VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
Fakulta strojního inženýrství
Ústav matematiky

Ing. Petr Kundrát

Kvalitativní vlastnosti zobecněné rovnice pantografu

Qualitative properties of the generalized pantograph equation

Zkrácená verze Ph.D. Thesis

Obor: Matematické inženýrství

Školitel: Doc. RNDr. Jan Čermák, CSc.
Oponenti: Prof. RNDr. Josef Diblík, DrSc., Doc. RNDr. Josef Kalas, CSc.
Datum obhajoby: 10.2.2005

KLÍČOVÁ SLOVA
Diferenciální rovnice se zpožděním, diferenční rovnice, asymptotické chování

KEYWORDS
Delay differential equation, difference equation, asymptotic behaviour

MÍSTO ULOŽENÍ DISERTAČNÍ PRÁCE
Oddělení vědy a výzkumu FSI VUT v Brně, Technická 2, 616 69 Brno

ISBN 80-214-2878-3
ISSN 1213-4198

OBSAH

1 ÚVOD

Předkládaná disertační práce je členěna na sedm kapitol, jejichž obsahem jsou převážně články publikované či přijaté k publikaci v některých mezinárodních matematických časopisech nebo sbornících konferencí. Celá práce je pak zaměřena na vyšetřování asymptotických vlastností řešení diferenciální rovnice s neohraničeným zpožděním a její diskrétní analogie (příslušné diferenční rovnice). V práci jsou rovněž dány do souvislosti asymptotické výsledky odpovídající spojitému a diskrétnímu případu.

1.1 SOUČASNÝ STAV PROBLEMATIKY

Diferenciální rovnice se zpožděním mají své uplatnění v mnoha oborech technické praxe. Řadu procesů totiž nemůžeme popsat klasickou obyčejnou diferenciální rovnicí, neboť je nutné zahrnout člen obsahující hodnotu závisle proměnné v posunutém časovém okamžiku (obvykle v minulosti). Příklady takových modelů lze nalézt např. v [16]. Ve skalárním případě namísto počátečního problému popsaného klasickou obyčejnou diferenciální rovnicí (ODE)

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{1.1}$$

uvažujeme počáteční problém

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\tau(t))), \tag{1.2}$$

$$x(t) = \xi(t), \quad t \in [t_{min}, t_0], \quad t_{min} := \inf_{t \geq t_0} \tau(t), \tag{1.3}$$

kde ξ je předepsaná počáteční funkce; je-li $t_{min} = t_0$, pak podmínka (1.3) degeneruje na tvar $x(t_0) = x_0$. O funkci τ se dále obvykle předpokládá, že je spojitou funkcí na uvažovaném intervalu a splňuje zde nerovnost $\tau(t) \leq t$. Z tohoto důvodu funkci τ nazýváme *zpožděným argumentem* a rovnici (1.2) pak *diferenciální rovnicí se zpožděným argumentem* (DDE).

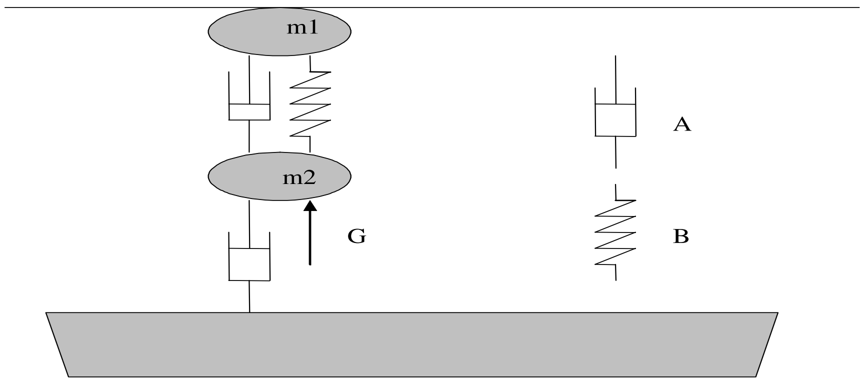
Existuje několik způsobů, jak klasifikovat typy zpožděných argumentů; jeden z nejpoužívanějších spočívá v rozlišení, zda funkce $t - \tau(t)$, nazývaná stručně *zpoždění*, je ohraničená, či nikoliv. Podle toho hovoříme o rovnicích s *ohraničeným*, resp. *neohraničeným zpožděním*. Patrně nejjednodušším příkladem DDE s ohraničeným zpožděním je

$$\dot{x}(t) = ax(t - r), \qquad a \neq 0, \quad r > 0,$$

zobecňující klasickou Malthusovu rovnici $\dot{x} = ax$. Nejznámější DDE s neohraničeným zpožděním je tzv. *rovnice pantografu*

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(qt), \quad q \in (0, 1), \quad t \geq 0 \tag{1.4}$$

s počáteční podmínkou $x(0) = x_0$. Její tvar byl odvozen v souvislosti s řešením problému sběrače elektrického proudu lokomotivy u British railways v roce 1970 (viz



Obr. 1.1: Schéma pantografu (A-tlumič, B-pružina).

[27]). Tento sběrač je modelován dvěma tělesy spojenými pružinou a tlumičem (viz Obr. 1.1). Horní těleso je v neustálém kontaktu s trolejovým vedením a dolní je uchyceno tlumičem ke střeše lokomotivy a působí na něj přítlačná síla G směrem vzhůru. Dynamika sběrače a dynamika trolejového vedení jsou spjaty kontaktní podmínkou. V blízkosti podpor troleje lze zanedbat tuhost a pružnost drátu a vzniká problém popsaný čtyřmi DDE s proporcionálním zpožděním, jehož řešením určíme vertikální posunutí obou těles pantografu, kontaktní sílu drátu a horního tělesa pantografu. Ve zmíněné aplikaci se tedy jedná o vektorovou rovnici, která modeluje i jiné problémy, a která byla (s různými modifikacemi) předmětem zkoumání již mnoha matematiků. V této souvislosti uveďme rovněž obecnější rovnici

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(qt) + c\dot{x}(pt), \qquad p, q \in (0,1)\,, \tag{1.5}$$

která modeluje řadu dalších problémů, jako např. absorpci světla mezihvězdnou hmotou, Cherenkovovu radiaci, aplikace v mechanice kontinua nebo teorii dielektrických materiálů. Tato rovnice však není DDE, a to vzhledem k přítomnosti členu $\dot{x}(pt)$. Patří mezi rovnice neutrálního typu, kterými se v práci nezabýváme.

Z více hledisek (kvalitativní teorie, numerická teorie) je vyšetřování DDE s ohraničeným zpožděním záležitostí jednodušší, častěji studovanou a úplnější než v případě rovnic s neohraničeným zpožděním. Z řady prací, týkajících se rovnic s ohraničeným zpožděním, a které mají vztah k dále vyšetřované problematice, uveďme alespoň práce [1], [2], [8], [9].

Cílem disertační práce je formulovat některé otázky a problémy teorie DDE s neohraničeným zpožděním a naznačit způsoby jejich řešení. Uveďme proto nejprve stručný přehled některých vybraných prací, které mají bezprostřední vztah k těmto problémům.

Kvalitativní řešení DDE s neohraničeným zpožděním

Teoretické zázemí týkající se kvalitativních vlastností řešení se začalo pro diferenciální rovnice s neohraničeným zpožděním budovat v sedmdesátých letech minulého století. Základní prací byl v roce 1971 článek autorů Kato - McLeod (viz [15]), kteří se zabývali diferenciální rovnicí (1.4). Následovala pak řada prací, ve kterých autoři provedli zobecnění v různých směrech. V roce 1975 Heard [11] odvodil asymptotické formule pro obecnější případ rovnice

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(\tau(t)), \tag{1.6}$$

kde $a < 0$, $b \neq 0$ jsou reálné konstanty a τ vyhovuje jistým předpokladům (z kterých speciálně vyplývá, že rovnice (1.6) je DDE s neohraničeným zpožděním). V roce 1976 se Lim [21] zabýval soustavou diferenciálních rovnic

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{x}(\lambda t)$$

a v roce 1978 doplnil tentýž autor (viz [22]) rovnici (1.4) o silový člen f na pravé straně příslušné rovnice a opět diskutoval její kvalitativní vlastnosti. Převážně až v devadesátých letech pak následovala série zobecnění dalšími směry. Iserles a Liu vyšetřovali kvalitativní vlastnosti rovnice (1.5) ve skalárním i vektorovém případě (viz např. [12], [14] nebo [23]), v práci [20] je navíc uvažováno i zahrnutí silového členu f. Asymptotické vlastnosti řešení rovnice (1.4) s nekonstantními koeficienty byly diskutovány v práci [25] a zobecnění těchto výsledků pro některé rovnice s obecným neohraničeným zpožděním (zahrnujícím proporcionální zpoždění jako speciální případ) bylo provedeno ve skalárním i vektorovém případě v článcích [4], [5], [6].

Numerické řešení DDE s neohraničeným zpožděním

Protože je v práci diskutována rovněž diskrétní analogie diferenciálních rovnic s neohraničeným zpožděním, uvedeme některé práce zabývající se numerickým řešením těchto rovnic. V těchto pracích jsou diskutovány i příslušné diferenční rovnice a jejich vlastnosti.

První postupy numerického řešení diferenciálních rovnic se zpožděním se objevují v padesátých letech minulého století, a to pro jednodušší případy (zejména rovnic s konstantním zpožděním). Byly odvozeny přímou aplikací známých metod (především lineární vícekrokové metody) pro obyčejné diferenciální rovnice na počáteční problém

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\tau(t))), \qquad t_0 \leq t \leq t_f \tag{1.7}$$

$$x(t) = \xi(t), \quad t \in [t_{min}, t_0], \quad t_{min} := \inf_{t \geq t_0} \tau(t). \tag{1.8}$$

Navíc se zde předpokládala existence množiny $\Delta = \{t_0, t_1, \ldots, t_N = t_f\}$ dělících bodů tak, že pro všechna $t_n \in \Delta$ platí buď $\tau(t_n) < t_0$ nebo $\tau(t_n) \in \Delta$. Podle toho, jaká je dána síť, taková může být implementována metoda. Např. přímá Eulerova metoda pro problém (1.7), (1.8) je tvaru

$$X_{n+1} = X_n + h_{n+1} f(t_n, X_n, X_q), \quad X_n \approx x(t_n), \quad n = 0, \ldots, N-1$$

pro nějaká $q < n$, kde $h_{n+1} := t_{n+1} - t_n$. Tento přístup však byl poněkud nepraktický, neboť např. v případě

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t/2), \qquad 0 \le t \le 1, \\ x(0) &= 1 \end{aligned}$$

by pro libovolné $t \in \Delta$, mělo rovněž $t/2$ patřit do množiny Δ. Pak ale počáteční délka kroku neexistuje. Navíc, protože dělící body musí splňovat $t_{n+1} = 2t_n$ pro $n \ge 1$, máme $h_{n+1} = t_n$. Tedy poslední délka kroku je vždy rovna $1/2$ a o konvergenci metody nelze vůbec diskutovat.

Výhodnější přístup navrhl Feldstein (viz [10], nebo [3]). Jeho výhoda spočívá především v tom, že volba diskretizace je nezávislá na tvaru zpožděného argumentu: Abychom vyřešili počáteční problém (1.2), (1.3), zavedeme diskretizaci

$$t_{n+1} = t_n + nh, \qquad X_n \approx x(t_n), \qquad n = 1, 2, \dots, \tag{1.9}$$

kde h je (konstantní) délka kroku. Numerické náhrady derivací jsou analogické jako u numerického řešení ODE. Zbývá nahradit hodnotu $x(\tau(t))$. Jednou z nejjednodušších aproximací je $x(\tau(t_n)) \approx X_{\lfloor \frac{\tau(t_n)-t_0}{h} \rfloor}$, kde symbol $\lfloor \quad \rfloor$ značí celočíselnou část výrazu. Získáme tak konvergentní numerickou formuli

$$X_{n+1} = X_n + hf(t_n, X_n, X_{\lfloor \frac{\tau(t_n)-t_0}{h} \rfloor}). \tag{1.10}$$

K numerické náhradě zpožděného členu lze použít i interpolaci mezi uzly, které bezprostředně sousedí s hodnotou $\tau(t)$ (např. lineární interpolace), či jiné vhodné metody přibližného určení hodnoty v daném bodě při znalosti několika okolních hodnot. Je však vhodné volit optimální přístup z hlediska požadované přesnosti, složitosti a rozsahu výpočtu a použitému výpočetnímu vybavení.

Numerické řešení diferenciálních rovnic s neohraničeným zpožděním se v literatuře objevuje v devadesátých letech dvacátého století, především v souvislosti s řešením rovnice pantografu. V této souvislosti uveďme alespoň práce matematiků Iserlese a Liu ([13], [24]), kteří se zabývali problémy spojenými s numerickým řešením některých zobecnění rovnice pantografu. Za zmínku stojí rovněž kniha autorů Bellena a Zennara (viz [3]) zasvěcená ucelenému pohledu na numerické vyšetřování diferenciálních rovnic se zpožděním (speciálně pak se zpožděním neohraničeným).

1.2 Zvolené metody zpracování

Použité matematické postupy při odvozování jednotlivých tvrzení vycházejí z již známých důkazových technik, kterých bylo užito při hledání analogických výsledků v jednodušších případech. Tyto postupy jsou modifikovány a zobecněny na námi studované problémy. Konkrétně využíváme k nalezení asymptotických odhadů řešení x diferenciální i diferenční rovnice se zpožděním řešení ρ jisté pomocné funkcionální rovnice. Následně pak metodou kroků ukážeme ohraničenost podílu $x(t)/\rho(t)$ při $t \to \infty$.

V kapitole páté disertační práce se k popisu jistého kvalitativního výsledku pro řešení diferenční rovnice obecně s proměnným řádem využívá výsledků kvalitativní teorie pro diferenční rovnice konstantního řádu (se zaměřením na analýzu charakteristického polynomu příslušné diferenční rovnice).

1.3 Cíle disertační práce

Prvním z cílů disertační práce je vyšetření kvalitativních vlastností řešení zobecněné rovnice pantografu, a to skalární diferenciální rovnice prvního řádu s neohraničeným zpožděním (nebo více zpožděními). Z hlediska kvalitativních vlastností se zaměřujeme zejména na otázky stability a asymptotiky řešení. V návaznosti na tuto kvalitativní analýzu je dalším cílem práce vyšetřit kvalitativní vlastnosti řešení diferenčních rovnic, odpovídajících vybrané numerické formuli, kterou lze použít při přibližném řešení analyzované zobecněné rovnice pantografu.

Dalším úkolem je srovnání výsledků kvalitativní analýzy exaktního řešení DDE a řešení příslušné diferenční rovnice. V důsledku tohoto srovnání stanovíme podmínky na parametry (délka kroku) tak, aby zůstaly zachovány určité kvalitativní vlastnosti (stabilita řešení, asymptotické odhady řešení apod.).

Na závěr je sestaven program pro numerické řešení uvažovaného okruhu DDE (tj. rovnice pantografu a některá její zobecnění) a provedeno otestování získaných výsledků na vybraných příkladech.

2 Přehled výsledků

V této části jsou prezentovány výsledky uvedené v jednotlivých kapitolách disertační práce. V disertační práci se v kapitolách 3 a 4 zabýváme asymptotickým chováním řešení některých lineárních diferenciálních rovnic s neohraničeným zpožděním. V kapitolách 5 a 6 jsou pak diskutovány některé kvalitativní vlastnosti řešení diferenčních rovnic, zejména v souvislosti se známými výsledky pro odpovídající spojité případy.

2.1 Kapitola 3: Linear differential equations with unbounded delays and a forcing term

V této kapitole se zabýváme hledáním asymptotického odhadu pro všechna řešení lineární diferenciální rovnice s více neohraničenými zpožděními

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t) + \sum_{i=1}^{n} b_i(t)x(\tau_i(t)) + f(t), \quad t \in I = [t_0, \infty), \tag{2.1}$$

kde $a > 0$, b_i, f jsou spojité funkce na I, τ_i jsou spojitě diferencovatelné funkce na I takové, že $\tau_i(t) < t$, $0 < \dot{\tau}_i(t) \le q_i < 1$ pro všechna $t \in I$ a $\tau_i(t) \to \infty$ pro $t \to \infty$, $i = 1, \dots, n$. Poznamenejme, že podmínka $\dot{\tau}_i(t) \le q_i < 1$ implikuje, že zpoždění $t - \tau_i(t)$ je neohraničenou funkcí při $t \to \infty$.

Ve formulaci hlavního výsledku této kapitoly využijeme pojem příslušnosti funkcí do iterační grupy. Tento pojem je zaveden pro množinu funkcí $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$.

Definice 2.1 *Nechť $\psi \in C^1(I_{-1})$, $\dot{\psi} > 0$ na $I_{-1} := [t_{-1}, \infty)$, kde $t_{-1} := \min\ \{\tau_i(t_0), i = 1, 2 \dots, n\}$. Řekneme, že množinu funkcí $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ lze včlenit do iterační grupy $[\psi]$, jestliže pro všechna τ_i existuje taková konstanta d_i, že*

$$\tau_i(t) = \psi^{-1}(\psi(t) - d_i), \quad t \in I. \tag{2.2}$$

Problém příslušnosti daných funkcí $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ k iterační grupě úzce souvisí s existencí společného řešení ψ soustavy simultánních Abelových rovnic

$$\psi(\tau_i(t)) = \psi(t) - d_i, \quad t \in I, i = 1, \dots, n.$$

Úplné řešení těchto problémů bylo popsáno v [26], [28] a [29]. Tyto články obsahují podmínky, za kterých (2.2) platí pro všechna τ_i, $i = 1, \dots, n$ (viz rovněž [17, Theorem 9.4.1]).

Hlavní výsledek této kapitoly, jenž je zobecněním výše zmíněných případů, je pak formulován v podobě následující věty, která dává asymptotický odhad řešení rovnice (2.1).

Věta 2.2 *Nechť $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ mohou být včleněny do iterační grupy $[\psi]$. Nechť x je řešením (2.1), kde $a(t) \geq K \big/ \exp\{\eta\psi(t)\}$, $0 < \sum\limits_{i=1}^{n} |b_i(t)| \leq Ma(t)$ pro všechna $t \in I$ a vhodné reálné konstanty $K > 0$, $M > 0$, $\eta < 1$. Je-li $f(t) = O(\exp\{\nu\psi(t)\})$ při $t \to \infty$ pro vhodné reálné ν, pak platí odhad*

$$x(t) = O(\exp\{\gamma\psi(t)\}) \quad \text{při } t \to \infty, \qquad \gamma > \max\ (\eta + \nu, \frac{\log M}{d_1}, \dots, \frac{\log M}{d_n}), \tag{2.3}$$

kde d_i, $i = 1, \dots, n$ jsou dány vztahem (2.2).

Důkaz této věty je uveden v [7]. Hlavní výsledek je dále v citovaném článku doplněn poznámkami a příklady.

2.2 Kapitola 4: The asymptotic properties of solutions of linear delay differential equations

V této kapitole se zabýváme asymptotickým chováním nehomogenní lineární diferenciální rovnice

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)x(\tau(t)) + f(t), \qquad t \in I := [t_0, \infty)\,, \tag{2.4}$$

kde $a > 0$, $b \not\equiv 0$, τ a f jsou spojité funkce na I.

Hlavní výsledek této kapitoly dává asymptotický popis všech řešení rovnice (2.4) pomocí řešení funkcionální rovnice

$$\varphi(t) = c(t)\varphi(\tau(t)), \qquad t \in I, \tag{2.5}$$

kde c je vhodná spojitá a nerostoucí funkce. Existence kladného řešení rovnice (2.5) vyplývá z teorie funkcionálních rovnic.

Věta 2.3 *Uvažujme rovnici (2.4), kde* $a, b, f \in C^0(I)$, $\tau \in C^1(I)$, $a(t) > 0$, $\tau(t) < t$ *pro všechna* $t \in I$, $\tau(t) \to \infty$ *při* $t \to \infty$, $f(t) = O(|b(t)| \exp\{\int_{t_0}^{\tau(t)} a(s)ds\})$ *při* $t \to \infty$ *a nechť existuje nerostoucí funkce* $c \in C^0(I)$ *taková, že* $|b(t)| \le c(t)a(t)$ *pro všechna* $t \in I$. *Dále nechť pro vhodné reálné* $0 < \delta < 1$ *a libovolné* $t \in I$ *je splněna relace*

$$0 < a(\tau(t))\dot{\tau}(t) \le \delta a(t). \tag{2.6}$$

Pak pro každou reálnou konstantu L *existuje řešení* x_L *rovnice (2.4) s vlastností*

$$\exp\{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds\}x_L(t) \to L \qquad \textit{při} \qquad t \to \infty. \tag{2.7}$$

Navíc, je-li x *libovolným řešením rovnice (2.4), pak existuje taková reálná hodnota* L *že*

$$x(t) = x_L(t) + O(\varphi(t)) \qquad \textit{při} \qquad t \to \infty,$$

kde φ *je spojité kladné řešení rovnice (2.5).*

Tento výsledek byl publikován ve slabší formě v [22], resp. [15]. Jeho zobecnění na rovnici (2.4) s daleko širším okruhem zpožděných argumentů lze nalézt v [5] a také v [4], kde byl studován případ rovnice (2.4) s $b(t) = ka(t)$, $k \neq 0$. Poznamenejme, že klíčový předpoklad v [4] je a neklesající. Věta 2.3 platí pro obecnější typy rovnice (2.4), než bylo vyšetřováno ve zmíněných článcích (platí např. i pro a klesající). Zdůrazněme ještě, že podmínka (2.6) je splněna především opět pro rovnice (2.4) s neohraničeným zpožděním. V případě rovnice s ohraničeným (např. konstantním) zpožděním by tato podmínka znamenala velmi restriktivní omezení na koeficient a.

Analogicky k výsledku kapitoly 3 by bylo z hlediska celistvosti práce logické uvést případ rovnice (2.4) s více zpožděními. I přes autorovu snahu zůstává zobecnění věty 2.3 na rovnici (2.4) s více zpožděními otevřeným problémem.

2.3 Kapitola 5: On a discretization of some delay differential equations

Cílem této kapitoly je dokumentovat a vysvětlit některé zvláštní jevy, které nastávají při numerickém řešení počátečního problému

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(\tau(t)), \qquad t \in I := [t_0, \infty)\,, \quad x(t_0) = x_0, \tag{2.8}$$

kde a, b jsou reálné konstanty vyhovující podmínce $|a| - |b| < 0$ a funkce τ je spojitou a neohraničenou funkcí na $[t_0, \infty)$ s vlastnostmi $\tau(t_0) = t_0$, $\tau(t) < t$ pro všechna $t > t_0$, přičemž opět předpokládáme, že zpoždění $t - \tau(t)$ je neohraničená při $t \to \infty$.

V souvislosti s numerickým řešením problému (2.8) analyzujeme jednu z nejjednodušších diskretizací (speciální modifikace Eulerovy metody) ve tvaru

$$X_{n+1} = X_n + h(aX_n + bX_{q(n)}), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.9}$$

kde $X_0 = x_0$, X_n aproximuje hodnotu $x(t_n)$ v čase $t_n = t_0 + nh$, $h > 0$ označuje délku kroku a $q(n) = \left\lfloor \frac{\tau(t_n)-t_0}{h} \right\rfloor$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Metoda (2.9) byla poprvé navržena v práci [10], viz též [3], kde je mimo jiné dokázána konvergence této metody.

Numerické výpočty (s omezenou přesností výpočtu) některých příkladů rovnice (2.8) vzbuzují dojem, že přesná řešení výše uvedených rovnic konvergují s rostoucím t k nule. Tento závěr je však v zásadním rozporu s některými výsledky kvalitativní teorie diferenciálních rovnic s neohraničeným zpožděním (viz např. Heard [11, Theorem 3.1]). Tento fenomén je v literatuře znám pod pojmem "numerical nightmare". Hlavním cílem této kapitoly je tedy vysvětlit tento rozpor a poukázat na nebezpečí mechanického akceptování numerických výsledků bez hlubších znalostí kvalitativních vlastností řešení.

Diferenční rovnice (2.9) je obecně proměnného řádu (rostoucího se zvyšujícím se t). Lze však sestrojit posloupnost intervalů, na nichž je rovnice (1.2) rovnicí konstantního řádu $m+1$ s charakteristickým polynomem

$$P_m(\lambda) := \lambda^{m+1} - (1+ah)\lambda^m - bh. \tag{2.10}$$

Užitím kvalitativních vlastností diferenčních rovnic konstantního řádu (se zaměřením na analýzu charakteristického polynomu $P_m(\lambda)$) lze formulovat následující:

- Je-li $a \le b < -a$, pak $P_m(\lambda)$ je Schurova typu pro všechna $m \ge 0$.
- Je-li $b \ge -a$, pak $P_m(\lambda)$ není Schurova typu pro všechna $m \ge 0$.
- Ve zbývajících případech platí, že polynom $P_m(\lambda)$ je Schurova typu pro všechna $m \le m^*$ a není Schurova typu pro žádné $m > m^*$. Jinak vyjádřeno, řešení příslušné diferenční rovnice (v našem případě formule (2.9)) má "tendenci" konvergovat k nule až po jistou kritickou hodnotu n^*. Naopak, aproximace X_n pro $n > n^*$ k nule nekonvergují, neboť příslušný charakteristický polynom není Schurova typu.

Protože námi studované problémové případy spadají do třetí z výše uvedených možností, zbývá určit okamžik t^* zmíněné kvalitativní změny (tj. hodnotu t^* takovou, že pro $t > t^*$ mají příslušná řešení "tendenci" nekonvergovat k nule). V disertační práci je odvozen horní odhad t^* tohoto okamžiku jako řešení (obecně nelineární) rovnice

$$t^* - \tau(t^*) = \nu(a,b), \tag{2.11}$$

kde funkce ν na pravé straně rovnice je dána vztahem

$$\nu(a,b) = \begin{cases} \min\left\{\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \arctan \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}, \frac{1}{a}\right\}, & a > 0, \\ \frac{\pi}{2|b|}, & a = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\left(\pi + \arctan \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}\right), & a < 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

Protože diskretizace (2.9) dává numerické výsledky konvergující k přesnému řešení, hodnota t^* je odhadem kvalitativní změny chování přesného řešení (2.8).

Výsledky této kapitoly zobecňují ve smyslu obecnějšího zpožděného argumentu původní výsledky odvozené v [24].

2.4 KAPITOLA 6: ON ASYMPTOTIC PROPERTIES OF SOLUTIONS OF THE DIFFERENCE EQUATION $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}(\mathbf{t}) = -\mathbf{a}\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{b}\mathbf{x}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{t}))$

V kapitole 6 jsou odvozeny asymptotické odhady řešení diferenční rovnice

$$\Delta x(t) = -ax(t) + bx(\tau(t)), \quad t \in I := [t_0, \infty), \tag{2.13}$$

kde $a > 0$, $b \neq 0$ jsou reálné konstanty a τ je spojitá funkce splňující některé další vlastnosti. Rovnice (2.13) je diskretizací diferenciální rovnice se zpožděním

$$\dot{z}(t) = -az(t) + bz(\tau(t)), \quad t \in I, \tag{2.14}$$

tedy rovnice (2.8), jejíž chování na kompaktním intervalu bylo vyšetřováno v předcházející části.

Jednou z důležitých teoretických otázek týkajících se této diskretizace je, za jakých podmínek se asymptotické chování řešení x rovnice (2.13) "podobá" asymptotickému chování řešení z rovnice (2.14).

Nejprve uveďme, že z výsledku publikovaného v [11, Theorem 3.1]) (rovněž uvedeného v disertační práci) speciálně vyplývá následující asymptotický odhad řešení rovnice (2.14): Je-li z libovolné řešení rovnice (2.14), pak

$$z(t) = O(\rho(t)) \qquad \text{při} \quad t \to \infty,$$

kde ρ je kladné spojité řešení funkcionální rovnice

$$0 = -a\rho(t) + |b|\rho(\tau(t)). \tag{2.15}$$

Následující hlavní výsledek kapitoly 6 udává podmínky, za kterých platí výše zmíněný odhad řešení také pro diferenční analogii rovnice (2.14), tedy pro rovnici (2.13).

Věta 2.4 *Nechť x je řešením rovnice (2.13), kde $0 < a < 1$, $b \neq 0$ jsou reálné konstanty a nechť τ je rostoucí spojitá funkce na I taková, že $\tau(t+h) - \tau(t)$ je nerostoucí funkce pro všechna $0 < h \leq 1$ na I. Nechť ρ je kladné spojité řešení funkcionální rovnice (2.15) takové, že pro $|b|/a \geq 1$ je ρ neklesající, a pro $|b|/a < 1$ je ρ klesající, přičemž $\rho(t+h) - \rho(t)$ je neklesající funkcí na I pro libovolné $0 < h \leq 1$. Pak platí následující odhady řešení:*

(i) *Je-li $|b|/a \geq 1$, pak $x(t) = O(\rho(t))$ při $t \to \infty$.*

(ii) *Je-li $|b|/a < 1$ a navíc $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\Delta\rho(t_k - 1)}{\rho(t_{k+1})} < \infty$, pak $x(t) = O(\rho(t))$ při $t \to \infty$.*

Poznámka 2.5 V kapitole 6 je dokázáno, že řešení ρ rovnice (2.15) s výše požadovanými vlastnostmi skutečně existuje.

Poznámka 2.6 Tuto větu lze využít i při hledání asymptotického odhadu řešení diferenční rovnice

$$x(t+h) - x(t) = -ahx(t) + bhx(\tau(t)), \qquad t \in I, \tag{2.16}$$

kde $a > 0, b \neq 0$ a $0 < h \leq 1$ je délka kroku, která představuje formuli získanou z (2.13) pomocí nejjednodušší diferenční náhrady členu $\dot{x}$. Nechť jsou splněny všechny předpoklady na τ. Je-li $h < 1/a$, pak pro všechna řešení rovnice (2.16) platí asymptotické odhady uvedené ve větě 2.4. Jinak vyjádřeno, pro všechna řešení rovnice (2.14) a její diskretizace (2.16) platí stejný asymptotický odhad za podmínky volby dostatečně malého kroku h.

3 ZÁVĚR

V disertační práci jsou prezentovány výsledky týkající se asymptotického chování zobecněné skalární rovnice pantografu. Jedná se o speciální okruh diferenciálních rovnic s neohraničeným zpožděním, které mají řadu technických aplikací. V poslední době roste zájem o tuto problematiku, což dokazuje řada publikovaných monografií a odborných článků. Vzhledem k absenci jednotné asymptotické teorie pro diferenciální rovnice s neohraničeným zpožděním je obvykle nutné studovat kvalitativní chování jednotlivých případů.

Jedním z cílů této disertační práce je proto shrnout a zobecnit některé asymptotické výsledky pro daný okruh těchto rovnic. Při hledání asymptotických odhadů je využito řešení pomocných funkcionálních rovnic.

Protože hledání analytického řešení výše uvedených problémů je prakticky nemožné, v technické praxi se v drtivé většině případů hledá řešení numerické. Numerická formule je pak konstruována jako diferenční rovnice, jejíž volba závisí na požadované přesnosti a použitém výpočetním vybavení. V této práci je studována diferenční rovnice vycházející z modifikované Eulerovy metody. Pro tuto diferenční rovnici byl jednak vyšetřen jistý problém na kompaktním intervalu, a rovněž byl odvozen asymptotický odhad s podmínkou na délku kroku, při jejímž splnění tento odhad odpovídá asymptotickému odhadu spojité analogie (tj. příslušné diferenciální rovnice).

Existuje několik směrů, ve kterých lze výsledky uvedené v této práci rozvíjet.

- Lze se zabývat diferenciálními rovnicemi se zpožděním neutrálního typu, tj. ve studovaných rovnicích navíc uvažovat derivaci v posunutém argumentu.
- Asymptotická teorie pro diskrétní zobecněnou rovnici pantografu je podstatně méně rozvinuta, než je tomu v případě její spojité analogie. To je mimo jiné způsobeno obtížností vyšetřování diferenčních rovnic vyšších řádů. V dalším je tedy možné studovat asymptotické chování přesnějších diskretizací rovnice pantografu, než dává použité schéma vycházející z Eulerovy metody.
- V současnosti se začíná budovat nová teorie, kde uvažované dynamické rovnice jsou studovány na obecnějších strukturách, tzv. time scales. Výše studovanou problematiku tedy lze vyšetřovat z hlediska této teorie, zastřešující teorii

diferenciálních a diferenčních rovnic, a tím sjednotit, případně rozšířit získané výsledky.

LITERATURA

[1] Arino, O., Pituk, M., *More on linear differential systems with small delays*, J. Differential Equations 170, s. 381-407, 2001.

[2] Atkinson, F. V., Haddock, J. R., *Criteria for asymptotic constancy of solutions of functional differential equations*, J. Math. Anal. Appl. 91, s. 410-423, 1983.

[3] Bellen, A., Zennaro, M., *Numerical Methods for Delay Differential Equations*, Clarendon Press, Oxford, 2003.

[4] Čermák, J., *Linear differential equations with several unbounded delays*, Arch. Math. 36, s. 421–427, 2000.

[5] Čermák, J., *A change of variables in the asymptotic theory of differential equations with unbounded delays*, J. Comp. Appl. Math. 143, s. 81–93, 2002.

[6] Čermák, J., *The asymptotics of solutions for a class of delay differential equations*, Rocky Mountain J. Mathematics 33, s. 775–786, 2003.

[7] Čermák, J., Kundrát, P., *Linear differential equations with unbounded delays and a forcing term*, Abstract and Appl. Analysis 2004:4 (2004), s. 337–345.

[8] Diblík, J., *Asymptotic behaviour of solutions of linear differential equations with delay*, Ann. Polon. Math. LVIII.2, s. 131-137, 1993.

[9] Diblík, J., *Asymptotic representation of solutions of equation* $\dot{y}(t) = \beta(t)\,[y(t) - y(t - \tau(t))]$, J. Math. Anal. Appl. 217, s. 200-215, 1998.

[10] Feldstein, A., *Discretization methods for retarded ordinary differential equation*. Ph.D. Thesis, Dept. of Mathematics, UCLA, Los Angeles, 1964.

[11] Heard, M. L., *A change of variables for functional differential equations*, J. Differential Equations 18, s. 1-10, 1975.

[12] Iserles, A, *On the generalized pantograph functional-differential equation*, European J. Appl. Math. 4, s. 1-38, 1993.

[13] Iserles, A, *Exact and discretized stability of the pantograph equation*, Appl. Numer. Math. 24, s. 295-308, 1997.

[14] Iserles, A, Liu, Y., *On pantograph integro-differential equations*, J. Integral Equations and Applic. 6(2), s. 213-237, 1994.

[15] Kato, T., McLeod, J. B., *The functional differential equation* $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$, Bull. Amer. Math. Soc. 77, s. 891-937, 1971.

[16] Kolmanovskii, V, Myshkis, A, Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations, Kluwer Academic, Dordrecht,1999.

[17] Kuczma, M., Choczewski, B., Ger, R., *Iterative Functional Equations*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, 1990.

[18] Kundrát, P., *On asymptotic properties of solutions of the difference equation* $\Delta x(t) = -ax(t) + bx(\tau(t))$, Proceedings of ICDEA Conference 2003, Brno, zasláno k publikaci.
[19] Kundrát, P., *O diskretizaci některých diferenciálních rovnic se zpožděným argumentem*, Sborník Aplimat 2004, s. 615-620, Bratislava, 2004.
[20] Lehninger, H., Liu, Y., *The functional-differential equation* $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) + B\mathbf{y}(qt) + C\mathbf{y}'(qt) + \mathbf{f}(t)$, European J. Appl. Math. 9, s. 81-91, 1998.
[21] Lim, E. B, *Asymptotic behavior of solutions of the functional differential equation* $x'(t) = Ax(\lambda t) + Bx(t), \lambda > 0$, J. Math. Anal. Appl. 55, s. 794-808, 1976.
[22] Lim, E. B, *Asymptotic bounds of solutions of the functional differential equation* $x'(t) = ax(\lambda t) + bx(t) + f(t), 0 < \lambda < 1$, SIAM J. Math. Anal. 9, s. 915-920, 1978.
[23] Liu, Y., *Asymptotic behaviour of functional-differential equations with proportional time delays*, European J. Appl. Math. 7, s. 11-30, 1996.
[24] Liu, Y., *Numerical investigation of the pantograph equation*, Appl. Numer. Math. 24, s. 309-317, 1997.
[25] Makay, G., Terjéki, J., *On the asymptotic behavior of the pantograph equations*, Electron J. Qual. Theory Differ. Equ. 2, s. 1-12, 1998 (electronic).
[26] Neuman, F., *Simultaneous solutions of a system of Abel equations and differential equations with several deviations*, Czechoslovak Math. J., 92 (137), pp. 488–494, 1982.
[27] Ockendon, J. R., Tayler A. B., *The dynamics of a current collection system for an electric locomotive*, Proc. Roy. Soc. Lond. A. 322, s. 447–468, 1971.
[28] Zdun, M., *Note on commutable functions*, Aequationes Math. 36, s. 153-164, 1988.
[29] Zdun, M., *On simultaneous Abel equations*, Aequationes Math. 38, s. 163-177, 1989.

AUTOROVO CV

A. Osobní údaje:

Jméno a příjmení:	**Petr Kundrát**
Bydliště:	Záhuní 325, Frenštát pod Radhoštěm, 744 01
e-mail:	kundrat@centrum.cz
Datum a místo narození:	15. června 1978, Čeladná
Stav:	svobodný

B. Dosažené vzdělání:

2001 - 2005 Doktorské studium – Fakulta strojního inženýrství, VUT v Brně.

- Obor: *Matematické inženýrství*
- Disertační práce: Qualitative properties of the generalized pantograph equation
- Datum obhajoby: 10. února 2005
- Datum státní doktorské zkoušky: 1.dubna 2004

1996 – 2001 Magisterské studium – Fakulta strojního inženýrství, VUT v Brně.

- Obor: *Matematické inženýrství*.
- Diplomová práce: Konstrukce optimálních regulací pro systémy obyčejných diferenciálních rovnic.
- Státní závěrečná zkouška - prospěl s vyznamenáním, cena děkana.

1992 – 1996 Gymnázium ve Frenštátě p.R.

C. Praxe: pedagogická

2001 - 2004 vedení cvičení na FSI VUT v Brně (Matematika 3, Numerické metody).
2001 - 2004 vedení cvičení na FEKT VUT v Brně (Matematika 1).

D. Jazykové znalosti:

1. Anglický jazyk: středně pokročilý.
2. Německý jazyk: mírně pokročilý.

E. Další schopnosti a dovednosti:

PC: velmi dobrá znalost (Windows, Maple, Matlab, TeX, Delphi, Statgraphics, MS Office).
Ostatní: řidičský průkaz sk. B

ABSTRACT

This thesis deals with the generalized pantograph equation (particularly, the first order linear differential equation with a general unbounded delay) in the continuous and discrete form. There are derived asymptotic formulae and estimates for some particular cases of these equations. We discuss the resemblances between asymptotic behaviour of solutions in both cases. Moreover, some conditions concerning the discrete case are derived to preserve the required asymptotic properties known from the continuous case. Finally, the obtained results are illustrated utilizing software Maple 9.5.