VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Ing. Josef Bednář

FUZZY VYHLEDÁVÁNÍ

FUZZY SEARCHING

ZKRÁCENÁ VERZE PH.D. THESIS

Obor: Matematické inženýrství

Školitel: Doc. RNDr. Zdeněk Karpíšek, CSc.

Oponenti: Prof. Ing. František Babinec, CSc.
Doc. RNDr. Bedřich Půža, CSc.

Datum obhajoby: 21. 5. 2004

KLÍČOVÁ SLOVA
fuzzy vyhledávání, fuzzy databáze, fuzzy množina, fuzzy bod, fuzzy metrický prostor, fuzzy vzdálenost

KEY WORDS
fuzzy searching, fuzzy databaze, fuzzy sets, fuzzy point, fuzzy metric space, fuzzy distance

MÍSTO ULOŽENÍ DISERTAČNÍ PRÁCE
Ústav matematiky, FSI VUT v Brně

ISBN 80-214-2712-4
ISSN 1213-4198

OBSAH

OBSAH 3

1 SOUČASNÝ STAV ŘEŠENÉ PROBLEMATIKY 5

2 CÍL DISERTAČNÍ PRÁCE 5

3 ZVOLENÉ METODY ZPRACOVÁNÍ 6

3.1 Databáze a fuzzy databáze 6

3.2 Fuzzy vyhledávání 7

4 HLAVNÍ VÝSLEDKY PRÁCE 8

4.1 Fuzzy vyhledávání založené na průnicích fuzzy množin 8

4.1.1 Charakteristiky odpovědí 8

4.1.2 Průnik fuzzy čísel s polygonální funkcí příslušnosti 11

4.1.3 FSearch 2.0 pro kovové materiály 12

4.2 Fuzzy vzdálenosti 14

4.2.1 Vzdálenost mezi fuzzy množinami 14

4.2.2 Vzdálenosti mezi funkcemi příslušnosti 16

4.2.3 Fuzzy metrický prostor 16

4.2.4 Fuzzy kontraktivní zobrazení 19

4.2.5 Fuzzy metrický prostor v R^n *..... 20*

4.2.6 Vztah mezi $D_f(A, B)$ *a* $\rho_f(A, B)$ *..... 22*

4.2.7 Uspořádání fuzzy vzdáleností 23

5 ZÁVĚR 24

6 SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY 25

7 SUMMARY 27

8 CURRICULUM VITAE 28

9 PUBLIKACE 28

1 SOUČASNÝ STAV ŘEŠENÉ PROBLEMATIKY

Snažíme-li se zaznamenat vyčerpávající informace z jakékoliv oblasti reálného života do databázového systému, narážíme na problém inkompatibility (neslučitelnosti), který spočívá v tom, že roste-li složitost nějakého systému, klesá naše schopnost tento systém popsat přesně. Po překročení určité hranice složitosti systému se přesnost a relevantnost popisu stávají vzájemně se vylučujícími charakteristikami.

V klasické (crisp) databázi se řeší tento problém tím, že se omezíme na zaznamenávání určitých číselných charakteristik hodnot kvantitativních znaků či typických hodnot znaků kvalitativních a v rámci zjednodušení vágnost hodnot těchto znaků nepřipouštíme. To má za následek, že přesné informace uložené v databázi nemusí dávat relevantní informace o reálném problému.

Ve fuzzy databázi je vágní hodnota znaku reprezentovaná pomocí fuzzy množiny (většinou pomocí fuzzy čísla či fuzzy bodu) z vhodné třídy fuzzy množin. Tím sice dochází ke snížení úrovně přesnosti popisu, ale nedochází ke ztrátě relevantnosti informací uložených ve fuzzy databázi. Ovšem vyhledávání v takové fuzzy databázi vyžaduje vybudování nového formálního aparátu pro práci s tímto typem vágních informací.

Tento aparát začal budovat L. A. Zadeh, který v roce 1965 zavedl pojem fuzzy množina [25] a v roce 1973 začíná vytvářet fuzzy logiku. Na jeho práci navázalo mnoho matematiků i techniků. Fuzzy množiny a fuzzy logika se staly součástí matematiky stejně jako pravděpodobnost či optimalizace. Nyní je možno tyto teoretické výsledky využít k řešení konkrétních úloh, v našem případě k archivaci a vyhledávání vágních informací.

V disertační práci vycházíme především ze dvou partii matematiky. Jsou to metrické prostory [6, 19, 20, 27] a již zmíněné fuzzy množiny [13, 14, 15, 16]. Základní pojmy z těchto partii jsou uvedeny v disertační práci a v citované literatuře.

Disertační práce je součástí řešení výzkumného záměru MŠMT ČR CEZ: J22/98: 261100009 „Netradiční metody studia komplexních a neurčitých systémů“.

2 CÍL DISERTAČNÍ PRÁCE

Cílem této disertační práce je vypracovat teoretický postup archivace a vyhledávání vágních informací uložených ve fuzzy databázi. Důraz je kladen především na fuzzy vyhledávání, protože informace, která je ve fuzzy databázi reprezentovaná fuzzy množinou, je využitelná jen tehdy, když ji můžeme vyhledat ve velkém množství ostatních informací obsažených ve fuzzy databázi.

Abychom tohoto cíle dosáhli, bylo třeba stanovit několik dílčích cílů:

- shromáždit základní poznatky o fuzzy vzdálenostech a mírách podobnosti vágních objektů,

- definovat fuzzy metrický prostor a zkoumat jeho vlastnosti,
- vyřešit archivaci vágních informací ve fuzzy databázi,
- vypracovat teoretický postup vyhledávání založeného na průnicích fuzzy množin,
- vypracovat teoretický postup vyhledávání založeného na minimalizaci fuzzy vzdálenosti hodnoty znaku položky od optimální hodnoty znaku.

3 ZVOLENÉ METODY ZPRACOVÁNÍ

V této kapitole budeme pracovat s pojmem fuzzy bod, který není v teorii fuzzy množin jednotně definován.

Definice 3.1 Fuzzy množinu $A = (X, \mu_A)$, kde X je lineární prostor, nazýváme ***fuzzy bod***, jestliže fuzzy množina A je konvexní a normální a pro $\forall x \in X - \{\theta\}$, kde θ je nulový prvek lineárního prostoru, platí $\lim\limits_{\substack{a \in \boldsymbol{R} \\ a \to \infty}} \mu_A(ax) = 0$.

Fuzzy bod nazýváme ***shora spojitý fuzzy bod***, jestliže jsou všechny jeho α-řezy uzavřené množiny. Fuzzy bod $A = (\boldsymbol{R}, \mu_A)$ nazýváme ***fuzzy číslo***. Fuzzy číslo A ***nezáporné***, jestliže $\mu_A(x) = 0$ pro $\forall x < 0$.

3.1 DATABÁZE A FUZZY DATABÁZE

Každá databáze má své výhody a nevýhody. Klasická databáze využívá toho, že každou hodnotu znaku lze nahradit jednou diskrétní hodnotou, většinou je to modus, medián, aritmetický (či jiný) průměr, minimum nebo maximum. Tato databáze svůj účel jistě splňuje, dokonce všechny operace (např. uspořádávání nebo výběr) prováděné na databázi jsou rychlé a jednoznačné, ale dochází ke značné ztrátě informací o hodnotě daného znaku. Ve fuzzy databázi reprezentuje hodnotu daného znaku fuzzy množina definovaná na univerzu, které je množinou všech hodnot, kterých může daný znak nabývat. V technické praxi je toto univerzum často podmnožinou lineárního prostoru a fuzzy množiny reprezentující hodnoty daného znaku jsou konvexní a normální. V těchto případech je můžeme nahradit fuzzy čísly a je-li znak vícerozměrný, můžeme je nahradit fuzzy body. Fuzzy množina již svou funkcí příslušnosti zohledňuje neurčitost dané hodnoty znaku, takže nedochází k takové ztrátě informací. Nevýhodou je horší manipulace s fuzzy množinami, operace s nimi jsou pomalejší a někdy i nejednoznačné. Proto je třeba zamyslet se nad tím, zda informace, které získáme fuzzifikací daného znaku, budou dostatečně využity. Výsledná databáze může obsahovat jak fuzzifikované znaky, tak i klasické (crisp) znaky.

Pokud se rozhodneme nějaký n-dimenzionální znak fuzzifikovat, je třeba určit třídu fuzzy množin, které budou reprezentovat hodnoty daného znaku. Protože tyto hodnoty budeme ukládat do fuzzy databáze, je třeba vybrat třídu fuzzy množim tak, aby funkce příslušnosti jednotlivých fuzzy množin byly jednoznačně definovány několika (crisp) čísly nebo nějakou slovní hodnotou, které je jednoznačně přiřazena fuzzy množina z dané třídy fuzzy množin.

Jak jsme uvedli v předchozím odstavci, často volíme třídu fuzzy čísel či fuzzy bodů (je-li X lineární prostor, $X_{fp} \subset X_{FS}$). V praxi obvykle volíme dimenzi třídy fuzzy čísel k_1 (počet parametrů, které jednoznačně určí funkci příslušnosti fuzzy čísla) tak, že $2 \leq k_1 \leq 8$. Větší dimenze třídy fuzzy čísel působí expertům, kteří provádí fuzzifikaci daného znaku, problémy a informace, kterou bychom touto složitější fuzzifikací získali, již není významná. Jestliže je dimenze fuzzifikovaného znaku $n \geq 2$, použijeme k fuzzifikaci třídu fuzzy bodů, jejíž dimenzi k_n volíme od $n + 1$ do $8n$ (platí i pro $n = 1$).

Tím jsme vyřešili problém uložení dat, která budou uložena ve fuzzy databázi podobně jako v klasické (crisp) databázi. Pouze každá hodnota fuzzifikované n-dimenzionální veličiny je nahrazena k_n-rozměrným vektorem nebo slovní hodnotou, která tento vektor reprezentuje.

Pokud se rozhodneme zvolit třídu fuzzy množin, které nejsou fuzzy body, lze aplikovat oba způsoby vyhledávání popsané v následujících kapitolách, protože v předpokladech pro Zadehův princip rozšíření ani pro průnik není požadavek, aby fuzzy množiny byly konvexní a normální.

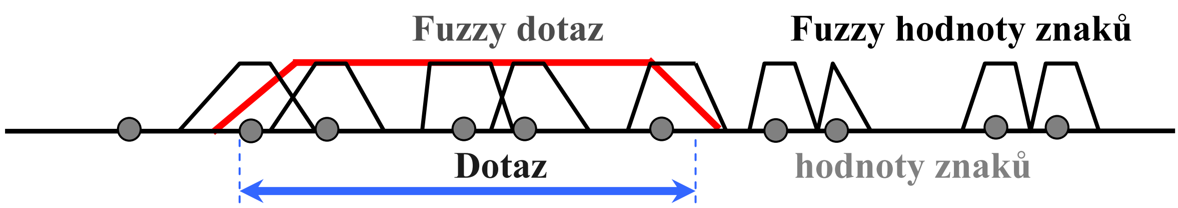
3.2 FUZZY VYHLEDÁVÁNÍ

V klasické (crisp) databázi jsou nejčastější dva způsoby vyhledávání položek podle daných kvantitativních znaků:

- stanovíme intervaly, ve kterých mají hodnoty daných znaků ležet, a vyhledáme všechny takové položky databáze, jejichž hodnoty leží v daných intervalech; tyto položky můžeme uspořádat podle různých pravidel,
- stanovíme optimální hodnoty daných znaků, tím získáme optimální hodnotu položky, a pak stanovíme, jakým způsobem budeme měřit vzdálenost, tj. vyhledáme takovou položku, jejíž hodnota má nejmenší vzdálenost od dané optimální hodnoty položky.

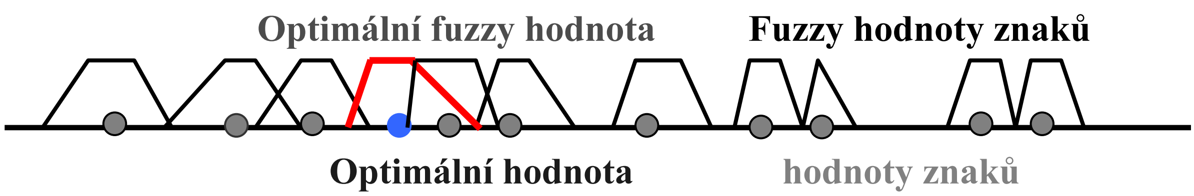
Pokud je třeba vyhledávat i podle kvalitativních znaků, nahradíme v prvním způsobu vyhledávání interval množinou a ve druhém způsobu vyhledávání definujeme vzdálenost pomocí diskrétní metriky.

Zobecněním prvního způsobu vyhledávání (obr. 3.1) získáme úlohu najít položky, jejichž hodnoty daných znaku jsou reprezentované fuzzy množinami (tyto fuzzy množiny nazveme ***informace*** A), které mají neprázdný průnik s fuzzy množinami reprezentujícími ***dotaz*** B. Tyto průniky (fuzzy množiny $C = A \cap B$) budeme nazývat ***odpovědi*** C. Je zřejmé, že některé fuzzy odpovědi budou vyhovovat více a některé méně, takže je třeba stanovit přesné podmínky pro jejich uspořádání. Tento způsob vyhledávání bude podrobně popsán v oddílu 4.1.



Obr. 3.1: Fuzzy vyhledávání založené na průnicích fuzzy množin

Zobecněním druhého způsobu (obr. 3.2) vyhledávání získáme úlohu najít položku reprezentovanou fuzzy bodem, který má minimální fuzzy vzdálenost od optimální hodnoty reprezentované fuzzy bodem. Tento způsob vyhledávání bude podrobně popsán v oddílu 4.2.



Obr. 3.2: Fuzzy vyhledávání založené na minimalizaci fuzzy vzdálenosti

4 HLAVNÍ VÝSLEDKY PRÁCE

4.1 FUZZY VYHLEDÁVÁNÍ ZALOŽENÉ NA PRŮNICÍCH FUZZY MNOŽIN

Protože v této kapitole bude zaveden pojem míry fuzzy množiny, předpokládáme, že všechny fuzzy množiny v této kapitole jsou definovány na měřitelných množinách a jejich funkce příslušnosti jsou lebesgueovsky integrovatelné.

4.1.1 Charakteristiky odpovědí

V literatuře [7, 9, 12] se většinou položky uspořádají podle míry podobnosti informace a dotazu. Tím již autor předpokládá, že vztah mezi informací a dotazem je symetrický. Nám se jevil požadavek symetrie velice přísný až omezující, a proto budeme položky uspořádávat podle číselných charakteristik, které nazveme ***charakteristiky odpovědi***.

Databáze bude používána různými uživateli a proto jsme zvolili několik vhodných charakteristik odpovědí, dle kterých je možno odpovědi uspořádat:

a) uspořádání dle ***výšky odpovědi*** $h(C)$,

b) uspořádání dle ***míry odpovědi*** $m(C)$, kde $m(C) = \int_X \mu_C(x)dx = \int_{\text{supp } C} \mu_C(x)dx$,

c) uspořádání dle ***poměrné míry*** m(C / B), kde $m(C/B)=\dfrac{m(C)}{m(B)}$, pokud $m(B) \neq 0$,

d) uspořádání dle ***poměrné míry*** $m(C$ / $A)$, kde $m(C/A)=\dfrac{m(C)}{m(A)}$, pokud $m(A) \neq 0$,

e) uspořádání dle ***součinu výšky odpovědi a poměrné míry*** $m(C$ / $B)$

$$h(C)\, m(C / B),$$

f) uspořádání dle ***součinu výšky odpovědi a poměrné míry*** $m(C$ / $A)$

$$h(C)\, m(C / A).$$

Zavedení pojmu poměrná míra bylo motivováno podmíněnou pravděpodobností.

Dotaz, resp. informaci nebo odpověď ve více dimenzích, lze definovat jako kartézský součin dílčích dotazů, resp. informací nebo odpovědí v jednotlivých dimenzích. Bylo by možné definovat míru n-rozměrné fuzzy množiny a z té odvodit poměrnou míru dvou fuzzy množin v n dimenzích. Tento postup by byl pro vyhledávání ve fuzzy databázi nevhodný vzhledem k numerické náročnosti výpočtů, proto se omezíme na charakteristiky n-rozměrných odpovědí, které lze vyjádřit pomocí charakteristik dílčích dotazů, informací a odpovědí v jednotlivých dimenzích. Proto je třeba definovat vhodnou kompoziční funkci f charakteristik odpovědí stejného typu v jednotlivých dimenzích $\pi(C_1),...,\pi(C_n)$. Pak číselná charakteristika n-rozměrné odpovědi je

$$\pi(C)=f(\pi(C_1),...,\pi(C_n)).$$

Po konzultaci s budoucími uživateli (materiálovými inženýry, kteří budou užívat fuzzy databázový systém FSearch popsaný v oddíle 4.1.3) jsme dospěli k závěru, že kompoziční funkce f by měla mít následující vlastnosti:

- $f(\pi(C_1),...,\pi(C_n))$ je neklesající ve všech argumentech,
- $\exists k \in \{1,...,n\} : \pi(C_k)=0 \;\Rightarrow\; f(\pi(C_1),...,\pi(C_n))=0$,
- $f(\pi,...,\pi)=\pi$,
- pokud nejsou definovány váhy jednotlivých znaků, pak $f(\pi(C_1),...,\pi(C_n)) =$ $= f(\boldsymbol{p}(\pi(C_1),...,\pi(C_n)))$, kde $\boldsymbol{p}$ značí libovolnou permutaci.

Tyto vlastnosti splňuje operace minimum a vážený geometrický průměr, což nás vedlo k definici 4.1.

Označení 4.1 Nechť $\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_n$ jsou znaky.

- Počet položek v databázi, u nichž jsou známé znaky $\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_n$, označíme $m(\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_n)$.
- n-rozměrné fuzzy číslo $A = (X_1\times X_2\times\dots\times X_n, \mu_A)$ reprezentující informaci o znacích $\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_n$ a položce j nazveme ***informace*** $A_j(\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_n)$.
- n-rozměrné fuzzy číslo $B = (X_1\times X_2\times\dots\times X_n, \mu_B)$ reprezentující dotaz na znaky $\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_n$ nazveme ***dotaz*** $B(\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_n)$.

- n-rozměrnou fuzzy množinu $C = (X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n, \mu_C)$ reprezentující odpověď na dotaz $B(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ pro j-tou položku nazveme ***odpověď*** $C_j(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$,

Definice 4.1 Nechť $\sum_{i=1}^{n} w_i = n.$

Výškou n-rozměrné odpovědi $C(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ rozumíme výšku fuzzy množiny $C(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = C(\alpha_1) \times C(\alpha_2) \times \ldots \times C(\alpha_n)$ a značíme ji $h(C(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n))$.

Průměrnou výškou n-rozměrné odpovědi $C(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ rozumíme číslo

$$h_g(C(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \left(h(C(\alpha_i))\right)^{w_i}}.$$

Minimální poměrnou mírou n-rozměrné odpovědi $C(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ***a dotazu*** $B(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ rozumíme číslo

$$m_{min}(C(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) / B(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)) = \min_i (m(C(\alpha_i) / B(\alpha_i)).$$

Průměrnou poměrnou mírou n - rozměrné odpovědi $C(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ***a dotazu*** $B(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ rozumíme číslo

$$m_g(C(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) / B(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \left(m(C(\alpha_i) / B(\alpha_i))\right)^{w_i}}.$$

Minimální poměrnou mírou n-rozměrné odpovědi $C(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ***a informace*** $A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ rozumíme číslo

$$m_{\min}(C(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) / A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)) = \min_i (m(C(\alpha_i) / A(\alpha_i)).$$

Průměrnou poměrnou mírou n - rozměrné odpovědi $C(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ***a informace*** $A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ rozumíme číslo

$$m_g(C(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) / A(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \left(m(C(\alpha_i) / A(\alpha_i))\right)^{w_i}}.$$

Poznámka 4.1 Jestliže zkoumáme charakteristiky odpovědí, zajímá nás nejvíce, jak se budou tyto charakteristiky chovat, jestliže zúžíme (zpřesníme) dotaz.

Definice 4.2 Dotaz $B_1 = (X, \mu_{B_1})$ je ***zúžením dotazu*** $B = (X, \mu_B)$, jestliže $B_1 \subseteq B$.

Věta 4.1 Nechť jsou následující fuzzy množiny definovány na universu $X \subseteq \boldsymbol{R}^n$. Nechť je pevně dána informace $A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, je definována posloupnost dotazů $\{B_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\}$, kde platí $B_{k+1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ je zúžením $B_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, je definována posloupnost fuzzy množin $\{C_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\}$, kde člen $C_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots,\alpha_n)$ je definován jako odpověď na dotaz B_k, tedy $C_k = A \cap B_k$, $k \in \boldsymbol{N}$. Pak platí:

1. Posloupnost výšek $(h(C_1), h(C_2),\ldots, h(C_k), \ldots)$ fuzzy množin $C_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ je nerostoucí a hodnoty této posloupnosti leží v intervalu $\langle 0,1\rangle$.
2. Posloupnost průměrných výšek $(h_g(C_1), h_g(C_2), \ldots, h_g(C_k), \ldots)$ fuzzy množin $C_k(\alpha_1,\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ je nerostoucí a hodnoty této posloupnosti leží v intervalu $\langle 0,1\rangle$.
3. Posloupnost minimálních poměrných měr $(m_{min}(C_1/B_1), m_{min}(C_2/B_2), \ldots, m_{min}(C_k/B_k),\ldots)$ fuzzy množin $C_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ není obecně monotónní a hodnoty této posloupnosti leží v intervalu $\langle 0,1\rangle$.
4. Posloupnost průměrných poměrných měr $(m_g(C_1/B_1), m_g(C_2/B_2), \ldots, m_g(C_k/B_k),\ldots)$ fuzzy množin $C_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ není obecně monotónní a hodnoty této posloupnosti leží v intervalu $\langle 0,1\rangle$.
5. Posloupnost minimálních poměrných měr $(m_{min}(C_1/A), m_{min}(C_2/A), \ldots, m_{min}(C_k/A), \ldots)$ fuzzy množin $C_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ je nerostoucí a hodnoty této posloupnosti leží v intervalu $\langle 0,1\rangle$.
6. Posloupnost průměrných poměrných měr $(m_g(C_1/A), m_g(C_2/A), \ldots, m_g(C_k/A), \ldots)$ fuzzy množin $C_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ je nerostoucí a hodnoty této posloupnosti leží v intervalu $\langle 0,1\rangle$.
7. Posloupnost součinů průměrných výšek a průměrných poměrných měr $(h_g(C_1)\, m_g(C_1/B_1),\ h_g(C_2)\, m_g(C_2/B_2), \ldots, h_g(C_k)\, m_g(C_k/B_k), \ldots)$ fuzzy množin $C_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ není obecně monotónní a hodnoty této posloupnosti leží v intervalu $\langle 0,1\rangle$.
8. Posloupnost součinů průměrných výšek a průměrných poměrných měr $(h_g(C_1)\, m_g(C_1/A),\ h_g(C_2)\, m_g(C_2/A), \ldots, h_g(C_k)\, m_g(C_k/A), \ldots)$ fuzzy množin $C_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ je nerostoucí a hodnoty této posloupnosti leží v intervalu $\langle 0,1\rangle$.

4.1.2 Průnik fuzzy čísel s polygonální funkcí příslušnosti

Definice 4.3 ***Polygonální funkce příslušnosti*** je spojitá po částech lineární nebo konstantní funkce příslušnosti.

Věta 4.2 Jestliže $A = (X, \mu_A)$, $B = (X, \mu_B)$ jsou fuzzy čísla s polygonální funkcí příslušnosti, pak $C = A \cap B$ je konvexní fuzzy množina s polygonální funkcí příslušnosti.

Věta 4.3 Jestliže fuzzy množina $A = (X, \mu_A)$ je konvexní a má polygonální funkci příslušnosti, pak tato funkce příslušnosti nabývá maxima v x-ové souřadnici jednoho z vrcholů polygonu tvořícího její graf anebo na jediném intervalu, kde je funkce příslušnosti konstantní.

Věta 4.4 Jestliže informace $A = (X, \mu_A)$ je lichoběžníkové fuzzy číslo s funkcí příslušnosti

$$\mu_A = \max\left(\min\left(\frac{x-a_A}{b_A-a_A}, \frac{x-d_A}{c_A-d_A}, 1\right), 0\right)$$

a dotaz $B = (X, \mu_B)$ je lichoběžníkové fuzzy číslo s funkcí příslušnosti

$$\mu_B = \max\left(\min\left(\frac{x-a_B}{b_B-a_B}, \frac{x-d_B}{c_B-d_B}, 1\right), 0\right),$$

pak funkci příslušnosti odpovědi $C = A \cap B = (X, \mu_C)$ lze vyjádřit ve tvaru

$$\mu_C(x) = \max\left(\min\left(\frac{x-a_A}{b_A-a_A}, \frac{x-d_A}{c_A-d_A}, \frac{x-a_B}{b_B-a_B}, \frac{x-d_B}{c_B-d_B}, 1\right), 0\right).$$

4.1.3 FSearch 2.0 pro kovové materiály

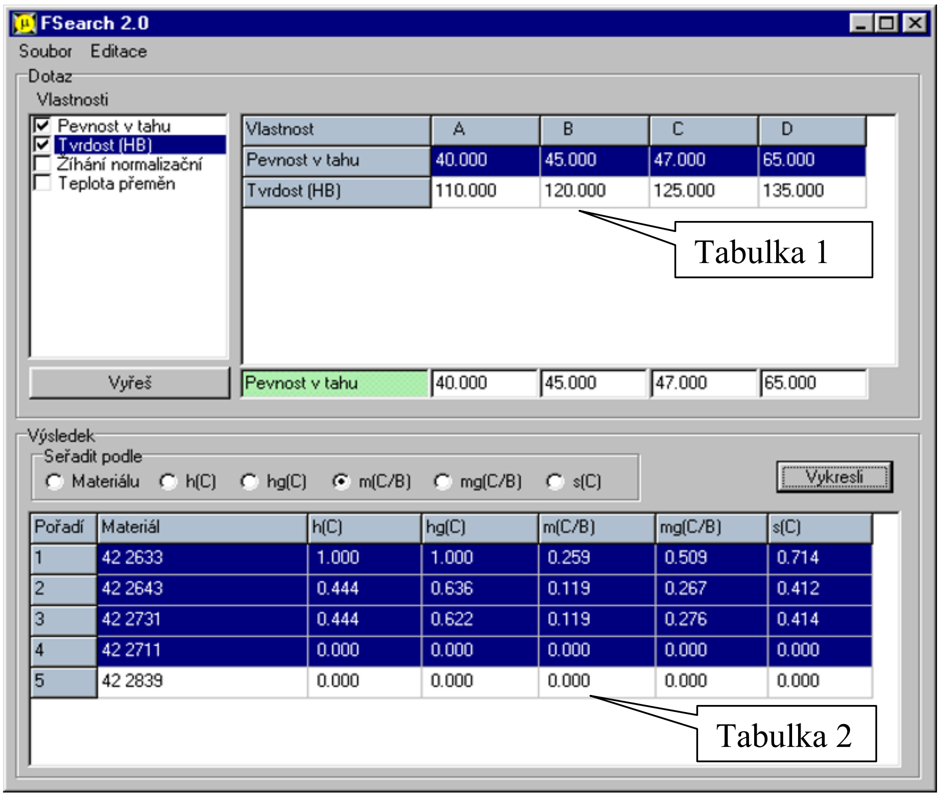
Jedna z oblastí, kde je vhodné reprezentovat fyzikální veličiny pomocí fuzzy množin, je materiálové inženýrství. V rámci řešení výzkumného projektu FSI PF 390001: „Návrh a implementace vícerozměrného fuzzy jádra expertního databázového systému pro kovové materiály“ [2] bylo naprogramováno plně funkční jádro fuzzy databáze pod Borland Delphi 3.0.

Vágní informace i dotazy jsou modelovány pomocí třídy lichoběžníkových fuzzy čísel. Jelikož algoritmus vyhledávání je popsán v předchozích oddílech, předvedeme činnost programu na konkrétním příkladu.

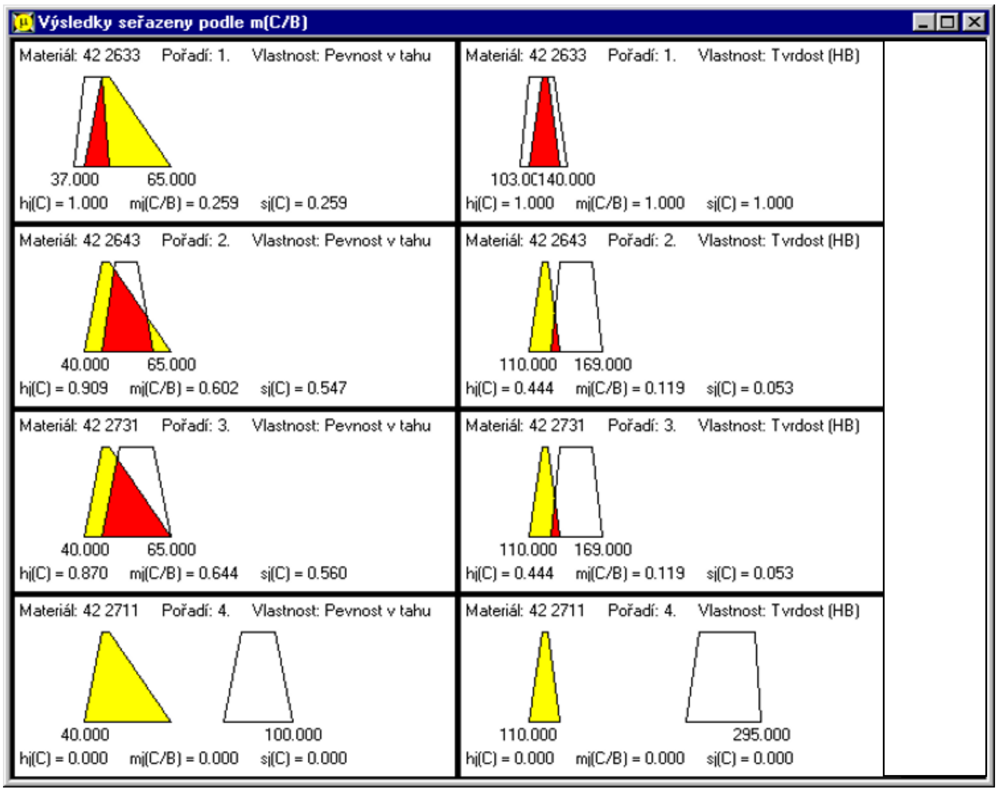
Názvy materiálů a fuzzfikované hodnoty materiálových charakteristik jsou uloženy v souboru material.dat (v našem případě jsou v databázi uloženy hodnoty čtyř materiálových charakteristik). K práci s tímto souborem slouží editační okno.

Pokud databáze obsahuje nějaká data, může uživatel položit dotaz (obr. 4.1):

1. z materiálových charakteristik vybere ty, dle kterých bude vyhledávat,
2. v editačním panelu Dotaz vyplní tabulku 1,
3. odešle dotaz tlačítkem Vyřeš,
4. charakteristiky určující míru příslušnosti k množině dané dotazem se vypíší v tabulce 2; dle těchto charakteristik lze materiály uspořádat pomocí panelu umístěného nad tabulkou,
5. po stisknutí tlačítka Vykresli se vykreslí odpovědi v jednotlivých dimenzích pro libovolné materiály označené v tabulce 2 (obr. 4.2).



Obr. 4.1: Hlavní okno



Obr. 4.2: Grafický výstup

4.2 FUZZY VZDÁLENOSTI

Definice fuzzy vzdáleností, které byly již dříve publikovány různými autory [8, 11, 17, 21], se dají rozdělit do tří rozdílných skupin:

a) zobecnění vzdálenosti mezi podmnožinami metrického prostoru (oddíl 4.2.1),

b) vzdálenost mezi funkcemi příslušnosti fuzzy množin (oddíl 4.2.2),

c) zavedení fuzzy metriky zobecněním metrického prostoru na prostor fuzzy metrický (oddíl 4.2.3).

Protože žádná z publikovaných fuzzy vzdáleností neodpovídala našim potřebám, definovali jsme fuzzy metrický prostor na množině fuzzy bodů (def. 3.1) pomocí Zadehova principu rozšíření. Vlastnosti tohoto fuzzy metrického prostoru jsou v teto kapitole popsány a dány do souvislosti s fuzzy vzdálenostmi jiných autorů.

4.2.1 Vzdálenost mezi fuzzy množinami

V tomto oddílu definujeme fuzzy vzdálenost dvou fuzzy množin jako zobecnění vzdálenosti dvou neprázdných podmnožin metrického prostoru. Při zobecňování jsme využili vzdáleností odpovídajících si α-řezů obou fuzzy množin.

Definice 4.4 Nechť (X, ρ) je metrický prostor. ***Vzdáleností dvou neprázdných množin*** M a N metrického prostoru X rozumíme nezáporné reálné číslo

$$\rho(M, N) = \inf_{x \in M, y \in N} \rho(x, y).$$

Definice 4.5 Nechť (X, ρ) je metrický prostor. ***Fuzzy vzdáleností dvou neprázdných fuzzy množin*** M a N metrického prostoru X rozumíme fuzzy množinu $D_f(M, N) = (\boldsymbol{R}^+, \mu_{D_f(M,N)})$ s funkcí příslušnosti

$$\mu_{D_f(M,N)}(y) =$$

$$= \begin{cases} \sup\left\{\alpha \in \langle 0,1 \rangle \middle| M_\alpha, N_\alpha \neq \emptyset; \rho(M_\alpha, N_\alpha) \leq y\right\} & \text{pro } y \leq \lim\limits_{\beta \to \min\{h(M), h(N)\}_-} \rho(M_\beta, N_\beta), \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Gerla a Volpe [8] zavedli (crisp) vzdálenost dvou fuzzy množin následovně.

Definice 4.6 Nechť (X, ρ) je metrický prostor. ***Vzdáleností dvou fuzzy množin*** M a N metrického prostoru X rozumíme nezáporné reálné číslo

$$D(M, N) = \int_0^1 \rho(M_\alpha, N_\alpha) d\alpha, \text{ kde } \rho(P, \emptyset) = 0 \text{ pro } \forall P \subseteq X.$$

Označení 4.2 Množinu všech fuzzy množin na univerzu X označíme X_{FS}. Množinu všech fuzzy čísel označíme $\boldsymbol{R}_{fn}$ a obdobně množinu všech fuzzy bodů na lineárním prostoru X označíme X_{fp}. Množinu všech nezáporných fuzzy čísel označíme $\boldsymbol{R}_{fn}^+$, obdobně množinu všech nezáporných normálních fuzzy množin na $\boldsymbol{R}$

označíme ${}_n\boldsymbol{R}^+_{FS}$. Každé $x \in X$ může být považováno za fuzzy bod $\{x\} = (X, \mu_{\{x\}})$ s funkcí příslušnosti

$$\mu_{\{x\}}(y) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad y = x, \\ 0 & \text{pro} \quad y \neq x. \end{cases}$$

Množinu všech $\{x\}$ označíme ${}_{crisp}X_{fp}$ (zřejmě ${}_{crisp}X_{fp} \subset X_{fp}$).

Poznámka 4.2 Vzdálenost $D_f(M, N)$: $X_{FS} \times X_{FS} \to \boldsymbol{R}^+_{FS}$ není fuzzy metrika na X_{FS}, stejně tak vzdálenost $D(M, N)$: $X_{FS} \times X_{FS} \to \boldsymbol{R}^+$ (resp. $\rho(M, N)$: $X_S \times X_S \to \boldsymbol{R}^+$) není metrika na X_{FS} (resp. na X_S).

Věta 4.5 Jestliže (X, ρ) je metrický prostor a M, N dvě neprázdné (crisp) množiny na X, pak

a) $\rho(M, N) = D(M, N)$,

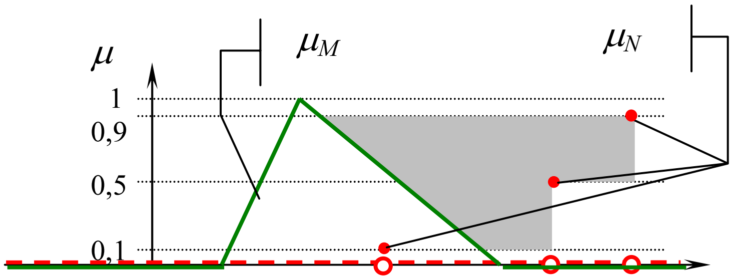
b) $\mu_{D_f(M,N)} = \chi\{\rho(M, N)\}$, kde $\chi(A)$ je charakteristická funkce množiny A.

Poznámka 4.3 Z předchozí věty vyplývá, že definice 4.5 a 4.6 přirozeně zobecňují klasickou definici vzdálenosti dvou neprázdných podmnožin metrického prostoru.

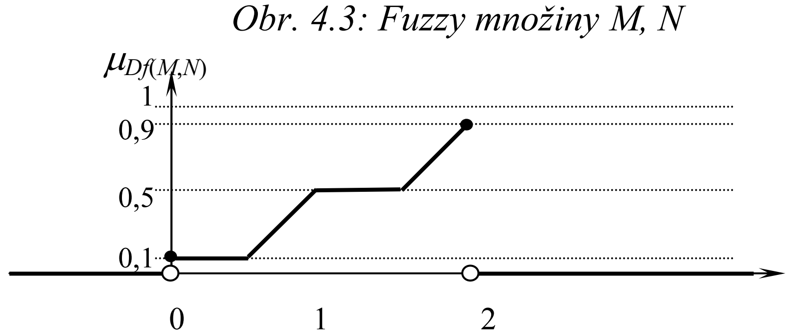
Věta 4.6 Jestliže (X, ρ) je metrický prostor a M, N dvě neprázdné fuzzy množiny na X, pak fuzzy vzdálenost $D_f(M, N)$ je konvexní fuzzy množina a

$$\int_0^{h(D_f(M,N))} \inf\,(D_f(M,N)_\alpha)\,d\alpha = D(M,N).$$

Příklad 4.1 Fuzzy vzdálenost $D_f(M, N)$ dvou fuzzy množin $M, N \in \boldsymbol{R}_{FS}$ je znázorněna na obrázku 4.4. Vzdálenost $D(M, N)$ je plocha šedě vybarvené oblasti (obr. 4.3).



Obr. 4.3: Fuzzy množiny M, N



Obr 4.4: Vzdálenost $D_f(M, N)$

Definice 4.7 Nechť (X, ρ) je metrický prostor. ***Maximální vzdáleností dvou neprázdných množin*** M a N metrického prostoru X rozumíme nezáporné reálné číslo

$$\rho_{max}(M, N) = \sup_{x \in M, y \in N} \rho(x, y).$$

Definice 4.8 Nechť (X, ρ) je metrický prostor. ***Maximální fuzzy vzdáleností dvou neprázdných fuzzy množin*** M a N metrického prostoru X rozumíme fuzzy množinu $D_{fmax}(M, N) = (\boldsymbol{R}^+, \mu_{D_{f\max}(M,N)})$ s funkcí příslušnosti

$$\mu_{D_{f\max}(M,N)}(y) =$$

$$= \begin{cases} \sup\{\alpha \in \langle 0,1 \rangle \mid M_\alpha, N_\alpha \neq \emptyset; \rho_{\max}(M_\alpha, N_\alpha) \geq y\} \\ \qquad \text{pro } y \geq \lim\limits_{\beta \to \min\{h(M), h(N)\}_-} \rho_{\max}(M_\beta, N_\beta), \\ 0 \qquad \text{jinde.} \end{cases}$$

4.2.2 Vzdálenosti mezi funkcemi příslušnosti

V tomto oddílu je vzdálenost fuzzy množin definována jako vzdálenost mezi jejich funkcemi příslušnosti. Vlastnosti vzdáleností funkcí jsou uvedeny v [20].

Definice 4.9 Nechť $X \neq \emptyset$ je lebesgueovsky měřitelná množina, m je Lebesgueova míra na X. ${}^{Lp}X_{FS}$ je množina všech fuzzy množin definovaných na X, jejichž funkce příslušnosti jsou lebesgueovsky integrovatelné s p-tou mocninou ($p \geq 1$).
Vzdálenost $d_p : {}^{Lp}X_{FS} \times {}^{Lp}X_{FS} \to \boldsymbol{R}^+$ ***dvou fuzzy množin*** na X je funkce, která každé dvojici fuzzy množin $M, N \in {}^{Lp}X_{FS}$ přiřadí číslo

$$d_p(M,N) = \begin{cases} \left(\int\limits_X |\mu_M - \mu_N|^p \, dm \right)^{\frac{1}{p}} & \text{pro } 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname*{essentialsup}\limits_{x \in X} |\mu_M(x) - \mu_N(x)| & \text{pro } p = \infty. \end{cases}$$

Uspořádaná dvojice $({}^{Lp}X_{FS}, d_p)$ se nazývá ***fuzzy metrický prostor***.

Poznámka 4.4 Tento fuzzy metrický prostor vyhovuje všem požadavkům kladeným na metrický prostor s jednou výjimkou: Jestliže je vzdálenost dvou fuzzy množin nulová, jsou funkce příslušnosti obou fuzzy množin téměř všude stejné, tedy

$$d_p(M,N) = 0 \Rightarrow \mu_M(x) = \mu_N(x) \text{ pro } \forall x \in X - E, \text{ kde } m(E) = 0.$$

4.2.3 Fuzzy metrický prostor

V tomto oddílu zobecníme metrický prostor na prostor fuzzy metrický.

Velice obecnou definici (def. 4.10) fuzzy metrického prostoru uvedli Kaleva a Seikkala [11]. Definovali vzdálenost jako fuzzy funkci, která libovolným dvěma prvkům množiny přiřadí nezáporné shora spojité fuzzy číslo a splňuje určité vlastnosti. Definovali také fuzzy konvergenci a odvodili větu o pevném bodě. Vzhledem k obecnosti definice zde nejsou uvedena pravidla jak konstruovat konkrétní fuzzy metrické prostory pro konkrétní množiny bodů.

Definice 4.10 Nechť $X \neq \emptyset$, d: $X \times X \rightarrow G$, kde G je množina všech shora spojitých nezáporných fuzzy čísel, zobrazení R, L: $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \rightarrow \langle 0, 1\rangle$ jsou symetrická a neklesající v obou argumentech a platí $L(0,0) = 0$ a $R(1,1) = 1$. Uspořádaná čtveřice (X, d, L, R) se nazývá ***fuzzy metrický prostor*** a shora spojité nezáporné fuzzy číslo d ***fuzzy vzdálenost***, jestliže pro $\forall\ x, y, z \in X$ platí:

1) $d(x, y) = \{0\}$ tehdy a jen tehdy, jestliže $x = y$,
2) $d(x, y) = d(y, x)$,
3a) $\mu_{d(x,y)}(s+t) \geq L(\mu_{d(x,z)}(s), \mu_{d(z,y)}(t))$, jestliže $s \leq \inf \ker d(x,z)$, $t \leq \inf \ker d(z,y)$ a $s + t \leq \inf \ker d(x,y)$,
3b) $\mu_{d(x,y)}(s+t) \leq R(\mu_{d(x,z)}(s), \mu_{d(z,y)}(t))$, jestliže $s \geq \inf \ker d(x,z)$, $t \geq \inf \ker d(z,y)$ a $s + t \geq \inf \ker d(x,y)$.

Poznámka 4.5 Protože nepotřebujeme definovat fuzzy metrický prostor na obecné množině $X \neq \emptyset$, ale na množině fuzzy bodů, definujeme fuzzy vzdálenost pomocí Zadehova principu rozšíření. To znamená, že stupeň příslušnosti $\mu_{\rho_f(A,B)}(y)$ může být interpretován jako míra možnosti, že vzdálenost mezi $A \in X_{fp}$ a $B \in X_{fp}$ je y.

Definice 4.11 Je-li (X,ρ) lineární metrický prostor a A, $B \in X_{fp}$ libovolné fuzzy body, pak definujeme ***fuzzy vzdálenost fuzzy bodů*** A a B jako fuzzy množinu $\rho_f(A, B) = (\boldsymbol{R}, \mu_{\rho_f(A,B)})$ s funkcí příslušnosti

$$\mu_{\rho_f(A,B)}(y) = \sup_{\substack{(x_1,x_2)\in X^2 \\ \rho(x_1,x_2)=y}} \min\{\ \mu_A(x_1),\ \mu_B(x_2)\ \}.$$

Jestliže neexistuje taková dvojice $(x_1, x_2) \in X^2$, že $\rho(x_1,x_2) = y$, klademe $\mu_{\rho_f(A,B)}(y) = 0$. Uspořádaná dvojice (X_{fp}, ρ_f) se nazývá ***fuzzy metrický prostor***.

Věta 4.7 Fuzzy vzdálenost ρ_f definovaná v definici 4.11 je zobrazení z X_{fp}^2 do množiny všech normálních nezáporných fuzzy množin na $\boldsymbol{R}$, tedy ρ_f: $X_{fp}^2 \rightarrow {}_n\boldsymbol{R}_{FS}^+$.

Poznámka 4.6 V technické praxi se většinou setkáváme s lineárními normovanými prostory (X, g), kde g: $X \rightarrow \boldsymbol{R}^+$ je norma. Pokud na těchto prostorech definujeme metriku $\rho(x_1,x_2) = g(x_2 - x_1)$, pak fuzzy vzdálenost ρ_f definovaná pomocí Zadehova principu rozšíření v definici 4.11 je zobrazení z X_{fp}^2 do množiny všech nezáporných fuzzy čísel na $\boldsymbol{R}$, tedy ρ_f: $X_{fp}^2 \rightarrow \boldsymbol{R}_{fn}^+$. Příkladem takového fuzzy metrického prostoru je fuzzy euklidovský prostor $(\boldsymbol{R}^n_{fp}, \rho_{f2})$ nebo fuzzy metrické prostory $(\boldsymbol{R}^n_{fp}, \rho_{fk})$, kde $1 \leq k \leq \infty$, definované v oddílu 4.2.5.

Poznámka 4.7 Nyní je třeba ověřit, zda fuzzy metrický prostor vyhovuje podmínkám uvedeným v definici metrického prostoru a zaslouží si přívlastek metrický. Za tímto účelem je třeba definovat uspořádání na ${}_n\boldsymbol{R}_{FS}$.

Definice 4.12 Nechť $A, B \in \boldsymbol{R}_{fn}$. ***Částečné uspořádání*** $\preccurlyeq$ na $\boldsymbol{R}_{fn}$ je definováno jako relace $A \preccurlyeq B$, jestliže $\inf A_\alpha \leq \inf B_\alpha$ a $\sup A_\alpha \leq \sup B_\alpha$ pro $\forall \alpha \in (0, 1\rangle$.

Poznámka 4.8 Relace $A \preccurlyeq B$ značí, že funkce příslušnosti μ_A je „nalevo“ od funkce příslušnosti μ_B. Množina všech normálních fuzzy množin na $\boldsymbol{R}$ je podstatně složitější $(\boldsymbol{R}_{fn} \subset {}_n\boldsymbol{R}_{FS})$ a proto nebudeme zkoumat vnitřní strukturu jednotlivých fuzzy množin, ale porovnáme jejich nejmenší konvexní obaly.

Definice 4.13 Nechť $A, B \in {}_n\boldsymbol{R}_{FS}$. ***Částečné uspořádání*** $\preccurlyeq$ na ${}_n\boldsymbol{R}_{FS}$ je definováno jako relace $A \preccurlyeq B$, jestliže $\inf A_\alpha \leq \inf B_\alpha$ a $\sup A_\alpha \leq \sup B_\alpha$ pro $\forall \alpha \in (0, 1\rangle$.

Označení 4.3 Nechť $O \in {}_n\boldsymbol{R}^+_{FS}$ a $\mu_O(0) = 1$. Fuzzy množinu O nazveme ***fuzzy nula*** a množinu všech fuzzy nul označíme O_{FS}.

Věta 4.8 Pro všechny fuzzy body $A, B, C \in X_{fp}$ platí:

a) Fuzzy metrický prostor (X_{fp}, ρ_f) je symetrický, tedy $\rho_f(A, B) = \rho_f(B, A)$.

b) Fuzzy metrický prostor (X_{fp}, ρ_f) je pozitivně semidefinitní, tedy $\{0\} \preccurlyeq \rho_f(A, B)$.

c) Pro fuzzy metrický prostor (X_{fp}, ρ_f) platí trojúhelníková nerovnost, tedy

$$\rho_f(A, B) \preccurlyeq \rho_f(A, C) \oplus \rho_f(C, B),$$

kde výpočet pravé strany nerovnosti (součet interaktivních fuzzy množin) je popsán v poznámce 4.9.

Poznámka 4.9 Fuzzy množiny $\rho_f(A, C)$ a $\rho_f(C, B)$ na pravé straně trojúhelníkové nerovnosti (věta 4.8) jsou díky fuzzy bodu C interaktivní (interaktivita je v teorii fuzzy množin obdoba pojmu závislost v teorii pravděpodobnosti), takže nelze vypočítat obě fuzzy vzdálenosti a ty sečíst. Proto je třeba s výrazem $\rho_f(A, C) \oplus \rho_f(C, B)$ pracovat jako s fuzzy funkcí závislou na fuzzy bodech $A, B, C \in X_{fp}$ a $\rho_f(A, C) \oplus \rho_f(C, B) \in {}_n\boldsymbol{R}^+_{FS}$ je fuzzy množina s funkcí příslušnosti

$$\mu_{\rho_f(A,C) \oplus \rho_f(C,B)}(y) = \sup_{\substack{(x_1, x_2, x_3) \in X^3 \\ \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) = y}} \min\{\mu_A(x_1)\mu_B(x_2)\mu_A(x_3)\}.$$

Věta 4.9 Pro všechny dvojice prvků $A, B \in X_{fp}$ platí:

a) Jestliže $\rho_f(A, B) = \{0\}$, pak $A = B$ a $A, B \in {}_{crisp}X_{fp}$. Neplatí však, že pro $A = B$ je $\rho_f(A, B) = \{0\}$.

b) Jestliže $\rho_f(A, B) \in {}_{crisp}\boldsymbol{R}_{fn}$, pak $A, B \in {}_{crisp}X_{fp}$.

c) Jestliže $A = B$, pak $\rho_f(A, B) \in O_{FS}$. Neplatí však, že pro $\rho_f(A, B) \in O_{FS}$ je $A = B$.

Poznámka 4.10 Jestliže $A \in X_{fp} - {}_{crisp}X_{fp}$, pak $\rho_f(A, A) \neq \{0\}$. Proto pokud potřebujeme axiom totožnosti, můžeme definovat novou metriku

$$\rho_{nf}(A,B) = \begin{cases} \rho_f(A,B) & \text{pro } A \neq B, \\ \{0\} & \text{pro } A = B. \end{cases}$$

Takto definovaný fuzzy metrický prostor (X_f, ρ_{nf}) již ovšem není získán pomocí Zadehova principu rozšíření. Proto je často vhodné od axiomu totožnosti ustoupit a nazývat, jako my, fuzzy metrickým již prostor definovaný v definici 4.11.

Věta 4.10 Nechť (G, ρ_f) je fuzzy metrický prostor, kde G je množina všech shora spojitých nezáporných fuzzy čísel a fuzzy metrika ρ_f je zadehovským rozšířením metriky $\rho(x,y) = |x - y|$, zobrazení L: $\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$ je symetrické, neklesající v obou argumentech a platí $L(0,0) = 0$. Potom nerovnost

$$\mu_{d(A,B)}(s+t) \geq L(\mu_{d(A,C)}(s), \mu_{d(C,A)}(t))$$

platí pro $\forall\ A, B, C \in G$ a $\forall\ s, t \in \{s, t \in \boldsymbol{R} \mid s \leq \inf \ker \rho_f(A, C), t \leq \inf \ker \rho_f(C, B)$ a $s + t \leq \inf \ker \rho_f(A, B)\}$, právě když $L \equiv 0$.

Poznámka 4.11 Větu 4.10 lze interpretovat také tak, že v definici 4.11 definovaný fuzzy metrický prostor (G, ρ_f), kde G je množina všech shora spojitých nezáporných fuzzy čísel a ρ_f je zadehovským rozšířením metriky $\rho(x,y) = |x - y|$, je obecným fuzzy metrickým prostorem (G, d, L, R) definovaným v definici 4.10 právě, když $L \equiv 0$. To znamená, že trojúhelníková nerovnost 3a) definovaná v definici 4.10 pro levé strany fuzzy vzdáleností není vůbec použita.

4.2.4 Fuzzy kontraktivní zobrazení

Definice 4.14 Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Zobrazení C: $X \to X$ se nazývá ***kontraktivní***, existuje-li takové číslo $0 < q < 1$, že pro libovolné dva body $x, y \in X$, platí nerovnost

$$\rho(Cx, Cy) \leq q\rho(x,y).$$

Bod $p \in X$ se nazývá ***pevný bod zobrazení*** C: $X \to X$, jestliže $Cp = p$.

Věta 4.11 Každé kontraktivní zobrazení má v úplném metrickém prostoru (X, ρ) právě jeden pevný bod.

Definice 4.15 Nechť (X_{fp}, ρ_f) je fuzzy metrický prostor. Zobrazení C_f: $X_{fp} \to X_{fp}$ se nazývá ***fuzzy kontraktivní***, existuje-li takové číslo $0 < q < 1$, že pro libovolné dva fuzzy body $A, B \in X_{fp}$, platí nerovnost

$$\rho_f(C_f A, C_f B) \preccurlyeq \{q\} \odot \rho_f(A,B),$$

kde $\odot$ je Zadehovo rozšíření součinu.

Věta 4.12 Nechť (X, ρ) je úplný metrický prostor, C: $X \to X$ je kontraktivní zobrazení, které má pevný bod $p \in X$ a zobrazení C_f: $X_{fp} \to X_{fp}$ je Zadehovo rozšíření kontraktivního zobrazení C. Pak C_f je fuzzy kontraktivní zobrazení a má právě jeden pevný bod

$$\{p\} \in {}_{\text{crisp}}X_{fp}\,.$$

4.2.5 Fuzzy metrický prostor v $\mathbf{R}^n$

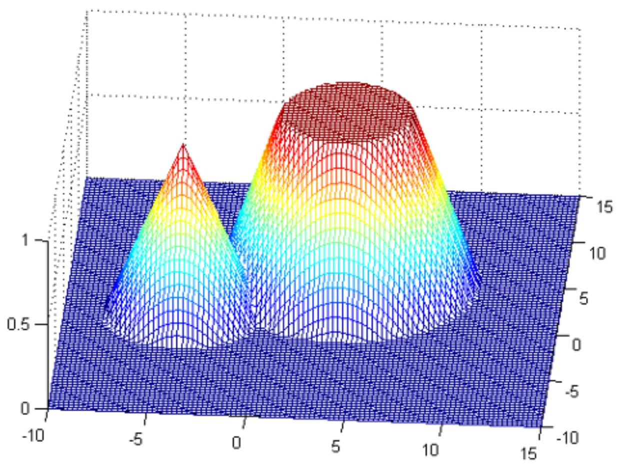
Jestliže fuzzy body $A, B \in \boldsymbol{R}^n_{fp}$, pak lze užitím definice 4.11 jakýkoli metrický prostor $(\boldsymbol{R}^n, \rho)$ rozšířit na fuzzy metrický prostor $(\boldsymbol{R}^n_{fp}, \rho_f)$. Většinou se v $\boldsymbol{R}^n$ používají metriky

$$\rho_k(A,\ B) = \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i|^k \right)^{\frac{1}{k}}, \text{ kde } 1 \le k < \infty\,,$$

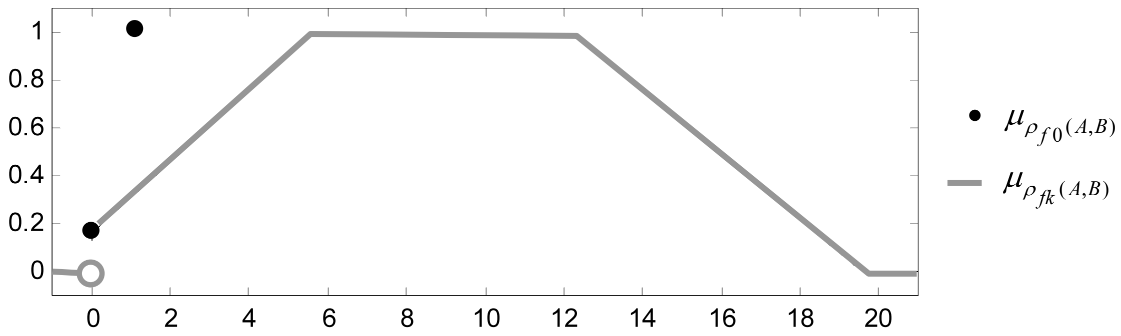
anebo diskrétní metrika

$$\rho_0(A,\ B) = \begin{cases} 0 & pro \quad A = B, \\ 1 & pro \quad A \ne B. \end{cases}$$

Příklad 4.2 Fuzzy vzdálenosti fuzzy bodů $A, B \in \boldsymbol{R}^2_{fp}$ z obr. 4.5 jsou znázorněny na obr. 4.6.



Obr.4.5: Fuzzy body A, $B \in \boldsymbol{R}^2_{fp}$



Obr. 4.6: Fuzzy vzdálenosti $\rho_{fk}(A, B)$

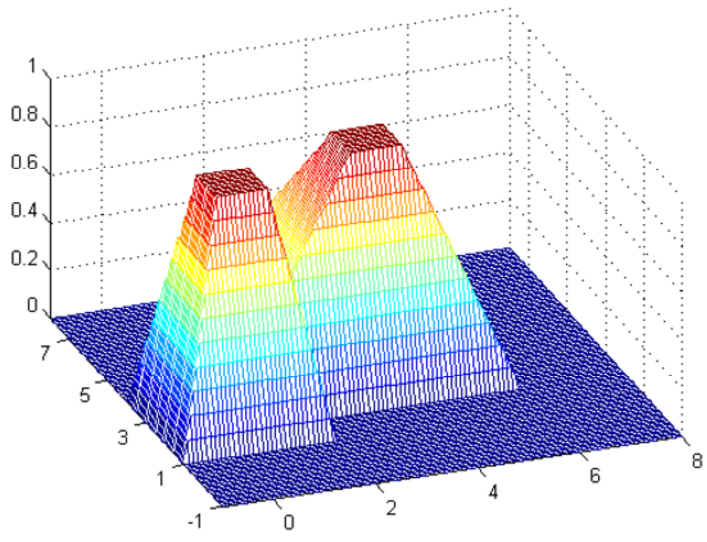
Věta 4.13 Funkce příslušnosti fuzzy vzdálenosti $\rho_{f0}(A, B) = (\boldsymbol{R}^+, \mu_{\rho_{f0}(A,B)})$, kde $\rho_{f0}(A, B)$ značí Zadehovo rozšíření diskrétní metriky $\rho_0(A, B)$, je

$$\mu_{\rho_{f0}(A,B)}(0) = h(A \cap B),$$

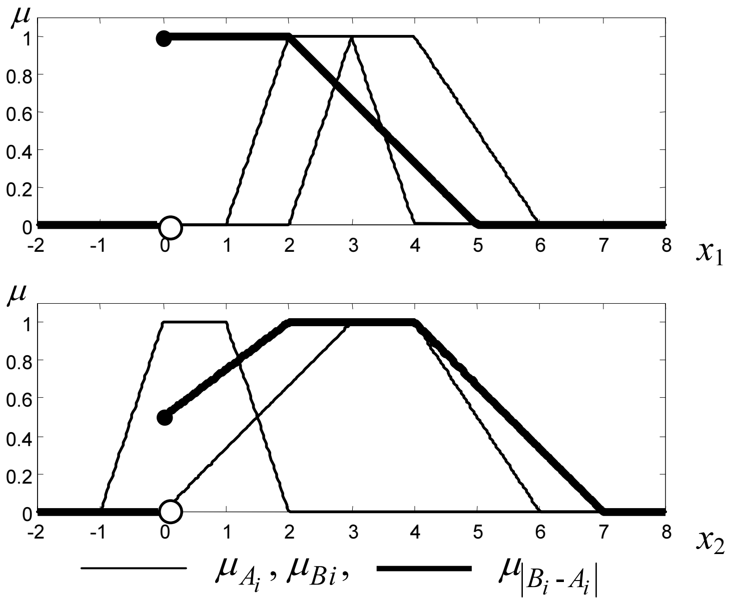
$$\mu_{\rho_{f0}(A,B)}(1) = h((A \cup B) - \{x_0\}), \text{ kde } x_0 \in \bigcap_{\beta < h(A \cap B)} (A \cup B)_\beta.$$

Jestliže definujeme fuzzy bod $A = (\boldsymbol{R}^n, \mu_A(x_1, x_2, \dots, x_n))$ jako kartézský součin fuzzy čísel $A_i = (\boldsymbol{R}, \mu_{A_i}(x_i))$, $i = 1, \dots, n$, v jednotlivých dimenzích, lze vyjádření fuzzy vzdálenosti ρ_{fk} zjednodušit. Zjednodušení spočívá v tom, že můžeme spočítat vzdálenosti v jednotlivých dimenzích a pomoci Zadehova principu rozšíření spočítat vzdálenost v $\boldsymbol{R}^n$.

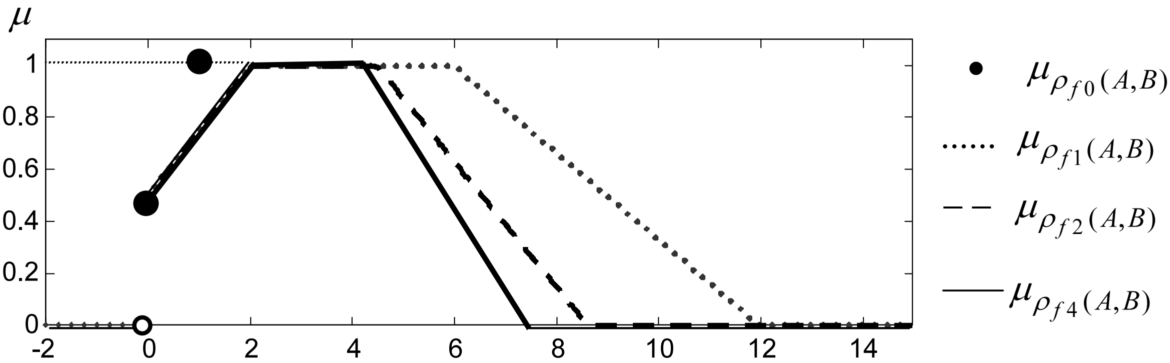
Příklad 4.3 Fuzzy vzdálenosti fuzzy bodů $A, B \in \boldsymbol{R}^2_{fp}$ z obr. 4.7 jsou znázorněny na obr. 4.9. Na obr. 4.8 jsou znázorněny fuzzy vzdálenosti v jednotlivých dimenzích.



Obr. 4.7: Fuzzy body $A, B \in \boldsymbol{R}^2_{fp}$



Obr. 4.8: Fuzzy vzdálenosti v jednotlivých dimenzích



Obr. 4.9: Fuzzy vzdálenosti $\rho_f(A, B)$ vypočítané pomocí fuzzy vzdáleností v jednotlivých dimenzích

4.2.6 Vztah mezi $D_f(A, B)$ a $\rho_f(A, B)$

Definice 4.16 ***Minimální konvexní obal fuzzy množiny*** $A = (\boldsymbol{R}, \mu_A)$ je definován jako konvexní shora spojitá fuzzy množina $[\![A]\!] = (\boldsymbol{R}, \mu_{[\![A]\!]})$, kde

$$\inf [\![A]\!]_\alpha = \lim_{\beta \to \alpha_-} \inf A_\beta,$$

$$\sup [\![A]\!]_\alpha = \lim_{\beta \to \alpha_-} \sup A_\beta \text{ pro } \forall \alpha \in (0, h(A)\rangle.$$

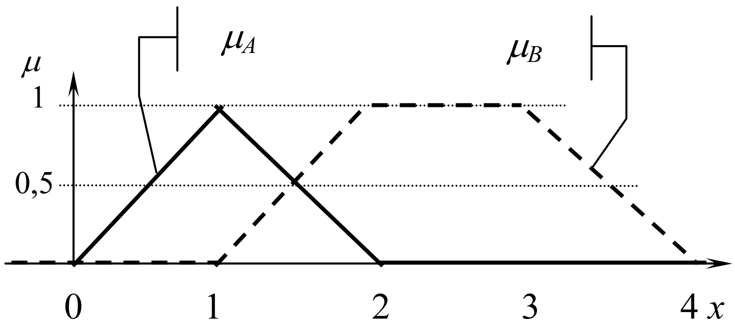
Věta 4.15 Nechť (X_{fp}, ρ_f) je fuzzy metrický prostor z definice 4.11, $D_f(A, B)$ je fuzzy vzdálenost z definice 4.5 a $D_{fmax}(A, B)$ je maximální fuzzy vzdálenost z definice 4.8, přičemž $A, B \in X_{fp}$. Potom

$$[\![D_f(A,B) \cup D_{fmax}(A,B)]\!] = [\![\rho_f(A,B)]\!].$$

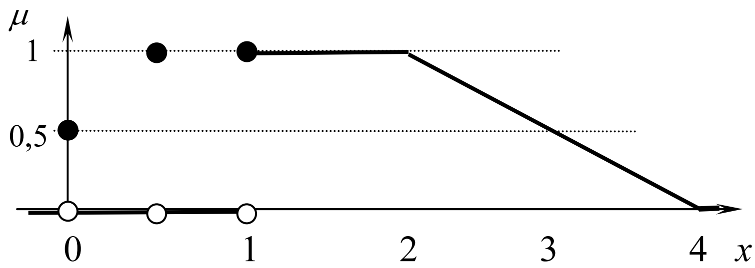
Příklad 4.4 Vzdálenost $\rho_f(A, B)$ mezi fuzzy body $A, B \in \boldsymbol{R}_{fn}$ (obr. 4.10), kde

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0 & \text{pro } x=y\\ 0{,}5 & \text{pro } |x-y|\in(0{,}1)\\ |x-y| & \text{pro } |x-y|\geq 1.\end{cases}$$

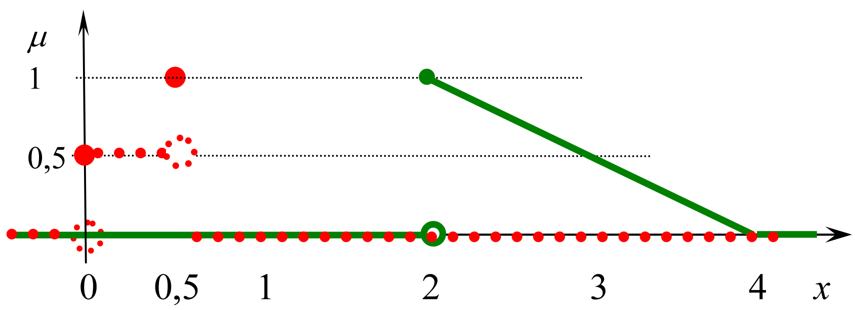
je původní (crisp) vzdálenost, je znázorněna na obr. 4.11. Na obr. 4.12 je zobrazena fuzzy vzdálenost $D_f(A, B)$ a maximální fuzzy vzdálenost $D_{fmax}(A, B)$.



Obr. 4.10: Fuzzy body $A, B \in \boldsymbol{R}_{fn}$



Obr. 4.11: Fuzzy vzdálenost $\rho_f(A, B)$



Obr 4.12: Fuzzy vzdálenosti $D_f(A, B)$ • • • a $D_{fmax}(A, B)$

4.2.7 Uspořádání fuzzy vzdáleností

Při vyhledávání založeném na minimalizaci fuzzy vzdálenosti hodnoty znaku položky od optimální hodnoty znaku je třeba fuzzy vzdálenosti definované v této kapitole uspořádat.

Uspořádáním vzdáleností fuzzy množin D, resp. $d_p\colon X_{FS}^2 \to \boldsymbol{R}^+$ se nemusíme zabývat, protože na $\boldsymbol{R}^+$ je definováno úplné uspořádání.

Částečné uspořádání $\preccurlyeq$ normálních fuzzy množin (def. 4. 13) lze užít k částečnému uspořádání fuzzy vzdáleností fuzzy bodů $\rho_f\colon X_{fp}^2 \to {}_n\boldsymbol{R}_{FS}^+$ a k částečnému uspořádání fuzzy vzdáleností normálních fuzzy množin D_f, resp. $D_{fmax}\colon {}_nX_{FS} \times {}_nX_{FS} \to {}_n\boldsymbol{R}_{FS}^+$. Pokud nejsou tyto fuzzy množiny normální, nejsou ani jejich fuzzy vzdálenosti normální a nelze částečné uspořádání $\preccurlyeq$ použít.

Pomocí Zadehova principu rozšíření lze definovat infimum a supremum fuzzy množin definovaných na částečně uspořádané množině X a pomocí těchto fuzzy operací definovat částečná uspořádání těchto fuzzy množin [11, 26]. Takto definujeme částečná uspořádání na $\boldsymbol{R}_{FS}$.

Definice 4.17 Jestliže fuzzy množiny $A, B \in \boldsymbol{R}_{FS}$, pak jsou ***částečná uspořádání*** $\tilde{\leqq}$ a $\underset{\sim}{\leqq}$ definována jako relace

$$A \,\tilde{\leqq}\, B \Leftrightarrow A \vee B = B, \text{ kde } A \vee B = (\boldsymbol{R}, \mu_{A\vee B}),\ \mu_{A\vee B}(y) = \sup_{\substack{a,b\in\boldsymbol{R}\\ y=\max\{a,b\}}} \min\{\mu_A(a), \mu_B(b)\},$$

$$A \underset{\sim}{\leqq} B \Leftrightarrow A \wedge B = A, \text{ kde } A \wedge B = (\boldsymbol{R}, \mu_{A\wedge B}),\ \mu_{A\wedge B}(y) = \sup_{\substack{a,b\in\boldsymbol{R}\\ y=\min\{a,b\}}} \min\{\mu_A(a), \mu_B(b)\}.$$

Je dokázáno [11], že částečná uspořádání $\preccurlyeq$, $\tilde{\leqq}$ a $\underset{\sim}{\leqq}$ koincidují na množině všech reálných fuzzy čísel $\boldsymbol{R}_{fn}$.

Další částečné uspořádání fuzzy množin na $\boldsymbol{R}$ vychází z toho, že fuzzy množiny defuzzifikujeme [13, 14, 15, 16], tj. každé fuzzy množině $A \in \boldsymbol{R}_{FS}$ přiřadíme (crisp) reálné číslo $a \in \boldsymbol{R}$, a dle těchto hodnot fuzzy množiny uspořádáme.

5 ZÁVĚR

V disertační práci jsme shromáždili základní poznatky o fuzzy vzdálenostech a mírách podobnosti vágních objektů, které již dříve publikovali různí autoři, a systematicky jsme je roztřídili. Dále jsme popsali dva principiálně odlišné (původní) přístupy fuzzy vyhledávání:

a) ***Vyhledávání založené na průnicích fuzzy množin***

- Definovali jsme číselné charakteristiky odpovědi (průniku dotazu a informace uložené v databázi), dle kterých lze vybírat položky nejlépe vyhovující dotazu.
- Popsali jsme vlastnosti těchto číselných charakteristik odpovědi.
- Vytvořili jsme jádro fuzzy databázového systému FSearch 2.0.
- Uvedli jsme příklad fuzzy vyhledávání na klasické (crisp) databázi.

b) ***Vyhledávání založené na minimalizaci fuzzy vzdálenosti hodnoty znaku položky od optimální hodnoty znaku***

- Uvedli jsme původní definici „minimální" fuzzy vzdálenosti fuzzy množin a maximální fuzzy vzdálenosti fuzzy množin.
- Uvedli jsme původní definici fuzzy metrického prostoru, jehož vlastnosti jsme formulovali v několika větách a ilustrovali na příkladech.
- Ukázali jsme, že v našem fuzzy metrickém prostoru získáme fuzzifikací kontraktivního zobrazení fuzzy kontraktivní zobrazení.
- Podrobně jsme se zabývali fuzzy metrickými prostory definovanými na $\boldsymbol{R}^n$.

Na teoretické výsledky této práce je možné navázat:

a) Sestrojením nových variantních postupů fuzzy vyhledávání založeného na průnicích. Jedná se především o definici nových číselných charakteristik odpovědi, které budou vyhovovat požadavkům konkrétních uživatelů.
b) Aplikací námi definovaných fuzzy vzdáleností do dalších oblastí fuzzy matematiky, např. fuzzy shlukování či fuzzy optimalizace.
c) Konstrukcí nějakého vhodného typu fuzzy lineárních normovaných prostorů.
d) Studiem fuzzy konvergence a úplnosti fuzzy metrických prostorů.

Mimo výše uvedených směrů dalšího teoretického výzkumu je možné získané výsledky po potřebné algoritmizaci implementovat do software pro PC, který umožní vyhledávání a zpracování vágních informací uložených ve fuzzy databázích. Z hlediska praktických aplikací lze očekávat uplatnění získaných teoretických výsledků v databázích materiálů, dob bezporuchových stavů a oprav technických systémů, diagnostických informací, charakteristik výrobků a zboží, ekonomických a finančních informací apod., kdy shromážděná data verbálního nebo numerického typu mají více či méně vágní charakter.

6 SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

[1] Bednář, J., Karpíšek, Z., a Münsterová, E.: Fuzzy metody pro vágní statistická data v materiálovém inženýrství. *Mechanika* z. 57, Zeszyty naukowe Nr. 246/98, Politechnika Opolska, Opole 1998, p. 85-90.

[2] Bednář, J., a Štarha, P.: Návrh a implementace vícerozměrného fuzzy jádra expert-ního databázového systému pro kovové materiály. Závěrečná zpráva výzkumného projektu FSI PF-390001. FSI VUT, Brno, 1999.

[3] Bednář, J.: Properties of Fuzzy Metrics on R^n. In *Proceedings of the East West Fuzzy Colloquium 2002 and 10th Zittau Fuzzy Colloquium*, Zittau, Germany, 2002. p. 2-6.

[4] Bednář, J.: The Fuzzy Rational Database System FSearch 2.0. In *Proceedings of the 6th International Conference on Soft Computing MENDEL 2000*, Brno, Czech Republic, 2000, p. 232-237.

[5] Bureš, R.: Archivace a vyhledávání vágních informací. Diplomová práce. ÚM FSI VUT v Brně, 2004 (v tisku).

[6] Collatz, L.: Funkcionální analýza a numerická matematika. SNTL, Praha, 1970.

[7] Dvořák, J., and Šeda, M.: Similarity Measures for Fuzzy Values. *Frontiers in Artificial Intelligence and Applications*, Vol. 82, 2002, p. 1449-1453.

[8] Gerla, G., and. Volpe, R: The Definition of Distance and Diameter in Fuzzy Set Theory. *Stutia Univ. Babes-Bolyai Ser. Math*, Vol. 31, 1986, p. 21-26.

[9] Hodál, J., Dvořák, J. a Štrajt, R. Implementace vybraných podobnostních měr v systému případového usuzování. In *Proceedings of the 5th International Scientific - technical Conference Process Control 2002*, Kouty nad Desnou, 2002, R108/1-9.

[10] Hyung, D. H., Song, Y.S., and Lee, K. M.: Similarity Measure between Fuzzy Sets and between Elements. *Fuzzy Sets and Systems,* Vol. 62, 1994, p. 291-293.

[11] Kaleva, O. and Seikkala, S.: On Fuzzy Metric Spaces. *Fuzzy Sets and Systems,* Vol. 12, 1984, p. 215-229.

[12] Karacapilidis, N. I., and Pappis, C. P.: Computer-Supported Collaborative Argumen-tation and Fuzzy Similarity Measures in Multiple Criteria Decision Making. *Computers & Operations Research*, Vol. 27, 2000, p. 653-671.

[13] Klir, G., and Yuan, B.: Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications. Prentice Hall PRT, New Jersey, 1995.

[14] Klir, G., Clair, U., and Yuan, B.: Fuzzy Set Theory: Foundation and Applications. Prentice Hall PRT, Upper Saddle River, 1997.

[15] Mareš, M.: Computation over Fuzzy Quantities. CRC Press, Boca Raton, Florida, 1994.

[16] Novák, V.: Fuzzy množiny a jejich aplikace. SNTL, Praha, 1990.

[17] Osman, A.: Fuzzy Metric Spaces and Fixed Fuzzy Set Theorem. *Bull. Malaysian Math. Soc*. Vol. 6(1), 1983, p. 1-4.

[18] Pappis, C. P., and Karacapilidis, N. I.: Application of Similarity Measures of Fuzzy Sets to Fuzzy Relational Equations. *Fuzzy Sets and Systems,* Vol. 75, 1995, p. 135-142.

[19] Rektorys, K.: Přehled užité matematiky. SNTL, Praha, 1988.

[20] Rudin, W.: Real and Complex Analysis. McGraw-Hill, Inc.New York, 1984.

[21] Szmidt, E., and Kacprzyk, J.: Distances between Intuitionistic Fuzzy Sets. *Fuzzy Sets and Systems,* Vol. 114, 2000, p. 505-518.

[22] Talašová, J.: Fuzzy metody vícekriteriálního hodnocení a rozhodování. TiskServis, Olomouc, 2003.

[23] Voxman, W.: Some Remarks on Distances between Fuzzy Numbers. *Fuzzy Sets and Systems,* volume 100, 1998, p. 353-365.

[24] Xu, M., Hirota, K., and Yoshino, H.: Fuzzy Theoretical Approach to Case-Based Representation and Inference in CISG. *Artificial Intelligence and Law* 7, 1999, p. 259-272.

[25] Zadeh, L., A.: Fuzzy Sets. *Information and Control*, Vol. 8, 1965, p. 338-353.

[26] Žák, L.: Clustering of Vaguely Defined Objects. *Archivum Mathematicum*, tomus 39, 2003, p. 37-50.

[27] Kolektiv autorů: Aplikovaná matematika. Oborové encyklopedie, SNTL, Praha, 1978.

7 SUMMARY

The thesis is concerned with problems of fuzzy searching since information represented in a fuzzy database by a fuzzy set can only be used if it can be retrieved from a large volume of information stored in the fuzzy database. We have described the construction of a database and two principally different approaches to fuzzy searching: searching based on intersections of fuzzy sets and one based on minimising the fuzzy distance of the item attribute value from the optimum attribute value; to this purpose we have introduced a definition of a fuzzy metric space whose properties we have formulated in several theorems and illustrated by examples. We have shown that, by fuzzifying a contractive mapping, we will obtain a fuzzy contractive mapping and, in a similar way, we have investigated in some detail fuzzy metric spaces defined on $\boldsymbol{R}^n$.

The thesis is part of Research Plan J22/98: 261100009 entitled „Non-traditional methods of investigating complex and vague systems“.

8 CURRICULUM VITAE

Osobní údaje	▪ Jméno: Ing. Josef Bednář ▪ Rodinný stav: ženatý ▪ Věk: 28 let ▪ Místo narození: Ivančice ▪ Datum narození: 15. 7. 1975	
Vzdělání	1989 - 1993	Gymnázium T.G.M., Zastávka u Brna
	1993 - 1998	Fakulta strojní, VUT v Brně Obor: Matematické inženýrství Studium: magisterské
	Od 1998	Fakulta strojního inženýrství, VUT v Brně Obor: Matematické inženýrství Studium: postgraduální
	28. 3. 2001	Složena státní doktorská zkouška
	Disertační práce:	Fuzzy vyhledávání
Zaměstnání	1999-2001	asistent s 1/3 úvazkem ÚM FSI VUT v Brně
	od 2001	asistent s plným úvazkem ÚM FSI VUT v Brně
Výzkumné projekty	Od 1998	Výzkumný záměr CEZ: J22/98: 261100009: Netradiční metody studia komplexních a neurčitých systémů – člen řešitelského týmu
	1999	Výzkumný projekt FSI PF-390001: Návrh a implementace vícerozměrného fuzzy jádra expertního databázového systému pro kovové materiály - hlavní řešitel

9 PUBLIKACE

[1] Bednář, J., Karpíšek, Z.: Fuzzy databázový systém pro materiály. In *Sborník konference Fuzzy logika – od metodiky k aplikacím*. Hrubá Skála 1998. ISBN 80-238-4743-0.

[2] Bednář, J., Karpíšek, Z., Münsterová, E.: Fuzzy metody pro vágní statistická data v materiálovém inženýrství. *Mechanika* z. 57, *Zeszyty naukowe* Nr. 246/98, Politechnika Opolska. Opole 1998, p. 85-90. ISSN 1429-6055

[3] Bednář, J.: The Theoretical Properties of Fuzzy Searching. In *5th International Conference on Soft Computing Mendel′99*. Brno 1999, p. 199-204. ISBN 80-214-1131-7.

[4] Bednář, J., Štarha, P.: Vágní statistická data v materiálovém inženýrství. In *Sborník konference Fuzzy logika, neuronové sítě a expertní systémy - Inteligentní systémy pro praxi*. Hrubá Skála 1999. ISBN 80-238-4743-0.

[5] Bednář, J., Štarha, P.: Závěrečná zpráva grantového projektu FSI PF−390001: Návrh a implementace vícerozměrného fuzzy jádra expertního databázového systému pro kovové materiály. FSI VUT, Brno, 1999.

[6] Bednář, J.: Fuzzy vyhledávání a fuzzy databázový systém FSearch 2.0. In *Sborník přednášek k 5. ročníku konference Fuzzy logika, neuronové sítě a expertní systémy – Inteligentní systémy pro praxi*. Luhačovice, 2000, p. 51-57. ISBN 80-238-6140-9.

[7] Bednář, J.: The Fuzzy Rational Database System FSearch 2.0. In *Proceedings of the 6th International Conference on Soft Computing MENDEL 2000.* Brno, Czech Republic, 2000, p. 232-237. ISBN 80-214-1609-2.

[8] Bednář, J.: The Fuzzy Searching and the Fuzzy Database System FSearch 2.0. In *Proceedings of the East West Fuzzy Colloquium 2000 and the 8th Zittau Fuzzy Colloquium*. Zittau, Germany, 2000, p. 276-283. ISBN 3-00-006723-X.

[9] Bednář, J.: Fuzzy vyhledávání a fuzzy databázový systém FSearch 2.0. In *Pedagogicko-vědecká konference*. FSI VUT, Brno, 2000, p. 21-24. ISBN 80-214-1764-1.

[10] Bednář, J.: The Fuzzy Searching on the Bases of Fuzzy Metrics in Fuzzy Database Systems. In *Proceedings of the 7th International Conference on Soft Computing MENDEL 2001*. Brno, Czech Republic, 2001, p. 306-310. ISBN 80-214-1894-X.

[11] Bednář, J.: Fuzzy metriky a jejich užití při vyhledávání ve fuzzy databázích. In *Sborník přednášek k 6. ročníku konference Inteligentní systémy pro praxi*. Luhačovice, 2001, p. 247-252. ISBN 80-238-7812-3.

[12] Bednář, J.: The Teoretical Properties of Fuzzy Metrics in Fuzzy Searching on a Fuzzy Database. In *Proceedings of the East West Fuzzy Colloquium 2001 and the 9th Zittau Fuzzy Colloquium*. Zittau, Germany, 2001, p. 9-14. ISBN 3-9808089-0-4.

[13] Bednář, J.: One of Possible Fuzzifications of Metric Spaces. In *Proceedings of the 8th International Conference on Soft Computing MENDEL 2002*. Brno, Czech Republic, 2002, p. 298-300. ISBN 80-214-2135-5.

[14] Bednář, J.: Properties of Fuzzy Metrics on R^n. In *Proceedings of the East West Fuzzy Colloquium 2002 and 10th Zittau Fuzzy Colloquium.* Zittau, Germany, 2002, p. 2-6. ISBN 3-9808089-2-0.

[15] Karpíšek, Z. - Popela, P. - Bednář, J.: Statistika a pravděpodobnost. Učební pomůcka - studijní opora pro kombinované studium. FSI VUT v Brně, CERM Brno, Brno 2002. ISBN 80-7204-261-0.

[16] Bednář, J.: Fuzzy Metrics and their Properties. In *Proceedings of the 2nd International Conference Aplimat*. Slovak University of Technology, Bratislava (Slovakia), 2003, pp. 203- 207. ISBN 80-227-1813-0.

[17] Bednář, J.: Vzdálenost mezi vágně definovanými objekty. In *Sborník k 7. ročníku konference Inteligentní systémy pro praxi.* AD&M Ostrava, Seč u Chrudimi, 2003, p. 23-25 + pp. 6 na CD-ROM. ISBN 80-239-0201-6.

[18] Bednář, J.: Different Conceptions of Distance between Fuzzy Sets and Fuzzy Metric. In *Proceedings of the 9th International Conference on Soft Computing MENDEL 2003.* Brno, Czech Republic, 2003, p. 228-231 ISBN 80-214-2411-7.

[19] Karpíšek, Z., Popela, P., Bednář, J.: Teaching Stochastic Concepts at the BUT Faculty of Mechanical Engineering. In *6th International Conference "The Decidable and the Undecidable in Mathemetics Education"*. Brno, September 19-25, 2003. p. 135-139. ISBN 83-919465-1-7.

[20] Karpíšek, Z., Popela, P., Bednář, J.: Výuka předmětů se stochastickým zaměřením na FSI VUT v Brně. In *Sborník konference Stakan III*. Bystřice p. Host. 23. – 25. 5. 2003, pp. 7 (v tisku)

[21] Karpíšek, Z., Popela, P., Bednář, J.: Výuka předmětů se stochastickým zaměřením na FSI VUT v Brně. In *Sborník konference O matematice a fyzice na vysokých školách technických*. Vojenská akademie Brno p. 255-260, 2003. ISBN 80-85960-51-6.

[22] Bednář, J.: Fuzzy metriky, In *Sborník z 12. semináře Moderní matematické metody v inženýrství*. Ostrava 2003, p. 14-19. ISBN 80-248-0480-8.

[23] Bednář, J.: Two Different Conceptions of Fuzzy Distances. In *Proceedings of the 3ht International Conference Aplimat*. Slovak University of Technology, Bratislava (Slovakia), 2004. p. 259-264. ISBN 80-227-1995-1.

[24] Bednář, J.: The Fuzzy Rational Database System FSearch 2.0. In *Proceedings of the 9th International Conference on Soft Computing ICSC 2004*. Kunovice, 2004. ISBN 80-7314-025-X.

[25] Bednář, J.: Fuzzy distances. *Kybernetika*. (v tisku) ISSN 0023-5954.