

**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**  
**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**  
*ENERGETICKÝ ÚSTAV*  
*ODBOR HYDRAULICKÝCH STROJŮ V. KAPLANA*

**Ing. Vladimír HABÁN**

**TLUMENÍ TLAKOVÝCH  
A PRŮTOKOVÝCH PULZACÍ**

**PRESSURE AND FLOW PULSATION DAMPING**

**Teze disertační práce**

**PhD Thesis**

*obor:* **Konstrukční a procesní inženýrství**

*školitel:* **Prof. Ing. František Pochylý, CSc.**

*opONENTI:* **Prof. Ing. Jaroslav Bláha, DrSc.**

**Prof. Ing. Pavel Št'áva, CSc.**

**Ing. Villibald Kolarčík, CSc.**

*datum obhajoby:* **6. 4. 2001**

© Vladimír Habán, 2001

ISBN 80-214-1905-9

ISSN 1213-4198

# OBSAH

<b>1</b>	<b>Úvod.....</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Snížení amplitudy tlakových a průtokových pulzací.....</b>	<b>6</b>
2.1	Využití disipace části nestacionární mechanické energie systému .....	6
2.1.1	Sériově řazené hydraulické prvky .....	6
2.2	Využití plynového akumulátoru .....	7
2.3	Plynový akumulátor a sériový odpor.....	7
2.3.1	Porovnání měření a výpočtu .....	8
2.4	Dynamický tlumič .....	10
2.4.1	Určení přídavné hmotnosti .....	11
2.4.2	Laděná odbočka (Helmholtzův rezonátor) .....	13
<b>3</b>	<b>Disipace pulzační energie v trubici.....</b>	<b>14</b>
3.1	Odvození vztahu pro Laplaceův obraz rychlosti kapaliny .....	15
3.2	Stanovení paměťové funkce rychlosti tekutiny .....	16
3.2.1	Měření nestacionárního rychlostního profilu .....	18
3.2.2	Porovnání výsledků měření s výpočtem .....	18
3.3	Paměťová funkce střední rychlosti tekutiny .....	20
3.4	Výpočet derivace rychlosti na poloměru $R$ .....	21
3.5	Určení ztrátového součinitele .....	22
<b>4</b>	<b>Výpočet tlakových a průtokových pulzací .....</b>	<b>24</b>
<b>5</b>	<b>Závěr.....</b>	<b>27</b>
<b>6</b>	<b>Summary .....</b>	<b>28</b>
<b>7</b>	<b>Použitá literatura .....</b>	<b>29</b>
<b>8</b>	<b>Curriculum vitae .....</b>	<b>31</b>

## Základní označení

Symbol	roomer	popis
<b>c</b>	$[m.s^{-1}]$	vektor rychlosti
<b>d</b>	$[m]$	průměr potrubí
<b>D</b>	$[W]$	disipační funkce
<b>E</b>	$[kg.m^{-1}.s^{-2}]$	modul pružnosti materiálu potrubí
<b>E</b>	$[J]$	energie
$F(\zeta,t)$	$[1]$	paměť rychlosti tekutiny
$F_d(t)$	$[1]$	paměť derivace rychlosti tekutiny
$F_s(t)$	$[1]$	paměť střžení rychlosti tekutiny
<b>K</b>	$[kg.m^{-1}.s^{-2}]$	modul pružnosti kapaliny
<b>m</b>	$[kg]$	hmotnost
<b>n</b>	$[1]$	jednotkový vektor
<b>p</b>	$[kg.m^{-1}.s^{-2}]$	tlak
<b>P</b>		přenosová matice úseku potrubí
<b>q</b>	$[m^3.s^{-1}]$	nestacionární složka průtoku
<b>Q</b>	$[m^3.s^{-1}]$	průtok
<b>R</b>	$[m]$	poloměr trubice
<b>R</b>		přenosová matice hydraulického prvku
<b>s</b>	$[s^{-1}]$	parametr Laplaceovy transformace podle času
<b>S<sub>o</sub></b>	$[m^2]$	průřez nedeformovaného potrubí
<b>t</b>	$[s]$	Čas
<b>v<sub>o</sub></b>	$[m.s^{-1}]$	rychlost zvuku
<b>w</b>		stavový vektor
$Y(\zeta,s)$	$[s]$	Laplaceův obraz paměti rychlosti tekutiny
$Y_d(s)$	$[s]$	Laplaceův obraz paměti derivace rychlosti tekutiny
$Y_s(s)$	$[s]$	Laplaceův obraz paměti střední rychlosti tekutiny
$\Gamma(t)$	$[1]$	paměť ztrátového součinitele
$\Pi_{ij}$		nevratný tenzor napětí
$\delta_{ij}$		Kroneckerův tenzor
$\varphi_k$	$[m^{-1}]$	potenciál rychlosti v závislosti na složkách rychlosti tělesa
<b>v</b>	$[m^2.s^{-1}]$	kinematická viskozita kapaliny
<b>σ</b>	$[kg.m^{-1}.s^{-2}]$	nestacionární složka tlaku
$\psi(s)$	$[s^{-1}]$	Laplaceův obraz paměti ztrátového součinitele

# 1 ÚVOD

Předpokládáme, že hydraulický systém je složen z pružných trubíc obsahujících stlačitelnou tekutinu a lokálně umístěných hydraulických prvků, pod kterými rozumíme např. rozvětvení, odstředivé čerpadlo, turbínu, plynový akumulátor, hydraulický odpor, dynamický tlumič a podobně.

Ladění hydraulických systémů mimo rezonanční pásmo je velmi problematické, protože hydraulický systém mění své parametry v závislosti na čase. Zejména rychlost zvuku v závislosti na teplotě, tlaku a na množství obsaženého vzduchu a nečistot v tekutině. V hydraulických obvodech, stejně jako u mechanických soustav jsou nebezpečné dva stavy, přechodové a vynucené kmitání. K omezování amplitud tlaku a průtoku pro každý z nich je nutno přistupovat rozdílně a to jak při matematickém řešení, tak při mechanice tlumení.

Návrh tlumení má však význam jen v kombinaci se systémem. Je nutno uvážit, který tvar kmitu chceme tlumit a k čemu má tlumič sloužit.

Metody pomocí kterých lze dynamiku tekutinového systému řešit, lze rozdělit na metody používané pro řešení ve frekvenční oblasti a na metody pro řešení v časovém prostoru. K řešení ve frekvenční oblasti lze s výhodou použít metodu přenosových matic. Tato metoda je založena na Laplaceově transformaci podle času v linearizovaných rovnicích kontinuity, rovnováhy a okrajových podmínkách. V této lineární teorii, na rozdíl od teorie nelineární, lze spatřovat základní inspiraci k ovlivňování dynamických vlastností hydraulického systému.

K řešení dynamických jevů v časovém prostoru se dnes nejčastěji používají metody charakteristik, metoda Lax-Vendroffova. Principem těchto numerických metod je, rozdělení trubice, ze kterých je systém složen na malé úseky, následně se pro každý úsek trubice sestaví rovnice kontinuity a rovnice rovnováhy, které se příslušnou numerickou metodou řeší. Tyto numerické metody jsou vhodné pro řešení vodního rázu, nutné pro řešení nelineárního systému. Řešení vlastních frekvencí a tvarů kmitu, zvláště při vyšších frekvencích, je pomocí těchto numerických metod téměř nemožné. Pro vyšší frekvence vychází dělení trubice na příliš krátké úseky, doby výpočtu ustálených amplitud tlaku a průtoku pro jednu frekvenci se proto neúměrně prodlužují a pro zjištění frekvenčně amplitudové charakteristiky je nutno počítat ustálené kmitání pro celou paletu frekvencí v rozsahu, kde hledáme nebezpečné rezonanční kmitání. Z těchto důvodů je opět výhodné použití metody přenosových matic a přechodové kmitání v časové oblasti řešit rozvojem podle vlastních tvarů kmitu nebo využitím zpětné Laplaceovy transformace[1].

Pokud dokážeme numericky modelovat a následně řešit kmitání v hydraulickém obvodu, můžeme optimalizovat a zvolit vhodnou metodu pro tlumení tlakového a průtokového kmitání v tomto obvodu.

K omezování amplitudy tlakových a průtokových pulzací, za předpokladu harmonické budící funkce ať tlakové, průtokové nebo smíšené v daném bodě potrubního systému, je možno přistoupit následujícími způsoby:

1. Využitím disipace části nestacionární mechanické energie systému.
  - a) sériově řazených hydraulických prvků
  - b) paralelně řazených hydraulických prvků
  - c) trubice
2. Využitím plynového akumulátoru
3. Využitím dynamického tlumiče

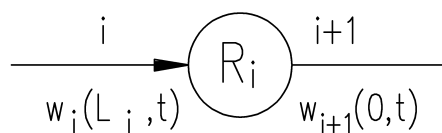
## 2 SNIŽOVÁNÍ AMPLITUDY TLAKOVÝCH A PRŮTOKOVÝCH PULZACÍ

### 2.1 Využití disipace části nestacionární mechanické energie systému

#### 2.1.1 Sériově řazené hydraulické prvky

Tyto prvky dobře tlumí nestacionární tlakové a průtokové pulzace. Mohou však způsobit velké tlakové ztráty při stacionárním průtoku. Nejčastěji používané jsou clony, armatury, speciální regulační odpory. Intensita tlumení je závislá na poloze hydraulického odporu vzhledem k tvaru kmitu, který hodláme tlumit. Lze se o tom přesvědčit buď přímým výpočtem tvaru kmitu tlaku a průtoku (např. dle metodiky výpočtu uvedené v kapitole 6), nebo analýzou příspěvku zmíněného prvku k dynamické stabilitě systému.

Tuto analýzu u tohoto jednoduchého prvku lze provést z porovnání energií která do uzlu přitéká a která z uzlu odtéká.



Obr. 1

Předpokládejme, že trubicí  $i$  vtéká do hydraulického prvku příkon  $E_i$  a z hydraulického prvku do trubice  $i+1$  vtéká  $E_{i+1}$ .

Rozdíl těchto příkonů je možno vyjádřit vztahem (1) a je roven disipační funkci  $D$ :

$$E_i(L_i, t) - E_{i+1}(0, t) = D \quad (1)$$

Příkon lze vyjádřit součinem tlaku a průtoku v daném časovém okamžiku dosazením do vztahu (1) dostaneme vztah (2):

$$p_i(L, t) \cdot Q_i(L, t) - p_{i+1}(0, t) \cdot Q_{i+1}(0, t) = D \quad (2)$$

Zavedeme-li stavový vektor  $\mathbf{w}_i = \begin{pmatrix} Q_i \\ p_i \end{pmatrix}$  a matici  $\Xi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  je možno po dosazení do 2 psát:

$$\mathbf{w}_i^T(L, t) \cdot \Xi \cdot \mathbf{w}_i(L, t) - \mathbf{w}_{i+1}^T(0, t) \cdot \Xi \cdot \mathbf{w}_{i+1}(0, t) = 2 \cdot D \quad (3)$$

Uvážíme-li přechodovou matici hydraulického prvku  $R_i$ , která popisuje vztah mezi stavovými vektory před a za hydraulickým prvkem dle vztahu  $\mathbf{w}_{i+1}(0, t) = R_i \cdot \mathbf{w}_i(L, t)$  lze po dosazení do vztahu (3) psát:

$$\mathbf{w}_i^T(L, t) \cdot \Xi \cdot \mathbf{w}_i(L, t) - \mathbf{w}_i^T(0, t) \cdot R_i^T \cdot \Xi \cdot R_i \cdot \mathbf{w}_i(0, t) = 2 \cdot D \quad (4)$$

Po úpravě dostaneme:

$$\mathbf{w}_i^T(L, t) \cdot (\Xi - R_i^T \cdot \Xi \cdot R_i) \cdot \mathbf{w}_i(L, t) = 2 \cdot D \quad (5)$$

Po dosazení přechodové matice pro odpor ve tvaru  $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b & 1 \end{pmatrix}$  do vztahu (5) získáme:

$$\mathbf{w}_i^T(L, t) \cdot \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \mathbf{w}_i(L, t) = 2 \cdot D$$

$$(Q_i(L, t) \quad p_i(L, t)) \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_i(L, t) \\ p_i(L, t) \end{pmatrix} = 2 \cdot D \quad (6)$$

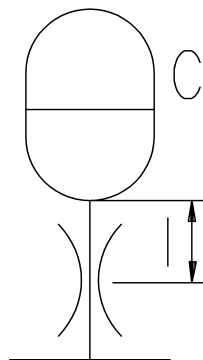
Po roznásobení maticového vyjádření dle vztahu (6) dostaneme vztah (7) pro výpočet disipační funkce odporu.

$$D = b \cdot Q_i^2 \quad (7)$$

Ze vztahu (7) plyne, že největší tlumení mají tyto prvky na těch tvarech kmitu, které mají v místě prvku kmitnu průtoku, na tvary kmitů které mají v místě odporu uzel průtoku nemá hydraulický odpor žádný vliv.

## 2.2 Využití plynového akumulátoru

Plynový akumulátor je vždy charakterizován statickou pružinou, ať mechanickou či plynovou a odporem.



Obr. 2

Přechodová matice akumulátoru má tvar:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & -sC \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{V}{p} = \frac{V_0 \cdot p_0}{p^2}$$

kde  $V_0$  objem akumulátoru  
 $p_0$  tlakování akumulátoru  
 $p$  střední hodnota tlaku při provozu

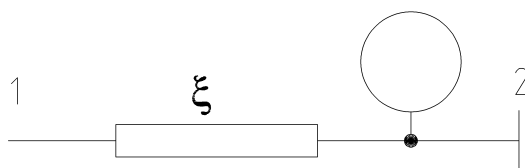
Je možno ho využít k přeladění systému a tím ke snížení amplitudy tlakových pulzací vynuceného kmitání hydraulického obvodu nebo, což je častější, ke snížení amplitud přechodového kmitání, při šíření tlakové vlny od zdroje pulzací. V obou případech bývá vhodné umístit plynový akumulátor blízko zdroje pulzací. Zásadně však mimo uzel tlaku toho tvaru kmitu, u kterého chceme snížit amplitudu pulzací. Plynový akumulátor může být konstruován tak, aby současně plnil funkci paralelního odporu.

## 2.3 Plynový akumulátor a sériový odpor

Jedná se o tlumení tlakových pulzací na stejném principu jako v případě samotného hydraulického odporu. Výhodné použití je pro případ, že v hlavní větvi je nulový stacionární průtok a konstrukce odporu neumožňuje navrhnout tak velký odpor aby utlumil při tomto průtoku tlakové pulzace, např. impulzní potrubí k tlakovým snímačům, kde potřebujeme měřit

statickou hodnotu tlaku, ale na měřeném tlaku jsou velké amplitudy tlakových pulzací především na nízkých frekvencích. Schematicky je tento tlumič zobrazen na Obr. 7.

Pro zjednodušený výpočet tlumení uvažujeme tlumič dle obr. 3 v místě 1 tlakové buzení a v místě 2 podmínka nulového průtoku.



Obr. 3

Stavový vektor průtok, tlak v Laplaceových obrazech je možno pro místo 2 psát v závislosti na stavovém vektoru v místě 1 dle maticového zápisu 8.

$$\begin{pmatrix} q \\ \sigma \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -sC \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\xi & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ \sigma \end{pmatrix}_1 \quad (8)$$

Po dosazení zvolených okrajových podmínek a roznásobení přenosových matic odporu a akumulátoru dostaneme:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 1+sC\xi & -sC \\ -\xi & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ \sigma \end{pmatrix}_1 \quad (9)$$

Řešením těchto dvou rovnic obdržíme:

$$q_1 = \sigma_1 \frac{sC}{1+sC\xi} \quad \sigma_2 = \sigma_1 \left( \frac{1}{1+sC\xi} \right) \quad (10)$$

Předchozí rovnice vyjadřuje přenos mezi místem 1 a 2. Pokud nás zajímá poměr absolutních hodnot amplitud tlaku mezi místem 1 a 2 při harmonickém buzení, lze ho vyjádřit pomocí vztahu 11.

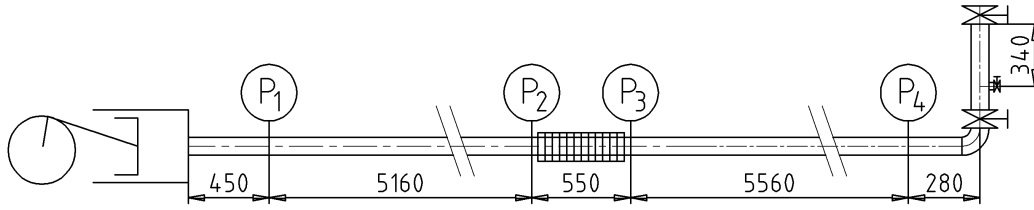
$$\left| \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right| = \left| \frac{1}{1+i\omega C\xi} \right| = \sqrt{\frac{1}{1+(\omega C\xi)^2}} \quad (11)$$

### 2.3.1 Porovnání měření a výpočtu

V laboratoři VUT FSI Brno byl tento princip tlumení tlakových pulzací experimentálně ověřen. Měřicí trať je znázorněna na obr. 4.

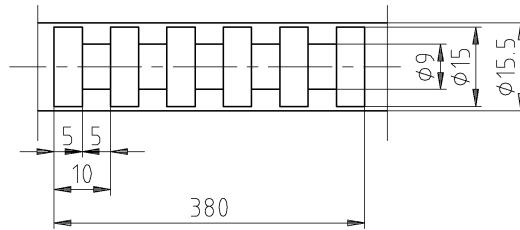
Trať pozůstávala z ocelové trubky o délce 12 m s vnitřním průměrem 15,5 mm a tloušťkou stěny 2 mm. Jednu okrajovou podmínku tvořil pulzátor, opatřený frekvenčním měničem, druhou okrajovou podmínku větrník, realizovaný trubkou o délce 340 mm se stejnou světlostí. Uprostřed trubky byl vložen odpor. Nestacionární tlaky byly snímány v místech P1 - P4 , přičemž P2 a P3 byly umístěny těsně před a za odporem.





Obr. 4

Odpor byl realizován dle obr. 5.



Obr. 5

Je-li  $S_1$  průřez komůrky,  $S_2$  průřez spáry,  $L$  délka spáry a  $n$  počet spár, je možno odvodit přibližný vztah pro pokles tlaku za tlumičem v závislosti na průtoku ve tvaru (12).

$$p_2 = p_1 + \left[ \rho Q^2 \left( \frac{1}{S_1 S_2} - \frac{1}{2S_2^2} - \frac{1}{2S_1^2} \right) \right] n - n \frac{12\nu\rho L}{\pi D h^3} Q \quad (12)$$

Při nižších frekvencích, řádově jednotek Hz se uplatní pouze 2. člen při  $Q$ . Tento člen charakterizuje tlakové ztráty způsobené třením v tenké spáře a platí pro stacionární průtok. Při nestacionárním průtoku budou ztráty třením větší v důsledku nestacionárního rychlostního profilu. Tento rychlostní profil je pro kruhovou trubici odvozen v kapitole 5. Při našem měření se ukázalo že hodnota odporu byla dva krát větší než při výpočtu podle vztahu 12.

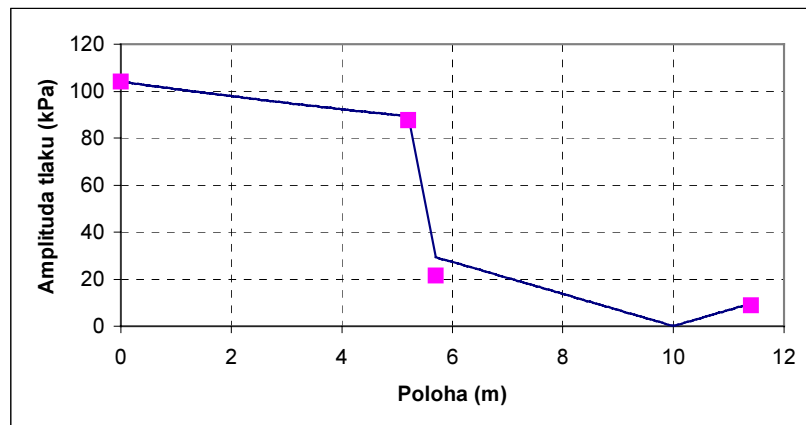
Měření a výpočet pro trať dle obr. 9 a parametry

frekvence  $8.29 \text{ s}^{-1}$

odpor  $4 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot \text{s} / \text{m}^3$

větrník  $C = 4,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 / \text{Pa}$

jsou znázorněny na obr. 6. Tečky v grafu označují měřené amplitudy tlaku v daném místě, čára představuje vypočtené hodnoty tlakových amplitud po délce potrubí.

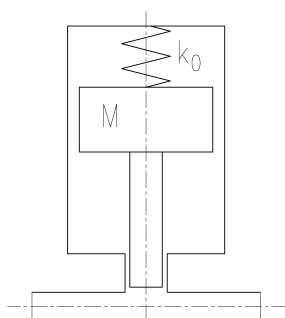


Obr. 6

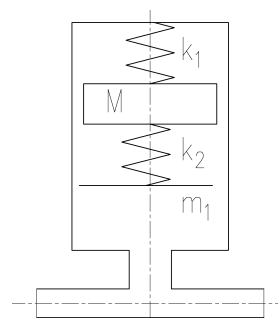
## 2.4 Dynamický tlumič

Již v úvodu této práce bylo zmíněno, že správné naladění hydraulického systému je velmi problematické, neboť musíme vždy počítat se změnou fyzikálních vlastností pracovní tekutiny v závislosti na provozních podmínkách. Proto se není možno u běžných strojů vždy vyhnout rezonančnímu kmitání. Tuto nesnáz odstraní dynamický tlumič, který se aplikuje mimo uzel tlaku příslušného tvaru kmitu tak, že vzhledem ke svému naladění pohlcuje část mechanické energie systému a tím snižuje amplitudu tlakových a průtokových pulzací.

Hydraulický systém s tímto tlumičem se nemůže na zvoleném tvaru kmitu dostat do rezonance. Tlumič typu A viz str.10 však může mít negativní vliv na velikost pulzací při přechodovém kmitání. Proto navrhujeme dvoumotovou konstrukci dle obr. B, přičemž první hmotnost je zanedbatelná vůči druhé a tuhost  $k_2 \ll k_1$ . Tím plní tlumič zároveň funkci plynového akumulátoru.



Tlumič typu A



Tlumič typu B

Analýzou na měřicím pracovišti bylo zjištěno, že dynamický tlumič je vhodné umístit do kmitny tlaku nebo uzlu průtoku příslušného tvaru kmitu, který chceme dynamickým tlumičem utlumit. Při umístění dynamického tlumiče do uzlu tlaku ztrácí dynamický tlumič účinnost. Při jeho použití je vždy nutno si uvědomit, že dynamický tlumič slouží především k odstranění rezonance v hydraulickém systému. Vždy dojde k přeladění systému

Přechodová matice dynamického tlumiče má obecně tvar:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & -s \cdot \frac{\psi(s)}{\phi(s)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Pro tlumič typu A platí:

$$\psi(s) = \frac{S^2}{M}; \quad S\text{- průřez válce} \quad \Phi(s) = s^2 + \omega_T^2; \quad \omega_T^2 = \frac{k_0}{M} \quad (14)$$

Pro tlumič typu B platí:

$$\psi(s) = \frac{S^2}{M} (s^2 + \omega_0^2); \quad \omega_T^2 = \frac{k_0 + k}{M} \quad \Phi(s) = s^2 + \omega_T^2; \quad (15)$$

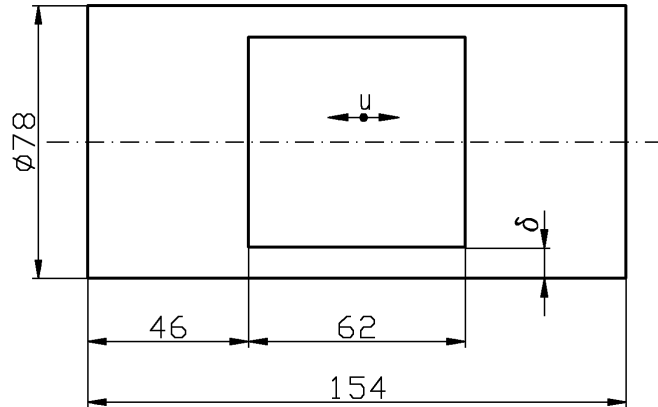
Protože v hydraulických systémech jsou budící frekvence poměrně nízké, ladí se dynamický tlumič na nízkou frekvenci. Z toho vychází poměrně vysoké hmotnosti kmitající v dynamickém tlumiči. Navrhujeme proto využít ke konstrukci tlumiče efektu přídavných hmotností od tekutiny, vznikajících při nestacionárním pohybu tělesa v tekutině.

## 2.4.1 Určení přídavné hmotnosti

Přídavnou hmotnost je možno řešit pomocí teorie uvedené v [1]. Zde uvedeme jen základní vztahy a výsledky pro jeden případ výpočtu. Přídavná hmotnost působící na píst ve válci kruhového průřezu bude určena v závislosti na velikosti vůle dle obr. 13.

Předpokládá se, že proudění je potenciální a rychlost pohybu tekutiny lze vyjádřit vztahem:

$$\mathbf{c} = \text{grad}(\Phi), \quad (16)$$



Obr. 7

Vzhledem k okrajovým podmínkám na hranici tělesa je vhodné potenciál rychlosti vyjádřit v závislosti na složkách rychlosti tělesa. Tedy:

$$\Phi = \varphi_k(x_j) \cdot u_k(t) \quad (17)$$

Vykonává-li píst pohyby pouze ve směru osy válce lze jednoduše psát:

$$\Phi = \varphi_1(x_j) \cdot u_1(t) \quad (18)$$

Funkci  $\varphi(x_j)$  lze určit řešením Laplaceovy rovnice:

$$\Delta\varphi_1 = 0 \quad (19)$$

s okrajovými podmínkami na nehybné hranici válce:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i} \cdot n_i = 0 \quad (20)$$

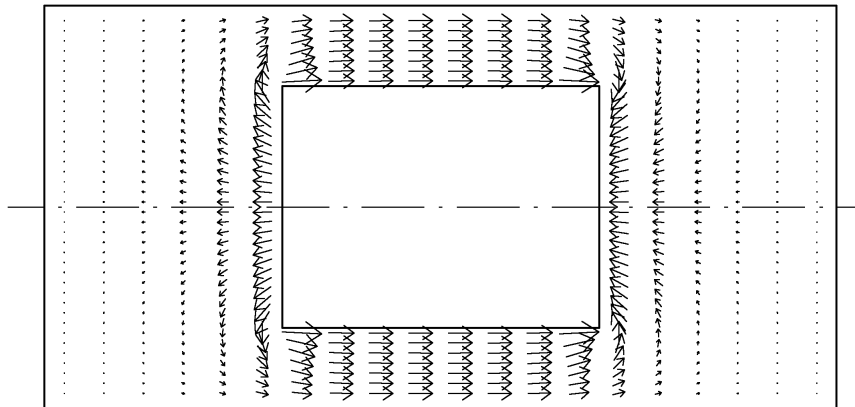
a okrajovými podmínkami na hranici tělesa:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i} \cdot n_i = n_1 \quad (21)$$

Přídavnou hmotnost lze pak určit ze vztahu:

$$m = \rho \cdot \int_s \varphi_1(x_j) \cdot n_1 \cdot ds \quad (22)$$

Z definice (18) plyne, že  $v_i = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}$  představuje rychlost tekutiny vztaženou na jednotku rychlosti tělesa. Na obr. 8 je znázorněno pole  $v_i$  při pohybu pístu ve směru osy.



Obr. 8

Na jev přidavné hmotnosti kapaliny, se lze podívat i z pohledu energetického. Pokud se pohybuje těleso v kapalině, je celková energie soustavy těleso-kapalina složena z energie pohybujícího se tělesa a z energie proudící kapaliny, vyvolané pohybem tělesa, dle vztahu:

$$E_T + E_K = E_C \quad (23)$$

Po dosazení za jednotlivé kinetické energie dostaneme vztah (24)

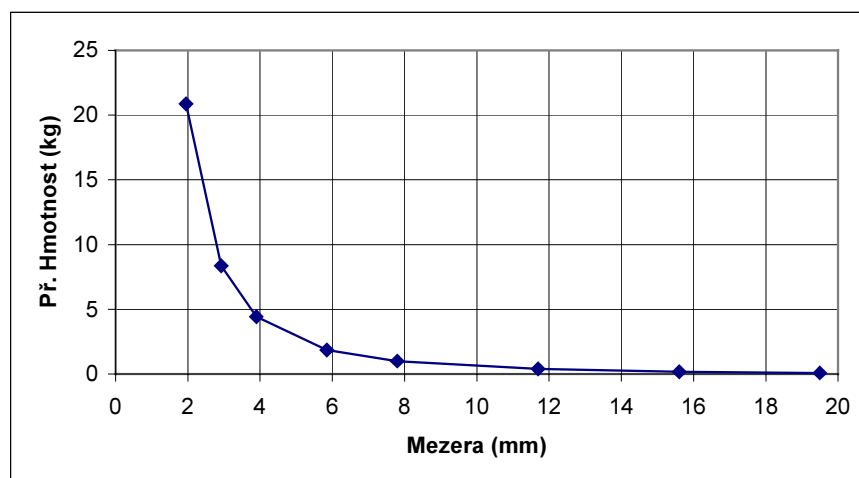
$$\frac{1}{2} \cdot m_T \cdot v_T^2 + \int_V \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_K^2 \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot (m_T + m_P) \cdot v_T^2 \quad (24)$$

Ze vztahu (24) je možno počítat přidavnou hmotnost dle vztahu (25).

$$m_P = \frac{\int_V \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_K^2 \cdot dV}{v_T^2} \quad (25)$$

Užitečnost vztahu(25) je především v jednoduchém posouzení dříve zanedbaných vlivů a zvoleného typu proudění na vypočtenou přidavnou hmotnost.

Výraz (22) pro přidavnou hmotnost od tekutiny dle obr. 7, je znázorněn v závislosti na mezeře mezi pístem a válcem na obr. 9.



Obr. 9

Z obr. 10 vidíme, že přídavná hmotnost prudce narůstá při zmenšování vůle mezi pístem a válcem. U skutečné kapaliny bude mít podstatný vliv na pohyb pístu disipace energie v tenké spáře. Práce věnovaná tomuto tématu byla publikována v [17],[18].

## 2.4.2 Laděná odbočka (Helmholtzův rezonátor)

Tlumení pomocí laděné odbočky funguje na stejném principu jako dynamický tlumič. Laděná odbočka stejně jako dynamický tlumič při umístění na potrubí přeladí potrubní systém tak, že v místě tohoto prvku vznikne uzel tlaku. Její výhodou je jednoduchá konstrukce, jde o potrubí délky  $1/4$  vlny tlumené frekvence, které paralelně připojíme k potrubnímu systému. Použití je však reálné pouze pro vyšší frekvence, pro nízké frekvence, vychází odbočka příliš dlouhá.

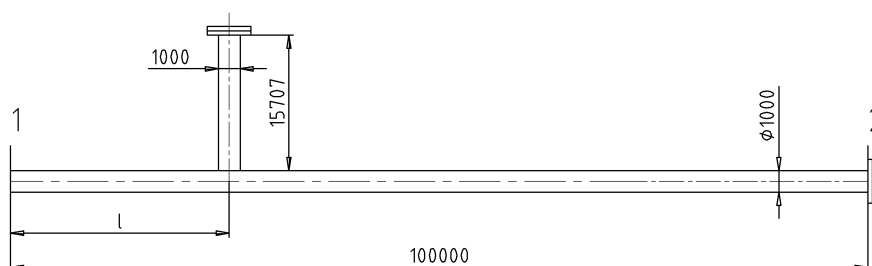
Délku odbočky lze počítat ze vztahu (26)

$$L = \frac{a}{4 \cdot f} \quad (26)$$

kde  $a$  rychlost zvuku ( $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ )  
 $f$  frekvence naladění ( $\text{s}^{-1}$ )

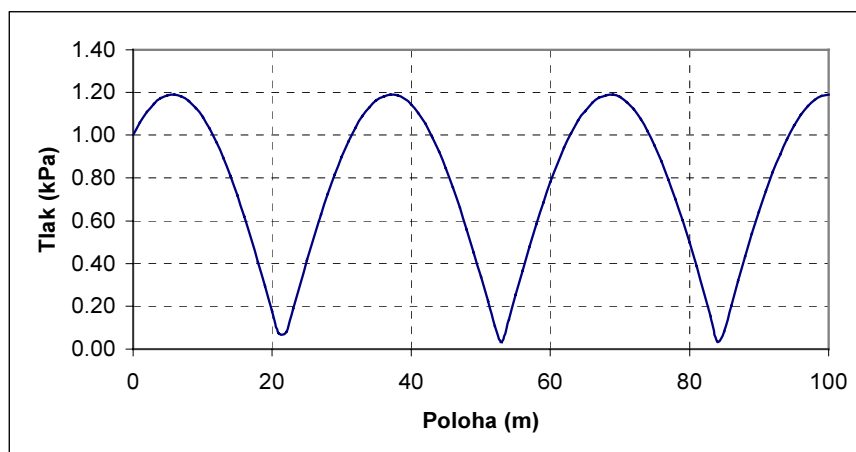
Příklad výpočtu

Předpokládáme hydraulický systém dle obr. 10 v uzlu 1 tlakové buzení a v uzlu 2 průtokovou podmínku  $Q=0$ . Délka trubice je 100m. Budeme předpokládat buzení úhlovou frekvencí  $\omega=100 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  to je  $f=15,91 \text{ s}^{-1}$ . Rychlost zvuku  $a=1000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Délka laděné odbočky podle vztahu 25  $L=15,707 \text{ m}$ .

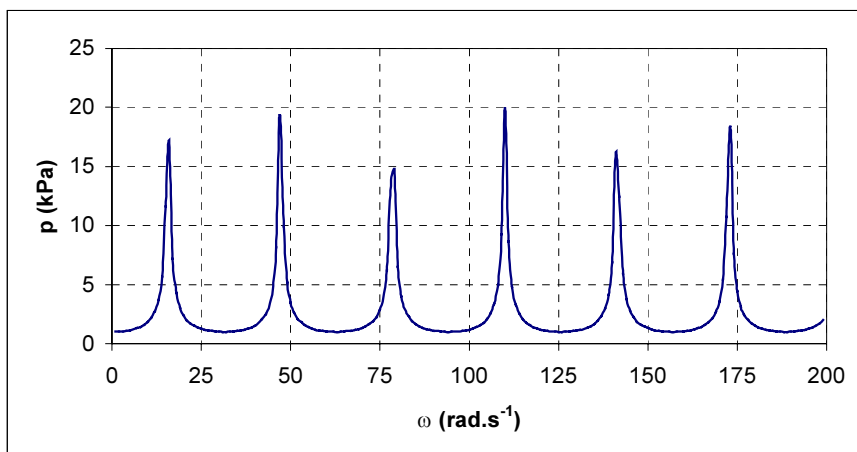


Obr. 10

Vynucený tvar kmitu tlaku pro podmínky příkladu a případ, že na potrubí není laděná odbočka je znázorněn na obr. 11. Na obr. 12 je uvedena F-A charakteristika tlaku pro polohu uzlu 2. Z tohoto obrázku je zřejmé, že vlastní frekvence jsou dostatečně vzdáleny od budící frekvence.

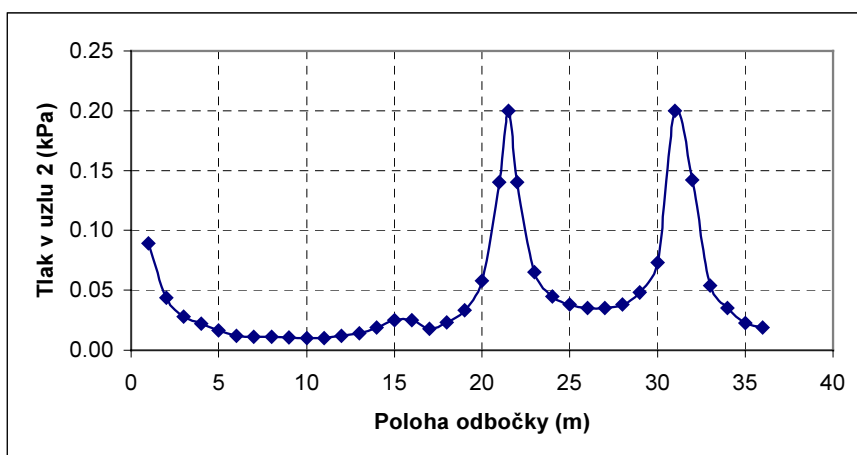


Obr. 11



Obr. 12

Amplituda tlaku v uzlu 2 v závislosti na poloze odbočky 1 dle obr. 16 je znázorněna na obr. 13.



Obr. 13

Z obr. 13 plyne, že tlumení je na poloze odbočky silně závislé. Odbočku nesmíme umístit do místa, kdy se jedna část systému s odbočkou naladí na budící frekvenci. Buď část od pulzátoru a odbočka, nebo odbočka a potrubí k uzlu 2.

Tato analýza závislosti na poloze odbočky je složitá a vede k modelování celého hydraulického systému a zkoumání útlumu odbočky v závislosti na poloze odbočky. Pokud je systém bez odbočky buzen na vlastní frekvenci, je určení polohy odbočky jednodušší, největší tlumení dostáváme při umístění odbočky do kmitny tlaku, původního systému bez odbočky.

Tento princip tlumení tlakových pulzací byl použit na tepelné elektrárně Dětmarovice na odsířovací jednotce. Útlum tlakových pulzací na  $f=100\text{Hz}$ , byl snížen na 1/10 původní hodnoty. Viz lit.16

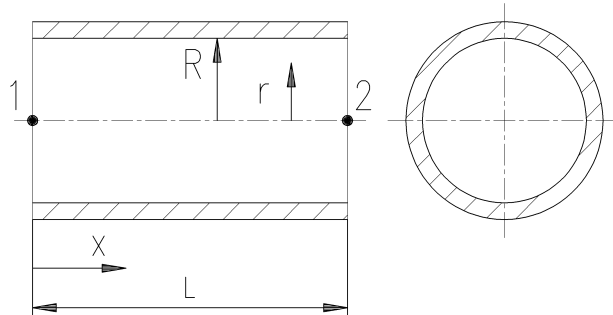
### 3 DISIPACE PULZAČNÍ ENERGIE V TRUBICI

Trubice obsahující tekutinu je sama o sobě zdrojem ztrát způsobených tvarem rychlostního profilu proudící tekutiny jak při stacionárním, tak při nestacionárním laminárním i turbulentním proudění. Dalším zdrojem ztrát v trubici je při nestacionárním průtoku stlačitelné tekutiny druhá viskozita tekutiny, případně tlumení materiálu trubice.

Řešení dynamiky tekutinových systémů je založeno na středních hodnotách tlaku a rychlosti po průřezu trubice. Z tohoto důvodu je velmi obtížné nalézt adekvátní matematický model vnitřního tlumení tekutiny. Základní výsledky dosavadního řešení byly publikovány v [3], ale jsou většinou zaměřeny na pulzační proudění vyvolané harmonickým signálem. My jsme se pokusili o obecnější řešení pro tvary signálů nejen harmonických, ale Laplaceovskými transformovatelných. Základem metody je tedy Laplaceova transformace.

### 3.1 Odvození vztahu pro Laplaceův obraz rychlosti kapaliny

Ze zkušeností je známo, že zejména pulzační proudění je charakterizováno laminárním rychlostním profilem. Matematický popis laminárního nestacionárního rychlostního profilu vychází z řešení Navier-Stokesových rovnic pro dvojrozměrný (rotačně symetrický) model proudění.



Obr. 14

Na základě lineární teorie je možno psát základní rovnice ve válcových souřadnicích ve tvaru:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} - \nu \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} = 0 \quad (27)$$

Integrujme nyní rovnici (27) přes interval  $\langle 0, L \rangle$ , určující délku trubice na takto získanou rovnici aplikujme Laplaceovu transformaci, jestliže jsme označili:

$$L\{c\} = u; \quad L\{p_2 - p_1\} = \Delta\sigma$$

1-počátek a 2 konec trubice.

r-poloměr trubice

Po Laplaceově transformaci dostaneme:

$$s \cdot u + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\Delta\sigma}{L} - \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \nu \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad (28)$$

Řešení rovnice (28) lze nalézt ve tvaru Besselových funkcí s uvažováním okrajových podmínek, nulové derivace rychlosti v ose trubice a nulové rychlosti na hranici trubice. Na základě toho lze psát:

$$u(\zeta, s) = \left[ \frac{J_0\left(R \cdot \zeta \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{\nu}}\right)}{J_0\left(R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{\nu}}\right)} - 1 \right] \cdot \frac{1}{s \cdot \rho \cdot L} \cdot \Delta\sigma(s) \quad (29)$$

Ve vztahu byly zavedeny tyto symboly:

$J_0$  Besselova funkce

$\zeta$  Bezrozměrný poloměru trubice  $\frac{r}{R}$

- s      Parametr Laplaceovy transformace
- $\rho$     Hustota kapaliny
- L      Vzdálenost tlakových odběrných míst
- $\Delta\sigma(s)$  Laplaceův obraz tlakové difference

Zavedeme-li symbolem  $Y(\zeta, s)$  Laplaceův obraz paměti tekutiny

$$Y(\zeta, s) = \frac{1}{s} \cdot \left[ \frac{J_0\left(R \cdot \zeta \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{v}}\right)}{J_0\left(R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{v}}\right)} - 1 \right] \quad (30)$$

lze výraz (29) s uvažováním výrazu (30) psát ve tvaru (31)

$$u(\zeta, s) = Y(\zeta, s) \cdot \frac{\Delta\sigma(s)}{\rho \cdot L} \quad (31)$$

Pokud má tlakové buzení harmonický průběh je možno počítat nestacionární rychlost pomocí rozvoje vztahu (31) přes reziduum tlakové funkce, takto dostaneme komplexní funkci rychlosti v závislosti na poloměru. Zde je možno zobrazit amplitudu rychlostí a fázové posunutí rychlosti vůči tlaku.

Zde se zaměříme na výpočet rychlostí pomocí paměťové funkce. Paměťovou funkci tekutiny  $F(\zeta, t)$  lze vyjádřit následovně:

$$F(\zeta, t) = L^{-1}\{Y(\zeta, s)\} \quad F(\zeta, t) = L^{-1}\left\{ \frac{1}{s} \cdot \left[ \frac{J_0\left(R \cdot \zeta \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{v}}\right)}{J_0\left(R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{v}}\right)} - 1 \right] \right\} \quad (32)$$

Na základě definice této funkce je možno psát vztah pro rychlost ve tvaru konvolučního integrálu:

$$c(\zeta, t) = \frac{1}{\rho \cdot L} \cdot \int_0^t F(\zeta, (t - \tau)) \cdot \Delta p(\tau) \cdot d\tau \quad (33)$$

Význam tohoto výrazu spočívá v tom, že při známé (změřené) tlakové difference jsme schopni vypočítat tvar nestacionárního rychlostního profilu tekutiny při laminárním nestacionárním proudění, s libovolným průběhem nestacionarity.

### 3.2 Stanovení paměťové funkce rychlosti tekutiny

Navrhujeme použití reziduové věty a zpětnou Laplaceovu transformaci provést pomocí rozvoje funkce  $Y(\zeta, s)$  podle reziduí. Besselova funkce komplexní proměnné má nulové body pouze pro reálný argument. Pro  $s \rightarrow 0$  není reziduum, jde o neurčitý výraz po jehož výpočtu dostaneme konečnou hodnotu.

$$J_0\left(R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{v}}\right) = 0 \quad \text{je splněno, pokud } R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{v}} = K_k,$$

kde  $K_k$  musí být reálné číslo.



Hodnoty prvních dvaceti nulových bodů  $K_k$  jsou uvedeny v tabulce.

1	2.404825560435920	11	33.775820214181600
2	5.520078105621510	12	36.917098354270300
3	8.653727913474170	13	40.058425765233000
4	11.791534439603600	14	43.199791713780300
5	14.930917709065800	15	46.341188372264400
6	18.071063968509300	16	49.482609897999600
7	21.211636630488700	17	52.624051841716200
8	24.352471531361700	18	55.765510755620800
9	27.493479132652100	19	58.906983926681400
10	30.634606469042000	20	62.048469190827300

Pro výpočet nulových bodů  $s_k$  bude platit

$$R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s_k}{\nu}} = K_k \quad s_k = -\left(\frac{K_k}{R}\right)^2 \cdot \nu \quad (34)$$

Potom je možno psát vztah pro paměťovou funkci tekutiny ve tvaru nekonečné řady:

$$F(\zeta, t) = -2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(K_k \cdot \zeta) \cdot e^{-\left(\frac{K_k}{R}\right)^2 \cdot \nu \cdot t}}{J_1(K_k) \cdot K_k} \quad (35)$$

Zde může být vhodné zavést bezrozměrný časový parametr  $\tau$  tak, aby paměťová funkce nebyla závislá na viskozitě a na poloměru trubice.

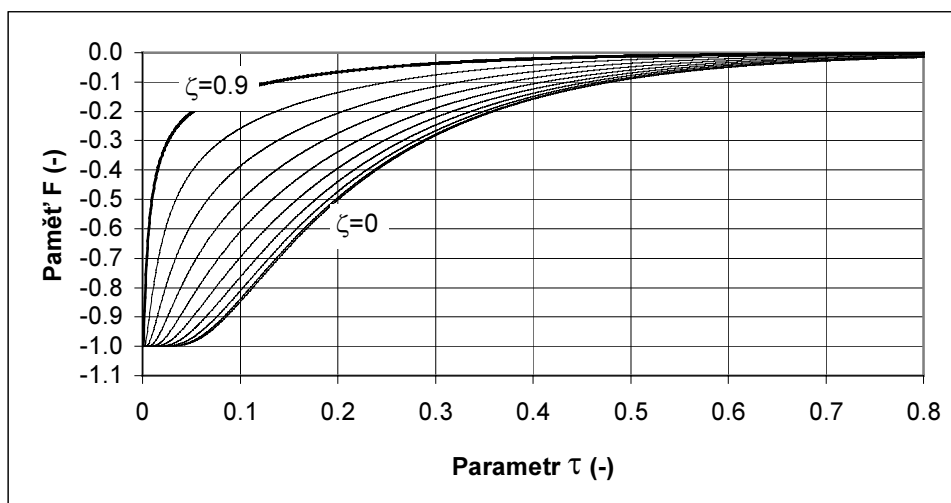
$$\tau = \frac{\nu \cdot t}{R^2} \quad (36)$$

Potom je možno paměťovou funkci pro parametr  $\tau$  psát ve tvaru:

$$F(\zeta, \tau) = -2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(K_k \cdot \zeta) \cdot e^{-K_k^2 \cdot \tau}}{J_1(K_k) \cdot K_k} \quad (37)$$

Tato nekonečná řada rychle konverguje. Pro výpočet postačuje prvních 20 členů.

Průběh paměťové funkce rychlosti v závislosti na bezrozměrném parametru  $\tau$ , je znázorněn na obr. 15. Nejnižší položená křivka je pro  $\zeta=0$ , to je pro osu trubice směrem nahoru, následují křivky pro parametr  $\zeta$  vždy o 0,1 větší, tím se postupně dostaneme k okraji trubice. Na hranici trubice ( $\zeta=1$ ) je průběh paměťové funkce rychlosti tekutiny následující, pro  $t=0$  je  $F=-1$  a pro všechna  $t>0$  je  $F=0$ .



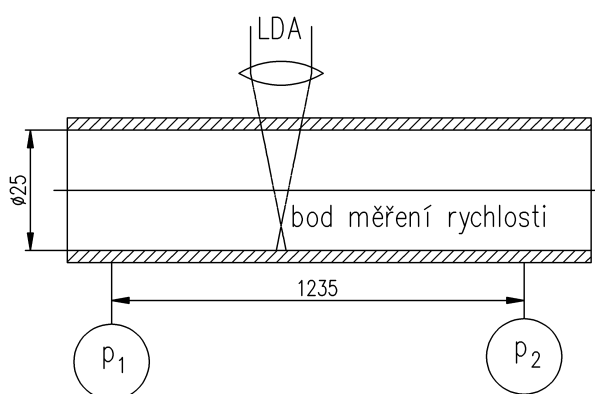
Obr. 15

### 3.2.1 Měření nestacionárního rychlostního profilu

Nestacionární rychlostní profil byl měřen pomocí laser-dopplerovského anemometru (LDA). Souprava sestávala z laseru o výkonu 300mV, optických prvků (ohnisková vzdálenost  $f = 110$  mm), Braggových cell pro elektrooptický shift, jednoosého lineárního traverzačního zařízení, vyhodnocovacího dvoukanálového procesoru a řídicího počítače třídy PC. Měřeny byly také tlaky pomocí 2 tlakových čidel DMP 331, výrobce BD SENZORS s r. o. Uh. Hradiště, měřicí rozsah 250 kPa (A), přesnost  $\pm 0,25\%$ , proudový výstup 0–20 mA. Vzorkovací frekvence při měření tlaků byla 1kHz.

Synchronizace mezi měřením rychlostí a tlaků byla prováděna pomocí optického čidla na pulzátoru, které opticky snímalo natočení, tento signál byl přiveden do obou měřicích počítačů. V dalším vyhodnocování se pracovalo se středními hodnotami rychlostí a tlaků, které byly vypočteny jako střední hodnoty z více period, posunutím jednotlivých period na jednu dle časové značky (signál z pulzátoru).

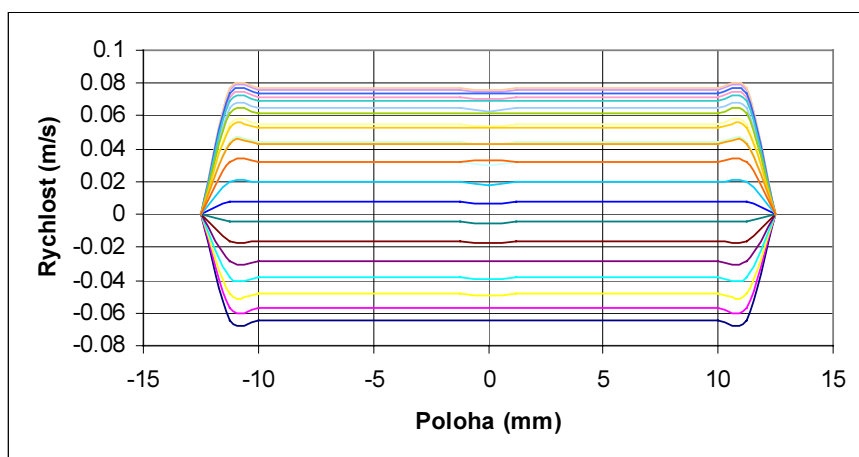
Měrná část trati byla složena ze skleněné trubice o průměru 25 mm, dvou tlakových čidel vzdálených 1,235m a zařízení pro měření rychlosti LDA. Viz obr. 16.



Obr. 16

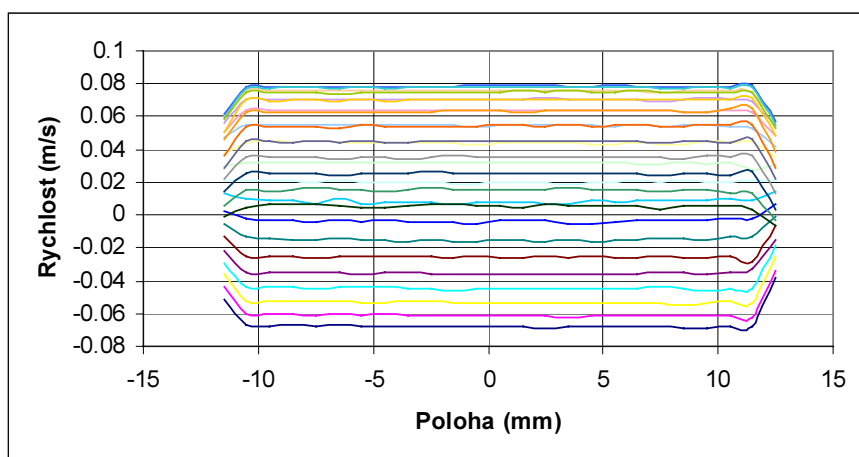
### 3.2.2 Porovnání výsledků měření s výpočtem

Rychlostní profily získané výpočtem z tlakové difference dle obr. 19 mají průběh znázorněný na obr. 17



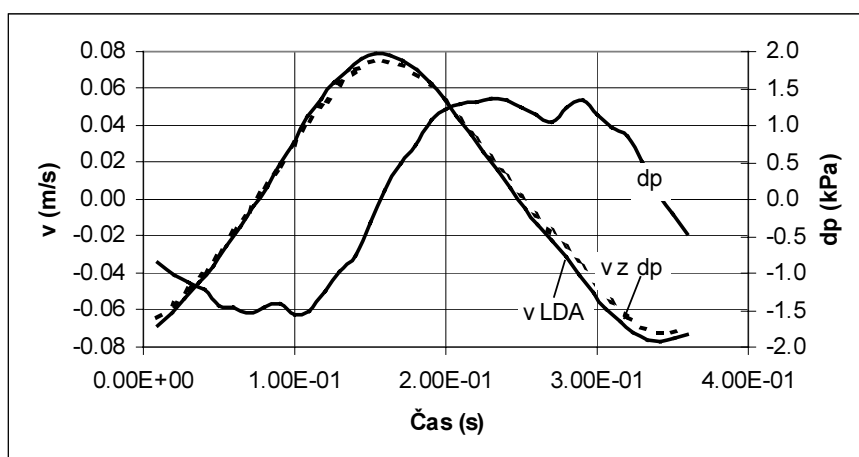
Obr. 17

Měřené rychlostní profily pomocí LDA jsou znázorněny na obr. 18.



Obr. 18

Na obr. 20 je znázorněn časový průběh měřené tlakové diference, rychlosti měřené pomocí LDA a rychlosti vypočtené z tlakové diference pomocí konvolučního integrálu (33).



Obr. 19

Z porovnání plyne, že nestacionární rychlostní profil počítaný z paměťové funkce tekutiny se od měřeného liší max. o 3%. Tato odchylka může být způsobena i chybou měření.

### 3.3 Paměťová funkce střední rychlosti tekutiny

Pro Laplaceův obraz střední hodnoty rychlosti v průřezu trubice je možno psát integrál rychlosti dle vztahu 38 přes průřez trubice ve tvaru:

$$\bar{u}(s) = \frac{2}{\pi \cdot R^2} \int_0^R Y(\zeta, s) \cdot \frac{\pi \cdot r}{\rho \cdot L} \cdot \Delta\sigma(s) \cdot dr \quad (38)$$

Po dosazení za  $Y(\zeta, s)$  ze vztahu 30 dostaneme:

$$\bar{u}(s) = \frac{2}{R^2} \int_0^R \left[ \frac{J_0\left(r \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{v}}\right)}{J_0\left(R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{v}}\right)} - 1 \right] \cdot \frac{r}{s \cdot \rho \cdot L} \cdot \Delta\sigma(s) \cdot dr \quad (39)$$

Po výpočtu integrálu dostaneme:

$$\bar{u}(s) = \left[ \frac{2 \cdot J_1\left(R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{v}}\right)}{R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{v}} \cdot J_0\left(R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{v}}\right)} - 1 \right] \frac{\Delta\sigma(s)}{s \cdot \rho \cdot L} \quad (40)$$

Zavedeme-li symbolem  $Y_s(s)$  Laplaceův obraz paměti střední rychlosti tekutiny po průřezu:

$$Y_s(s) = \left[ \frac{2 \cdot J_1\left(R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{v}}\right)}{R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{v}} \cdot J_0\left(R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{v}}\right)} - 1 \right] \frac{1}{s} \quad (41)$$

Ize paměťovou funkcí střední rychlosti tekutiny  $F_s(\zeta, t)$  vyjádřit:

$$F_s(t) = L^{-1}\{Y_s(s)\} \quad F_s(t) = L^{-1} \left\{ \left[ \frac{2 \cdot J_1\left(R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{v}}\right)}{R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{v}} \cdot J_0\left(R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{v}}\right)} - 1 \right] \frac{1}{s} \right\} \quad (42)$$

Rozvojem přes rezidua výrazu 42 můžeme psát vztah pro paměťovou funkci střední rychlosti ve tvaru nekonečné řady.

$$F_s(t) = -4 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{s_k \cdot t}}{K_k^2} \quad (43)$$

Zde  $K_k$  jsou nulové body Besselovy funkce dle tabulky nulových bodů a  $s_k$  vypočteme ze vztahu (34). Je vhodné zavést bezrozměrný parametr  $\tau$  vztahem (36). Po dosazení dostáváme:

$$F_s(\tau) = -4 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-K_k^2 \cdot \tau}}{K_k^2} \quad (44)$$

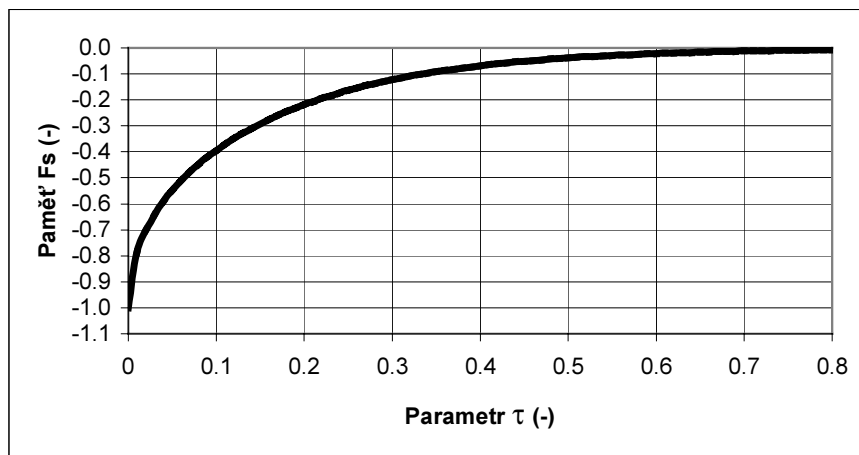
Význam paměťové funkce střední hodnoty rychlosti po průřezu je v tom, že ze známé změřené hodnoty tlakové difference jsme schopni počítat střední hodnoty rychlosti pomocí vztahu:

$$\bar{c}(t) = \frac{1}{\rho \cdot L} \cdot \int_0^t F_s(t - \tau) \cdot \Delta p(\tau) \cdot d\tau \quad (45)$$

Nebo určovat hodnotu průtoku závislého na čase:

$$Q = \pi \cdot R^2 \cdot \bar{c}(t) = \frac{\pi \cdot R^2}{\rho \cdot L} \cdot \int_0^t F_s(t - \tau) \cdot \Delta p(\tau) \cdot d\tau$$

Průběh paměťové funkce střední hodnoty rychlosti v závislosti na bezrozměrném parametru  $\tau$  je znázorněn na obr. 20.



Obr. 20

### 3.4 Výpočet derivace rychlosti na poloměru R

Při výpočtu derivace na poloměru R vyjdeme ze vztahu (29) pro Laplaceův obraz rychlosti tekutiny, derivaci podle  $r$  pro poloměr R dostaneme:

$$\left( \frac{\partial u(r,s)}{\partial r} \right)_{r=R} = - \frac{J_1 \left( R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{\nu}} \right)}{J_0 \left( R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{\nu}} \right)} \cdot \frac{i}{\sqrt{s \cdot \nu} \cdot \rho \cdot L} \cdot \Delta \sigma(s) \quad (46)$$

Zavedeme-li symbolem  $Y_d(\zeta, s)$  Laplaceův obraz paměti derivace rychlosti na poloměru R:

$$Y_d(s) = - \frac{J_1 \left( R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{\nu}} \right)}{J_0 \left( R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{\nu}} \right)} \cdot \frac{i}{\sqrt{s \cdot \nu}} \quad (47)$$

Lze paměťovou funkci derivace rychlosti na poloměru R  $F_d(t)$  vyjádřit:

$$F_s(t) = L^{-1} \{ Y_s(s) \} \quad (48)$$

Po dosazení dostaneme:

$$F_d(t) = L^{-1} \left\{ \frac{J_1 \left( R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{v}} \right)}{J_0 \left( R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{v}} \right)} \cdot \frac{i}{\sqrt{s \cdot v}} \right\} \quad (49)$$

Výpočet zpětné Laplaceovy transformace provedeme pomocí residuí rozvojem v nekonečnou řadu, residua jsou v bodech  $s=s_k$ . V bodě  $s$  jdoucí k 0 jde o neurčitý výraz a po výpočtu zjistíme že funkce zde má konečnou hodnotu.

$$F_d(t) = \frac{2}{R} \sum_{k=1}^{\infty} e^{s_k \cdot t} \quad (50)$$

Derivaci rychlosti na hranici trubice je možno počítat z konvolučního integrálu ve tvaru:

$$\left( \frac{\partial u(r,s)}{\partial r} \right)_{r=R} = \frac{2}{R \cdot \rho \cdot L} \cdot \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} e^{s_k \cdot (t-\tau)} \cdot \Delta p(\tau) \cdot \partial \tau$$

Integrál sumy v tomto vztahu lze psát jako sumu integrálů a dostáváme:

$$\left( \frac{\partial u(r,s)}{\partial r} \right)_{r=R} = \frac{2}{R \cdot \rho \cdot L} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t e^{s_k \cdot (t-\tau)} \cdot \Delta p(\tau) \cdot \partial \tau$$

### 3.5 Určení ztrátového součinitele

Vyjdeme z Navier-Stokesovy rovnice v následujícím tvaru,

$$\frac{dc_i}{dt} - \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \quad (51)$$

kde  $\Pi_{ij}$  je symetrickým tenzorem nevratných napětí. Integrujme tuto rovnici přes obor  $V$  trubice. Po integraci obdržíme:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \cdot c_i \cdot dV - \int_S \Pi_{ij} \cdot n_j \cdot dS + \int_S p \cdot n_i \cdot dS = 0 \quad (52)$$

kde:  $S = S_1 \cup S_2 \cup P$

Upravíme-li rovnici pro  $i=2$ -osa trubice získáme:

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{1}{\rho \cdot L} \int_P \Pi_{2j} \cdot n_j dS = - \frac{\Delta p}{\rho \cdot L} \cdot \pi \cdot R^2 \quad (53)$$

Integrál v tomto vztahu lze vyjádřit následovně:

$$\int_P \Pi_{2j} \cdot n_j dS = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot L \cdot \eta \cdot \frac{\partial c_2(r=R)}{\partial r} \quad (54)$$

Výraz (53) lze tedy zapsat ve tvaru:

$$\frac{dQ}{dt} - 2 \cdot \pi \cdot R \cdot v \cdot \frac{\partial c_2(r=R)}{\partial r} = - \frac{\Delta p}{\rho \cdot L} \cdot \pi \cdot R^2 \quad (55)$$

Po Laplaceově transformaci podle času dostaneme:

$$s \cdot q - Q(0) - 2 \cdot \pi \cdot R \cdot v \cdot \frac{\partial u(r=R)}{\partial r} = -\frac{\Delta \sigma}{\rho \cdot L} \cdot \pi \cdot R^2 \quad (56)$$

Po dosazení do předešlého vztahu ze vztahu (46) za derivaci rychlosti a dosazení ze vztahu (40) pro střední hodnotu rychlosti a při uvažování nulových počátečních podmínek dostaneme:

$$s \cdot q - \frac{2 \cdot s \cdot J_1 \left( R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{v}} \right) \cdot q(s)}{2 \cdot J_1 \left( R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{v}} \right) - R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{v}} \cdot J_0 \left( R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{v}} \right)} = -\frac{\Delta \sigma}{\rho \cdot L} \cdot \pi \cdot R^2 \quad (57)$$

Zavedeme-li funkci  $\psi(s)$  vztahem(58):

$$\psi(s) = \frac{R^4}{v^2} \cdot \frac{2 \cdot s \cdot J_1 \left( R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{v}} \right)}{2 \cdot J_1 \left( R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{v}} \right) - R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{v}} \cdot J_0 \left( R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{v}} \right)} \quad (58)$$

Je možno vztah (57) psát ve tvaru:

$$s \cdot q - \frac{v^2}{R^4} \cdot \psi(s) \cdot q(s) = -\frac{\Delta \sigma}{\rho \cdot L} \cdot \pi \cdot R^2 \quad (59)$$

Zavedeme-li funkci  $\Gamma(t) = L^{-1}\{\psi(s)\}$  paměťová funkce ztrátového součinitele pro nestacionární průtok, je možno po zpětné Laplaceově transformaci vztahu (59) s využitím konvolučního integrálu psát:

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{v^2}{R^4} \cdot \int_0^t \Gamma(t-\tau) \cdot Q(\tau) \cdot d\tau = -\frac{\Delta p}{\rho \cdot L} \cdot \pi \cdot R^2 \quad (60)$$

Funkci  $\Gamma(t)$  určíme z následujícího vztahu:

$$\Gamma(t) = L^{-1} \left\{ \frac{R^4}{v^2} \cdot \frac{2 \cdot s \cdot J_1 \left( R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{v}} \right)}{2 \cdot J_1 \left( R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{v}} \right) - R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{v}} \cdot J_0 \left( R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s}{v}} \right)} \right\} \quad (61)$$

Zpětnou Laplaceovu transformaci budeme řešit pomocí reziduí rozvojem do nekonečné řady, residua této funkce lze určit po zavedení následující substituce:

$$K_z = R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{s_z}{v}} \quad (62)$$

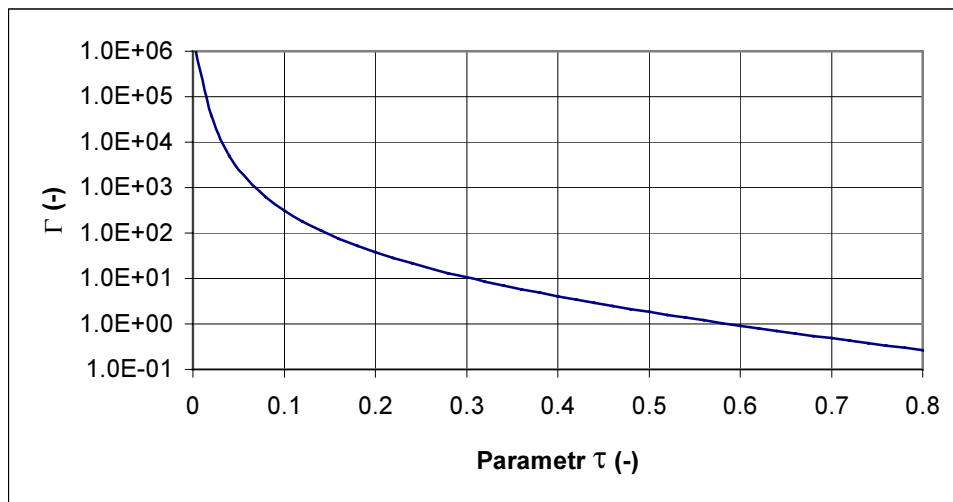
$$\text{řešením rovnice} \quad 0 = 2 \cdot J_1(K_z) - K_z \cdot J_0(K_z) \quad (63)$$

Řešení předchozí nalezneme pouze pro  $K_z$  reálná a prvních 20 nulových bodů je uvedeno v následující tabulce.

1	5.1356223	11	36.8628565
2	8.4172441	12	40.0084467
3	11.6198412	13	43.1534538
4	14.7959518	14	46.2979967
5	17.9598195	15	49.4421641
6	21.1169971	16	52.5860235
7	24.2701123	17	55.7296271
8	27.4205735	18	58.8730158
9	30.5692045	19	62.0162224
10	33.7165195	20	65.1592732

Potom je možno počítat funkci  $\Gamma$  z následující řady po zavedení bezrozměrného časového parametru  $\tau$  (36) dostaneme:

$$\Gamma(\tau) = -4 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K_z^3 \cdot J_1(K_z)}{J_2(K_z) + 2 \cdot K_z \cdot J_1(K_z)} \cdot e^{-K_z^2 \cdot \tau} \quad (64)$$



Obr. 21

## 4 VÝPOČET TLAKOVÝCH A PRŮTOKOVÝCH PULZACÍ

Byl navržen algoritmus a provedeno programové zpracování pro výpočet tlakových a průtokových pulzací ve větvených hydraulických obvodech (*program „f-achar“*), který je založen na metodě přenosových matic. Tato metoda řeší linearizované rovnice silové rovnováhy makroskopické částice

$$\rho \frac{dQ}{dt} + bQ + S \frac{\partial p}{\partial x} = \rho Sg \quad (65)$$

$$\text{a rovnice kontinuity} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{S}{K} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial x} Q = 0 \quad (66)$$

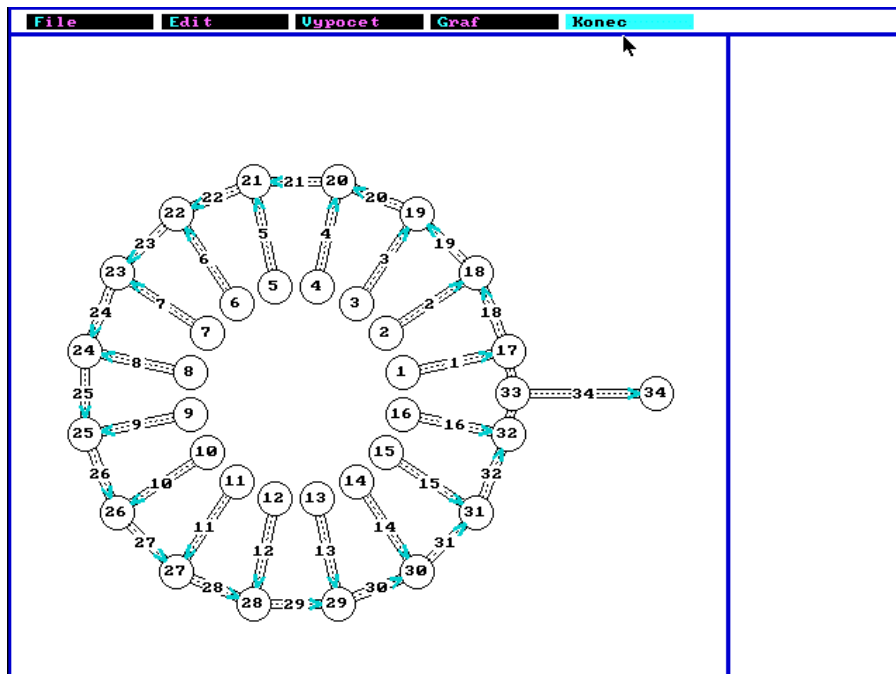
pomocí Laplaceovy transformace podle času. Řešení těchto rovnic pro přímý úsek potrubí lze nalézt v závislosti na tvaru přenosové matice viz. lit.[1]a[10].

$$\mathbf{P}_T = \begin{bmatrix} P_{11}(x,s) & P_{12}(x,s) \\ P_{21}(x,s) & P_{22}(x,s) \end{bmatrix} \quad (67)$$

kde  $x$  označuje polohu stavového vektoru v místě trubice a  $s$  je parametr Laplaceovy transformace.



Příklad: jedná se o model vysokofrekvenčního kmitání ve spirále vodní turbíny. Schéma modelu je nakresleno na obr. 22. Zde pole 1-16 nahrazují lopatky rozvaděče, pole 17-33 modelují spirálu, pole 34 modeluje přivaděč. V uzlech 1-16 je tlaková okrajová podmínka sinusového tlakového buzení. Fáze tlakového buzení je v každém uzlu jiná a po obvodu nabývá dvou maxim a minim. V uzlech 17-33 je průtoková podmínka. V uzlu 34 je tlaková okrajová podmínka konstantního tlaku.

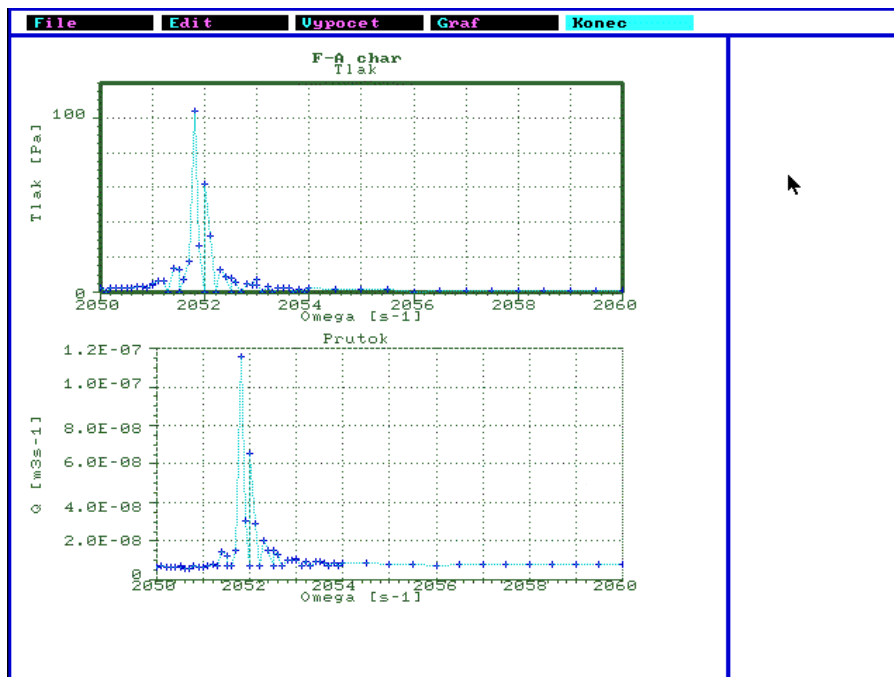


Obr. 22

V následující tabulce vidíme vstupní parametry jednotlivých polí tohoto modelu.

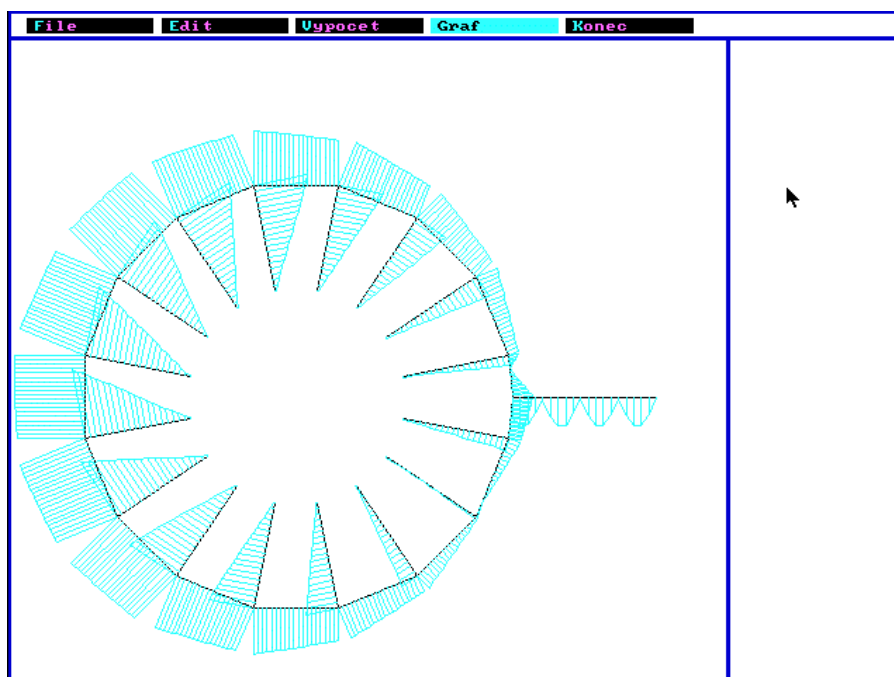
	l	d	b	v	$\rho$	Q	g	R1	R2
Pole rozvaděče	0.2	0.05642	1.0E-03	1000	1000	0	0	0	0
Pole spirály	0.06462	0.04	1.0E-03	1000	1000	0	0	0	0
Pole spirály	0.12924	0.0936	1.0E-03	1000	1000	0	0	0	0
Pole spirály	0.13682	0.1086	1.0E-03	1000	1000	0	0	0	0
Pole spirály	0.14334	0.1246	1.0E-03	1000	1000	0	0	0	0
Pole spirály	0.14919	0.1442	1.0E-03	1000	1000	0	0	0	0
Pole spirály	0.15347	0.1608	1.0E-03	1000	1000	0	0	0	0
Pole spirály	0.15763	0.1776	1.0E-03	1000	1000	0	0	0	0
Pole spirály	0.16073	0.1908	1.0E-03	1000	1000	0	0	0	0
Pole spirály	0.16222	0.1914	1.0E-03	1000	1000	0	0	0	0
Pole spirály	0.16372	0.2042	1.0E-03	1000	1000	0	0	0	0
Pole spirály	0.16505	0.2098	1.0E-03	1000	1000	0	0	0	0
Pole spirály	0.16631	0.2152	1.0E-03	1000	1000	0	0	0	0
Pole spirály	0.1676	0.2212	1.0E-03	1000	1000	0	0	0	0
Pole spirály	0.16878	0.2264	1.0E-03	1000	1000	0	0	0	0
Pole spirály	0.17012	0.2328	1.0E-03	1000	1000	0	0	0	0
Pole spirály	0.1713	0.238	1.0E-03	1000	1000	0	0	0	0
Pole spirály	0.08577	0.2392	1.0E-03	1000	1000	0	0	0	0
Pole přivaděče	50	0.3	1.0E-03	1000	1000	0	0	0	0

Na obr. 23 vidíme F-A charakteristiku uprostřed pole 25 v rozmezí úhlových frekvencí 2050-2060 rad.s<sup>-1</sup>.



Obr. 23

Na obr. 24 vidíme tvar kmitu tlaku na vlastní úhlové frekvenci 2501.85 rad.s<sup>-1</sup>.



Obr. 24

## 5 ZÁVĚR

Práce uvádí možnosti tlumení tlakových a průtokových pulzací v hydraulických obvodech. Jsou zde uvedeny možnosti tlumení dříve známé ze zkušeností, ale doplněny doporučením o umístění tlumičů vzhledem k danému tvaru kmitu tlaku a průtoku. Nově je zavedena tzv. paměťová funkce tekutiny, charakterizující jednoznačně laminární nestacionární proudění z hlediska tvaru rychlostního profilu. Funkce je odvozena v analytickém tvaru a k určení tvaru rychlostního profilu stačí znát tlakovou diferenci ve dvou místech trubice.

Teorie byla srovnána s experimentem založeným na určování rychlostního profilu pomocí LDA. Rozdíl mezi naměřenými hodnotami rychlosti a vypočtenými hodnotami nepřesáhl 3%.

Kromě zmíněné paměťové funkce rychlosti byla odvozena i paměťová funkce střední hodnoty rychlosti kapaliny po průřezu, paměťová funkce derivace rychlosti na hranici trubice, a paměťová funkce ztrátového součinitele na základě které lze posuzovat disipaci energie při pulzačním proudění v přímé trubici a určovat hodnotu nestacionárního průtoku.

Kromě těchto nových teoretických závěrů byl zpracován software pro řešení spektrálních a modálních vlastností větvených hydraulických systémů, založený na metodě Laplaceovy transformace a přenosových matic.

## 6 SUMMARY

The possibilities of pressure and flow pulsation damping in a hydraulic circuits are introduced. There are introduced the possibilities of damping known from experience formerly, but they are completed by situating of absorbers according to form of pressure and flow oscillations.

The “memory flow function“ is introduced as a new relation. This function characterize the laminar unsteady flow from point of view of the form of velocity profile.

The function is derived in the analytic form. For determination of velocity profile only the knowledge of pressure difference at two points of pipe is necessary.

The theory was compared with experiment - LDA measurements. The difference between measured and computed velocities is not over 3%.

Besides of “memory flow function“ was derived a memory function of the mean value of velocity in the cross-section, the memory function of velocity derivative on the pipe boundary and the memory of loss coefficient.

These functions was derive on principle, when the energy dissipation of pulsation flow in straight pipe is possible to judge and determine the value of unsteady flow.

Besides of these new theoretical conclusions was the new software elaborated for solution of spectral and modal characteristic of branching hydraulic systems, based on Laplace transformation and transferring matrices methods.

## 7 POUŽITÁ LITERATURA

- [1] POCHYLÝ, F: Dynamika tekutinových systémů. Skriptum, VUT v Brně, 1990
- [2] POCHYLÝ, F: Matematický model proudění tekutiny v trubici kruhového průřezu. Výzkumná zpráva katedry hydraulických strojů VUT v Brně, 1996.
- [3] ZYMÁK, V: Dynamika pulsujícího průtoku, teorie, měření, aplikace, zkušenosti. Brno, 1994
- [4] HABÁN, V.: Stanovení stacionárního průtoku na základě vodního rázu. Výzkumná zpráva katedry hydraulických strojů VUT v Brně, 1996
- [5] HABÁN, V., HALUZA, M.: Tlumení tlakových a průtokových pulzací dynamickým tlumičem. **GRANTOVÝ PROJEKT FU370017** závěrečná zpráva, Brno FS 1997.
- [6] PIVOŇKA, J a kol: Tekutinové mechanismy. Praha, SNTL 1986.
- [7] KOLARČÍK, V., MATULA, R.: Tlakové pulzace v napájecích systémech tepelných elektráren. Čerpadla, potrubí, armatury, SIGMA 1982.
- [8] PŮLPITEL, L.: Low frequency pressure oscillations in hydraulic systems of hydropower plants and air injection effect, IHAR Symposium, Belgrade, 1990.
- [9] POCHYLÝ, F., KOUTNÍK, J.: Dynamický tlumič tekutinových systémů, Seminář interakce a zpětné vazby, Praha 1995.
- [10] KOUTNÍK, J.: Tlakové pulzace v hydraulických systémech vodních turbín, disertační práce Brno 1997.
- [11] HRUŽÍK, L.: Dynamické vlastnosti řetězce sériově řazených hydraulických prvků disertační práce Ostrava 1996.
- [12] FLOWMASTER2 program, documentation and help systems, version 5.1, manual k programu flowmaster.
- [13] ŠTÁVA, P., KOZUBKOVÁ, M.: Aplikovaná mechanika tekutin. Skriptum VŠB Ostrava, 1995.
- [14] TŮMA, J.: Zpracování signálů získaných z mechanických systémů užitím FFT, sdělovací technika, Praha 1997.
- [15] HABÁN, V.: Tlumení tlakových a průtokových pulzací, teze k rigorozní práci, Brno 1999.
- [16] KOUTNÍK, J.: Tlumení pulzací tlaku v potrubí odsiřovací jednotky elektrárny dětmarovice, Sborník semináře interakce dynamického systému s okolním prostředím a soustav se zpětnou vazbou Praha 1999, str.83-90.
- [17] MALENOVSKÝ, F.; POCHYLÝ, F.: Úvod k řešení vázaného kmitání tuhého tělesa a reálné tekutiny. 15. konference s mezinárodní účastí „Výpočtová mechanika '99“, Nečtiny, 18.-20. říjen 1999, str. 217-224.
- [18] POCHYLÝ, F.; MALENOVSKÝ, E.; RUDOLF, P.: THE SMALL VIBRATION OF THE RIGID BODY IN REAL LIQUID. Proceedings of the Second International Conference „TOOLS FOR MATHEMATICAL MODELLING“ Saint-Petersburg, June 14-16, 1999, pp.180-183.

- [19] REKTORYS, K., a spolupracovníci.: PŘEHLED UŽITÉ MATEMATIKY I, Praha  
Prométheus 2000.
- [20] REKTORYS, K., a spolupracovníci.: PŘEHLED UŽITÉ MATEMATIKY II, Praha  
Prométheus 2000.

## 8 CURRICULUM VITAE

Jméno: Ing. Vladimír Habán

Datum narození: 9.10.1970

6. 4. 2001 Obhajoba disertační práce na téma „Tlumení tlakových a průtokových pulzací“
- 1999-nyní Odborný asistent na Odboru hydraulických strojů V. Kaplana FS VUT v Brně.
10. 3. 1999 Obhajoba rigorózní práce na téma tlumení tlakových a průtokových pulzací dynamickým tlumičem.
- 1998 Práce na částečný pracovní úvazek na zkušebně ČKD Blansko.
- 1997 Technický pracovník na Odboru hydraulických strojů V. Kaplana FS VUT v Brně.
- 1994-1997 Postgraduální studium na Odboru hydraulických strojů V. Kaplana FS VUT v Brně.
- 1994 Ukončeno studium na Odboru hydraulických strojů V. Kaplana FS VUT v Brně.