**Vysoké učení technické v Brně**
**Fakulta strojního inženýrství**
**Ústav matematiky**

**Ing. Luděk Nechvátal**

# HOMOGENIZACE ÚLOH S NEURČITOSTMI V KOEFICIENTECH

## Homogenization of Problems with Uncertainties in Coefficients

**Zkrácená verze Ph.D. Thesis**

Obor: Matematické inženýrství

Školitel: Doc. RNDr. Jan Franců, CSc.

Oponenti: Ing. Ivan Hlaváček, DrSc.
Prof. Ing. Josef Kohoutek, CSc.
Doc. RNDr. Jana Stará, CSc.

Datum obhajoby: 12. 12. 2003

**Klíčová slova:**
homogenizace, dvojškálová konvergence, neurčitá data, spolehlivé řešení, nejhorší scénář

**Keywords:**
homogenization, two-scale convergence, uncertain data, reliable solution, worst scenario

**Místo uložení práce:**
Odbor aplikované analýzy
Ústav matematiky
Fakulta strojního inženýrství
Vysoké učení technické v Brně



ISBN 80-214-2587-3
ISSSN 1213-4198

vysázeno systémem LaTeX

# Obsah

# 1 ÚVOD

Práce se zabývá homogenizací lineární eliptické okrajové úlohy s neurčitostmi v koeficientech. Homogenizací rozumíme matematickou metodu, která pomáhá modelovat kompozitní materiály s jemnou periodickou strukturou. V takových materiálech je možné určit efektivní parametry ze znalosti mikrostruktury. Jinými slovy, homogenizace spočívá v náhradě periodicky heterogenního materiálu materiálem homogenním – nespojité koeficienty popisující kompozit jsou nahrazeny koeficienty konstantními. V případě, kdy data úlohy (koeficienty, pravá strana, funkce z okrajových podmínek) známe přesně, je tato problematika široce rozpracována v mnoha článcích a monografiích. Zde se budeme zabývat situací, kdy vstupní parametry nejsou určeny přesně, víme pouze, že se pohybují v určitých mezích. To je poměrně přirozené – parametry se nejčastěji získávají z experimentálních měření a následného řešení příslušné inverzní úlohy, přičemž oba tyto procesy jsou zatíženy určitou chybou.

Existují dva směry řešení úloh s neurčitými daty. První je stochastický přístup, při kterém data úlohy považujeme za náhodné veličiny s určitým rozdělením pravděpodobnosti. V příslušných úlohách potom vystupují stochastické diferenciální rovnice.

Druhý, deterministický přístup, byl nazván metodou spolehlivého řešení nebo také metodou nejhoršího scénáře. Tato metoda předpokládá, že cílem výpočtu je nalezení maximálních (kritických) hodnot daného funkcionálu v předem známé množině vstupních dat, přičemž tento funkcionál je závislý na řešení zkoumaného matematického modelu. Jinak řečeno, metoda vyhledává v jistém smyslu „nebezpečná“ data, i když pravděpodobnost jejich výskytu může být malá. Tento přístup bude využit při řešení naší modelové úlohy.

## 1.1 Cíle, přínos a popis práce

Cílem práce je začlenit metodu spolehlivého řešení do homogenizace. Přesněji, pomocí metody dvojškálové konvergence budeme homogenizovat lineární eliptickou okrajovou úlohu s periodickými koeficienty. O těchto koeficientech předpokládáme, že jsou po částech konstantní, přičemž konstanty se pohybují v určitých předem daných mezích.

Uvedená modelová úloha je formulována v kapitole 2 a následně homogenizována v kapitole 3. Metodě nejhoršího scénáře je věnována kapitola 4. Položíme si zde tři otázky na jejichž základě budou voleny účelové funkcionály. V prvním případě se zajímáme o „spolehlivost“ homogenizovaných koeficientů – přesněji, přirozenou otázkou je, zda hraniční hodnoty původních koeficientů dávají také nejvyšší (resp. nejnižší) hodnoty homogenizovaných koeficientů. Ve druhém případě bude funkcionál aproximovat hodnoty zobecněného gradientu (tepelného toku) řešení $u_\varepsilon$ v místech přechodů složek materiálu. V těchto místech nabývají derivace největších hodnot – ptáme se tedy pro jakou matici koeficientů $A$ dosáhneme největších (kritických) hodnot toku. Ve třetí úloze bude funkcionál představovat průměrnou hodnotu homogenizovaného řešení $u_0$ na nějaké vhodně zvolené podmnožině oblasti $\Omega$ – obvykle je možné odhadnout několik míst, kde řešení může nabývat maxima. Ptáme se, jak matice koeficientů $A$ ovlivňuje homogenizované řešení při daných okrajových podmínkách a pravé straně.

Z úsporných důvodů nebudeme v této zkrácené verzi disertační práce uvádět důkazy příslušných tvrzení. Dále vynecháváme formulaci přibližných řešení, důkazy konvergence k řešení přesným a příklady, které byly počítány metodami uvedenými v kapitole 5.

V celém textu je použita Einsteinova konvence o sčítání přes opakované indexy. Dále budeme pracovat s posloupností malých kladných parametrů $\{\varepsilon_n\}$ konvergující k nule, což budeme zapisovat stručně $\varepsilon \to 0$.

# 2 FORMULACE ÚLOHY

## 2.1 Fyzikální interpretace

Budeme uvažovat skalární eliptickou úlohu druhého řádu, která modeluje například ustálené vedení tepla, vedení elektrického proudu, difůzi, průhyb tenké membrány apod. Budeme preferovat interpretaci vedení tepla.

Předpokládejme, že hranice oblasti $\Omega$, ve které úlohu uvažujeme, se skládá ze dvou částí $\Gamma_D$ a $\Gamma_N$. Označme $u$ funkci rozložení teploty v $\Omega$, $f$ hustotu vnitřních zdrojů, $\mathbf{w}$ vektor hustoty tepelného toku, $u_D$ předepsanou teplotu na části hranice $\Gamma_D$, $w_N$ předepsaný tok částí hranice $\Gamma_N$. Podle Fourierova zákona můžeme v určitém rozmezí teplot psát

$$w_i = -a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,,$$

kde $A = (a_{ij})_{i,j}^N$ je symetrická, pozitivně definitní matice koeficientů tepelné vodivosti, tj.

$$a_{ij} = a_{ji}\,, \quad a_{ij}\xi_j\xi_i > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N\,.$$

V případě, kdy materiál má hlavní směry ve směru souřadných os, platí pro nediagonální složky $a_{ij} = a_{ji} = 0$ a u izotropního materiálu jsou si navíc diagonální složky rovny.

Jinými slovy, předpokládáme, že existuje lineární závislost mezi hustotou tepelného toku a teplotním gradientem $\nabla u$. To vede na následující lineární eliptickou rovnici, kterou doplníme vhodnými okrajovými podmínkami

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) &= f \qquad \text{v } \Omega\,, \\
u &= u_D \quad \text{na } \Gamma_D\,, \\
a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_i &= w_N \quad \text{na } \Gamma_N\,.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Poznamenejme, že je možné uvažovat i jiné kombinace okrajových podmínek, na naše úvahy to však nebude mít vliv. Důraz bude kladen pouze na koeficienty $a_{ij}$, které budou specifikovány později v kapitole 4. V případě kompozitu se v místech přechodu materiálu mění vlastnosti skokem, tj. koeficienty jsou nespojité funkce. Nemá proto smysl uvažovat úlohu (2.1) v klasickém smyslu, data úlohy nejsou dostatečně hladká – rovnici převedeme na slabý tvar.

## 2.2 Slabá formulace

Nechť $\Omega$ je oblast s lipschitzovskou hranicí $\partial\Omega = \overline{\Gamma}_D \cup \overline{\Gamma}_N$, kde $\overline{\Gamma}_D, \overline{\Gamma}_N$ jsou disjunktní relativně otevřené podmnožiny s kladnou ($N$-1) rozměrnou mírou. Definujme prostor

$$
V = \{v \in W^{1,2}(\Omega) \,:\, v = 0 \text{ na } \Gamma_D \text{ (ve smyslu stop)}\}\,.
$$

Platí $W_0^{1,2}(\Omega) \subset V \subset W^{1,2}(\Omega)$. Vynásobením rovnice libovolnou testovací funkcí $v \in V$, integrací přes $\Omega$, převedením integrálu na levé straně (integrace per-partes) dostáváme integrální identitu

$$
\int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_N} w_N v\,\mathrm{d}S\,,
$$

přičemž jsme využili Neumannovu okrajovou podmínku a předpoklad $v = 0$ na $\Gamma_D$. Označme

$$
a_S(u,v) = \int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x \quad , \quad b_S(v) = \int_\Omega f v\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_N} w_N v\,\mathrm{d}S\,.
$$

Slabá formulace potom zní:

(S) Hledáme funkci $u \in W^{1,2}(\Omega)$ takovou, že $u - u_D \in V$ a rovnost

$$
a_S(u,v) = b_S(v)
$$

platí pro všechny funkce $v \in V$.

Aby formulace měla smysl, musejí být všechny integrály konečné. Podle Hölderovy nerovnosti bude integrál na levé straně konečný, když $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ – to je splněno díky fyzikální interpretaci úlohy, $\partial_{x_i} u \in L^2(\Omega)$, $\partial_{x_i} v \in L^2(\Omega)$ – to je splněno díky volbě prostoru $V$ a tomu, že řešení $u$ hledáme v prostoru $W^{1,2}(\Omega)$. Podobně, integrály na pravé straně budou konečné, když $f \in L^2(\Omega)$ – plyne to ze Schwarzovy nerovnosti a $w_N \in L^2(\Gamma_N)$ – plyne to z věty o stopách a Schwarzovy nerovnosti. Má-li být $u - u_D \in V$, předpokládejme, že $u_D \in W^{1,2}(\Omega)$.

**Věta 2.1.** *Nechť jsou splněny požadavky na data podle předchozího odstavce a navíc nechť koeficienty $a_{ij}$ splňují podmínku elipticity, tj. platí*

$$a_{ij}\xi_j\xi_i \geq \alpha|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \,. \tag{2.2}$$

*Potom úloha (S) má právě jedno řešení. Toto řešení navíc splňuje odhad*

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leqslant \frac{\beta}{\alpha} + \left(1 + \frac{M}{\alpha}\right) \|u_D\|_{W^{1,2}(\Omega)} \,, \tag{2.3}$$

*kde $\beta = \|f\|_{L^2(\Omega)} + C(\Gamma_N, \Omega)\|w_N\|_{L^2(\Gamma_N)}$ a $M = \sum_{i,j=1}^N \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)}$.*

# 3 HOMOGENIZACE

## 3.1 $Y$- periodické funkce

**Definice 3.1.** Nechť $Y = (0;1)^N$ je základní jednotková perioda. Řekneme, že funkce $v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je $Y$- periodická, jestliže $v(y + k) = v(y)$, $y \in \mathbb{R}^N$, $\forall k \in \mathbb{Z}^N$. Má-li funkce $v$ ještě další proměnné, řekneme, že je $Y$- periodická v $y$.

Zaveďme prostory periodických funkcí $X_\#(Y)$. Funkce $v \in X_\#(Y)$ je $Y$-periodická a $v \in X_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, tj. $v \in X(Q)$ pro každou kompaktní podmnožinu $Q \subset \mathbb{R}^N$. V případě $C^\infty_\#(\overline{Y})$ jsou si všechny derivace rovny na protilehlých stranách $\partial Y$. V případě $v \in W^{1,2}_\#(Y)$ se na protilehlých stranách skoro všude rovnají stopy funkce $v$. Normu prostorů $X_\#(Y)$ zavedeme jako $\|\cdot\|_{X_\#(Y)} = \|\cdot\|_{X(Y)}$.

Zaveďme dále prostory periodických funkcí s nulovým průměrem

$$X_{\#0}(Y) = \{v \in X_\#(Y) : \int_Y v(y)\, \mathrm{d}y = 0\} \,.$$

## 3.2 Základní myšlenka

Jak již bylo zmíněno v úvodu, homogenizací rozumíme náhradu periodicky oscilujících koeficientů koeficienty konstantními, které aproximují původní materiál v makroskopickém měřítku. Jde o to, jak tuto náhradu provést. V minulosti autoři nahrazovali koeficienty různě, přičemž často hrálo roli subjektivní hledisko. Počátkem 70-tých let navrhl Babuška postup (viz [3], [4]), při kterém se na původní úlohu nedíváme samostatně, ale považujeme ji za jeden prvek z určité posloupnosti rovnic, ve kterých se perioda koeficientů zmenšuje. Následnou analýzou konvergence příslušných řešení lze dojít k homogenizovanému řešení $u_0$, které splňuje tzv. homogenizovanou úlohu. Posloupnost rovnic je sestavena následovně. Uvažujme $Y$-periodické koeficienty $a_{ij}(y)$. Vztahem $a^{\varepsilon}_{ij}(x) = a_{ij}(x/\varepsilon)$ dostáváme posloupnosti funkcí se zmenšující se periodou o hraně $\varepsilon$. Tyto posloupnosti definují posloupnost diferenciálních rovnic (jedním členem je původní úloha (2.1))

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{\varepsilon}_{ij}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\right) &= f \qquad \text{v } \Omega\,, \\ u_\varepsilon &= u_D \quad \text{na } \ \Gamma_D\,, \\ a^{\varepsilon}_{ij}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\nu_i &= w_N \quad \text{na } \Gamma_N\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Posloupnost budeme stejně jako v předchozí kapitole nadále chápat ve slabém smyslu:

($\mathrm{S}_\varepsilon$) Hledáme $u_\varepsilon \in W^{1,2}(\Omega)$ takové, že $u_\varepsilon - u_D \in V$ a

$$a^{\varepsilon}_S(u_\varepsilon, v) = b_S(v) \quad \forall v \in V\,, \tag{3.5}$$

kde

$$a^{\varepsilon}_S(u,v) = \int_\Omega a^{\varepsilon}_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x \quad , \quad b_S(v) = \int_\Omega f v\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_N} w_N v\,\mathrm{d}S\,.$$

**Lemma 3.2.** *Posloupnost řešení $\{u_\varepsilon\}$ je ohraničená ve $W^{1,2}(\Omega)$, tj. platí*

$$\|u_\varepsilon\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leqslant C\,,$$

přičemž konstanta $C$ je rovna pravé straně výrazu (2.3). Protože posloupnost $\{u_\varepsilon\}$ je ohraničená ve $W^{1,2}(\Omega)$, existuje funkce $u_0$ taková, že vybraná podposloupnost $\{u_{\varepsilon'}\}$ konverguje slabě k $u_0$ ve $W^{1,2}(\Omega)$. Homogenizovanou úlohu hledáme tak, aby tato limitní funkce, byla jejím řešením. Klasickým přístupem k určení homogenizované úlohy je metoda asymptotického rozvoje (viz např.

[5], [6]), která je založena na předpokladu, že řešení $u_\varepsilon$ úlohy (3.4) lze vyjádřit ve tvaru rozvoje

$$u_\varepsilon(x) = [u_0(x,y) + \varepsilon u_1(x,y) + \varepsilon^2 u_2(x,y) + \dots]_{y=x/\varepsilon}\,, \tag{3.6}$$

kde funkce $u_i(x,y)$ jsou $Y$-periodické v $y$. Touto metodou lze poměrně jednoduše odvodit limitní homogenizovanou úlohu a vzorce pro výpočet homogenizovaných koeficientů, není však vyřešena otázka konvergence posloupnosti $\{u_\varepsilon\}$ k homogenizovanému řešení $u_0$. Dále nemáme zaručeno, že řešení $u_\varepsilon$ lze skutečně vyjádřit ve tvaru (3.6). Snaha o zprůhlednění celého procesu vedla k zavedení dalších typů konvergence, z nichž zřejmě nejúčinnějším nástrojem je dvojškálová konvergence, při které limita obsahuje dvojnásobný počet proměnných než původní posloupnost, což umožňuje narozdíl od běžné slabé limity v některých případech zachovat více informace o původním periodickém chování. Odvoďme nyní naši homogenizovanou úlohu touto metodou.

## 3.3 Odvození homogenizované úlohy metodou dvojškálové konvergence

Pojem dvojškálové konvergence zavedl poprvé Nguetseng v [10] a později rozšířil Allaire v [1], [2].

**Definice 3.3.** Řekneme, že posloupnost $\{u_\varepsilon\} \subset L^2(\Omega)$ dvojškálově konverguje k funkci $u_0(x,y) \in L^2(\Omega \times Y)$, jestliže platí

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)\, \psi\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big)\, \mathrm{d}x = \int_\Omega \int_Y u_0(x,y)\psi(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

pro každou testovací funkci $\psi(x,y) \in C^\infty[\Omega; C^\infty_\#(Y)]$. Pokud navíc platí

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Big\| u_\varepsilon(x) - u_0\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big) \Big\|_{L^2(\Omega)} = 0\,,$$

řekneme, že $\{u_\varepsilon\}$ konverguje silně dvojškálově.

Stěžejní vlastnosti umožňující aplikovat dvojškálovou konvergenci jsou popsány následujícími větami.

**Věta 3.4.** *Z každé ohraničené posloupnosti $\{u_\varepsilon\} \subset L^2(\Omega)$ lze vybrat dvojškálově konvergentní podposloupnost.*

**Věta 3.5.** *Nechť posloupnost $\{u_\varepsilon\}$ konverguje slabě k limitě $u$ ve $W^{1,2}(\Omega)$. Potom $\{u_\varepsilon\}$ konverguje ve $W^{1,2}(\Omega)$ silně a zároveň dvojškálově k $u$* [1]*. Navíc*

[1]Limity ve skutečnosti nejsou stejné, protože dvojškálová limita patří do $L^2(\Omega \times Y)$, ale je nezávislá na $y$, tj. $u_0(x,y) = u(x)$

*existuje funkce $u_1(x,y) \in L^2[\Omega; W^{1,2}_{\#0}(Y)]$, že vybrané podposloupnosti $\{\partial_{x_i} u_{\varepsilon'}\}$ dvojškálově konvergují k $\partial_{x_i} u + \partial_{y_i} u_1$.*

Podle předchozího odstavce je posloupnost řešení $\{u_\varepsilon\}$ ohraničená ve $W^{1,2}(\Omega)$. Existuje tedy funkce $u_0$ a vybraná podposloupnost $\varepsilon' \to 0$ taková, že posloupnost $\{u_{\varepsilon'}\}$ konverguje slabě k $u_0$ ve $W^{1,2}(\Omega)$. Díky větě 3.5 existuje funkce $u_1 \in L^2[\Omega; W^{1,2}_{\#0}(Y)]$ taková, že $\{\nabla u_{\varepsilon'}\}$ dvojškálově konverguje k $\nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x,y)$. Z tohoto tvaru limity lze očekávat, že $u_\varepsilon$ lze vyjádřit jako součet $u_0(x) + \varepsilon u_1(x, x/\varepsilon)$. V souladu s tím volme testovací funkci ve tvaru $v_0(x) + \varepsilon v_1(x, x/\varepsilon)$, kde $v_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ ($v_0 = 0$ na $\Gamma_D$), $v_1 \in C^\infty[\Omega; C^\infty_{\#0}(\overline{Y})]$ a dosaďme ji do rovnosti (3.5):

$$\int_\Omega a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\left[\frac{\partial v_0}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial v_1}{\partial y_i}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\frac{\partial v_1}{\partial x_i}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right] \mathrm{d}x =$$
$$= \int_\Omega f(x)\left[v_0(x) + \varepsilon v_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right] \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_N} w_N(x)\left[v_0(x) + \varepsilon v_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right] \mathrm{d}S\,.$$

Výraz $a_{ij}[\frac{\partial v_0}{\partial x_i} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1}]$ tvoří tzv. přípustnou testovací funkci pro dvojškálovou konvergenci. Přejdeme-li ke dvojškálové limitě, dostáváme

$$\begin{aligned}\int_\Omega\int_Y a_{ij}(y)\left[\frac{\partial u_0}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial u_1}{\partial y_1}(x,y)\right]\cdot\left[\frac{\partial v_0}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial v_1}{\partial y_i}(x,y)\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \\ = \int_\Omega f(x) v_0(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_N} w_N(x) v_0(x)\,\mathrm{d}S\,,&\end{aligned} \tag{3.7}$$

což je integrální identita přidružená následujícímu systému rovnic

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\left[\frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x) + \frac{\partial u_1}{\partial y_j}(x,y)\right]\right) &= 0 \quad \text{v } \Omega\times Y\,,\\
-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_Y a_{ij}(y)\left[\frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x) + \frac{\partial u_1}{\partial y_j}(x,y)\right]\mathrm{d}y\right) &= f \qquad \text{v } \Omega\,,\\
u_0(x) &= u_D \quad \text{na } \Gamma_D\,,\\
\int_Y a_{ij}(y)\left[\frac{\partial u_0}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial u_1}{\partial y_i}(x,y)\right]\mathrm{d}y\cdot\nu_j &= w_N \quad \text{na } \Gamma_N\,,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

který se nazývá dvojškálový homogenizovaný systém (rovnost (3.7) dostaneme tak, že vynásobíme první rovnici funkcí $v_1(x,y)$, druhou funkcí $v_0(x)$, integrujeme per-partes podle příslušné proměnné a rovnice sečteme).

Zaveďme prostor $W = V \times L^2[\Omega; W^{1,2}_{\#0}(Y)]$ s normou

$$\|(v_0,v_1)\|_W = \left[\int_\Omega\left(v_0^2 + \sum_{i=1}^N\left[\frac{\partial v_0}{\partial x_i}\right]^2\right)\mathrm{d}x + \int_\Omega\int_Y\left(v_1^2 + \sum_{i=1}^N\left[\frac{\partial v_1}{\partial y_i}\right]^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^{1/2}.$$

Díky hustotě hladkých funkcí ve $W$, platí vztah (3.7) také pro každou funkci $(v_0, v_1) \in W$. Věta 3.5 tedy umožňuje při výše uvedené volbě testovací funkce dvojškálový limitní přechod v posloupnosti úloh $(\mathrm{S}_\varepsilon)$ k tzv. slabé dvojškálové formulaci:

(S2Š) Hledáme funkci $\mathbf{u} = (u_0, u_1) \in W^{1,2}(\Omega) \times L^2[\Omega; W^{1,2}_{\#0}(Y)]$ takovou, že $u_0 - u_D \in V$ a platí

$$a_{S2}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = b_{S2}(\mathbf{v}), \quad \forall\, \mathbf{v} = (v_0, v_1) \in W\,,$$

kde

$$a_{S2}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \int_Y a_{ij}(y) \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial u_1}{\partial y_1}(x, y)\right] \cdot \left[\frac{\partial v_0}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial v_1}{\partial y_i}(x, y)\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$

$$b_{S2}(\mathbf{v}) = \int_\Omega f(x) v_0(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_N} w_N(x) v_0(x)\,\mathrm{d}S\,.$$

**Věta 3.6.** *Úloha (S2Š) má právě jedno řešení* $(u_0, u_1)$.

## 3.4 Srovnání s klasickým přístupem

Srovnejme výše uvedené výsledky s klasickou homogenizovanou úlohou, kterou bychom dostali užitím metody asymptotického rozvoje

$$\begin{aligned} -a^0_{ij} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_j} &= f && \text{v } \Omega\,, \\ u_0 &= u_D && \text{na } \Gamma_D\,, \\ a^0_{ij} \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \nu_i &= w_N && \text{na } \Gamma_N\,, \end{aligned} \tag{3.9}$$

kde koeficienty $a^0_{ij}$ jsou určeny vzorci

$$a^0_{ij} = \int_Y \left( a_{ij} - a_{ik} \frac{\partial \chi_j}{\partial y_k} \right) \mathrm{d}y\,. \tag{3.10}$$

a funkce $\chi_j \in W^{1,2}_{\#0}(Y)$ jsou $Y$- periodická řešení lokální úlohy

$$-\frac{\partial}{\partial y_i} \left( a_{ik} \frac{\partial \chi_j}{\partial y_k} \right) = -\frac{\partial a_{ij}}{\partial y_i}\,. \tag{3.11}$$

Slabá formulace homogenizované úlohy (3.9) zní:

(SH) Hledáme funkci $u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ takovou, že $u_0 - u_D \in V$ a pro každou funkci $v \in V$ platí

$$a_{SH}(u_0, v) = b_{SH}(v)\,,$$

kde

$$a_{SH}(u,v) = \int_\Omega a^0_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x \quad , \quad b_{SH}(v) = \int_\Omega f v\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_N} w_N v\,\mathrm{d}S\,.$$

Slabá formulace lokální úlohy (3.11) zní:

(SL) Hledáme funkci $\chi_j \in W^{1,2}_{\#0}(Y)$ takovou, že platí

$$a_{SL}(\chi_j, \mu) = b^j_{SL}(\mu) \quad \forall \mu \in W^{1,2}_{\#0}(Y)\,,$$

kde

$$a_{SL}(\lambda,\mu) = \int_Y a_{ik}\frac{\partial \lambda}{\partial y_j}\frac{\partial \mu}{\partial y_i}\,\mathrm{d}y \quad , \quad b^j_{SL}(\mu) = \int_Y a_{ij}\frac{\partial \mu}{\partial y_i}\,\mathrm{d}y\,.$$

**Lemma 3.9.** *Dvojškálovou homogenizovanou úlohu (3.8) lze rozseparovat na globální a lokální část ve tvaru (3.9)-(3.11) prostřednictvím vztahu*

$$u_1(x,y) = -\frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x)\chi_j(y)\,.$$

Dvojškálová homogenizovaná úloha obsahuje dvojnásobný počet proměnných, ale je stejného typu jako původní periodický problém. Z numerického hlediska je zřejmě výhodnější mít úlohu rozseparovánu. Poznamejme, že separace na globální a lokální úlohu není vždy možná nebo vede na příliš komplikovaný tvar. Zde je to umožněno díky linearitě a relativní jednoduchosti úlohy. Oproti metodě asymptotického rozvoje je zde výhodou, že dvojškálová metoda pracuje pouze v jednom kroku, tj. během procesu odvozování homogenizované úlohy dokážeme také příslušné konvergence posloupností $\{u_\varepsilon\}$ a $\{\nabla u_\varepsilon\}$.

**Lemma 3.10.** *Homogenizované koeficienty $a^0_{ij}$ splňují podmínku eliptičnosti*

$$a^0_{ij}\xi_j\xi_i \geqslant \alpha|\xi|^2\,, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N$$

*se stejnou konstantou $\alpha$ jako ve (2.2).*

**Věta 3.11.** *Úlohy (SH) a (SL) mají právě jedno řešení.*

# 4 METODA SPOLEHLIVÉHO ŘEŠENÍ

Mnohé matematické modely vyžadují vstupní parametry, které není možné určit přesně, ale pouze v jistých tolerancích, které plynou z přesnosti použitých experimentálních metod. Jeden z přístupů jak zohlednit tyto neurčitosti v datech představil Hlaváček v článcích [7], [8]. Předpokládá zde, že cílem výpočtů je nalezení maximálních hodnot určitého funkcionálu, který závisí na datech a řešení použitého matematického modelu. Tento funkcionál je volen s ohledem na fyzikální interpretaci problému. Následně je možné zformulovat příslušnou maximalizační úlohu a využít techniky používané v teorii optimálního řízení. Tento přístup byl nazván metoda spolehlivého řešení nebo metoda nejhoršího scénáře. Názvy jsou přirozené v tom smyslu, že je kladen důraz na data, která dávají „nejhorší“ řešení (např. maximum teploty nebo teplotního gradientu v kritických místech materiálu apod.) i když pravděpodobnost jejich výskytu může být malá. Jednou z předností uvedené metody je její čistě deterministický charakter. Obecný postup při metodě je popsán v [8].

## 4.1 Specifikace neurčitostí v datech (koeficientech)

Doplňme nyní úlohy z kapitol 2 a 3 o neurčitosti v datech – speciálně, zaměřme se na koeficienty $a_{ij}$, o kterých předpokládáme, že jsou neurčité v následujícím smyslu. Nechť jednotková perioda $Y$ se skládá z konečného počtu disjunktních podoblastí $Y_k$ takových, že $Y_k \subset Y$, $k = 1, \dots, m$ a jejich doplňku $Y_0$ v $Y$. Zaveďme množiny $\mathscr{U}_{ij}^{ad}$

$$\mathscr{U}_{ij}^{ad} = \{a \in L^\infty_\#(Y) \,:\, a = konst. \text{ na } Y_k\,,\, a|_{Y_k} \in \left\langle C^d_{ij,k}, C^h_{ij,k}\right\rangle, k = 0, \dots, m\}\,,$$

kde $C^d_{ij,k} \leqslant C^h_{ij,k}$ jsou dané konstanty (dolní a horní hranice) takové, aby pro každou kombinaci funkcí $a_{ij} \in \mathscr{U}_{ij}^{ad}$ nebyla porušena podmínka eliptičnosti (2.2). Přirozeným předpokladem je $C^d_{ij,k} = C^d_{ji,k}$ a $C^h_{ij,k} = C^h_{ji,k}$. Definujme množinu přípustných koeficientů

$$\mathscr{U}^{ad} = \left\{A = (a_{ij})_{ij}^N \,:\, a_{ij} = a_{ji}\,,\; a_{ij} \in \mathscr{U}_{ij}^{ad}\right\}\,.$$

Celkově tedy, $Y$-periodické koeficienty $a_{ij}$ tvoří symetrickou maticovou funkci $A \in \mathscr{U}^{ad}$ a jsou konstantní na každé podoblasti $Y_k$, přičemž tyto konstanty jsou z daných intervalů.

## 4.2 Volba účelových funkcionálů

### Homogenizované koeficienty

Zabývejme se nejprve situací, kdy se ptáme na rozmezí (toleranci) homogenizovaných koeficientů. To znamená, že účelový funkcionál $\Phi_{ij}$ bude představovat hodnotu homogenizovaného koeficientu $a^0_{ij}$, který je dán vzorcem (3.10). Tento funkcionál bude maximalizován (resp. minimalizován) přes matice koeficientů $A \in \mathscr{U}^{ad}$. Přirozenou otázkou je, zda extrémní hodnoty (tj. hodnoty na hranicích množiny $\mathscr{U}^{ad}$) původních nespojitých koeficientů dávají také extrémní hodnoty homogenizovaných koeficientů. Funkcionály $\Phi_{ij}$ jsou tedy definovány

$$\Phi_{ij}(A,\chi) = \int_Y \left( a_{ij} - a_{ik}\frac{\partial \chi_j}{\partial y_k} \right) \mathrm{d}y \,, \tag{4.12}$$

kde $\chi = (\chi_1, \ldots, \chi_N)$. Příslušná maximalizační (resp. minimalizační) úloha zní:

(Ú1) Hledáme $\overline{A}$ (resp. $\underline{A}$) takové, že

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}(\overline{A},\chi(\overline{A})) &\geqslant \Phi_{ij}(A,\chi(A)) \quad \forall A \in \mathscr{U}^{ad}\,, \\ (\text{resp.}\quad \Phi_{ij}(\underline{A},\chi(\underline{A})) &\leqslant \Phi_{ij}(A,\chi(A)) \quad \forall A \in \mathscr{U}^{ad}\ ). \end{aligned} \tag{4.13}$$

**Věta 4.1.** *Úloha (Ú1) má alespoň jedno řešení.*

### Zobecněný gradient (tepelný tok)

Ve druhé úloze se zaměříme na pomocné funkce $\chi_j$. Tyto funkce vystupují v tzv. řešení s korektorem $u^K_\varepsilon(x) = u_0(x) - \varepsilon\chi_j(x/\varepsilon)\partial_{x_j}u_0(x)$. Pro dostatečně hladké řešení $u_0$ již platí silná konvergence $\|u_\varepsilon - u^K_\varepsilon\|_{W^{1,2}(\Omega)} \to 0$. Jinými slovy, funkce $u^K_\varepsilon$ aproximuje nejen hodnoty řešení $u_\varepsilon$, ale také derivace $\partial_{x_i}u_\varepsilon$. V technické praxi má význam tzv. zobecněný gradient řešení, který v naší úloze hraje roli tepelného toku v souřadných směrech. Protože koeficienty $a_{ij}$ jsou ohraničené v $L^\infty_\#(Y)$, platí také konvergence

$$\left\| a^\varepsilon_{ij}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} - a^\varepsilon_{ij}\frac{\partial u^K_\varepsilon}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \quad \text{pro} \quad \varepsilon \to 0\,.$$

Výraz $a^\varepsilon_{ij}\partial_{x_j}u^K_\varepsilon$ tedy představuje pro malé $\varepsilon$ „rozumnou“ aproximaci zobecněného gradientu $a^\varepsilon_{ij}\partial_{x_j}u_\varepsilon$. Platí

$$\begin{aligned} a_{ij}\frac{\partial u^K_\varepsilon}{\partial x_j} &= a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left( u_0(x) - \varepsilon\chi_k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u_0}{\partial x_k}(x) \right) = \\ &= a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left[ \frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x) - \varepsilon\frac{\partial \chi_k}{\partial x_j}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u_0}{\partial x_k}(x)\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon\chi_k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_k \partial x_j}(x) \right]. \end{aligned}$$

Zanedbejme výraz $\varepsilon\chi_k\,(1/\varepsilon)\,\partial^2_{x_k x_j} u_0(x)$ a zaveďme vektor $\mathbf{w}$ vztahem

$$w_i = a_{ij}(y)\left[\frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial \chi_k}{\partial x_j}(y)\frac{\partial u_0}{\partial x_k}(x)\right].$$

Ve výrazu vystupují „lokální" funkce $a_{ij}$, $\partial_{x_j}\chi_k$ a „globální" funkce $\partial_{x_k} u_0$. Eliminujme vliv těchto „globálních" funkcí vazebnou podmínkou $|\nabla u_0(x)| = 1$. To je poměrně přirozené, neboť funkce $w_i$ potom mají význam složek zobecněného gradientu za podmínky jednotkového vektoru derivací funkce $u_0$. Jinak řečeno, $w_i$ již nebudou záviset na poloze v oblasti $\Omega$, ale pouze na mikrostruktuře. Protože se zajímáme o maximalní (kritické) hodnoty tepelného toku $\mathbf{w}$, definujme funkcionál $\Phi$ takto:

$$\Phi(A, \chi(A)) = \frac{1}{|\widetilde{Y}|}\left[\int_{\widetilde{Y}} \sum_{i=1}^{N} [\overline{w}_i(A, \chi(A)))]^2\right]^{1/2}, \tag{4.14}$$

kde

$$\overline{w}_i = \max_{|\nabla u_0|=1} w_i$$

a $\widetilde{Y}$ je vhodně zvolená podoblast základní periody $Y$ (v místech „ostrých" přechodů složek materiálu, kde je „nárůst" hodnot derivací největší). Funkce $w_i$ jsou v proměnných $\partial_{x_k} u_0$ lineární typu $\sum_{i=1}^N b_i\xi_i$. Metodou Lagrangeových multiplikátorů není těžké odvodit, že tato lineární funkce nabývá na množině $|\xi| = 1$ maximální hodnoty $\sqrt{b_1^2 + \cdots + b_N^2}$ a minimální hodnoty $-\sqrt{b_1^2 + \cdots + b_N^2}$. Tedy

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} \overline{w}_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \Big\{&\left[a_{i1}\left(1 - \frac{\partial\chi_1}{\partial y_1}\right) - a_{i2}\frac{\partial\chi_1}{\partial y_2} - a_{i3}\frac{\partial\chi_1}{\partial y_3} - \cdots - a_{iN}\frac{\partial\chi_1}{\partial y_N}\right]^2 + \\ &+ \left[-a_{i1}\frac{\partial\chi_2}{\partial y_1} + a_{i2}\left(1 - \frac{\partial\chi_2}{\partial y_2}\right) - a_{i3}\frac{\partial\chi_2}{\partial y_3} - \cdots - a_{iN}\frac{\partial\chi_2}{\partial y_N}\right]^2 + \\ &\vdots \\ &+ \left[-a_{i1}\frac{\partial\chi_N}{\partial y_1} - a_{i2}\frac{\partial\chi_N}{\partial y_2} - a_{i3}\frac{\partial\chi_N}{\partial y_3} - \cdots + a_{iN}\left(1 - \frac{\partial\chi_N}{\partial y_N}\right)\right]^2\Big\}.\end{aligned}$$

Formulujme maximalizační úlohu:

(Ú2) Hledáme $\overline{A} \in \mathscr{U}^{ad}$ tak, že

$$\Phi(\overline{A}, \chi(\overline{A})) \geqslant \Phi(A, \chi(A)) \quad \forall A \in \mathscr{U}^{ad}.$$

**Věta 4.2.** *Úloha (Ú2) má řešení.*

*Poznámka.* Eliminace vlivu gradientu $\nabla u_0$ vazebnou podmínkou $|\nabla u_0|$ je provedena pro každou složku $w_i$ zvlášť, tedy maximum může nabývat pokaždé jiné hodnoty. Vhodnější by bylo použít tuto vazebnou podmínku až pro funkci $|\mathbf{w}|^2$, která představuje kvadrát velikosti vektoru $w$. To však vede na mnohem komplikovanější tvar.

**Homogenizované řešení $u_0$**

Ve třetí úloze zaveďme funkcionál $\Phi$ vztahem

$$\Phi(u_0(A)) = \frac{1}{|\widetilde{\Omega}|} \int_{\widetilde{\Omega}} u_0 \,\mathrm{d}x\,.$$

To představuje průměrnou hodnotu homogenizovaného řešení $u_0$ na nějaké podoblasti $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$. Ptáme se tedy, jak matice koeficientů $A$ ovlivňuje homogenizované řešení $u_0$ (teplotu) v určitých (kritických) místech oblasti $\Omega$.

(Ú3) Hledáme $\overline{A}$ tak, že

$$\Phi(u_0(\overline{A})) \geqslant \Phi(u_0(A)) \quad \forall A \in \mathscr{U}^{ad}\,.$$

**Věta 4.3.** *Úloha (Ú3) má řešení.*

# 5 POUŽITÉ METODY VÝPOČTU

Numerické experimenty byly prováděny vždy v rovinném případě. Využity byly následující metody.

## 5.1 Výpočet funkcí $\chi_1, \chi_2$

K výpočtu použijeme metodu konečných prvků (viz např. [12]). Používáme lineární trojúhelníkové prvky s předepsanými hodnotami ve vrcholech). Algoritmus je potřeba upravit pro potřeby periodického řešení. Periodická okrajová podmínka znamená, že hodnoty funkcí $\chi_1$, $\chi_2$ musí být na protilehlých stranách skoro všude stejné. To realizujeme tak, že na těchto protilehlých stranách si odpovídají uzly triangulace, tj. leží na stejných úrovních a mají předepsanou stejnou hodnotu. Tuto korespondenci uzlů zajistíme tak, že příslušné dva uzly stejně očíslujeme. K integrálům přes trojúhelníky kolem uzlů na jedné straně se potom přičítají „příspěvky“ z trojúhelníků podél protější strany. Triangulace je tvořena v Matlabu pomocí balíku PDE toolbox. Výhodou je, že matlabovský triangulátor primárně tvoří triangulace s rovnoměrným dělením na hranici obdélníku a není tedy potřeba dělat dodatečné korekce – uzly si již odpovídají. Sestavíme-li tímto způsobem příslušnou soustavu lineárních rovnic dostaneme jeden lineárně závislý řádek v matici tuhosti z toho důvodu, že poloha řešení není „zafixována“. Doplníme tedy soustavu podmínkou nulového průměru funkcí $\chi_1$ resp. $\chi_2$, tj. nahradíme libovolný řádek v matici hodnotami objemů, které zaujímají bázové funkce a na odpovídajícím místě ve vektoru pravé strany dosadíme nulu. To plyne z vyjádření řešení pomocí bázových funkcí $w_i$ a jeho průměru. Označíme-li $C_i$ přibližné hodnoty řešení $\chi_1$ v uzlech $P_i$, potom

$$\int_Y \chi_1^h \,\mathrm{d}y = \int_Y \sum_{i=1}^{n(h)} C_i w_i \,\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{n(h)} C_i \int_Y w_i \,\mathrm{d}y\,.$$

## 5.2 Výpočet homogenizovaného řešení

Homogenizované řešení $u_0$ bylo opět počítáno metodou konečných prvků s lineárními trojúhelníkovými prvky. V tomto případě byla využita matlabovská rutina `assempde` obsažená v knihovně PDE. Vstupní parametry, které musíme dodat, jsou údaje o triangulaci (trojúhelníky, uzly, popis hranice) a o datech úlohy (koeficienty, pravá strana, funkce z okrajových podmínek). Procedura potom vrací hodnotu přibližného řešení v uzlech triangulace. Podrobný popis této procedury je popsán v [11].

## 5.3 Výpočet homogenizovaných koeficientů, zobecněného gradientu a průměru homogenizovaného řešení

V integrálech pro výpočet homogenizovaných koeficientů vystupují původní koeficienty $a_{ij}$, které jsou konstantní nad každým trojúhelníkem triangulace a derivace pomocných funkcí $\chi_1$, $\chi_2$. Protože pro tyto funkce byly použity po částech lineární funkce, derivace jsou nad každým trojúhelníkem také konstantní. Hodnota nad jedním trojúhelníkem se tedy spočítá jako konstanta násobená obsahem trojúhelníka a celková hodnota homogenizovaného koeficientu je potom součtem přes všechny trojúhelníky. Analogicky počítáme funkcionál $\Phi$ definovaný vztahem (4.14) aproximující velikost zobecněného gradientu $|A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon|$ v místech přechodu materiálu a průměr homogenizovaného řešení $u_0$.

## 5.4 Hledání maxima (resp. minima) funkcionálu

Protože matici koeficientů $A$ lze reprezentovat $3(m+1)$ hodnotami ($m$ je počet podoblastí v periodě, viz kapitola 4), hledání maxima (resp. minima) funkcionálu přejde obecně na hledání globálního maxima (resp. minima) funkce $3(m+1)$ proměnných v kompaktní množině. Pro hledání těchto extrémů byl použit algoritmus `E04JAF` numerické knihovny NAG implementovaný pro prostředí MATLABu. Jedná se o iterační proces založený na Kvazi-Newtonově metodě, která vhodně aproximuje Hessovu matici druhých derivací pomocí funkčních hodnot a hledá optimální směr ve kterém tyto funkční hodnoty klesají (rostou). Algoritmus hledá nejprve lokální extrémy uvnitř množiny, potom na hranici a vrací hodnotu globálního extrému. Poznamenejme, že algoritmus nevyžaduje striktní dodržení podmínek, které zaručují existenci extrémů (zejména spojitost druhých derivací účelové funkce), více viz [9].

# 6 ZÁVĚR

Zabývali jsme se homogenizací lineární eliptické úlohy s periodicky oscilujícími koeficienty, která modeluje chování periodicky uspořádaných kompozitních materiálů. Materiálové konstanty jednotlivých složek, které určují tyto koeficienty, nebyly zadány přesně, ale pouze v určitém rozmezí. Neurčitosti byly řešeny metodou spolehlivého řešení (nejhoršího scénáře). Metoda vyžaduje stanovit si cíl, na jehož základě je volen účelový funkcionál jako kritérium pro „špatné“ (resp. „dobré“) koeficienty. Volba funkcionálů pro naší modelovou úlohu byla popsána v kapitole 4. Metoda byla demonstrována na numerických experimentech.

Práce ukazuje, že metoda spolehlivého řešení může být aplikována v homogenizaci. Vhodnou volbou kritéria lze touto metodou řešit řadu úloh. V této práci jsme se zaměřili na stanovení rozmezí efektivních parametrů kompozitního materiálu při zadaných rozmezích jednotlivých složek, na chování zobecněného gradientu v rozhraní složek kompozitu a na homogenizované řešení ve vybrané podoblasti oblasti $\Omega$. Experimenty ukazují, že v případě izotropních materiálů mají funkcionály monotónní chování ve smyslu $A_1 > A_2 \Rightarrow \Phi(A_1) > \Phi(A_2)$, případně naopak. Tato charakteristika se však vytratí, přejdeme-li k anizotropním materiálům. Uvědomme si, že výslednou hodnotu funkcionálů ovlivňuje mnoho parametrů – počet složek, ze kterých se skládá kompozit, jejich tvar, uspořádání a vzájemný poměr na jednotkové periodě, koeficienty popisující vlastnosti těchto složek, rozmezí hodnot kterých mohou koeficienty nabývat.

# Reference


[1] G. Allaire: *Homogenization and two-scale convergence*, SIAM J. Math. Anal 23, 6 (1992), 1482-1518.

[2] G. Allaire: *Two-scale convergence and homogenization of periodic structures*, School on homogenization ICTP, Trieste, 1993.

[3] I. Babuška: *Solution of interface problems by homogenization,* SIAM J. Math. Anal. 603-634 (I), 635-645 (II), 7 (1976), 923-937 (III), 8 (1977).

[4] I. Babuška: *Homogenization and its application. Mathematical and computational problems,* Proc. third sympos. (SYNSPADE), University Maryland, College park Md. (1975), 89-116, Academic press, New York, 1976.

[5] A. Bensoussan, J. L. Lions and G. Papanicolau: *Asymptotic analysis for periodic structures*, North Holland, 1978.

[6] J. Franců: *Homogenizace,* 6. seminář z parciálních diferenciálních rovnic, Manětín, (1981), 21-63.

[7] I. Hlaváček: *Reliable solution of a quasilinear nonpotential elliptic problem of a nonmonotone type with respect to uncertainty in coefficients*, Math. Anal. Appl. 212 (1997), 452-466.

[8] I. Hlaváček: *Reliable solutions of elliptic boundary value problems with respect to uncertain data*, Proceedings of the second WCNA, Nonlinear Anal. 30 (1997), 3879-3890.

[9] *NAG Foundation Toolbox User's Guide*, The MathWorks, Inc., Natick, 1996.

[10] G. Nguetseng: *A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization*, SIAM J. Math. Anal., vol. 20 (3) (1989), 608-623.

[11] *Partial Differential Toolbox User's guide*, The MathWorks, Inc., Natick, 1996.

[12] A. Ženíšek: *Nonlinear elliptic and evolution problems and their finite element approximations,* Academic press, London, 1990.

# 7 AUTOROVY PUBLIKACE

[1] L. Nechvátal: *On two-scale convergence*, Math. And Comp. in Simulation, 61 (2003), 489-495.

[2] L. Nechvátal: *On two-scale convergence*, EQUADIFF 10, Czech. Int. Conf. on Differential Equations and Their Appl., Math. Inst., Acad. of Sci. of the Czech Rep., Prague, (2001) 149-150.

[3] L. Nechvátal: *Two-scale convergence in homogenization*, II. sborník příspěvků doktorandů, FSI VUT v Brně, (2000), 225-228.

[4] L. Nechvátal: *Homogenizace eliptického problému s neurčitostmi v koeficientech*, Sborník z 11. semináře Moderní matematické metody v inženýrství, JČMF, VŠB-TU Ostrava, Dolní Lomná, (2002) 174-178.

# 8 AUTOROVO CV

**Jméno:** Luděk Nechvátal

**Bydliště:** Lerchova 32, 602 00 Brno

**Datum narození:** 24. 12. 1975

**Vzdělání:**

1999–2003 – Interní doktorské studium na ústavu matematiky FSI VUT v Brně (datum obhajoby: 12. 12. 2003)

1994–1999 – FSI VUT v Brně, obor matematické inženýrství (státní zkouška: 22. 6. 1999)

1990–1994 – Gymnázium tř. Kpt. Jaroše, Brno, matematicko-fyzikální specializace.

1982–1990 – Základní škola Lerchova, Brno, ( I. stupeň ), základní škola Sirotkova, Brno, ( II. stupeň ) - třída s matematickým zaměřením

**Zaměstnání:** asistent na Ústavu matematiky FSI VUT v Brně

**Praxe:** pedagogická, cvičení předmětů Matematika I, II, III na FSI VUT v Brně

**Jazyky:** průměrná znalost angličtiny

**Práce s PC:** programování v systémech MATLAB, PASCAL,
dále běžné uživatelské znalosti

**Řidičský průkaz:** skupina B

# 9 ABSTRACT

The paper deals with homogenization of the elliptic problem with uncertain coefficients. Homogenization is the mathematical method which helps to model the behaviour of the composite materials with periodic structure. In such materials it is possible to determine effective parameters from knowledge of microstructure. In other words, homogenization means a replacement of the periodically heterogeneous material by an "equivalent" (from the macroscopic point of view) homogeneous one – discontinuous coefficients describing the composite are replaced by constant coefficients. In the case, when the input data are known exactly, these problems are developed in many articles and monographs. Here, we shall deal with the situation, when mentioned data are not determined exactly, but in certain bounds only. It is natural – parameters are usually obtained from experimental measurements and from the consequent solving of inverse problem. Both of these processes are loaded by errors.

There are two different approaches to the problems with uncertainties. The first one is stochastic, where data of the problem are considered to be stochastic magnitude with certain distribution of probability. Then in appropriate problems, the stochastic differential equations appear.

The second approach by Hlaváček was named the method of reliable solution or the worst scenario method. This method is deterministic and it supposes that the main goal of computations is to obtain maximal values of a cost functional in a given set of the admissible data. This functional is dependent on the solution of the model problem. In other words, the method looks for "dangerous" data even if the probability of their occurrence can be small. Our model problem is solved by this method.