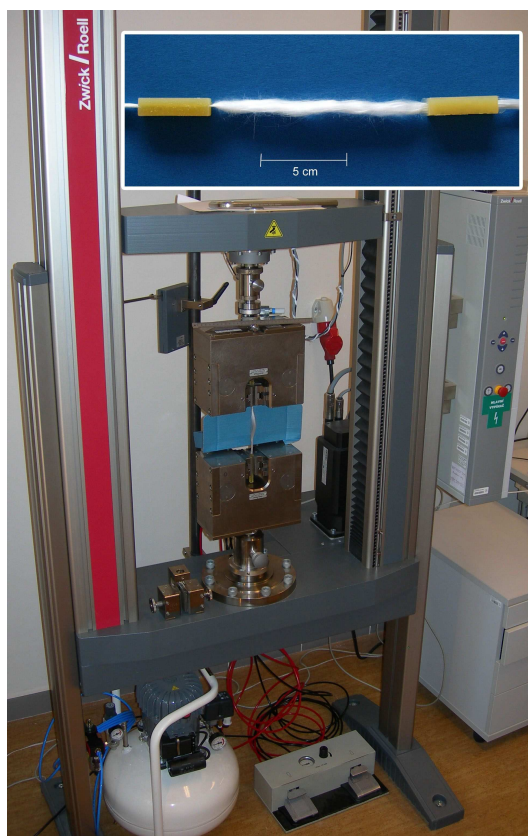
Obr. 10: K vzájemně korelovaným náhodným polím třech parametrů materiálu na obdélníkové doméně (konstrukce). a), b) a c) Náhodně vybraná realizace 2D pole o třech složkách. d) Profil odhadnuté střední hodnoty a směrodatné odchylky pole (použito  $N_{\text{sim}} = 1000$  realizací vektorového pole).

## 5 TEXTILNÍ BETON A VÝZTUŽNÉ MNOHOVLÁKNITÉ SVAZKY

V projektech stavebního inženýrství se čím dál více používají textilie jako výztuž betonových konstrukcí. V této doméně se používají materiály jako uhlíková (karbonová) vlákna, aramidová vlákna, vlákna z alkalivzdorného skla (*AR-glass*), polyethylenová vlákna apod. Společným rysem uvedených kompozitů je značně nerovnoměrná struktura soudržnosti mezi svazkem a matricí. Díky malému průměru vláken a těžko proniknutelné stěsnané struktuře průřezu svazku nedochází k proniknutí matrice dovnitř svazku. Výsledkem je, že vlákna mají dobrou soudržnost s matricí pouze na povrchu svazku, což vede ke komplikovanému procesu poškozování v trhlinovém můstku. Množství vlivů nerovnoměrnosti v geometrické struktuře a fyzikálních vlastnostech svazku byl detailně studován v publikacích autora a spoluautorů [28, 29, 27, 35].

Převládajícím mechanismem porušení při tahovém namáhání kompozitů vyztužených vysokomodulovými vláknennými svazky (textilní beton) je trhání výztuže, tedy tahové porušování svazků paralelních vláken. Matrice, ať už se jedná o polymer, keramiku nebo kov, slouží k přenosu zatížení mezi vlákny skrze elasticitu, plasticitu nebo tření při pokluzu mezi vlákny a matricí. Matrice může přenášet určitou část zatížení, ale poté, co v ní vznikne trhlinka, nepřenáší prakticky žádné zatížení. Dva faktory ovlivňující přetržení vláken jsou (i) statistická pevnost vláken a (ii) rozdělení napětí po délce vlákna. Napětí podél vlákna závisí na vnějším zatížení, ale také na způsobu, kterým je napětí přenášeno z přetrženého vlákna na okolní vlákna a matrici. Tento přenos napětí se řídí elastickými vlastnostmi jednotlivých složek a rozhraním mezi vlákny a matricí. Co se týče způsobu sdílení napětí mezi vlákny v jediném trhlinovém můstku, rozeznáváme dva výrazné případy, a to (a) globální sdílení napětí (*global load sharing*), u kterého se napětí z přetrženého vlákna přerozdělí mezi nepoškozená vlákna demokraticky, v poměru jejich tuhostí a (b) lokální sdílení napětí (*local load sharing*), kde se síla z přetrženého vlákna rozděluje mezi nejbližší vlákna.

Jak vyplývá z předloženého popisu, model poškození v tažených kompozitech lze zformulovat tak, že jeho centrálním útvarem je trhlinka přemostěná vlákny. Takový útvar lze s úspěchem modelovat pomocí tzv. *bundle model*, tedy modelu svazku paralelních vláken. Stejný model lze použít také na samotný svazek zatěžovaný v tahu, viz obr. 11. Tahové zkoušky svazků vláken jsou při výrobě rutinně prováděny ve velkém množství, neboť se jimi kontroluje kvalita výroby nebo výsledky zkoušek slouží k charakterizaci svazku při různých změnách ve výrobním procesu. Autor se v citovaných publikacích [28, 29, 27, 35] detailně zabýval právě rozvojem teorie modelu svazku paralelních vláken při globálním sdílení napětí. V práci [28] je aplikován statistický model odezvy svazku vláken, který je formulovaný tak, že nezávislou proměnnou je řízený posun (prodloužení taženého svazku – tvrdé zatěžování). Díky tomu je možné bez potíží trasovat i sestupnou větev svazku, která je strukturální vlastností svazku jinak vyrobeného čistě z elasticko-křehkých vláken. Do modelu lze zavést nahodilost/proměnlivost v libovolných geometrických i fyzikálních parametrech, např.:



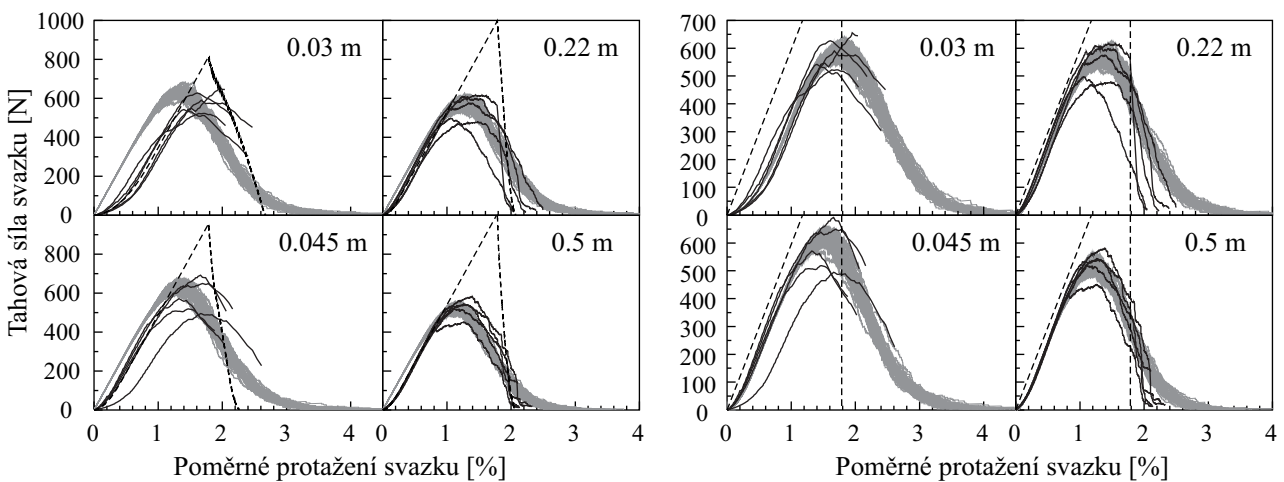
Obr. 11: Zkušební stroj Zwick/Roell a vybavení na zkoušky svazků zakoupený z projektů řešených autorem. Malý obrázek: svazek skelných vláken s koncovkami z pryskyřice pro tahovou zkoušku.

průřez vlákna, délka mezi body uchycení, zvlněnost vláken způsobující zpožděnou aktivaci vláken při tahu, pevnost vláken atd. Tyto parametry totiž u reálných svazků vykazují značnou variabilitu a neuspořádanost.

V modelu je představena zpřesněná kinematika, která zaručuje, že model lze aplikovat jak na (a) trhání svazků nesmírně krátkých délek vláken (trhlinový můstek v kompozitu), tak na (b) případ tahové zkoušky svazku. Je jasné, že v obou zmiňovaných případech se prosadí jiné zdroje nahodilosti. Vytvořený plně statistický mikromechanický model byl pak v práci [29] rozšířen o variabilitu parametrů po délce ve formě náhodných procesů/polí. Uvedený model také slouží jako základní kámen úspěšné víceškálové modelovací strategie (*multiscale model*) vyvíjené týmem vedeným autorem v posledních letech.

Vytvořený model umožnil plně vystihnout jak  $l-d$  diagramy tahových zkoušek svazků vláken různých délek (viz obr. 12) spolu se všemi základními rysy, tak i experimentálně zjištěný komplexní vliv velikosti (délky) svazku (viz obr. 13).

Při testování svazků vláken se ukazuje, že maximální síla i tvar  $l-d$  křivek závisejí nejen na délce svazku a počtu vláken ve svazku, ale také na rychlosti zatěžování a míře svinutí svazku, která zesiluje smykový přenos mezi vlákny. Aby bylo možné kvantifikovat vliv těchto čtyř základních zdrojů a rovněž jejich interakci, byl navržen postup racionálního testování za pomoci metod návrhu experimentů (*design of experiments*). V publikaci [35] je vyvinutá metodika předložená a aplikovaná na tahové zkoušky svazků skleněných vláken. Je ukázáno, že pomocí řízeného návrhu testování při i relativně velkém počtu možných proměnných lze za použití pokročilých statistických nástrojů získat značné množství kvalitních informací.

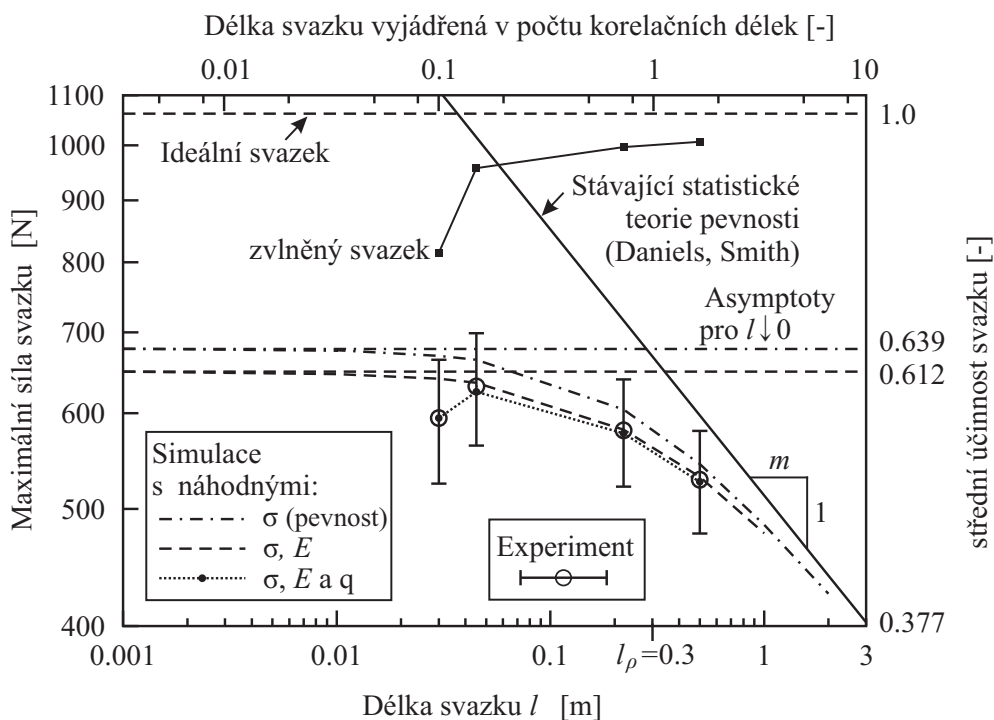


Obr. 12: Porovnání numerických simulací (šedá barva) s experimenty (černá). Vlevo: simulace bez zpožděné aktivace, s podélně náhodnou tuhostí a pevností. Diagramy získané se samotným vlivem zpožděné aktivace jsou čárkované. Vpravo: simulace se všemi zmíněnými náhodnými zdroji rozptylu.

## 5.1 Zavedení délkového měřítko do Weibullový teorie poškození

V mnoha inženýrských aplikacích kompozitů je důležitým problémem schopnost předpovědět pevnost materiálu a celého prvku/konstrukce. Ukazuje se, že pevnost kompozitu lze na mikroúrovni s úspěchem modelovat pomocí modelů svazků paralelních vláken (*fiber bundle models*), která přemostují trhlinu v kompozitu. Často je totiž oprávněný předpoklad, že hlavním mechanismem přenosu namáhání v porušeném kompozitu je tahové napětí vláken a že příspěvek matrice lze zcela zanedbat. Je známo, že *in situ* změřené pevnosti vláken jsou o několik řádů nižší, než pevnosti, které by odpovídaly teoretickým silám na molekulární úrovni. Za tímto snížením pevnosti stojí právě různé poruchy, póry, koncentrátoři napětí a další zdroje lokálního snížení pevnosti. Náhodná pevnost kompozitu a tedy i spolehlivost závisí právě na těchto náhodných zdrojích snížené pevnosti.

V průběhu zatěžování větších prvků/konstrukcí z kompozitů se uvnitř materiálu vytváří množství



Obr. 13: Křivky vlivu velikosti (délky) svazku.

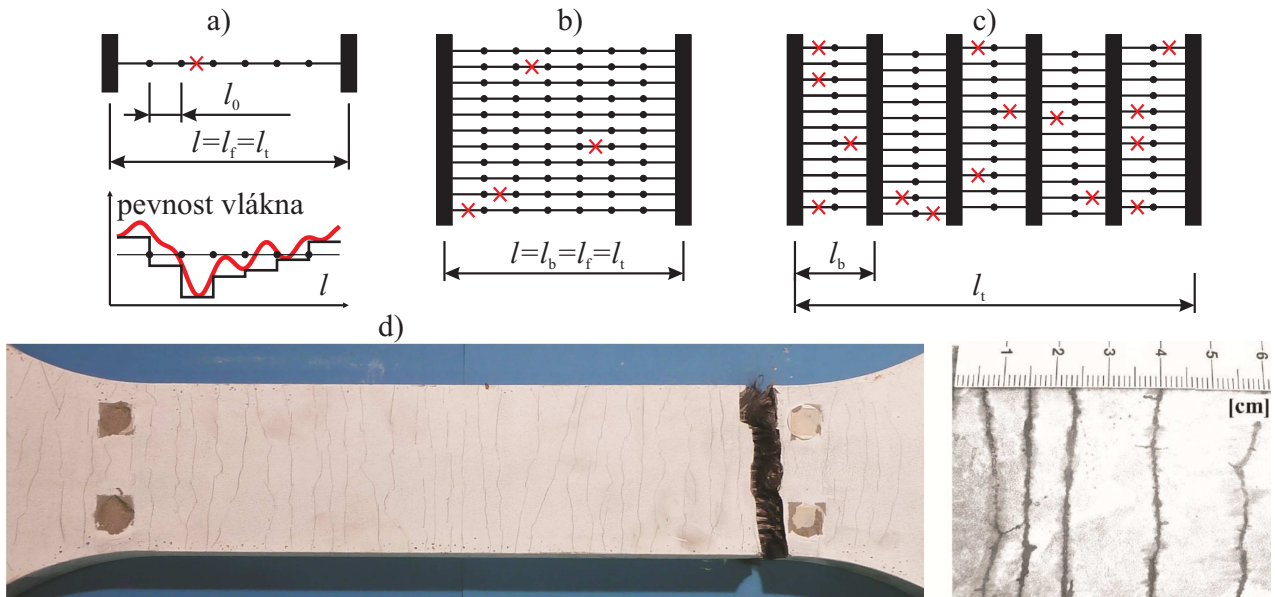
shluků poškozených vláken. Nejslabší z těchto shluků rozhoduje o pevnosti prvku jako celku. Proces selhání je tedy v podstatě lokalizovaný a obecně je přijímáno, že s rostoucím počtem vláken v kompozitu (nebo obecně mikrovazeb v materiálu) lze identifikovat statisticky reprezentativní oblast celku. Na velký prvek pak lze nahlížet jako na seskupení nezávislých subkonstrukcí (regionů), které jsou řazeny v sérii, a proto selhání nejslabšího z nich způsobí selhání celku. Kompozit je potom tak silný, jak silný je nejslabší z těchto regionů, a takový pohled vede na koncepci jakéhosi kritického shluku. Proto se pevnost velkých kompozitů řídí pravidly nejslabšího článku a s ním asociovanou statistickou teorií extrémních hodnot.

Statistický popis pevnosti shluku závisí na velikosti kritického regionu. Na tu lze, pro podobné podmínky při zatížení, nahlížet jako na materiálovou proměnnou. Levý chvost rozdělení pevnosti shluku musí být Weibullovský, což je důležité zejména pro spolehlivostní analýzy. Jádro rozdělení pak bude mít tvar mezi Gaussovským a Gumbelovým rozdělením [38].

Výše popsany koncept kritické oblasti/shluku lze využít i při modelování na vyšší úrovni rozlišení (např. makro úroveň) pomocí metody stochastických konečných prvků (SFEM). V takovém modelu lze efektivní vlastnosti pro určitý objem modelovat jako vzájemně korelovaná náhodná pole s korelační délkou, která odpovídá právě velikosti kritické oblasti. Na zmíněnou kritickou oblast, která může rozhodnout o celkové pevnosti kompozitu, lze nahlížet jako na jakýsi reprezentativní element (angl. *representative volume element* – RVE). Jinými slovy, RVE tímto získává novou definici, jako statisticky reprezentativní objem materiálu, jehož poškození vede k poruše celé konstrukce.

Inženýrské konstrukce vyrobené z libovolných materiálů musejí být navrženy tak, aby pravděpodobnost jejich porušení  $P_f$  za celou dobu životnosti byla extrémně malá, řádu  $10^{-6}$ – $10^{-7}$ . V oblasti takto malých pravděpodobností je rozdíl mezi tvarem Gaussova (normálního) rozdělení s exponenciálně klesajícím chvostem a Weibullovým rozdělením (s mocninným zákonem) enormní, přestože obě rozdělení mají podobný tvar v oblasti středních hodnot. Připomeňme, že experimentální ověření tvaru rozdělení pomocí empirických histogramů změřených na reálných vzorcích materiálu je schopno napovědět pouze na tvar právě v centrální oblasti rozdělení. Ovšem spolehlivostní úvahy se musejí opírat o znalosti chvostů rozdělení, kam experimenty, nebo vzorkování pomocí metod typu Monte Carlo nemají prakticky přístup. Nepomohou ani pokročilé metody z oblasti spolehlivostního inženýrství jako např. metoda stochastických konečných prvků, *subset simulation*, *importance*

*sampling* nebo *line sampling*. Nezbyvá tedy, než o tvaru rozdělení pevnosti rozhodnout na základě teoretických úvah, které se opírají o přijatelné předpoklady. Takovou teorii pak lze ověřit pouze nepřímo. Formulace takové teorie je stěžejní problém mechaniky poškození a prozatím jsou známy jen dva limitní případy. Prvním je duktilní (plastické) porušení, u kterého je pevnost úměrná váženému součtu příspěvků k pevnosti z mnoha elementárních objemů materiálu, a proto je rozdělení pevnosti v limitě normální (paralelní zapojení). Druhým limitním případem je perfektně křehké porušení, o kterém je rozhodnuto při porušení jediného objemu materiálu, což vede na Weibullovo rozdělení pevnosti (sériové zapojení). V článku [38] je studována náhodná pevnost složitějšího útvaru, a totiž kombinace paralelního a sériového zapojení (viz obr. 14). Je předložen model řetězce svazků vláken (nebo řetězec paralelního zapojení mikrovazeb), anglicky známé jako *chain-of-bundles model*. Takový model je obzvláště přiléhavý pro kompozity anebo zavinuté svazky vláken.



Obr. 14: Jednosměrná vlákenná struktura zatížená v tahu s vyznačenými trhlinami na úrovni maximální síly: (a) jedno vlákno (nebo mikrovazba) diskretizované na kratší segmenty spolu s náčrtem náhodné pevnosti po délce a jejího minima; (b) Danielsův svazek diskretizovaných vláken (vazeb); (c) Řetězec svazků s ilustrací fragmentačního procesu poškození; (d) Vzorek textilního betonu vyztuženého uhlíkovými vlákny po provedení tahové zkoušky. Vlevo: nejslabší průřez s lokalizovanou trhlinou. Vpravo: detail paralelních trhlin.

Spolehlivostí vláknitých materiálů se již v minulosti zabývala řada špičkových matematiků-statistiků, nejdůležitější výsledky přinesly publikace [9, 23]. Pro pevnost jednoho křehkého vlákna se historicky používá Weibullovo rozdělení, což má hluboké zdůvodnění v modelu nejslabšího článku. Klasická Weibullova teorie vychází z předpokladu, že dva sousedící elementy materiálu mají nezávislé náhodné pevnosti. Proto se pro spolehlivost celku používá součin spolehlivostí dílčích objemů materiálu. Výsledkem je délkově závislá náhodná pevnost vlákna, která pro libovolný kvantil pevnosti formuje mocninný zákon. Nevýhodou této teorie, na kterou poukazuje právě práce [38] je, že pokud se studovaný rozměr (délka) dostane pod úroveň referenční pevnosti materiálu, pevnost podle teorie roste nade všechny meze. Autor se domnívá, že chybným předpokladem v klasické Weibullově teorii je právě nezávislost pevností libovolného páru částí materiálu. Pokud jsou totiž analyzovány objemy malé konstrukce, které jsou si velice blízko, předpoklad nezávislosti je třeba opustit.

Jednou z možností, jak zajistit, že pevnost velmi malých objemů materiálu bude omezená, je opuštění předpokladu, že všechny jednotlivé subkonstrukce (malé objemy) materiálu mají nezávislé náhodné pevnosti [29, 38]. Hodnověrným a fyzikálně přijatelným předpokladem je, že blízké objemy materiálu mají náhodné lokální pevnosti korelované a že tato statistická závislost může být modelo-

vána náhodným polem. Závislost je pak řízena autokorelační funkcí pole, která vnáší do modelu nové délkové měřítko – autokorelační délku  $l_\rho$ . Rozdělení pole může být pro jednoduchost modelováno pomocí Weibullova rozdělení, ovšem pro složitější případy materiálů se schopností přerozdělení namáhání může být rozdělení pole pevnosti složitější, viz dále.

Ve zmíněném článku [38] je předloženo rozšíření Weibullové teorie porušení o zavedení statistického délkového měřítko. Tím se opouští rys soběpodobnosti (*self-similarity*) přítomné v klasické Weibullově teorii pevnosti. Prezentované výsledky jsou ve stejné práci také použity k vysvětlení netriviální závislosti pevnosti zavínutých svazků v závislosti na míře svinutí (*twist level*). Zavínutí svazku způsobuje interakci (přítlačení vláken na sebe) při tahovém zatížení svazku (lana) a působení je pak podobné vláknovému kompozitu, kde podobnou roli smykového přenosu sil hraje matrice.

Nyní bude krátce popsáno rozdělení pevnosti vlákna v závislosti na jeho délce v upravené Weibullově teorii. Vztah pro pevnost je přeformulován tak, aby stačilo zaměnit původní mocniný zákon pro délkově závislou funkci  $f(l)$  nově navrženou funkcí v následující podobě:

$$\sigma(l) = s_0 [-\ln(1 - P_f)]^{1/m} f(l), \quad \text{kde zavedme} \quad f(l) = \left( \frac{l_\rho}{l_\rho + l} \right)^{1/m} \quad (12)$$

Ve vztahu má  $m$  význam parametru tvaru Weibullova rozdělení (pro skelná vlákna  $m \approx 5$ ),  $s_0$  je parametr polohy Weibullova rozdělení a  $P_f$  pravděpodobnost poruchy (hodnota distribuční funkce). Parametr  $l_\rho$  je nově zavedené statistické délkové měřítko a v tomto případě má význam autokorelační délky náhodného pole pevnosti. Výstižnost navrženého vztahu byla ověřena numericky za pomoci výpočtů extrémů (minim) náhodného pole v závislosti na délce.

## 5.2 Identifikace efektivní délky výztužného svazku

V textilním betonu slouží svazek velkého počtu vláken jako výztuž. Díky nedokonalé penetraci matrice do svazku zůstává značný počet vláken bez kontaktu s matricí. Smykové napětí mezi vlákny (angl. *filaments*) je podstatně menší, než smykové napětí přenášené na kontaktu vláken s matricí. Přesto ale bylo v minulosti ukázáno, že vliv smykových sil mezi vlákny na makroskopickou odezvu tažených prvků z textilního betonu nelze zanedbat. Zatímco smykový přenos sil mezi vlákny a matricí ovlivňuje chování lokálně – na délkách porovnatelných se šířkou trhlin, vnitřní přenos mezi vlákny ovlivňuje proces poškození na délkách porovnatelných s celým konstrukčním prvkem, tedy pokud má prvek dostatečnou (kotevní) délku pro zajištění smykového přenosu. Tento fakt lze dokumentovat např. významným vlivem vnitřního tření mezi vlákny na úroveň napětí tažených prvků se skleněnou výztuží (*AR-glass*) v režimu po dosažení saturace trhlin (*post-cracking regime*).

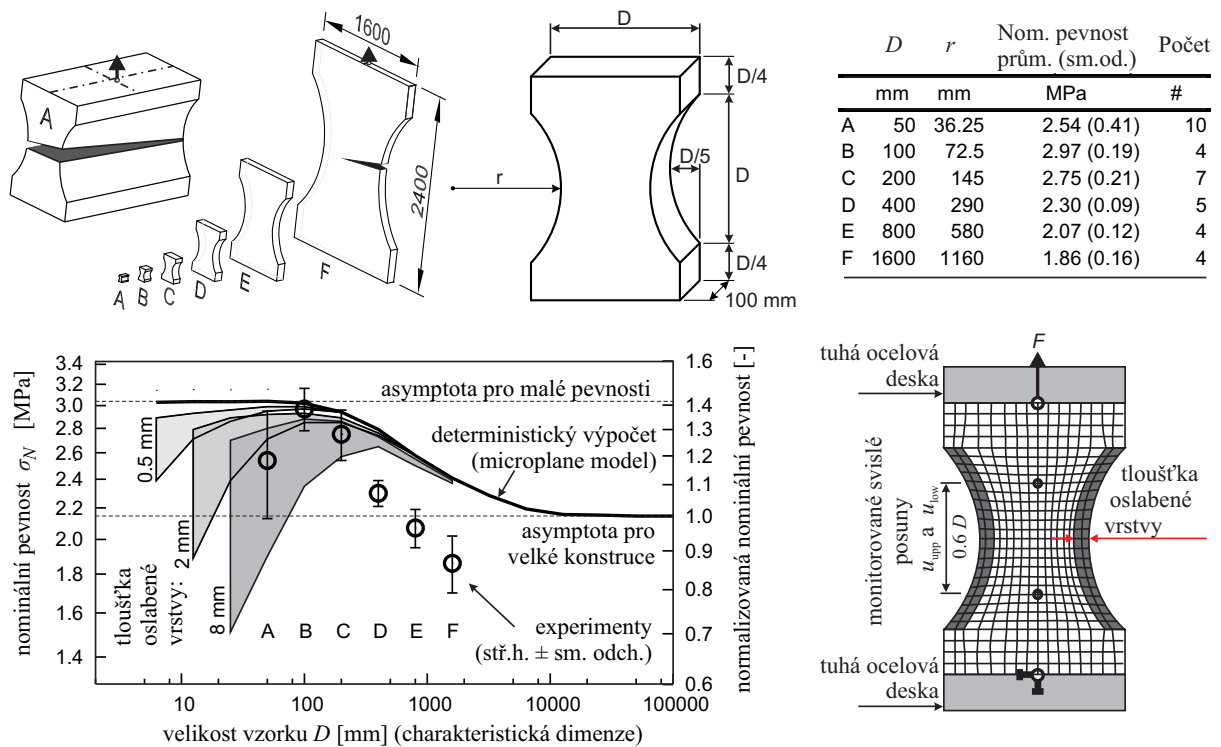
Je tedy zřejmé, že detailní charakterizace vnitřního tření ve svazku a jeho interakce s třením vláken o matrici v součinnosti s poškozením je zapotřebí pro věrné modelování odezvy prvků z textilního betonu. Soudržnost vláken s matricí a následné tření při vytahování vlákna z matrice je možné studovat a charakterizovat za pomoci experimentů – zkouškou vytahování vláken a svazků z matrice. Avšak interakci mezi vlákny je při reálném působení prakticky nemožné změřit. Proto byla v práci [42] vyvinuta metoda pro charakterizaci *in situ* interakcí mezi vlákny mnohovláknitého výztužného svazku. Klíčovou myšlenkou bylo využití vlivu interakce mezi vlákny na statistický vliv velikosti (délky) na pevnost taženého svazku. Toto ovlivnění je patrné, pokud je délka svazku větší než hledaná interakční délka, která se často nazývá též *stress transfer length*. Jedná se o vzdálenost, na které je v přetrženém vlákně obnovena úroveň napětí díky smykovému přenosu sil mezi vlákny. Lze předpokládat, že fragmentovaná struktura svazku se chová jako řetěz svazků vyobrazených na obr. 14b. Výrazná změna sklonu křivky vlivu délky na pevnost (v logaritmickém grafu) vyznačuje právě hledanou interakční délku. Takový nepřímý postup určení délky, jako základní charakteristiky svazku, je snadno proveditelný. Stačí několik experimentů tahu svazku s různou délkou uchycení. Výsledky měření lze dosadit do několika vztahů opřených o statistickou teorii pevnosti svazků a vláken. V publikaci [42] je přístup demonstrován na příkladu dvou sérií tahových zkoušek, a to svazků z uhlíkových vláken a z vláken vyrobených z alkalivzdorného skla.

## 6 INTERAKCE ENERGETICKÉHO A STATISTICKÉHO VLIVU VELIKOSTI PŘI KVAZIKŘEHKÉM PORUŠENÍ

Většina materiálů – kompozity, zrnité materiály, kovy, biomateriály apod. – mají mikrostrukturu vykazující několik délkových měřítek, často doprovázenou nahodilou neuspořádaností. Jak již bylo zmíněno v úvodu tohoto textu, správné pochopení a predikce výsledných mikro-, mezo- a makroskopických mechanických vlastností, které jsou z povahy materiálu náhodné, vyžaduje kombinaci pravděpodobnostních pojetí a metod mechaniky. Vědci i inženýři se často uchylují k výpočtovým metodám, které jsou však také zatíženy prozatím nezdolanými nesnázi. V této kapitole jsou předloženy některé aktuální pokroky na poli mechaniky heterogenních materiálů jako je beton, se zaměřením na škálovací zákony (*scaling laws*) lomu.

V oboru lomové mechaniky betonu je nyní všeobecně přijímáno, že charakteristická délka (materiálová konstanta úzce související s lomovou energií betonu) vztažená k velikosti lomové procesní zóny má spojení s velikostí maximálního zrna kameniva. Lomová procesní zóna má u geometricky podobných konstrukcí různých rozměrů vždy přibližně stejnou velikost a to implikuje existenci tzv. energetického/deterministického vlivu velikosti [6]. Jiný způsob vysvětlení závislosti nominální pevnosti konstrukce na jejich rozměrech je klasický statistický vliv velikosti způsobený variabilitou lokální pevnosti materiálu ve spojení s mechanismem nejslabšího článku. S těmito dvěma zdroji vlivu velikosti může být nakládáno nezávisle a oba mohou být simulovány v rámci jediného komplexního modelu [30, 33]. Jak ale bylo diskutováno v předchozí kapitole, může existovat vztah mezi charakteristickou délkou ovlivněnou velikostí zrna kameniva, velikostí kritických shluků trhlin a autokorelační délkou v modelu náhodného pole pevnosti diskutovanou výše.

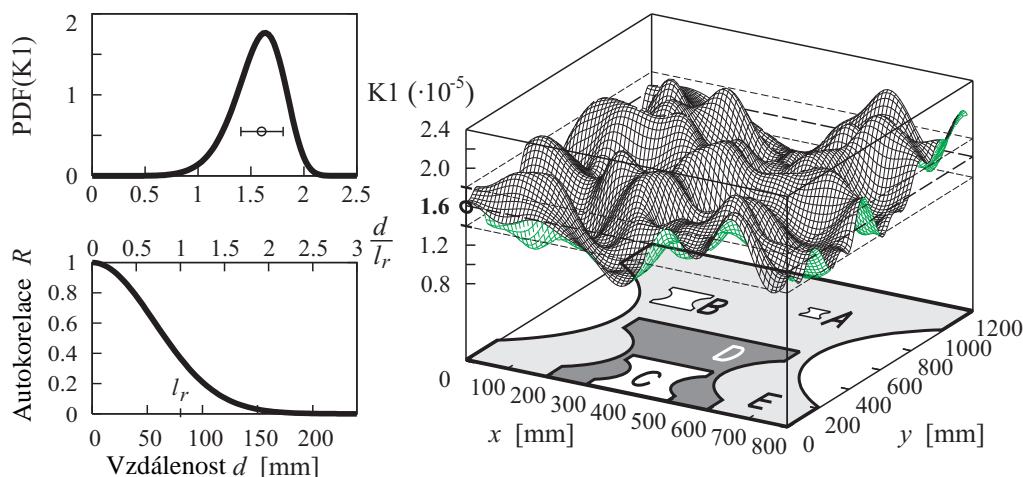
### 6.1 Případová studie tažených betonových vzorků tvaru psí kosti



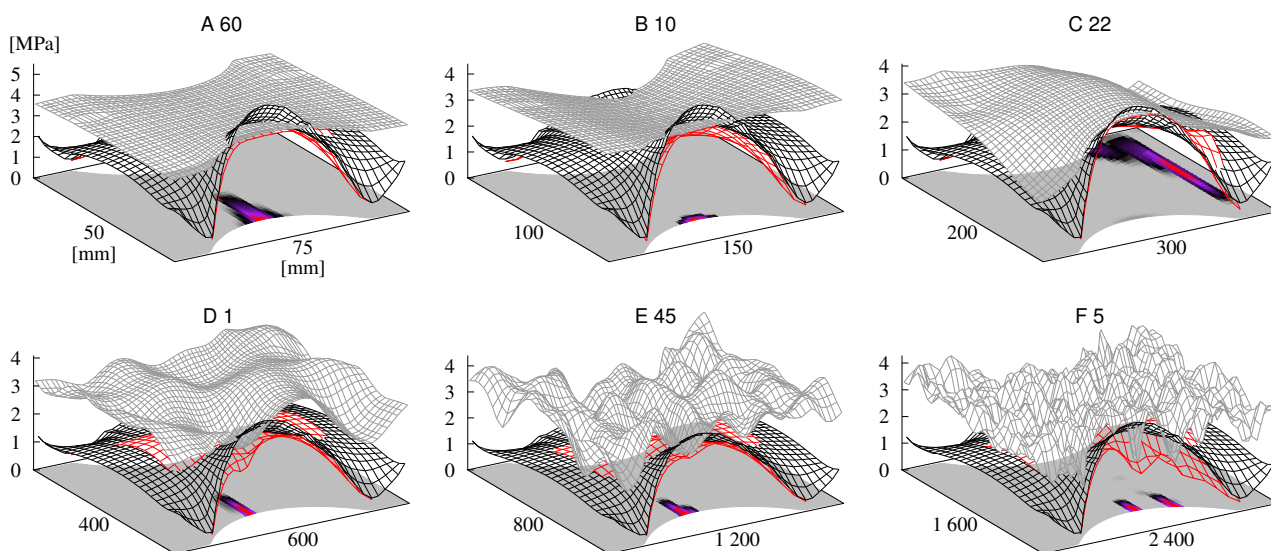
Obr. 15: Nahoře: vzorky tvaru psí kosti testované autory van Vliet a van Mier (1998): série A až F; Model se slabou povrchovou vrstvou ve 2D verzi programu ATENA (vpravo dole); Vlevo dole: graf vlivu velikosti pro experimenty, deterministické výpočty a výpočty za pomoci „oslabené vrstvy“. Vpravo nahoře: shrnutí základních výsledků experimentu.

V této kapitole je stručně představena identifikace, studium a modelování možných zdrojů vlivů





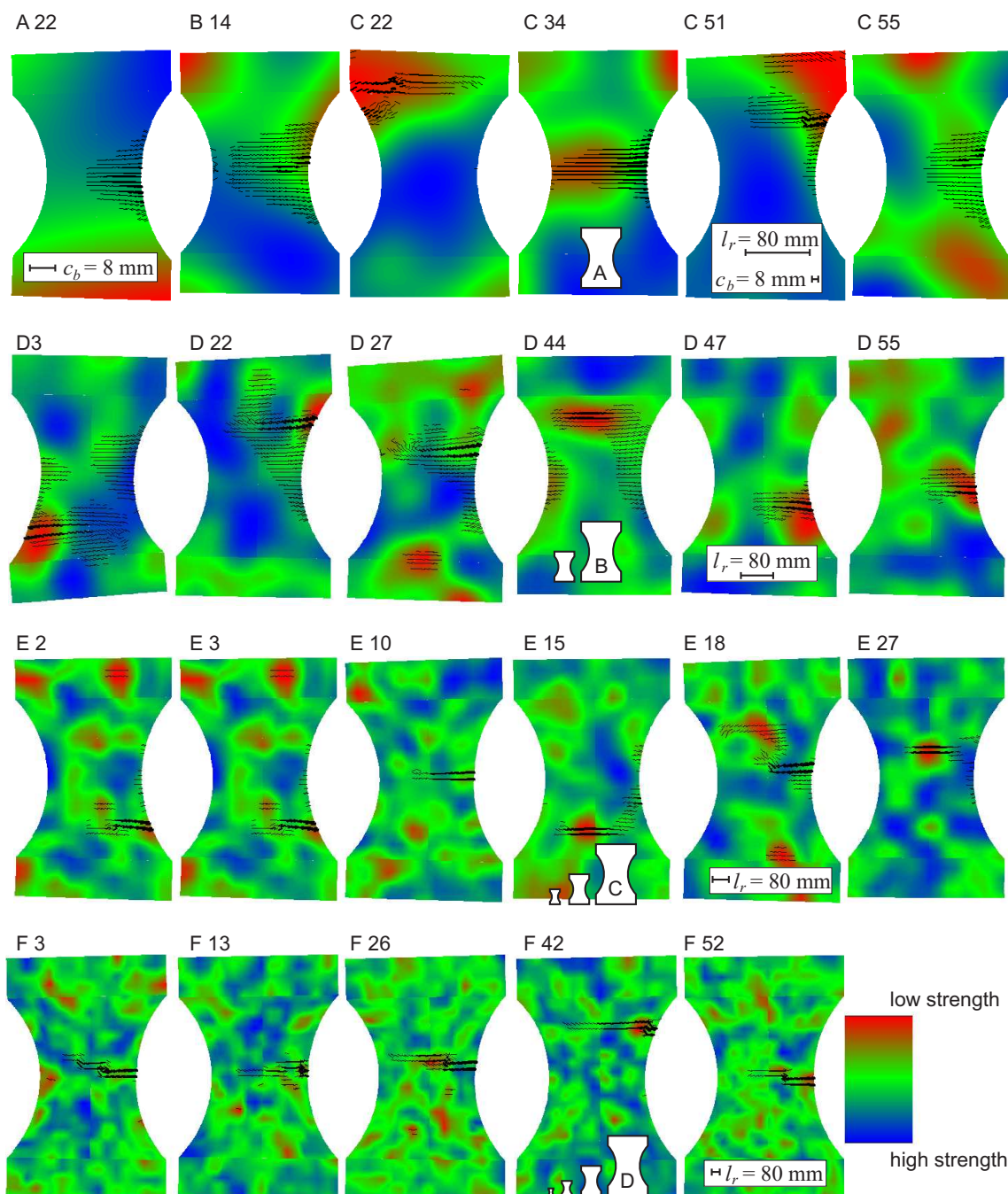
Obr. 16: Vlevo nahoře: použitá Weibullová rozdělovací funkce pro parametr pevnosti materiálu  $K1$  v mikroploškovém modelu. Vlevo dole: autokorelační funkce náhodného pole. Vpravo: jedna realizace náhodného pole parametru  $K1$  porovnaná s různě velikými vzorky tvaru psí kosti – velikosti A – E. Čárkované čáry představují střední hodnotu a pás  $\pm$  jedna směrodatná odchylka parametru  $K1$



Obr. 17: Pole napětí a pevností v okamžiku maximálního zatížení pro vybrané realizace vzorků. Pole shora: realizace náhodné pevnosti (bariéra), hlavní tahy v křehkém materiálu s nekonečnou pevností, skutečné hlavní tahy při maximálním zatížení, trhliny a lokalizace poškození jsou vyobrazeny v základně. Více realizací polí je vyobrazeno v obr. 18.

velikosti v betonových konstrukcích, a to jak působících zvlášť, tak interagujících [33, 32, 37]. Motivací pro práci shrnutou v citovaných publikacích bylo především studium vzájemné souhry identifikovaných škálovacích délek, které mají původ v materiálu, v okrajových podmínkách a v geometrii. Ke studiu byly použity metody stochastické nelineární analýzy založené na lomové mechanice při použití metody konečných prvků a modelu náhodných polí pro popis prostorově proměnlivé pevnosti materiálu. Byly modelovány reálně provedené tahové zkoušky betonových vzorků tvaru psí kosti (*dog-bone specimens*) různých velikostí, které byly mimořádně pečlivě provedeny a dobře zdokumentovány v odborné literatuře. Poměr největšího a nejmenšího testovaného vzorku je unikátní (1:32) a získaná data z precizně provedených experimentů stále představují patrně nejvěrohodnější data o závislosti pevnosti na velikosti u betonových konstrukcí.

Nejdříve byly jednotlivé velikosti modelovány v MKP za použití mikroploškového modelu pro



Obr. 18: Simulované realizace pole náhodné pevnosti a příslušné vypočtené tvary trhlin v deformovaných vzorcích v okamžiku těsně po dosažení maximální síly. Pole a trhliny jsou vypočteny v integračních bodech konečných prvků.

materiál (*microplane model* verze M4) a pro srovnání také za použití lomově-plastického (*fracture-plastic*) materiálového modelu označovaného NLCEM. Bylo ukázáno, že značnou část závislosti pevnosti na velikosti lze podchytit na deterministické úrovni za pomoci vnitřní charakteristické délky materiálu. Jako omezovač lokalizace byl použit model šířky pásu trhlin (*crack band model*). Je ukázáno, že čistě deterministické/energetické vysvětlení nepostačuje a další zdroj poklesu pevnosti s rostoucí velikostí je třeba vysvětlit na statistické úrovni. K tomu byl použit model autokorelovaného náhodného pole lokální pevnosti. Tím se do modelu zavedlo další délkové měřítko – autokorelační délka. Je také ukázáno, že nerovnoměrnost materiálové pevnosti po objemu konstrukce ve formě náhodného pole dává vzniknout imperfekcím, ve kterých je spuštěn proces poškození a trhání

materiálu, samozřejmě v oblastech s dostatečným napětím v důsledku zatížení. Navíc, pokles pevnosti patrný u vzorků malých velikostí byl vysvětlen pomocí přítomnosti oslabené povrchové vrstvy materiálu o tloušťce, která nezávisí na velikosti vzorku. Oslabení povrchové vrstvy je zdůvodněno vysycháním a smršťováním betonu a rozdílným granulometrickým složením v důsledku stěnového efektu. Model tedy zavádí tři škálovací délky. Všechny tři uvedené zdroje vlivu velikosti jsou považovány za hlavní příčiny laboratorně naměřeného vlivu velikosti a předložený model je schopen reprodukovat reálná data. Předložený výpočtový model představuje úspěšné zasnoubení pokročilých metod počítačové nelineární lomové mechaniky a rovněž pokročilé simulační techniky pro generaci náhodných polí popisujících prostorově proměnlivé vlastnosti modelu.

Analýzy jsou pak následovány rozborem asymptotického chování předložených škálovacích vztahů, které uvedené vlivy velikosti podchycují. Je diskutován vztah klasické Weibullové teorie k použitému modelu lokální pevnosti ve formě náhodného pole.

## 6.2 Analytický vztah pro statisticko-energetický vliv velikosti a jeho využití

Vliv velikosti betonové konstrukce na nominální pevnost  $\sigma_N$  má obecně dvě různá vysvětlení a tedy i zdroje: deterministické (energetické) a statistické (nebo spíše pravděpodobnostní). První z nich je v podstatě způsoben přerozdělením napětí v lomové procesní zóně, která má velikost přibližně nezávislou na velikosti konstrukce. Druhý zdroj lze vysvětlit pomocí náhodné prostorové variability lokální pevnosti materiálu.

Pro využití v praxi je důležité navrhnout jednoduchý způsob, jak zohlednit vliv velikosti na objemné konstrukce jako jsou např. tížní hráze, základy a zemní konstrukce, neboť u nich může statistický vliv velikosti hrát významnou roli. Optimálně by predikce náhodného zatížení při porušení měly být dostupné inženýrům bez použití výpočtově náročných simulací metodou Monte Carlo spolu s pokročilým nelineárním MKP modelem – takový složitý výpočet je pro praxi zcela nedostupný. Proto byl v publikaci [30] navržen nový vztah pro kombinovaný energeticko-statistický vliv velikosti na nominální pevnost konstrukcí, které se porušují při inicializaci trhliny z hladkého líce (jedná se o náhodnou veličinu, takže vztah umožňuje aproximaci střední hodnoty s tím, že je známo jak vyšetřit také rozptyl a celou rozdělovací funkci veličiny). Vztah pro predikci pevnosti konstrukcí s existujícím vrubem a výraznou koncentrací napětí byl předmětem zkoumání již v minulosti a z povahy problému je známo, že statistický vliv velikosti je u takových konstrukcí silně potlačen existencí předurčeného místa porušení.

Vztah pro aproximaci samotného energetického vlivu velikosti u konstrukcí, které se porušují z hladkého líce, byl v minulosti navržen Bažantem a jeho spolupracovníky [2, 6, 3]:

$$\sigma_N(D) = f_r^\infty \left[ 1 + \frac{r D_b}{D + l_p} \right]^{1/r}, \quad (13)$$

kde  $\sigma_N$  je nominální pevnost závislá na velikosti konstrukce charakterizované rozměrem  $D$ . Parametry  $f_r$ ,  $D_b$  a  $r$  jsou kladné materiálové a geometrické konstanty. Parametr  $f_r$  reprezentuje pevnost konstrukce dané geometrie při použití křehkého lineárně elastického materiálu (což odpovídá pevnosti velmi velké konstrukce z řešeného kvazikřehkého materiálu). Exponent  $r$  (konstanta) kontroluje zakřivení a sklon křivky. Parametr  $D_b$  má význam tloušťky potrhane vrstvy. Změna parametru  $D_b$  způsobuje posun grafu jako tuhé křivky doprava nebo doleva; reprezentuje deterministickou škálovací délku, která je v podstatě vztažena k velikosti největších zrn kameniva. Tento parametr řídí přechod od křehkého chování ( $D_b = 0$ ) přes kvazikřehké chování ( $D_b > 0$ ) až k pevnosti, která by odpovídala ideálně plastickému materiálu. Parameter  $l_p$  je zaveden pro kontrolu nad predikcí v případě plastického chování (stavu, kdy je konstrukce menší, než délka  $D_b$ ).

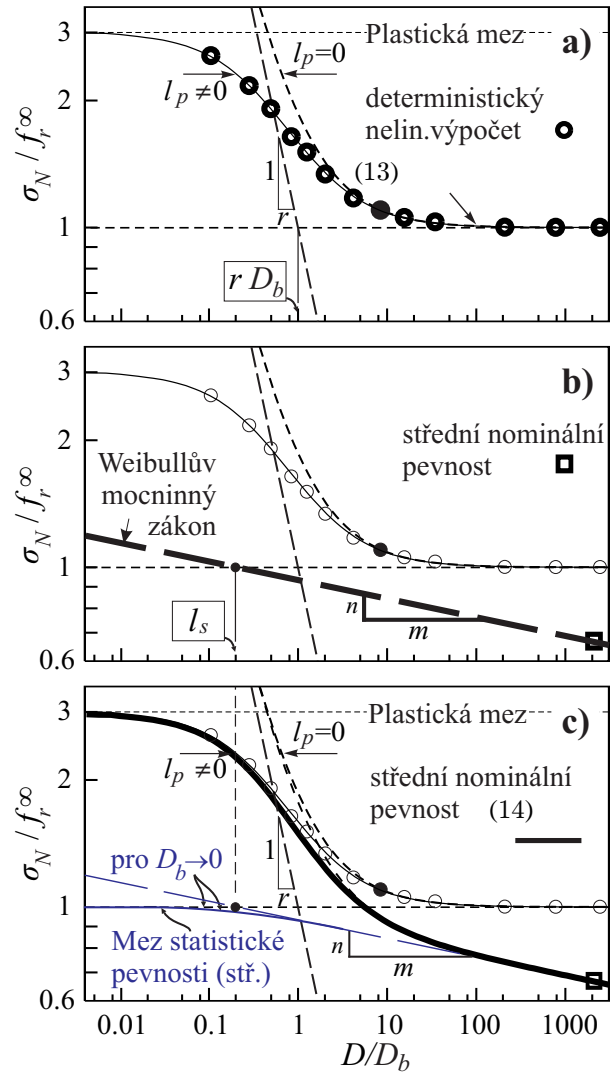
Pravá asymptota rovnice (13), tedy predikce pro velké konstrukce, je vodorovná;  $\sigma_N(D)/f_r = 1$ , viz obr. 19a. Taková predikce však není v souladu s výsledky nelokální Weibullové teorie aplikované na pevnost v tahu za ohybu [4], kde má pravá asymptota sklon v logaritmicím grafu  $-n/m$ , což odpovídá mocninnému zákonu klasické Weibullové teorie statistické pevnosti [26]. Z pohledu této teoretické nesrovnalosti je zapotřebí kombinace obou zdrojů a jejich složení v jediném vztahu.

Izolovaný statistický vliv velikosti na pevnost a existence statistické délky v rozšířené Weibullově teorii byly diskutovány výše v souvislosti s pevností křehkých vláken a kompozitů. Propojení obou zdrojů vlivu velikosti v jediném vztahu bylo navrženo autorem následovně (jedná se o predikci střední hodnoty nominální pevnosti):

$$\sigma_N = f_r^\infty \left[ \left( \frac{l_s}{l_s + D} \right)^{\frac{r \cdot n}{m}} + \frac{r D_b}{l_p + D} \right]^{\frac{1}{r}} \quad (14)$$

Předložený vztah vykazuje následující chování:

- Levá asymptota pro malé konstrukce má korektní chování a parametr  $l_p$  řídí přechod k dokonale plastickému chování s Gaussovskou pevností.
- Pravá asymptota je totožná s klasickou Weibullovou asymptotou (mocninný zákon).
- Ve vztahu jsou zavedeny dvě nezávislé škálovací délky (délková měřítka): deterministická ( $D_b$ , přerozdělení napětí způsobující nelineární chování) a statistická ( $l_s$ , prostorová závislost lokálních pevností aproximovaná např. náhodným polem). Vztah mezi autokorelační délkou  $l_p$  a zavedenou statistickou délkou  $l_s$  je detailně vysvětlen např. v autorově disertační práci [51], kde je rovněž diskutován vztah k průměrovací délce v teorii neložného kontinua.



Obr. 19: Ilustrace kroků při predikci pevnosti.

V poslední době je inženýrům k dispozici software pro řešení nelineárního chování konstrukcí za pomoci např. nelineární metody konečných prvků. Ovšem detailní statistické analýzy s takovými programy za použití např. modelu náhodných polí pro aproximaci lokální pevnosti materiálu jsou prozatím pro praxi zcela vyloučené. Předložený vztah lze využít k jednoduché proceduře predikce náhodné pevnosti kvazikřehké konstrukce za pomoci MKP, a to následovně:

1. Předpokládejme, že řešená konstrukce má charakteristický rozměr  $D_t$ . Přirozeně prvním krokem je tedy numerické modelování (např. pomocí nelineární MKP) konstrukce této velikosti. Při tomto kroku by měl být model konstrukce co nejlépe vyladěn (diskretizace a síť konečných prvků, okrajové podmínky, materiálový model apod.). Predikce nominální pevnosti však zahrnuje pouze energetické/deterministické vlivy při porušení. Zjednodušeně řečeno, takový výpočet vede k nadhodnocení pevnosti oproti skutečnosti a toto nadhodnocení je tím výraznější, čím je konstrukce větší, neboť u velkých konstrukcí se výrazněji prosadí statistický vliv velikosti. Výsledek tohoto kroku je představován plným kroužkem v grafu na obr. 19a.
2. Dále je zapotřebí vytvořit výpočtové modely geometricky podobných konstrukcí různých velikostí (menších i větších než skutečná velikost) s charakteristickými velikostmi  $D_i, i = 1, \dots, N$ . Zkušenosti ukazují, že optimální počet je okolo desíti velikostí v závislosti na tom, jak dobře modely pokrývají rozsah přechodového chování od křehkého k plastickému. Velikosti  $D_i$  by

tedy měly pokrývat rozpětí od velmi malých po velmi velké konstrukce. Provedený deterministický výpočet u každé velikosti poskytuje nominální pevnosti  $\sigma_{N,i}$ , kde  $i = 1, \dots, N$ . Poznamenejme, že pevnosti vypočtené pro dvě největší velikosti by měly být téměř identické a ležet na pravé vodorovné asymptotě. Pokud tomu tak není, existuje i jiný mechanismus porušení, než inicializace trhliny z hladkého líce, jako např. přerozdělení napětí či vliv silného koncentrátoru napětí. Uvedenou proceduru by pak nebylo možno použít. Model by měl být objektivní co se týče nezávislosti na velikosti sítě konečných prvků, proto je potřeba použít stejnou regularizační techniku pro všechny velikosti (model pásu trhlín, nelokální kontinuum apod.). Výsledky tohoto kroku jsou reprezentovány sadou kroužků v grafu na obr. 19a.

3. V tomto kroku je třeba získat optimální sadu parametrů deterministického vztahu (13) za použití  $N$  vypočtených párů hodnot  $(\{D_i, \sigma_{N,i}\} : i = 1, \dots, t, \dots, N)$ . Parametr  $l_p$  lze z identifikace vypustit, neboť jej lze velmi přesně získat na základě plastické analýzy konstrukce. Optimalizaci parametru  $f_r$  se lze také vyhnout, neboť za tento limit pevnosti pro velké konstrukce lze vzít výsledek nominální pevnosti největšího modelu (lineární model). Výsledek tohoto kroku je zobrazen plnou křivkou na obrázku 19a.
4. Poslední tři chybějící parametry ve statisticko-energetickém vztahu (14) jsou:  $n, m$  a  $l_s$ : Parametr  $n$  je počet prostorových dimenzí ( $n = 1, 2$  nebo  $3$ ). Parametr  $m$  reprezentuje Weibullův parametr tvaru vztahující se k náhodné pevnosti lomové procesní zóny. Jedná se obvykle o číslo mezi 8 a 20. Poměr  $-n/m$  udává sklon středního vlivu velikosti na pevnost (MSEC) v grafu pro velikost  $D \rightarrow \infty$ . Jediným chybějícím parametrem k určení je  $l_s$ . Mohlo by se zdát, že k jeho určení je rovněž zapotřebí začlenění statistického softwaru do použitého nelineárního MKP programu pro výpočet odezvy konstrukce. Nabízí se však daleko snazší varianta založená na použití Weibullova integrálu. Jednoduchý výpočet Weibullova integrálu je třeba použít pro výpočet střední hodnoty pevnosti nějaké velké konstrukce. K výpočtu poslouží pouze elastické pole napětí (např. hlavní tahová napětí) a parametry Weibullova rozdělení lokální pevnosti. Výsledek je vyznačen čtverečkem v grafu na obrázku 19b. Skrze tento čtvereček stačí proložit Weibullovu asymptotu, tedy přímkou v logaritmickém grafu se sklonem  $-n/m$ . Průsečík vodorovné deterministické asymptoty  $f_r$  a Weibullový přímky udává hodnotu statistické délky  $l_s$  na vodorovné ose  $D$ , viz obr. 19b.
5. Nyní, když jsou všechny parametry vztahu určeny, je možné predikovat náhodnou pevnost pro libovolnou velikost. Vztah (14) poskytuje aproximaci pro střední hodnotu pevnosti. Rozdělení pevnosti může být pro velké konstrukce aproximováno Weibullovým rozdělením, které je jednoznačně definováno známou střední hodnotou a parametrem tvaru  $m$ .

### 6.3 Pravděpodobnostní metoda konečných prvků s adaptivitou sítě

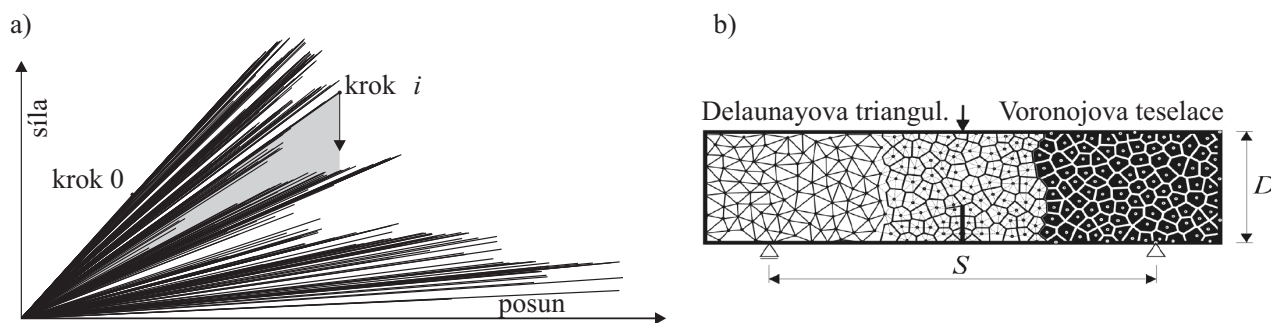
V souvislosti s pokročilými metodami výpočtu nelineární odezvy materiálu s náhodně variabilními vlastnostmi lze zmínit nedávno vyvinutou platformu založenou na MKP [55]. Autor spolupracoval na vývoji výpočtové platformy využívající adaptivitu sítě konečných prvků s pokročilým modelováním materiálu a umožňující popis vlastností materiálu za pomoci náhodných polí. Předložený model je schopen detailně trasovat poškození v oblastech, kde k němu dochází. Často se jedná o místa v konstrukci, kde je značné zatížení v porovnání s lokální (náhodnou) pevností. V takových oblastech dojde při výpočtu k automatické detekci a zjemnění sítě konečných prvků. Problém přenosu stavových proměnných je výrazně redukován tím, že do sítě jsou pouze přidávány další uzly a stávající prvky se dělí na menší. Taková strategie zjemňování sítě je velmi pragmatická a vymyká se tradičně používanému zjemnění řízeného za pomoci predikované chyby diskretizace. Nejnižší úroveň zjemnění je řízena jak deterministickou materiálovou délkou, tak autokorelační délkou náhodného pole lokální vlastnosti. Oba tyto parametry se totiž podílí na velikosti lomové procesní zóny, což je základní útvar v porušujících se konstrukcích, ve kterém musejí být probíhající procesy věrně modelovány. Vyvinutý model má některé rysy společné s (převážně diskretními) modely řízenými lokálními událostmi (event-by-event), které jsou diskutovány v následující kapitole.

## 7 SEKVENČNĚ LINEÁRNÍ METODY APLIKOVANÉ NA MŘÍŽKOVÉ A ČÁSTICOVÉ MODELY

Předložený text se doposud zabýval klasickou počítačovou mechanikou založenou na metodě konečných prvků. V posledních letech se však ukazuje, že mnohé rysy chování heterogenních materiálů s neuspořádanou vnitřní strukturou je vhodné modelovat pomocí diskretních modelů, jako jsou např. mřížkové modely (*lattice models*), nebo částicové modely (*particle models*, *discrete element methods*). U těchto metod se často používá sekvence lineárních řešení, která však elegantně modeluje i silně nelineární odezvu konstrukce. Princip sekvenčně lineární metody spočívá v tom, že z konstrukce jsou postupně vyjímány nebo oslabovány ty elementy, které při daném zatěžovacím vektoru jako první dosáhnou nějakého předem známého mechanického limitu. Této strategii se také někdy říká *event-by-event method*. Prakticky se postupuje tak, že v daném stavu konstrukce se vypočte lineární odezva pro jednotkové referenční zatížení, a to je přeškálováno tak, aby aktuálně nejzatíženější prvek dosáhl svého limitu.

Potíž nastává v okamžiku, kdy při vyjmutí nejzatíženějšího elementu dojde k lavině dalších takových porušení (při udržení předepsané deformace – tvrdé zatěžování, nebo předepsané síly). Tím, že současně je možné škálovat pouze jeden zatěžovací vektor a ostatní musejí zůstat konstantní, není možné jednoznačně stanovit kritický element. Obzvláště výrazně je problém patrný v případě neproporcionálního zatěžování, kdy se zatěžovací vektor v průběhu historie mění. Pravdou však je, že problém vzniká i při proporcionálním zatěžování.

V článku [39] byla představena alternativní metoda, která umožňuje překonat obtíže s lavinami porušení (lokální katastrofy) a s nejednoznačností určení sekvence porušení jednotlivých elementů. Motivací pro vývoj metody byly těžkosti při neproporcionálním zatížení, i když lze ukázat, že metoda poskytuje jednu z možností, jak modelovat průběh porušování vnitřní struktury i v případech zatěžování proporcionálního. Princip spočívá v postupném přerozdělování zatížení po vyjmutí kritického prutu tak, že je jednoznačně určena sekvence porušování dalších přetížených prutů v lavině. Popsaný proces postupného statického přerozdělení sil nepřináší delší výpočtový čas v porovnání s výpočtem bez přerozdělení, všechny kroky uvnitř přerozdělovací smyčky jsou totiž lineární a není nutné nijak iterovat. Procedura je samozřejmě použitelná i pro klasické metody MKP při diskretizaci kontinua. Porovnání předložené metody s jinou, mezi vědci rozšířenou variantou, poskytuje publikace [19]. Zdá se, že v současnosti neexistuje lepší metoda, než detailní dynamické řešení, které umožňuje i vytrasování jevu nazývaného *snap-back*.



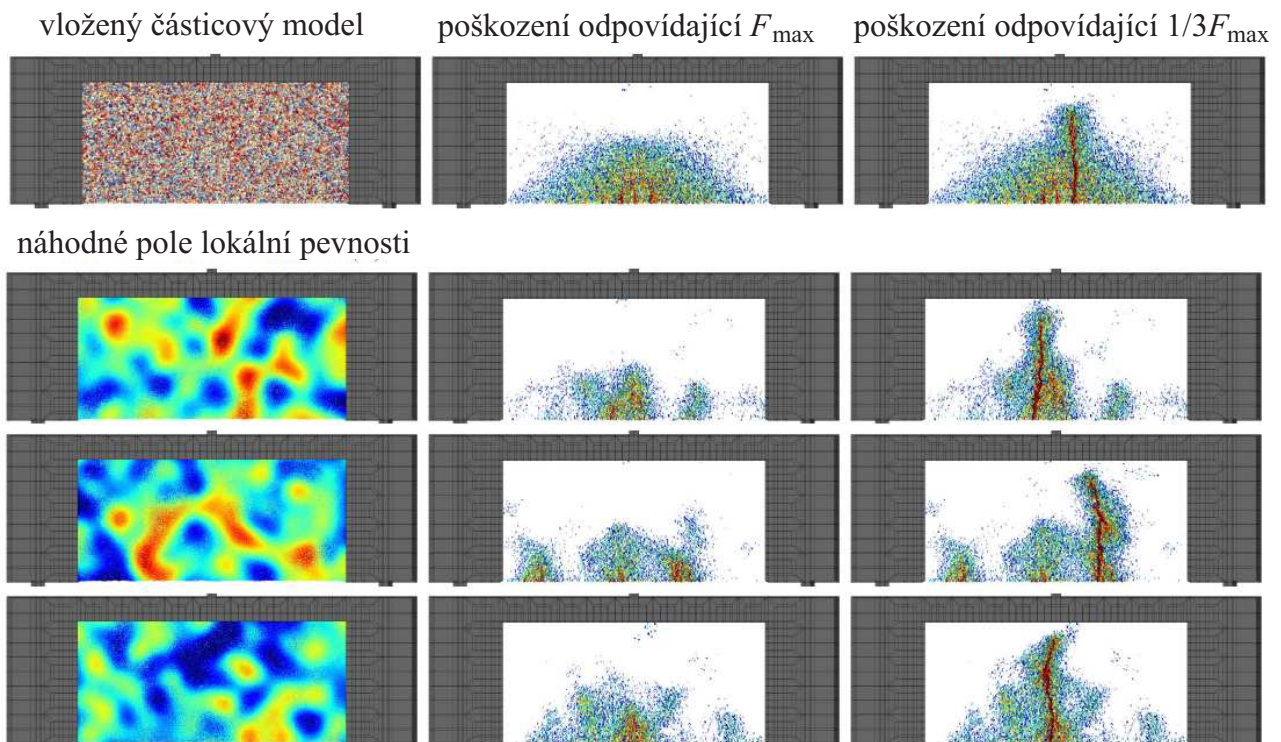
Obr. 20: (a) Příklad odezvy získané pomocí sekvenčně lineární metody. Šedá oblast vyznačuje lavinu o 45 událostech. Neklesající vnucený posun způsobí řadu staticky nevyrovnaných stavů. (b) Delaunayova triangulace odpovídající duální Voronojově teselaci při diskretizaci média (zde nosníku).

Silnou stránkou popsaných diskretních modelů je především jejich schopnost věrně modelovat trhliny, které vznikají ve skutečných betonových konstrukcích. Uvedené modely přirozeně modelují jak distribuované trhání ve velkých objemech materiálu, tak i rozvoj lokalizovaných makrotrhlin v pozdních stádiích zatěžování. Klasické mřížkové modely se často používají pro modelování betonu tak, že síť prutů získaných z Delaunayovy triangulace (viz obr. 20) je překryta počítačem generovanou mezostrukturou betonu a jednotlivým prutům jsou předepsány fyzikální vlastnosti podle jejich

příslušnosti do oblastí zrn kameniva, matrice, nebo přechodové zóny mezi nimi (*interfacial transitional zone*). Mezi vědci, kteří takový model používají, panuje představa, že závislost výsledků na diskretizaci získaných tímto modelem je výrazně redukována právě zohledněním struktury materiálu. V práci [43] bylo autory ukázáno, do jaké míry se závislost na diskretizaci projevuje jak u konstrukcí s výrazným koncentrátorem, tak u konstrukcí bez něj. Ukazuje se, že maximální vypočtené zatížení je zahrnutím struktury do značné míry nezávislé na síti, ale např. energie disipovaná v modelu se u různých diskretizací liší. To může mít negativní dopad na výsledky získané při modelování konstrukcí se značnou mírou přerozdělení napětí v průběhu zatěžování. Velká míra vnitřní statické neurčitosti je rys, který je u moderních materiálů požadován – konstrukce by měly „avizovat“ blížící se porušení.

Závislost na velikosti sítě prvků má přímou korespondenci s energetickým (deterministickým) vlivem velikosti. V článku [46] je ukázáno, že za pomoci analýzy chování homogenních lattice modelů lze odvodit známé vzorce vlivu velikosti alternativním způsobem (např. výše uvedenou rovnicí 13). Předložené analýzy lze přenést i na modely v klasické metodě konečných prvků.

Sílu diskrétních modelů lze snadno využít i při pravděpodobnostních analýzách chování materiálu a konstrukcí. Do modelu lze relativně snadno zavést předpoklady o prostorově proměnlivé pevnosti materiálu. Poslední vývoj modelu na domácím pracovišti kombinuje pokročilý částicový model s výše popsány metodami pro generování náhodných polí k výpočtu odezvy betonových konstrukcí (viz např. obr. 21). Jednou z ambicí je popis chování betonových konstrukcí s malými koncentratory napětí (vruby, zářezy) při zohlednění variability pevnosti. Je například známo, že ohýbané tránce s mělkým zářezem se mohou porušit rozvojem trhliny mimo zářez. Předmětem současného zkoumání je rovněž vliv velikosti na chování takových trámců.



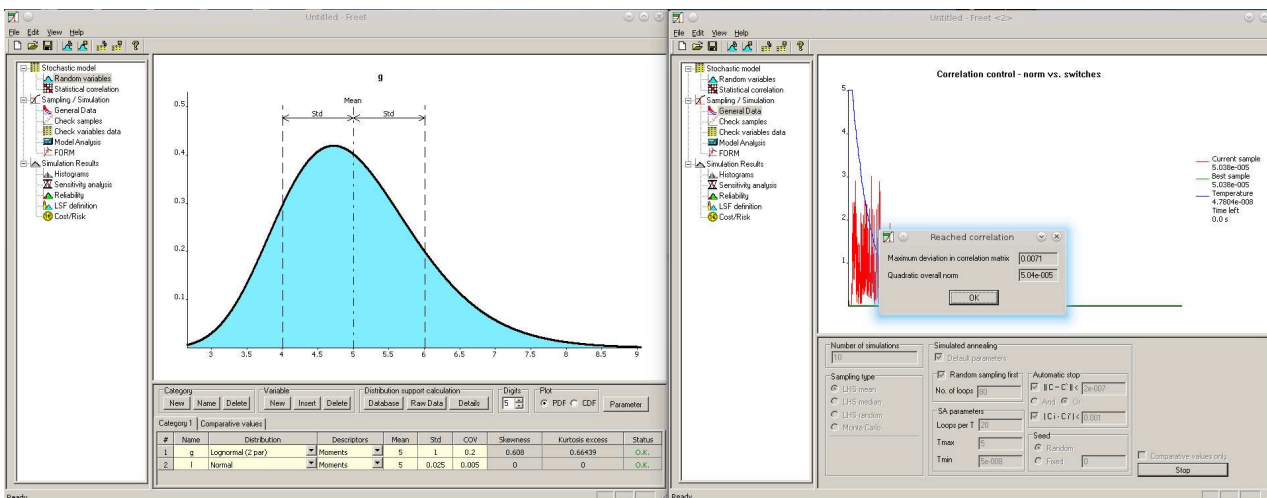
Obr. 21: Model třibodového ohybu trámce kombinující klasické konečné prvky a částicový model v oblasti očekávaného poškození. Horní řada: deterministický model a poškození. Dole: tři realizace náhodného pole a odpovídající vypočtené trhliny (míry poškození prutů).

## 8 PROGRAMOVÝ SYSTÉM FReET

Programový systém FReET pro statistickou, citlivostní a spolehlivostní analýzu libovolného modelu inženýrského problému je vyvíjen ve spolupráci s prof. Ing. D. Novákem, DrSc. a Ing. R. Rusinou, Ph.D. První komerční verze byla vyvinuta v roce 2001 a od té doby je systém dále rozvíjen a distribuován firmou Červenka Consulting. V současné době je komerčně využíván na cca 70 pracovištích po celém světě, a to pro průmyslové aplikace, výzkum i pro výuku. Na naší fakultě je systém masivně využíván ve výuce předmětů zaměřených na kvantifikaci neurčitosti či variability ve vstupech a pro výpočet spolehlivosti stavebních konstrukcí či ekonomických rozpočtů. Programový systém FReET je tvořen několika programy (EXE a dynamické knihovny DLL) implementovanými v jazyce C++. Uchazeč je autorem třech základních knihoven, které tvoří výpočtové jádro programu (DISTRIBUTION.DLL, LHS.DLL a SPACES.DLL). Kromě toho se výraznou měrou podílí na koncepčním návrhu systému i vizáži programu. Jako inženýrskou úlohu lze do systému vložit rovnici, nebo jej lze napojit na program dodaný uživatelem ve formě EXE, BAT či DLL. Tím je systém otevřen pro prakticky libovolnou úlohu s náhodnými vstupními proměnnými.

V systému FReET jsou implementovány původní mimořádně úspěšné metody, které jsou v předložených tezích zmíněny výše. Jedná se zejména o metody zavádění statistické závislosti metodou simulovaného žhání, rozšiřování vzorků LHS metodou HSLHS apod.

Program FReET je za použití programu SARA propojený s MKP systémem ATENA (zaměřený hlavně na beton, železobeton a předpjatý beton) tak, že celek tvoří unikátní softwarový systém pro nelineární výpočty konstrukcí pokročilou metodou konečných prvků. Na systém FReET rovněž navazují program FReET-D zaměřený na pravděpodobnostní modelování a posouzení degradace železobetonových a předpjatých konstrukcí (modely karbonatce betonu, vstup chloridů, koroze výztuže, zmrazování, působení sulfátů a kyselin na beton). Programový systém FReET je v současné době rovněž propojován se softwarem implementujícím neuronové sítě pro identifikaci materiálových vlastností nebo identifikaci poškození v konstrukcích.



Obr. 22: Okno programu FReET – Vpravo: flexibilní definice náhodné proměnné pomocí parametrů rozdělení, nebo momentů rozdělení, nebo jejich kombinace. Vlevo: zavádění statistické závislosti metodou simulovaného žhání



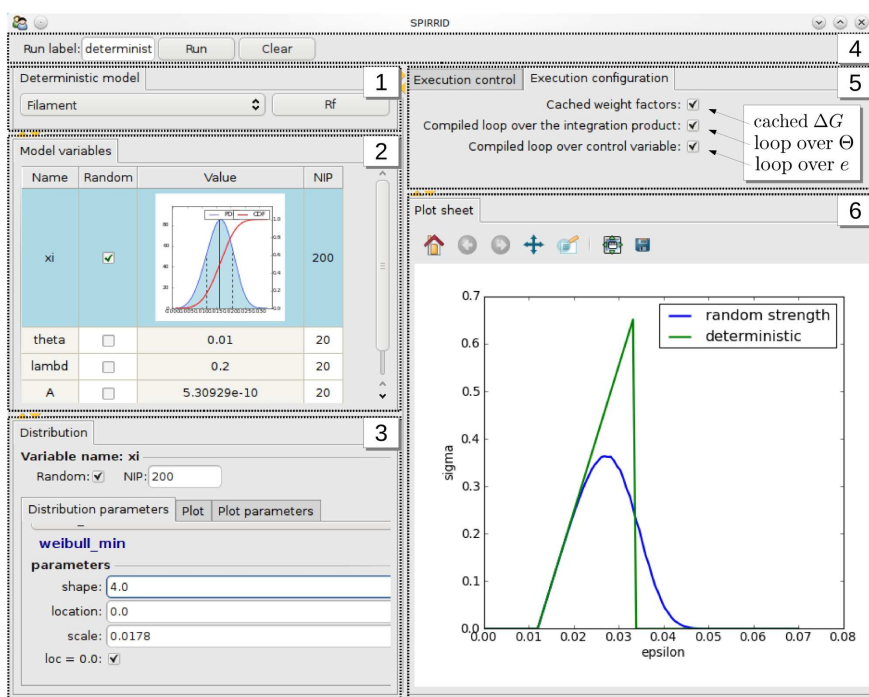
## 9 Python PRO VĚDECKOTECHNICKÉ VÝPOČTY: KNIHOVNA SPIRRID

Programovací jazyky vyšších úrovní určených pro vědecko-technické výpočty nabízejí programátorům aplikací pohodlný a přitom účinný nástroj pro formulaci a implementaci matematických modelů. Příklady takových jazyků vyšší úrovně pro rychlé prototypování vědeckých aplikací jsou např. Maple, Matlab, Octave, R a S+. Tyto nástroje poskytují obsáhlou dokumentaci, nástroje pro vizualizaci, symbolické operace a numerické metody. V porovnání s jazyky nízké úrovně, jako např. FORTRAN, C nebo C++, je vývoj aplikací s jazyky typu Matlab daleko produktivnější, a to zvláště v počátečních stádiích vývoje aplikací. Na druhou stranu však uvedené jazyky mohou jenom stěží konkurovat výkonu aplikace v kompilovaných jazycích. Kompromis mezi flexibilitou a výkonností v oblasti vědecko-technických výpočtů je pro vývojáře aplikací každodenním problémem k řešení. Ideální vývojové prostředí by mělo poskytovat obojí, vysokou produktivitu v raných stádiích vývoje aplikace a současně snadnou cestu k urychlení běhu programu v okamžiku, kdy aplikace dosáhla jistého zralého stavu.

V poslední dekádě se v oblasti otevřeného softwaru (open-source) objevilo obzvláště přitažlivé vývojové prostředí. Skriptovací jazyk Python zavedl platformu pro vývoj a integraci dvou bohatých knihoven `numpy` a `scipy`. Tyto knihovny mají vtěleny algoritmy a metody vyvinuté v posledních desetiletích v kompilovaném jazyku FORTRAN nebo C++. Flexibilita skriptování v Pythonu pro vědecko-technické výpočty byla nedávno detailně prezentována v knize [17]. Nyní je již známo, že vysoká flexibilita skriptovacího jazyka nemusí být nutně doprovázena nižší výkonností v porovnání s kompilovaným programem a zmíněný kompromis lze zredukovat na přijatelnou úroveň.

V publikaci [47] je prezentován otevřený software SPIRRID poskytující prostředí pro účinné a flexibilní výpočty statistických charakteristik funkcí mnohazměrných náhodných vektorů. Uvedené příklady jsou navázány na problém pevnosti svazků a kompozitů vyztužených mnohovláknitými svazky s křehkými paralelními vlákny.

Je ukázán přístup k implementaci matematicky formulovaného problému za pomoci skriptování (jazyk vyšší úrovně) a současného využití potenciálu kompilovaného kódu v jazyce nízké úrovně. Díky dynamickému typování proměnných v jazyce Python jsou komponenty algoritmu s lehkostí naprogramované genericky, za použití šablon. Naimplementovaný program je zdarma dostupný z repozitáře `github` a rovněž v elektronické knihovně časopisu *Computer Physics Communications*.



Obr. 23: Okno programu SPIRRID

## 10 ZÁVĚRY

Problematika spolehlivosti a vlivu velikosti kompozitů vyrobených z kvazikřehkých materiálů je v současnosti nejlépe řešena interdisciplinárními přístupy spojujícími zkušenosti z oborů počtu pravděpodobnosti, statistiky, teorie spolehlivosti stavebních konstrukcí, pokročilé metody počítačové mechaniky, lomové mechaniky, mechaniky kontinua, víceúrovňového modelování, ale i analytická řešení založená např. na aproximaci řešení mezi známými či teoreticky odvozenými asymptotickými limity (*asymptotic matching*). Teoreticky odvozené i výpočtem získané výsledky je nutno průběžně porovnávat s vhodně zacíleným a pečlivě plánovaným i provedeným experimentem. Ukazuje se, že statistické metody návrhu experimentů (*design of experiments*) poskytují racionální přístup k experimentování, které je přirozeně zatíženo mnoha nechtěnými zdroji nahodilosti.

Předložené teze mají ilustrovat, alespoň povrchově, jak skloubení takového mezioborového přístupu, založeného na mnoha různých technikách, může vést k získání nových výsledků. Rovněž se ukazuje, že při řešení hlavního problému byly vyřešeny i problémy, které zdánlivě s hlavním zadáním nesouvisí, ale jejich řešení posouvá poznání v příslušných oborech (viz např. výsledky pro chyby korelačních matic nebo simulační metody na úrovni náhodných veličin i vektorových náhodných polí).

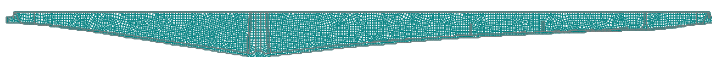
Běžné komerční programy pro řešení mechanické odezvy stavebních konstrukcí jsou v současnosti založeny na metodě konečných prvků (zpravidla kontinuální přístup) a jsou deterministické. To ale potřebám současné praxe přestává vyhovovat. S rozvojem nových materiálů a i s požadavky na hospodárnost návrhu konstrukce, a tedy i využití potenciálu materiálů, přichází potřeba detailního studia, pochopení a modelování náhodné nelineární odezvy na mechanické zatížení. Spolehlivostní přístupy jsou dnes již plně zakotveny v závazných normách pro navrhování, ale normy prozatím poskytují podporu zejména pro metodu dílčích součinitelů spolehlivosti. Při aplikaci neobvyklých konstrukčních systémů a nových materiálů ale vzniká potřeba ověřování spolehlivosti návrhu obecnými metodami, tedy aplikací počtu pravděpodobnosti, statistiky a pokročilých simulačních metod.

Je třeba také zmínit, že na konstrukci je nutno pohlížet v celém jejím životním cyklu – k dnes již používaným mezním stavům únosnosti a použitelnosti je zapotřebí navrhovat i s přihlédnutím na trvanlivost konstrukcí. A právě trvanlivost betonových a podobných kompozitních konstrukcí je výrazně ovlivněna rozvojem trhlin. Modelování rozvoje trhlin představuje složitý problém, k jehož řešení je v předloženém textu použit interdisciplinární přístup spojující moderní počítačovou mechaniku a statistické a pravděpodobnostní metody.

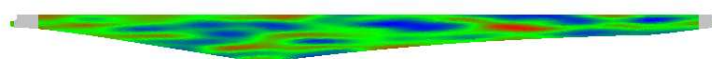
Mnoho z metod a postupů vyvinutých autorem již našlo uplatnění v praxi. Jako jeden z příkladů lze uvést aplikaci programu FReET v kombinaci s programem na řešení nelineární odezvy pomocí nástrojů výpočtové lomové mechaniky – komplexní model dálničního mostu Colle d'Isarco v Itálii.



Dálniční most Colle d'Isarco v Itálii analyzovaný pomocí kombinace programů FReET and ATENA.



Model části mostu v programu ATENA (sít' konečných prvků).



Realizace náhodného pole materiálové pevnosti. Různá korelační délka ve svislém a vodorovném směru. V modelu jsou proměnlivé též parametry předpínací výztuže.

Obr. 24: Aplikace vytvořených softwarových produktů na výpočty reálné mostní konstrukce.

## VÝBĚR Z POUŽITÉ LITERATURY

- [1] AYYUB, B. M., AND LAI, K. L. Structural reliability assessment using Latin Hypercube Sampling. In *ICoSSaR '89, the 5<sup>th</sup> International Conference on Structural Safety and Reliability* (San Francisco, CA, USA, 1989), A. H.-S. Ang, M. Shinozuka, and G. Schuëller, Eds., vol. 2, ASCE, pp. 1177–1184.
- [2] BAŽANT, Z. P. *Scaling of Structural Strength*. Hermes Penton Science (Kogan Page Science), 2002.
- [3] BAŽANT, Z. P., AND NOVÁK, D. Energetic-statistical size effect in quasi-brittle failure at crack initiation. *ACI Materials Journal* 97, 3 (2000), 381–392.
- [4] BAŽANT, Z. P., AND NOVÁK, D. Probabilistic nonlocal theory for quasi-brittle fracture initiation and size effect II: Application. *Journal of Engineering Mechanics* 126, 2 (2000), 175–185.
- [5] BAŽANT, Z. P., AND OH, B.-H. Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures (RILEM, Paris)* 16 (1983), 155–177.
- [6] BAŽANT, Z. P., AND PLANAS, J. *Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials*. CRC Press, Boca Raton Florida and London, 1998.
- [7] CASTILLO, E. *Extreme value theory in engineering*. Academic Press, Inc. (London) LTD., 1988.
- [8] ČERVENKA, V., AND PUKL, R. ATENA - Computer program for nonlinear finite element analysis of reinforced concrete structures. Tech. rep., Červenka Consulting, Prague, Czech Republic, 2003. Program documentation (Theory and User's guide).
- [9] DANIELS, H. E. The statistical theory of the strength of bundles of threads. *Proc. Royal Soc. (London)* 183A (1945), 405–435.
- [10] FISHER, R. A., AND TIPPETT, L. H. C. Limiting forms of the frequency distribution of the largest and smallest member of a sample. *Proc., Cambridge Philosophical Society* 24 (1928), 180–190.
- [11] GNEDENKO, B. V. Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *Annals of Mathematics, 2<sup>nd</sup> Ser* 44, 3 (1943), 423–453.
- [12] GUMBEL, E. J. *Statistics of extremes*. Columbia University Press, New York, 1958.
- [13] HUNTINGTON, D. E., AND LYRINTZIS, C. S. Improvements to and limitations of Latin Hypercube Sampling. *Probabilistic Engineering Mechanics* 13, 4 (1998), 245–253.
- [14] IMAN, R. C., AND CONOVER, W. J. Small sample sensitivity analysis techniques for computer models with an application to risk assessment. *Communications in Statistics: Theory and Methods* A9, 17 (1980), 1749–1842.
- [15] IMAN, R. C., AND CONOVER, W. J. A distribution free approach to inducing rank correlation among input variables. *Communications in Statistics B11* (1982), 311–334.
- [16] LAARHOVEN, P. J. M. V., AND AARTS, E. H. L. *Simulated Annealing: Theory and Applications*. Kluwer Academic Publishers + D. Reidel Publishing Company, Holland, Dordrecht, The Netherlands, 1987.
- [17] LANGTANGEN, H.P. *A Primer on Scientific Programming with Python*, first ed., Springer, 2009.
- [18] LEVY, M., AND SALVADORI, M. *Why buildings fall down?* W.W. Norton, New York, 1992.
- [19] LIU, W. K., BELYTSCHKO, T., AND LUA, Y. J. *Probabilistic Structural Mechanics Handbook: Theory and Industrial Applications*, 4<sup>th</sup> ed. Springer Verlag, New York, Texas, USA, 1995.

- [20] LIU, W. K., BELYTSCHKO, T., AND LUA, Y. J. On the Load–Unload (L–U) and Force–Release (F–R) Algorithms for Simulating Brittle Fracture Processes via Lattice Models. *International Journal of Damage Mechanics* 21(7), 239–245, 2012.
- [21] MCKAY, M. D., CONOVER, W. J., AND BECKMAN, R. J. A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics* 21 (1979), 239–245.
- [22] OTTEN, R. H. J. M., AND GINNEKEN, L. P. P. P. *The Annealing Algorithm*. Kluwer Academic Publishers, USA, 1989.
- [23] SMITH, R. L. The asymptotic distribution of a series-parallel system with equal load-sharing. *The Annals of Probability* 10, 1 (1982), 137–171.
- [24] VANMARCKE, E. H., SHINOZUKA, M., NAKAGIRI, S., SCHUËLLER, G. I., AND GRIGORIU, M. Random fields and stochastic finite elements. *Structural Safety* 3, 3–4 (1986), 143–166.
- [25] WAARTS, P. H. Structural reliability in Diana. Tech. Rep. No. 1: 14-15, Diana Newsletter, 2001.
- [26] WEIBULL, W. The phenomenon of rupture in solids. *Royal Swedish Institute of Engineering Research (Ingenioersvetenskaps Akad. Handl.)*, Stockholm 153 (1939), 1–55.
- [27] CHUDOBA, R., KONRAD, M., VOŘECHOVSKÝ, M., AND ROYE, A. (2007) *Thin fiber and textile reinforced cementitious systems (SP-244)*. ACI Special publication. American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, ch. Numerical and experimental study of imperfections in the yarn and its bond to cementitious matrix, electronic book on CD–ROM.
- [28] CHUDOBA, R., VOŘECHOVSKÝ, M., AND KONRAD, M. (2006) Stochastic modeling of multi-filament yarns I: Random properties within the cross section and size effect. *International Journal of Solids and Structures* 43, 3-4, 413–434, [IF = 1.857].
- [29] VOŘECHOVSKÝ, M., AND CHUDOBA, R. (2006) Stochastic modeling of multi-filament yarns: II. Random properties over the length and size effect. *International Journal of Solids and Structures* 43, 3-4, 435–458, [IF = 1.857].
- [30] BAŽANT, Z. P., VOŘECHOVSKÝ, M., AND NOVÁK, D. (2007) Asymptotic prediction of energetic-statistical size effect from deterministic finite element solutions. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)* 133, 2, 153–162, [IF = 0.990].
- [31] BAŽANT, Z. P., PANG, S. D., VOŘECHOVSKÝ, M., AND NOVÁK, D. (2007) Energetic-statistical size effect simulated by SFEM with stratified sampling and crack band model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 71 (11), 1297–1320, [IF = 2.229].
- [32] VOŘECHOVSKÝ, M. (2006) Size effects in concrete specimens studied via stochastic fracture mechanics. *Engineering mechanics* 13, 5, 385–401.
- [33] VOŘECHOVSKÝ, M. (2007) Interplay of size effects in concrete specimens under tension studied via computational stochastic fracture mechanics. *International Journal of Solids and Structures* 44, 9, 2715–2731, [IF = 1.857].
- [34] VOŘECHOVSKÝ, M., NOVÁK, D. (2007) Correlation control in small sample Monte Carlo type simulations I: A Simulated Annealing approach. *Probabilistic Engineering Mechanics (Elsevier)*, 24 (3), 452–462, [IF = 1.245].
- [35] CHUDOBA, R., VOŘECHOVSKÝ, M., ECKERS, V., GRIES, T. (2007) Effect of twist, fineness, loading rate and length on tensile behavior of multifilament yarns (a multivariate study). *Textile Research Journal (Sage)* 77 (11), 880–891, [IF = 1.122].
- [36] VOŘECHOVSKÝ, M. (2008) Simulation of simply cross correlated random fields by series expansion methods. *Structural safety (Elsevier)* 30 (4), 337–363, [IF = 2.276].

- [37] VOŘECHOVSKÝ, M., SADÍLEK, V. (2008) Computational modeling of size effects in concrete specimens under uniaxial tension. *International Journal of Fracture (Springer)* 154 (1-2), 27–49, [IF = 1.485].
- [38] VOŘECHOVSKÝ, M. (2010) Incorporation of statistical length scale into Weibull strength theory for composites. *Composite Structures*, 92 (9), 2027–2034, [IF = 2.240].
- [39] ELIÁŠ, J., FRANTÍK, P., VOŘECHOVSKÝ, M. (2010) Improved sequentially linear solution procedure. *Engineering Fracture Mechanics* 77 (12), 2213–2402, [IF = 1.713].
- [40] VOŘECHOVSKÝ, M. (2011) Discussion of “Mechanism behind the Size Effect Phenomenon” by Xiaozhi Hu and Kai Duan, *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)* 137 (4), 304, [IF = 0.990].
- [41] VOŘECHOVSKÝ, M., SADÍLEK, V. (2011) Probabilistic determination of the number of fibers bridging a crack in short fiber reinforced composites. *Bulletin of Applied Mechanics* 7 (26), 21–25.
- [42] CHUDOBA, R., VOŘECHOVSKÝ, M., RYPL, R. (2011) Identification of the effective bundle length in a multifilament yarn from the size effect response. *Journal of Composite Materials - SAGE* 45 (25), 70–78, [IF = 1.068].
- [43] ELIÁŠ, J., VOŘECHOVSKÝ, M. (2012) The effect of mesh density in lattice models for concrete with incorporated mesostructure. *Key Engineering Materials* 488-489, 29–32.
- [44] VOŘECHOVSKÝ, M. (2012) Correlation control in small sample Monte Carlo type simulations II: Analysis of estimation formulas, random correlation and perfect uncorrelatedness. *Probabilistic Engineering Mechanics (Elsevier)* 29, 105–120, [IF = 1.245].
- [45] VOŘECHOVSKÝ, M. (2012) Optimal singular correlation matrices estimated when sample size is less than the number of random variables. *Probabilistic Engineering Mechanics (Elsevier)* 30, 104–116, [IF = 1.245].
- [46] VOŘECHOVSKÝ, M., ELIÁŠ, J. (2013) Relation between structural size and the discretization density of brittle homogeneous lattice models. *Key Engineering Materials* 525-526, 485-488.
- [47] CHUDOBA, R., SADÍLEK, V., RYPL, R., VOŘECHOVSKÝ, M. (2013) Using python for scientific computing: an efficient and flexible evaluation of the statistical characteristics of functions with multivariate random inputs. *Computer Physics Communications (Elsevier)* 184 (2), 414–427, DOI 10.1016/j.cpc.2012.08.021, [IF = 3.268].
- [48] BOŠTÍK, J., MIČA, L., VOŘECHOVSKÝ, M. (2012) Posouzení únosnosti plošného základu - část 1: návrh pomocí metody dílčích součinitelů. *Stavební obzor* (1), 1–3.
- [49] VOŘECHOVSKÝ, M., MIČA, L., BOŠTÍK, J. (2012) Posouzení únosnosti plošného základu - část 2: ověření spolehlivosti návrhu plně pravděpodobnostní metodou. *Stavební obzor* (2), 40–45.
- [50] NOVÁK, D., VOŘECHOVSKÝ, M. AND RUSINA, R. (2006) FREET - Feasible Reliability Engineering Efficient Tool, User's and Theory guides. Brno/Cervenka Consulting, <http://www.freet.cz>, Czech Republic.
- [51] VOŘECHOVSKÝ, M. (2004) *Stochastic fracture mechanics and size effect*. PhD thesis, Brno University of Technology, Brno, Czech Republic.
- [52] VOŘECHOVSKÝ, M. (2007) *Stochastic computational mechanics of quasibrittle structures*. Habilitation thesis presented at Brno University of Technology, Brno, Czech Republic.
- [53] BAŽANT, Z. P., PANG, S. D., VOŘECHOVSKÝ, M., NOVÁK, D., AND PUKL, R. Statistical size effect in quasibrittle materials: Computation and extreme value theory. In *5<sup>th</sup> Int. Conference FraMCoS – Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures* (Vail, Colorado, USA, 2004), Li et al. (Eds.), vol. 1, Ia-FraMCoS, pp. 189–196.

- [54] VOŘECHOVSKÝ, M. Performance study of correlation control in Monte Carlo type simulation. In *3<sup>rd</sup> PhD Workshop Brno-Prague-Weimar, also ISM-Bericht 1/2006 Bauhaus-Universität Weimar* (Weimar, Germany, 2006), pp. 35–38.
- [55] VOŘECHOVSKÝ, M., CHUDOBA, R., AND JEŘÁBEK, J. Adaptive probabilistic modeling of localization, failure and size effect of quasi-brittle materials. In *III European Conference on Computational Mechanics (ECCM-2006)* (Lisbon, Portugal, 2006), Soares et al. (Eds.), National Laboratory of Civil Engineering, Springer, p. 286 (abstract). Full papers on CD-ROM.
- [56] VOŘECHOVSKÝ, M., AND NOVÁK, D. Correlated random variables in probabilistic simulation. In *4<sup>th</sup> International Ph.D. Symposium in Civil Engineering* (Munich, Germany, 2002), Schießl et al. (Eds.), vol. 2, Millpress, Rotterdam, pp. 410–417.
- [57] VOŘECHOVSKÝ, M., AND NOVÁK, D. Efficient random fields simulation for stochastic FEM analyses. In *2<sup>nd</sup> M.I.T. Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics* (Cambridge, USA, 2003), K. J. Bathe (Ed.), Elsevier Science Ltd., Oxford, UK, pp. 2383–2386.
- [58] VOŘECHOVSKÝ, M., AND NOVÁK, D. Simulation of random fields for stochastic finite element analyses. In *ICoSSaR '05 the 9<sup>th</sup> International Conference on Structural Safety and Reliability* (Rome, Italy, 2005), Augusti et al. (Eds.), Millpress Rotterdam, Netherlands, pp. 2545–2552.
- [59] VOŘECHOVSKÝ, M. Hierarchical Subset Latin Hypercube Sampling for Correlated Random Vectors. In *Proceedings of the First International Conference on Soft Computing Technology in Civil, Structural and Environmental Engineering* (Madeira, Portugal, 2009), B.H.V. Topping, Y. Tsompanakis (Eds.), Civil-Comp Press, Stirlingshire, Scotland.
- [60] VOŘECHOVSKÝ, M. Extension of sample size in Latin Hypercube Sampling with correlated variables. In *Proceedings of 4<sup>th</sup> International Workshop on Reliable Engineering Computing* (Singapore, 2010), Beer et al. (Eds.), Research Publishing Services, Singapore, pp. 353–368.

## 11 VÝSLEDKY PŘI INDIVIDUÁLNÍM VEDENÍ STUDENTŮ

V oblasti individuálního vedení studentů se autor zaměřuje na navázání spolupráce se studenty již v průběhu nižších ročníků a zapojuje je do řešení grantových úkolů jako pomocné vědecké síly. Zkušenosti ukazují, že pozdější práce na bakalářských, diplomových a doktorských dizertačních pracích pak může být prováděna na aktuálních problémech řešených ve vědeckých projektech. Autor se věnuje spíše menšímu počtu studentů, u kterých se projevuje snaha a též excelence výsledků.

Autor prozatím vedl 7 prací, které se zúčastnily Studentské vědecké a odborné činnosti (fakultní kolo, několik prvních míst); 3 práce z toho postoupily i do mezinárodního kola. Studenti vedení autorem při tvorbě bakalářských, diplomových a doktorských dizertačních prací získali při promoci následující hodnocení:

- 6x Uznání děkana FAST za vynikající studijní výsledky,
- 5x Uznání děkana FAST za vzorně vypracovanou diplomovou práci a její obhajobu,
- 2x Uznání děkana FAST za vzorně vypracovanou bakalářskou práci a její obhajobu,
- 2x medaile Signum prosperitatis,
- 1x Cena Josefa Hlávky, Nadání Josefa, Marie a Zdeňky Hlávkových,
- 1x Cena Rektora,
- 1x Cena České komory autorizovaných inženýrů a techniků činných ve výstavbě a FAST VUT v Brně za diplomovou práci, 1. místo,
- 1x Čestné uznání České betonářské společnosti za vynikající diplomovou práci v oboru betonu a betonových konstrukcí v kategorii "Technologie betonu",
- 1x Čestné uznání prof. Babušky (3. místo) za vynikající práci v oboru počítačových věd, Česká společnost pro mechaniku a Jednota českých matematiků a fyziků,

## 12 KONCEPCE DALŠÍ VĚDECKÉ A PEDAGOGICKÉ ČINNOSTI

V další vědecké a odborné činnosti předpokládá autor zejména navázání na dosavadní práci, zaměření bude zejména na následující oblasti:

- modelování kvazikřehkých materiálů, teoretické a experimentální ověřování mechanismů porušování, aspekty nelineární lomové mechaniky v počítačovém modelování. Zaměření na zkoumání, popis a modelování lomové procesní zóny a v návaznosti též určování hodnot lomové energie jakožto základního parametru popisujícího lomové chování kvazikřehkého materiálu;
- rozvoj specializované laboratoře ústavu stavební mechaniky, kterou autor založil a vybavil v rámci řešení kapitálového projektu FRVŠ. Zejména se jedná o plánované dovybavení laboratoře pokročilým přístrojovým vybavením (ARAMIS 5M) v rámci řešení projektu Admas a jeho napojení na zkušební stroj. Součinnost zkušebního stroje Zwick Z100 se systémem Aramis umožní experimentální sledování rozvoje lomové procesní zóny v materiálu při mechanickém zatěžování;
- moderní metody simulace rozvoje poškození konstrukcí na bázi metod fyzikální diskretizace (mřížkové a částicové modelování);
- studium chování moderních kompozitních materiálů jako např. textilní beton a materiály kombinující strukturovanou výztuž s rozptýlenou výztuží. Po dosavadním rozvoji statistické teorie pevnosti je předpokládáno zejména zacílení na trvanlivost, což u těchto moderních kompozitů obnáší zejména studium, detailní popis a modelování trhání s důrazem na šířky a hustotu trhlin. Způsob rozvoje trhlin v kompozitu má významný vliv na prostup činitelů způsobujících degradaci materiálu a jeho stárnutí;
- v oblasti aplikované statistiky je předpokládán rozvoj metod umožňujících modelování závislých náhodných vektorů s aplikací na statistickou, citlivostní a zejména spolehlivostní analýzu inženýrských úloh. Zacílení se předpokládá především na studium a rozvoj metod využívajících kopulí, tedy mocného a přitom obecného popisu závislosti náhodných veličin. Dále se autor zaměří na metody *quasi Monte Carlo* (sekvence), metody „space filling designs“, metody simulací náhodných polí a metodu stochastických konečných prvků;
- s předchozím bodem souvisí i rozvoj metod a softwaru pro uvedené typy analýz. Autor se bude dále věnovat rozvoji softwaru FReET, který je na VUT v Brně i na mnoha pracovištích ve světě používán k výzkumu, průmyslovým aplikacím i ve výuce. Software bude rozšiřován jak o vlastní postupy, tak o úspěšné metody vyvíjené na jiných pracovištích;
- je předpokládán další rozvoj softwaru ve spolupráci s firmou Červenka Consulting, která vyvíjí software na bázi MKP pro nelineární analýzu betonových, železobetonových a předpjatých konstrukcí;
- popularizace pravděpodobnostních přístupů a jejich prosazování do navrhování a posuzování nosných konstrukcí;
- hledání širších souvislostí spolehlivostního a rizikového inženýrství a robustního navrhování konstrukcí, interdisciplinární řešení;
- rozvoj metod optimalizace navrhování konstrukcí na úrovni deterministické i pravděpodobnostní s přihlédnutím k celému životnímu cyklu konstrukce.

Výzkumný potenciál bude rozvíjen v součinnosti s *pedagogickou činností* a potřebami praxe. Předávání poznatků a zkušeností z vědeckovýzkumné činnosti bude realizováno ve výuce, zejména ve specializovaných předmětech magisterského a doktorského studia. Práce s vybranými studenty magisterského studia a především s doktorandy patří k nejnáročnějším úkolům pedagoga působícího na vysoké škole. Autor se dále bude zvýšenou měrou angažovat a bude vytvářet příznivé podmínky pro nadané studenty magisterského a zejména doktorského studia tím, že je bude zapojovat do výzkumných projektů, což je zásadní předpoklad jejich rozvoje. Autor bude i nadále vést výuku řady předmětů a bude se podílet na vedení předmětů v anglickém jazyce. Autor je před dokončením anglicky psaného skriptu – knihy sloužící jako hlavní studijní materiál předmětu BD02 Pružnost a pevnost.

Autor plánuje svůj další podíl na tvorbě excelentních týmů fakultních či celouniverzitních projektů (autor je např. zapojen jako mentor do projektu OPVK *Podpora tvorby excelentních týmů mezioborového výzkumu na VUT 2012-2015*).

Autor bude dále rozvíjet mezinárodní spolupráci s americkými pracovišti (i v rámci právě běžícího výzkumného projektu), s německým pracovištěm v Cáchách (návrh mezinárodního projektu je právě v posouzení) i s univerzitou BOKU ve Vídni. Dále bude rozvíjena spolupráce s dalšími pracovišti, např. s Brazílií, kde právě připravuje přihlášku o mezinárodní projekt, který má podpořit společný výzkum a výměnu pracovníků a studentů. Spolupráce bude rozvíjena rovněž s národními pracovišti (ČVUT v Praze, VŠB – TU Ostrava, firma Červenka Consulting).

Po úspěšné organizaci mezinárodní konference REC2012 autor předpokládá organizaci dalších významných mezinárodních akcí, které mj. pomáhají k reprezentaci VUT.

## Summary in English

The main topics of the author's interest are structural safety and reliability, and modeling the complex behavior of quasibrittle composites with consideration of their random properties and disorder. His approach to these problems is strongly interdisciplinary, combining tools from the areas of probability theory and statistics (random variables, vectors and random fields), advanced computer mechanics methods (the finite element method – nonlinear, with mesh adaptivity; particle and lattice modeling), fracture mechanics, and multiscale modeling, but also analytical approaches such as asymptotic matching, etc. Alongside theoretical derivations and numerical computing, the author also focuses on targeted and carefully performed experimentation. Exploitation of the methods of designing experiments is a must when testing materials with rather complex behavior such as concrete, fiber-reinforced concrete and textile-reinforced concrete – i.e. materials exhibiting a multitude of sources of randomness and disorder.

The main achievements of the author in the field of probabilistic approaches are: (i) a method for correlation control in samples of random vectors, (ii) theoretical results dealing with random correlation matrices and optimal singular correlation matrices (probability theory, statistics and discrete mathematics), (iii) a novel technique for the extension of sample size in Latin Hypercube Sampling, (iv) a novel technique for the simulation of cross-correlated non-Gaussian random fields and the application of this technique in the stochastic finite element method.

Results obtained in the field of textile reinforced concrete and the testing of multifilament yarns: (i) the improvement of statistical models of a single fiber bundle and crack bridge with detailed kinematics; (ii) approaches to the experimental testing of multifilament yarns - the designing of experiments and the foundation of a laboratory equipped with new instruments and a testing machine; (iii) a methodology for the identification of effective bundle length; (iv) the introduction of the statistical length scale into classical Weibull theory, and its justification using extreme value theory applied to random processes; (v) the development of a theory and computation platform for the multiscale modeling of textile reinforced concrete based on statistical crack bridge models (not mentioned in this thesis).

The author has also advanced the understanding of the interplay of statistical and energetic size effects in quasibrittle structures. He has studied this complex behavior numerically using a nonlinear stochastic finite element method and has also derived a scaling formula for the prediction of the random nominal strength of structures. Regarding computational tools serving for the numerical modeling of concrete with spatially varying properties, he has collaborated in the development of (i) an adaptive finite element method and (ii) random lattice and particle modeling.

Many of the advances are being implemented into commercial and academic computer programs by the author (FReET, Bundle, SMART<sup>EDT</sup>, SPIRRID, RC-Lifetime, etc.). A unique example of such a program is the SARA system, which successfully combines ATENA software for nonlinear finite element modeling and FReET software as its probabilistic engine. FReET software also serves as the core of the FReET-D program for the assessment of degradation effects in reinforced and pre-stressed concrete structures (featuring models for carbonation, chloride ingress, reinforcement corrosion, frost attack, sulfate attack on concrete in sewer collection systems and acid attack on concrete).