

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

**PaedDr. Dalibor Martišek, Ph.D.**

**TECHNICKÉ APLIKACE DIGITÁLNÍ GEOMETRIE**

**TECHNICAL APPLICATIONS OF DIGITAL GEOMETRY**

ZKRÁCENÁ VERZE HABILITAČNÍ PRÁCE



BRNO 2003

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

počítačová grafika, počítačová geometrie, digitální geometrie, digitální prostor, digitální objekt, fyzická doména, logická doména, mapování, valuace, křivka, graf křivky, prostor *RGB*, prostor *CIE*, digitální filtr, metody stínování, konvenční mikroskop, konfokální mikroskop, optický řez, kritéria zaostření, 2 – *D* rekonstrukce, 3 – *D* rekonstrukce

## **KEYWORDS**

computer graphics, computer geometry, digital geometry, digital space, digital object, physical domain, logical domain, mapping, valuation, curve, graph of curve, *RGB* space, *CIE* space, digital filter, shading methods, conventional microscope, confocal microscope, optical cut, focussing criteria, 2 – *D* reconstruction, 3 – *D* reconstruction

Práce je uložena na Ústavu matematiky Fakulty strojního inženýrství VUT v Brně

## Obsah

<b>Curriculum vitae</b> .....	4
<b>Úvod</b> .....	5
<b>1 Matematické prostory</b> .....	6
<b>2 Digitální prostor</b> .....	6
2.1 Definice digitálního prostoru .....	6
2.2 Fyzická doména, fyzický prostor .....	6
2.3 Logická doména, logický prostor, mapování .....	7
2.4 Metriky digitálního prostoru .....	8
2.5 Valuace a digitální objekty .....	9
<b>3 Konstrukce digitálních objektů</b> .....	11
3.1 Křivka – definice a základní pojmy .....	11
3.2 Úsečka .....	12
3.3 Fyzické grafy parametricky zadaných křivek .....	12
3.4 Křivky zadané rovnicí $f(x, y) = 0$ .....	12
3.5 Plochy určené rovnicí $f(x, y, z) = 0$ .....	13
3.6 Měření Hausdorffovy dimenze digitálních objektů .....	13
<b>4 Digitální teorie barev</b> .....	14
4.1 Zdroj světla .....	14
4.2 Pozorovaný předmět .....	14
4.3 Pozorovatel .....	14
4.4 Barevný prostor <i>RGB</i> .....	14
4.5 Barevný prostor <i>CIE</i> .....	15
4.6 Metriky barevných prostorů .....	16
4.7 Barevné palety .....	16
<b>5 Digitální filtry</b> .....	16
5.1 Obraz .....	16
5.2 Filtrování obrazů .....	17
5.3 Pojem a aplikace $n - D$ filtru .....	17
<b>6 Modelování optických jevů</b> .....	19
6.1 Stínování ploch metodou ekvidistantní distribuce normál .....	19
6.2 Rastrové texturování .....	19
6.3 Odraz světla .....	21
6.4 Lom světla a jeho průchod absorbujícím prostředím .....	22
<b>7 Digitální teorie snímacích zařízení a její aplikace</b> .....	23
7.1 Čočka a mikroskop .....	23
7.2 Hranice možností optických soustav .....	23
7.3 Pásmo ostrosti, multifokální obraz .....	23
7.4 Kriteria zaostření .....	24
7.5 Složení ostrého obrazu .....	24
7.6 Trojrozměrné rekonstrukce .....	26
7.7 Zpracování transparentních optických řezů .....	27
<b>Závěr</b> .....	27
<b>Abstract</b> .....	30



### **Dalibor Martišek**

- Narozen : 29. května 1956 v Hodoníně  
Trvalé bydliště : Čechova 463, 664 51 Šlapanice  
Základní škola : 1962 - 1971, dokončena v Brně.  
Střední škola : 1971 - 1975: gymnázium Lerchova 63, Brno s vyznamenáním  
Vysoká škola : 1975 - 1979: Pedagogická fakulta, UJEP Brno  
(dnešní Masarykova univerzita Brno) s vyznamenáním  
1981 - 83 Přírodovědecká fakulta UJEP Brno  
(dnešní Masarykova univerzita Brno)  
rekvalifikační studium s vyznamenáním
- Doktorát : 1981 Pedagogická fakulta UJEP Brno, titul PaedDr.  
Ph.D. : 2000 - FSI VUT Brno  
Zaměstnání : 1979 - 1985 SOU Vojenských staveb - středoškolský profesor  
1986 - dosud: Ústav matematiky FSI VUT v Brně.  
1996 - 2000: externí doktorandské studium tamtéž,  
obor Matematické inženýrství,  
téma disertační práce: 3D rekonstrukce mikrosnímků  
pořízených optickými a konfokálními mikroskopy

## Úvod

V 60. letech minulého století se zrodila **počítačová grafika**, která pomáhá konstruktérům v nejrůznějších oborech. Soubor teoretických poznatků aplikovatelných při vývoji grafických systémů byl nazván **počítačová geometrie**. Tato disciplína však dnes podle mého názoru přestala plnit svoji původní úlohu a počítačová grafika dnes matematiku vlastně nepoužívá.

Tato práce se snaží se postavit grafické konstrukce na solidní matematické základy. Buduje systematickou teorii, která se dotýká počítačové geometrie, počítačové grafiky, numerických metod analýzy obrazu, digitální topologie, optiky a některých dalších disciplín, se žádnou z nich však nesplyvá. Její výsledky jsou aplikovatelné nejen na monitorech počítačů, či tiskárnách, ale i na displejích digitálních fotoaparátů, měřicích přístrojů, mobilních telefonů, GPS, snímacích a osvitových zařízeních, polygrafických a tiskařských strojích atd. V této práci ji proto nenazývám geometrií počítačovou ale **geometrií digitální**.

Práce je rozdělena do sedmi kapitol.

**První kapitola – Matematické prostory** – má kompilační charakter. Shrnuje některé matematické pojmy a vlastnosti, které technikům nemusí být dostatečně známy a které jsou v dalším textu využívány.

**Druhá kapitola – Digitální prostor** – uvádí základní definice a vlastnosti digitálního prostoru. Tato kapitola je zcela originální, samy pojmy digitální prostor a digitální geometrie jsou použity vůbec poprvé. Pojmy a vlastnosti jsou ilustrovány příklady konstrukce pixelu a šedotónového obrazu a operace s těmito objekty. Zde uvedená konstrukce úsečky je podstatně rychlejší než konstrukce firmy Borland implementovaná v systému DELPHI.

**Třetí kapitola – Konstrukce digitálních objektů** – uvádí exaktní matematickou definici křivky a jejího grafu a tyto definice uvádí do souvislosti s výše uvedeným aparátem. Je uvedena obecná parametrická rovnice křivky, z níž lze jako speciální případy odvodit křivky běžně používané v CAD systémech (Fergusonovy, Bézierovy a Coonsovy), uvedena originální konstrukce křivek typu  $f(x, y) = 0$ , vrstevnic ploch  $z = f(x, y)$  a konstrukce implicitně zadaných ploch, tj. ploch o rovnici  $f(x, y, z) = 0$ . Výsledkem jsou konstrukce podstatně kvalitnější, než grafika balíku ImplicitPlot3D dodávaného se systémem Maple. Kapitulu uzavírá měření Hausdorffovy dimenze fraktálů s přesností až na dvě desetinná místa.

**Čtvrtá kapitola – Digitální teorie barev** – originální matematická teorie barevných prostorů *RGB* a *CIE*. V závěru jsou kritizovány barevné palety MS Office a navrženy palety vhodnější.

**Pátá kapitola – Digitální filtry** – zobecňuje pojmy obraz a filtr, aparát je aplikovatelný při modelování různých trojrozměrných objektů.

**Šestá kapitola – Modelování optických jevů** – uvádí originální metodu stínování objektů a matematický model odrazu a lomu světla

**Sedmá kapitola – Digitální teorie snímacích zařízení a její aplikace** – analyzuje optické jevy, které jsou běžně chápány jako či vady optického zobrazování a ukazuje, že tyto nedostatky lze aparátem digitální geometrie nejen korigovat, ale že právě tyto jevy umožňují prostorové počítačové rekonstrukce pozorovaných objektů. Vše je dokladováno příklady prostorových rekonstrukcí snímků pořízených konvenčními i konfokálními mikroskopy.

# 1 MATEMATICKÉ PROSTORY

V práci jsou stručně definovány pojmy metrický prostor, grupa, vektorový prostor, normovaný prostor, unitární prostor, euklidovský prostor, projektivní prostor. Definice těchto pojmů lze najít v běžně dostupné literatuře a zde je pro nedostatek místa neuvádím. Dále je definován  $2-D$  a  $3-D$  objekt jako libovolná neprázdná podmnožina euklidovského prostoru  $E_2$  ( $E_3$ ).

## 2 DIGITÁLNÍ PROSTOR

### 2.1 DEFINICE DIGITÁLNÍHO PROSTORU

Rastrová data ukládáme jako souřadnice bodů, které jsou v souladu s tradiční euklidovskou geometrií modelovány jako bezrozměrné objekty. Zobrazovací plocha výstupního zařízení je však fyzický objekt a „body bez rozměrů“ zobrazovat resp. vnímat neumí. V práci je proto zaveden pojem  $n$ -rozměrná doména jako analogie pojmu bod a  $n$ -rozměrný digitální prostor jako analogie roviny (pro  $n = 2$ ) resp. trojrozměrného prostoru (pro  $n = 3$ ).

**1. DEFINICE – multiindex:** Necht'  ${}_k I = \{0, 1, \dots, i_k, \dots, m_k\}$  jsou indexové množiny. Pak množinu  $\mathbf{I}^{(n)} = \prod_{k=1}^n I$  nazýváme multiindexem.

**2. DEFINICE – nosič prostoru:** Necht'  ${}_k J = \langle a_k; b_k \rangle$  jsou intervaly. Množinu  $\mathbf{J}^{(n)} = \prod_{k=1}^n J$  nazýváme  $n$ -rozměrným nosičem digitálního prostoru.

**3. DEFINICE – multidělení:** Necht'  ${}_k D = \{{}_k x_0, {}_k x_1, \dots, {}_k x_{i_k}, \dots, {}_k x_{m_k}\}$  jsou ekvidistantní dělení intervalů  ${}_k J = \langle a_k; b_k \rangle$ ;  $k = 1, 2, \dots, n$ . Množinu  $\mathbf{D}^{(n)} = \prod_{k=1}^n D$  nazýváme ekvidistantním multidělením nosiče  $\mathbf{J}^{(n)}$ .

**4. DEFINICE – digitální prostor, rozlišení:** Necht'  $\mathbf{J}^{(n)} = \prod_{k=1}^n J$  je nosič digitálního prostoru,  $\mathbf{D}^{(n)} = \prod_{k=1}^n D$  jeho ekvidistantní multidělení. Uspořádanou dvojici  $\mathcal{D}^{(n)} = (\mathbf{J}^{(n)}; \mathbf{D}^{(n)})$  nazýváme  $n$ -rozměrným digitálním prostorem. Uspořádanou  $n$ -tici  $\mathbf{r} = (m_1, m_2, \dots, m_k, \dots, m_n)$  nazýváme rozlišení prostoru  $\mathcal{D}^{(n)}$ .

**Digitální geometrii** pak lze definovat jako **matematickou disciplinu, která studuje vlastnosti digitálního prostoru.**

### 2.2 FYZICKÁ DOMÉNA, FYZICKÝ PROSTOR

V celém dalším textu jsou věty pro nedostatek místa uváděny bez důkazů, všechny uváděné věty jsou dokázány v habilitační práci.

**1. DEFINICE – fyzická doména:** Podmnožinu  $\mathbf{F}^{(n)} \subset \mathbf{J}^{(n)}$  nosiče  $\mathbf{J}^{(n)}$  digitálního prostoru  $\mathcal{D}^{(n)} = (\mathbf{J}^{(n)}; \mathbf{D}^{(n)})$  nazýváme fyzickou  $n-D$  doménou právě tehdy, když

$$\mathbf{F}^{(n)} = \left\langle {}_1x_{i_1}; {}_1x_{i_1+1} \right\rangle \times \left\langle {}_2x_{i_2}; {}_2x_{i_2+1} \right\rangle \times \dots \times \left\langle {}_kx_{i_k}; {}_kx_{i_k+1} \right\rangle \times \dots \times \left\langle {}_nx_{i_n}; {}_nx_{i_n+1} \right\rangle = \bigtimes_{k=1}^n \left\langle {}_kx_{i_k}; {}_kx_{i_k+1} \right\rangle.$$

Zapisujeme  $\mathbf{F}^{(n)} = \bigtimes_{k=1}^n \left\langle {}_kx_{i_k}; {}_kx_{i_k+1} \right\rangle = \mathbf{F}_{[i_1, i_2, \dots, i_k, \dots, i_n]}^{(n)} = \mathbf{F}_i^{(n)}$ . Číslo  ${}_k v_i = {}_kx_{i_k+1} - {}_kx_{i_k}; i_k \in \mathbf{i}$  nazýváme  $k$ -tým rozměrem fyzické  $n-D$  domény  $\mathbf{F}_i^{(n)}$ .

**2. VĚTA:**  $k$ -té rozměry  ${}_k v_i$  všech fyzických  $n-D$  domén  $\mathbf{F}_i \in \mathcal{D}^{(n)}$  jsou si rovny.

**3. VĚTA:** Množina  $\mathcal{F}^{(n)} = \left\{ \mathbf{F}^{(n)} = \bigtimes_{k=1}^n \left\langle {}_kx_{i_k}; {}_kx_{i_k+1} \right\rangle ; i_k \in {}_k I \right\}$  všech fyzických domén nosiče  $\mathbf{J}^{(n)}$  digitálního prostoru  $\mathcal{D}^{(n)} = (\mathbf{J}^{(n)}; \mathbf{D}^{(n)})$  je rozkladem nosiče  $\mathbf{J}^{(n)}$ .

**4. VĚTA:** Necht'  $\mathcal{D}^{(n)} = (\mathbf{J}^{(n)}; \mathbf{D}^{(n)})$  je digitální prostor,  $A, B \in \mathbf{J}^{(n)}$  libovolné body jeho nosiče. Relace  $\rho \subset \mathbf{J}^{(n)} \times \mathbf{J}^{(n)}$  definovaná vztahem  $\rho(A, B) \Leftrightarrow \exists \mathbf{F}_i \in \mathcal{F}^{(n)} : A \in \mathbf{F}_i \wedge B \in \mathbf{F}_i$  je ekvivalence na  $\mathbf{J}^{(n)}$ .

**5. DEFINICE – fyzický prostor:** Faktorovou množinu  $\mathcal{F}^{(n)} = \mathbf{J}^{(n)} / \rho$  z předchozí věty nazýváme fyzickým prostorem nosiče  $\mathbf{J}^{(n)}$  resp. prostoru  $\mathcal{D}^{(n)} = (\mathbf{J}^{(n)}; \mathbf{D}^{(n)})$ . Rozlišením fyzického prostoru  $\mathcal{F}^{(n)}$  rozumíme rozlišení prostoru  $\mathcal{D}^{(n)}$ .

**POZNÁMKA:** Používané pojmy „pixel“ a „voxel“ jsou z hlediska budované teorie speciálními případy domén – pixel je fyzickou  $2-D$  doménou, voxel fyzickou  $3-D$  doménou.

## 2.3 LOGICKÁ DOMÉNA, LOGICKÝ PROSTOR, MAPOVÁNÍ

**1. DEFINICE – logický prostor, logická doména:** Necht'  $\mathcal{F}^{(n)}$  je fyzický prostor digitálního prostoru  $\mathcal{D}^{(n)}$ ,  ${}_k v$  rozměry jeho fyzických domén. Dále necht'

$\mathbf{C} \in \mathbf{J}^{(n)} : \mathbf{C} = [c_1, c_2, \dots, c_k, \dots, c_n]; c_k \in \langle 0; {}_k v \rangle$ . Množinu

$${}_c \mathcal{L}^{(n)} = \bigtimes_{k=1}^n \left\{ {}_k r_{i_k} \in \mathbf{R} \mid \forall k \in \{1, 2, \dots, n\} : {}_k r_{i_k} \in \left\langle {}_kx_{i_k}; {}_kx_{i_k+1} \right\rangle \wedge {}_k r_{i_k} - {}_kx_{i_k} = c_k \right\}$$

nazýváme logickým prostorem prostoru  $\mathcal{D}^{(n)} = (\mathbf{J}^{(n)}; \mathbf{D}^{(n)})$ , její prvky  ${}_c L_i; \mathbf{i} = [i_1, i_2, \dots, i_k, \dots, i_n]$ , logické domény. Rozlišením logického prostoru  ${}_c \mathcal{L}^{(n)}$  rozumíme rozlišení prostoru  $\mathcal{D}^{(n)}$ .

**2. VĚTA:** Necht'  $\mathcal{F}^{(n)}$  je fyzický prostor,  ${}_c \mathcal{L}^{(n)}$  logický prostor téhož digitálního prostoru  $\mathcal{D}^{(n)} = (\mathbf{J}^{(n)}; \mathbf{D}^{(n)})$ . Zobrazení  ${}_c \varphi : \mathcal{F}^{(n)} \rightarrow {}_c \mathcal{L}^{(n)}$  takové, že  ${}_c \varphi(\mathbf{F}_i) = {}_c L_i \Leftrightarrow {}_c L_i \in \mathbf{F}_i$ , je bijekce.

**3. DEFINICE – mapování fyzického prostoru, řídicí bod:** Zobrazení  ${}_c \varphi : \mathcal{F}^{(n)} \rightarrow {}_c \mathcal{L}^{(n)}$  z předchozí věty nazýváme mapování fyzického prostoru  $\mathcal{F}^{(n)}$ .

Bod  $\mathbf{C} \in \mathbf{J}^{(n)} : \mathbf{C} = [c_1, c_2, \dots, c_k, \dots, c_n]; c_k \in \langle 0; {}_k v \rangle$  nazýváme jeho řídicím bodem.

**5. DEFINICE – vrcholové a středové mapování:** Mapování  ${}_v \varphi : \mathcal{F}^{(n)} \rightarrow {}_v \mathcal{L}^{(n)}$ , jehož řídicím bodem je bod  $\mathbf{V} = [0, 0, \dots, 0]$ , nazýváme vrcholovým mapováním. Mapování  ${}_s \varphi : \mathcal{F}^{(n)} \rightarrow {}_s \mathcal{L}^{(n)}$ , jehož řídicím bodem je bod  $\mathbf{S} = \left[ \frac{1^v}{2}, \frac{2^v}{2}, \dots, \frac{k^v}{2}, \dots, \frac{n^v}{2} \right]$ , nazýváme středovým mapováním.

**6. DEFINICE – světová souřadná soustava:** Necht'  $\mathcal{D}^{(n)} = (\mathbf{J}^{(n)}; \mathbf{D}^{(n)})$  je digitální prostor,  ${}_k v$  rozměry jeho domén,  ${}_c \varphi : \mathcal{F}^{(n)} \rightarrow {}_c \mathcal{L}^{(n)}$  libovolné mapování. Dále necht'  $\mathbf{R}^n$  je  $n$ -dimenzionální reálný vektorový prostor s bází  $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^n; \mathbf{e}_k = (0, 0, \dots, v, \dots, 0)$ . Uspořádanou  $(n+2)$ -tici  $\mathcal{L}^{(n)} = \langle \mathcal{L}^{(n)}, S, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$  nazýváme světovou souřadnou soustavou logického prostoru  $\mathcal{L}^{(n)}$ . Uspořádanou  $(n+2)$ -tici  $\mathcal{F}^{(n)} = \langle \mathcal{F}^{(n)}, S, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$  nazýváme světovou souřadnou soustavou fyzického prostoru  $\mathcal{F}^{(n)}$  indukovanou mapováním  ${}_c \varphi$ . Uspořádanou  $(n+2)$ -tici  $\mathcal{D}^{(n)} = \langle \mathcal{D}^{(n)}, S, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$  nazýváme světovou souřadnou soustavou digitálního prostoru  $\mathcal{D}^{(n)}$  indukovanou mapováním  ${}_c \varphi$ .

Uspořádanou  $n+2$ -tici  $\mathbf{F}_i; \mathbf{i} = [i_1, i_2, \dots, i_k, \dots, i_n]$  můžeme nyní chápat dvojím způsobem:

**a)** jako multiindex  $\mathbf{F}_i; \mathbf{i} = [i_1, i_2, \dots, i_k, \dots, i_n]$  domény  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_i^{(n)}$  resp.  $L = L_i$ ,

**b)** jako souřadnice  $\mathbf{F}_i; \mathbf{i} = [i_1, i_2, \dots, i_k, \dots, i_n]$  domény  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_i^{(n)}$  resp.  $L = L_i$  v soustavě  $\mathcal{F}^{(n)}$  resp.  $\mathcal{L}^{(n)}$ .

Multiindex poskytuje kromě lokalizace domény již jen informaci o rozlišení (tj. počtu domén), kdežto souřadnice skrývají navíc informaci o „absolutních“ velikostech. Jednotkové vektory souřadných soustav jsou totiž definovány pomocí rozměrů fyzických domén. Ty jsou dány rozlišením prostoru a velikostí jeho nosiče, tj. v případě realizace  $\mathcal{D}^{(2)}$  např. velikostí monitoru, či papíru použitého v tiskárně. Podcenění těchto informací může vést k závažným omylům.

## 2.4 METRIKY DIGITÁLNÍHO PROSTORU

**1. VĚTA:** Necht'  $\mathcal{F}^{(n)}$  je fyzický prostor,  $c_k > 0$ ,  $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{(n)}; \mathcal{P}_{\mathcal{F}}^{(n)}; \mathcal{C}_{\mathcal{F}}^{(n)}$  zobrazení  $\mathcal{F}^{(n)} \times \mathcal{F}^{(n)} \rightarrow \mathbf{R}$  taková, že

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{(n)}(\mathbf{F}_i^{(n)}; \mathbf{F}_j^{(n)}) = \sqrt{\sum_{k=1}^n c_k (i_k - j_k)^2};$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}}^{(n)}(\mathbf{F}_i^{(n)}; \mathbf{F}_j^{(n)}) = \sum_{k=1}^n c_k |i_k - j_k|;$$

$$\mathcal{C}_{\mathcal{F}}^{(n)}(\mathbf{F}_i^{(n)}; \mathbf{F}_j^{(n)}) = \max \{c_k |i_k - j_k|\}_{k=1}^n$$

Pak  $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{(n)}; \mathcal{P}_{\mathcal{F}}^{(n)}; \mathcal{C}_{\mathcal{F}}^{(n)}$  jsou metriky na  $\mathcal{F}^{(n)}$ .



**2. DEFINICE – (vážená) euklidovská, pošťácká a čtvercová metrika fyzického prostoru:** Metriky  $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{(n)}$ ;  $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}^{(n)}$ ;  $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}^{(n)}$  z předchozí věty nazýváme po řadě váženou euklidovskou, váženou pošťáckou a váženou čtvercovou metrikou fyzického prostoru  $\mathcal{F}^{(n)}$ .

**3. VĚTA:** Necht'  $\mathcal{L}^{(n)}$  je logický prostor,  $c_k > 0$ ,  $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}^{(n)}$ ;  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}^{(n)}$ ;  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}^{(n)}$  zobrazení  $\mathcal{F}^{(n)} \times \mathcal{F}^{(n)} \rightarrow \mathbf{R}$  taková, že

$$\mathcal{E}_{\mathcal{L}}^{(n)}(L_i^{(n)}; L_j^{(n)}) = \sqrt{\sum_{k=1}^n c_k (i_k - j_k)^2};$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}}^{(n)}(\mathbf{L}_i; \mathbf{L}_j) = \sum_{k=1}^n c_k |i_k - j_k|;$$

$$\mathcal{C}_{\mathcal{L}}^{(n)}(L_i^{(n)}; L_j^{(n)}) = \max\{c_k |i_k - j_k|\}_{k=1}^n$$

Pak  $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}^{(n)}$ ;  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}^{(n)}$ ;  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}^{(n)}$  jsou metriky na  $\mathcal{L}^{(n)}$ .

**3. DEFINICE – (vážená) euklidovská, pošťácká a čtvercová metrika logického prostoru:** Metriky  $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}^{(n)}$ ;  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}^{(n)}$ ;  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}^{(n)}$  z předchozí věty nazýváme po řadě váženou euklidovskou, váženou pošťáckou a váženou čtvercovou metrikou fyzického prostoru  $\mathcal{L}^{(n)}$ .

**4. POZNÁMKA:** Je zřejmé, že metriky  $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{(n)}$ ;  $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}^{(n)}$ ;  $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}^{(n)}$  v prostoru  $\mathcal{F}^{(n)}$  jsou po řadě ekvivalentní s metrikami  $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}^{(n)}$ ;  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}^{(n)}$ ;  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}^{(n)}$  v prostoru  $\mathcal{L}^{(n)}$ . Pokud bude zřejmé, ve kterém prostoru pracujeme, budeme psát stručně  $\mathcal{E}^{(n)}$ ;  $\mathcal{P}^{(n)}$ ;  $\mathcal{C}^{(n)}$ .

**5. DEFINICE – soused fyzické domény:** Necht'  $\mathbf{F}_i^{(n)}$ ;  $\mathbf{F}_j^{(n)}$  jsou dvě různé fyzické domény téhož fyzického prostoru  $\mathcal{F}^{(n)}$ ,  $\overline{\mathbf{F}}_i^{(n)}$ ;  $\overline{\mathbf{F}}_j^{(n)}$  jejich uzávěry. Doménu  $\mathbf{F}_j^{(n)}$  nazveme sousedem domény  $\mathbf{F}_i^{(n)}$  právě tehdy, když  $\overline{\mathbf{F}}_i \cap \overline{\mathbf{F}}_j \neq \emptyset$ .

**6. DEFINICE – soused logické domény:** Necht'  $\mathcal{F}^{(n)}$  je fyzický prostor,  ${}_{\mathcal{C}}\mathcal{L}^{(n)}$  je logický prostor téhož digitálního prostoru  $\mathcal{D}^{(n)}$ ,  $L_i^{(n)}$ ;  $L_j^{(n)} \in {}_{\mathcal{C}}\mathcal{L}^{(n)}$ ,  ${}_{\mathcal{C}}\varphi^{-1} : L_i \rightarrow \mathbf{F}_i$ ,  ${}_{\mathcal{C}}\varphi^{-1} : L_j \rightarrow \mathbf{F}_j$ . Logickou doménu  $L_j^{(n)}$  nazveme sousedem logické domény  $L_i^{(n)}$  právě tehdy, když  $\mathbf{F}_j^{(n)}$  je sousedem  $\mathbf{F}_i^{(n)}$ .

**7. VĚTA:** Fyzická doména  $\mathbf{F}_j^{(n)}$  je sousedem domény  $\mathbf{F}_i^{(n)}$  právě tehdy, když  $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}^{(n)}(\mathbf{F}_i; \mathbf{F}_j) = 1$ .

## 2.5 VALUACE A DIGITÁLNÍ OBJEKTY

Klasická euklidovská syntetická geometrie modeluje své objekty tak, že studuje prvky a podmnožiny prostoru  $E_n$ . Je-li v  $E_n$  definován objekt  $\mathcal{P}$ , znamená to, že je známo pravidlo, podle kterého lze jednoznačně rozhodnout, zda bod  $X \in E_n$  do  $\mathcal{P}$  patří či nikoli. Toto pravidlo lze formálně zapsat jako zobrazení  $\rho : E_n \rightarrow \{0,1\}$ , přičemž  $\rho(X) = 1 \Leftrightarrow X \in \mathcal{P}$ . Euklidovská analytická geometrie modeluje pak své objekty pomocí zobrazení  $\varphi : E_n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , jehož prostřednictvím přiřazuje bodům souřadnice. Provedeme-li analogickou konstrukci v digitálním prostoru, lze tímto způsobem jednoznačně fyzické objekty. Je-li totiž  ${}_{\mathcal{C}}\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^{(n)} \subseteq \mathcal{F}^{(n)}$  a definujeme-li

zobrazení  $\rho_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}^{(n)} \rightarrow \{0,1\}$  tak, že  $\forall \mathbf{F}_i \in \mathcal{F}^{(n)} : \rho_{\mathcal{F}}(\mathbf{F}_i) = 1 \Leftrightarrow \mathbf{F}_i \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}^{(n)}$ , je zřejmé, že množina  $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}^{(n)} \subseteq \mathcal{F}^{(n)}$  jednoznačně určuje zobrazení  $\rho_{\mathcal{F}}$  a naopak. Zcela analogicky pro logický prostor

**1. DEFINICE – binární valuace fyzického prostoru:** Necht'  $\mathcal{F}^{(n)}$  je fyzický prostor. Zobrazení  $\beta_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}^{(n)} \rightarrow \{0,1\}$  nazýváme binární valuací fyzického prostoru  $\mathcal{F}^{(n)}$ .

**2. DEFINICE – binární valuace logického prostoru:** Necht'  $\mathcal{F}^{(n)}$  je fyzický prostor,  $\beta_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}^{(n)} \rightarrow \{0,1\}$  jeho binární valuace. Dále necht'  ${}_c\mathcal{L}^{(n)}$  je logický prostor téhož digitálního prostoru  $\mathcal{D}^{(n)}$ ,  ${}_c\varphi : \mathcal{F}^{(n)} \rightarrow {}_c\mathcal{L}^{(n)}$  mapování. Zobrazení  $\beta_{\mathcal{L}} : {}_c\mathcal{L}^{(n)} \rightarrow \{0,1\}$  takové, že

$$\forall L_i^{(n)} \in {}_c\mathcal{L}^{(n)} : \beta_{\mathcal{L}}(L_i^{(n)}) = 1 \Leftrightarrow ({}_c\varphi^{-1}(L_i^{(n)}) = \mathbf{F}_i^{(n)}) \wedge (\beta_{\mathcal{F}}(\mathbf{F}_i^{(n)}) = 1)$$

nazýváme binární valuací logického prostoru  ${}_c\mathcal{L}^{(n)}$ .

Binární valuace poskytuje pouze „černobílé“ informace. K podchycení dalších informací je třeba pracovat minimálně se zobrazením  $\mu_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}^{(n)} \rightarrow \{0,1,\dots,m\}$ , resp.  $\mu_{\mathcal{L}} : {}_c\mathcal{L}^{(n)} \rightarrow \{0,1,\dots,m\}$  ( $m$ -ární valuace), popř. se zobrazením digitálního prostoru do obecnějších množin.

**3. DEFINICE – euklidovský  $n-D$  objekt:** euklidovským  $n-D$  objektem rozumíme libovolnou podmnožinu  ${}_E\mathcal{P}^{(n)}$  nosiče  $\mathbf{J}^{(n)}$  digitálního prostoru  $\mathcal{D}^{(n)}$ .

**4. DEFINICE – fyzický  $n-D$  objekt:** Necht'  $\mathcal{F}^{(n)}$  je fyzický prostor. Fyzickým  $n-D$  objektem rozumíme libovolnou podmnožinu  ${}_F\mathcal{P}^{(n)}$  prostoru  $\mathcal{F}^{(n)}$ .

Výše uvedená zobrazení  $\rho : E_n \rightarrow \{0,1\}$  resp.  $\varphi : E_n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , se kterými „implicitně“ pracuje euklidovská geometrie, většinou nejsou explicitně uváděna. Přímé euklidovské konstrukce objektů pomocí těchto zobrazení nejsou totiž většinou prakticky možné pro nekonečnost euklidovského prostoru. Pro geometrii digitální je však takový aparát velmi výhodný. Jednak proto, že definiční obor těchto zobrazení – fyzický resp. logický prostor – je na rozdíl od  $E_n$  konečný a **každý** digitální objekt lze definovat výčtem jeho prvků. Za druhé proto, že digitální geometrii nezajímá jen to, zda prvek do objektu patří či nikoli, či to, jaké má souřadnice. Digitální prostor může sloužit k modelování nejrůznějších jevů, hodnotám jeho domén tedy můžeme přisuzovat nejrůznější význam. Ohodnotíme-li prostor kartézským součinem (s konečnou aritmetikou), můžeme modelovat několik vlastností současně, neboť každé doméně přiřazujeme uspořádanou  $n$ -tici čísel. Tyto vlastnosti můžeme navíc vhodně „strukturovat“ volbou odpovídající struktury oboru hodnot příslušné valuace.

**7. DEFINICE – fyzický a logický graf euklidovského  $n-D$  objektu:** Necht'  $\mathbf{J}^{(n)}$  je nosič digitálního prostoru  $\mathcal{D}^{(n)}$ ,  ${}_E\mathcal{P}^{(n)} \subseteq \mathbf{J}^{(n)}$  je euklidovský  $n-D$  objekt. Množinu  ${}_F\mathcal{P}^{(n)} \subseteq \mathcal{F} : {}_F\mathcal{P}^{(n)} = \{\mathbf{F}_i \in \mathcal{F} \mid \mathbf{F}_i \cap {}_E\mathcal{P}^{(n)} \neq \emptyset\}$  budeme nazývat fyzickým grafem euklidovského  $n-D$  objektu  ${}_E\mathcal{P}^{(n)}$  ve fyzickém prostoru  $\mathcal{F}^{(n)}$ . Logický obraz  ${}_L\mathcal{P}^{(n)}$  fyzického grafu  ${}_F\mathcal{P}^{(n)}$  objektu  ${}_E\mathcal{P}^{(n)}$  budeme nazývat logickým grafem tohoto objektu v  $\mathcal{F}^{(n)}$ .

Takto definovaným grafem je např. jakékoliv zobrazení reálného objektu nebo např. technického výkresu na výstupním zařízení počítače. V práci uvedeny aplikace - konstrukce bodů

a některé operace s obrazy, které jsou podstatně rychlejší než operace implementované v komerčně dostupných obrazových editorech, včetně operací, které v těchto softwarech vůbec nejsou k dispozici (viz v práci kpt. 2.6 a 2.7).

### 3 KONSTRUKCE DIGITÁLNÍCH OBJEKTŮ

#### 3.1 KŘIVKA – DEFINICE A ZÁKLADNÍ POJMY

**1. DEFINICE – parametrizovatelná množina, parametrizace množiny:** Necht'  $G^{(n)} \subset \mathbf{R}^n$  a dále necht' existuje spojitě a prostě zobrazení  $\gamma : \langle a; b \rangle \rightarrow G^{(n)}$ . Pak množinu  $G^{(n)}$  nazýváme parametrizovatelnou a zobrazení  $\gamma$  nazýváme její parametrizací.

**2. VĚTA:** Označme  $\prec_\gamma$  uspořádání množiny  $G^{(n)}$  definované takto:  $\forall X, Y \in G^{(n)} : X \prec_\gamma Y \Leftrightarrow \gamma^{-1}(X) < \gamma^{-1}(Y)$ . Dále označme  $\Gamma$  množinu všech parametrizací  $\gamma : \langle a; b \rangle \rightarrow G^{(n)} \subset \mathbf{R}^n$ , kde  $\langle a; b \rangle$  je libovolný interval. Necht'  $\gamma_1; \gamma_2 \in \Gamma$  jsou dvě parametrizace  $\gamma_1 : \langle a; b \rangle \rightarrow G_1^{(n)}$ ;  $\gamma_2 : \langle a; b \rangle \rightarrow G_2^{(n)}$ . Na množině  $\Gamma$  definujme relaci  $\rho$  takto:

$$\forall \gamma_1; \gamma_2 \in \Gamma : ([\gamma_1; \gamma_2] \in \rho) \Leftrightarrow (G_1^{(n)} = G_2^{(n)} = G^{(n)} \wedge (\forall X, Y \in G^{(n)} : X \prec_{\gamma_1} Y \Leftrightarrow X \prec_{\gamma_2} Y))$$

Pak relace  $\rho$  je ekvivalence na  $\Gamma$ .

**3. DEFINICE – jednoduchá křivka:** Necht'  $\rho$  je ekvivalence z předchozí věty. Každý prvek  $\gamma$  rozkladu  $\Gamma/\rho$  množiny  $\Gamma$  indukovaného relací  $\rho$  nazýváme jednoduchou křivkou. Množinu  $G^{(n)} \subset \mathbf{R}^n$  nazýváme grafem jednoduché křivky  $\gamma$ . Podrobně značíme  $G_\gamma^{(n)}$ .

**4. DEFINICE – součet jednoduchých křivek:** Necht'  $\gamma : \langle a; b \rangle \rightarrow G^{(n)} \subset \mathbf{R}^n$  je libovolný reprezentant jednoduché křivky  $\gamma$ ,  $\gamma_1 : \langle a; b \rangle \rightarrow G_1^{(n)}$  resp.  $\gamma_2 : \langle a; b \rangle \rightarrow G_2^{(n)}$  libovolní reprezentanti jednoduchých křivek  $\gamma_1; \gamma_2$ . Množinu  $\gamma$  nazýváme součtem křivek  $\gamma_1; \gamma_2$ . právě tehdy, když

$$\text{a) } \langle a_1; b_1 \rangle \cup \langle a_2; b_2 \rangle = \langle a; b \rangle \quad \text{b) } b_1 = a_2 \quad \text{c) } b_1 = a_2 \wedge \gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$$

Značíme  $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2$ . Křivky, jejichž reprezentanti splňují podmínky a)–c) nazýváme sečitatelnými.

**5. DEFINICE – křivka:** Necht'  $\gamma_i : \langle a_i; b_i \rangle \rightarrow G_{\gamma_i}^{(n)}; i \in \{1, 2, \dots, n\}$  je konečná množina po dvou sečitatelných jednoduchých křivek. Křivkou  $\gamma$  rozumíme součet  $\gamma = \sum_{i=1}^n \gamma_i$ . Množinu

$$G_\gamma^{(n)} = \bigcup_{i=1}^n G_{\gamma_i}^{(n)}$$
 nazýváme grafem křivky.

**6. DEFINICE – fyzický a logický graf křivky:** Necht'  $\mathbf{J}^{(n)}$  je nosič digitálního prostoru  $\mathcal{D}^{(n)}$ ,  $n \in \{2, 3\}$ ,  $\gamma \subset \mathbf{J}^{(n)}$  je rovinná resp. prostorová křivka. Množinu  ${}_F\gamma \subset \mathcal{F} : {}_F\gamma = \{\mathbf{F}_i \in \mathcal{F} \mid \mathbf{F}_i \cap G_\gamma^{(n)} \neq \emptyset\}$  budeme nazývat fyzickým grafem křivky  $\gamma$ . Logický obraz

${}_L\gamma$  fyzického grafu  ${}_F\gamma$  křivky  $\gamma$  budeme nazývat logickým grafem této křivky. Graf  $G_\gamma^{(n)}$  křivky  $k$  budeme nazývat nositelkou křivky  ${}_F k$  resp.  ${}_L k$ .

### 3.2 ÚSEČKA

Konstrukce úsečky je standardně dodávána se všemi systémy. Např. v Borland DELPHI je realizován dvojicí metod MoveTo a LineTo. V této kapitole je popsán algoritmus založený na aparátu z kpt. 3.1. Ve stručném podání by byl poněkud nepřehledný, proto ho zde vynecháme. Algoritmus je rychlejší než algoritmus MoveTo-LineTo. V závislosti na délce úsečky je tento algoritmus asi třikrát až třicetkrát rychlejší než algoritmus implementovaný v Borland DELPHI.

### 3.3 FYZICKÉ GRAFY PARAMETRICKY ZADANÝCH KŘIVEK

Konstrukce křivek v digitálním prostoru spočívá v konstrukci fyzických grafů křivek, jsou-li zadány jejich nositelky. V případě, že tyto nositelky jsou zadány analyticky, lze k těmto konstrukcím přistupovat dvojím způsobem:

**Konstrukce metodou ekvidistantního dělení definičního intervalu:** tato metoda interpoluje křivku polygonem. Je zřejmé, že ekvidistantní dělení definičního intervalu, kterým je v případě křivky zadané rovnicí  $\gamma: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}: y = f(x)$  množina  $D(\gamma) = \{x \in \mathbf{R} | x \in \langle x_1; x_2 \rangle\} = \langle x_1; x_2 \rangle$  v žádném případě neznamená konstantní délku interpolujících úseček  $AB$  a už vůbec ne příslušných oblouků  $AB$  sestrojované nositelky. Tato metoda může být výhodná pouze v případě křivek zadaných svým parametrickým vyjádřením, tj.  $\gamma: t \rightarrow [x_1; x_2]; x_1 = \varphi(t) \wedge x_2 = \psi(t)$ , kde definiční interval je  $D(\gamma) = \{t \in \mathbf{R} | t \in \langle t_1; t_2 \rangle\} = \langle t_1; t_2 \rangle$ . Tato konstrukce umožňuje modelovat „rychlost“ (tj. vlastně parametrické vyjádření křivky).

**Metoda rekurzivního půlení intervalu:** Tato metoda dovoluje sestrojovat každý bod fyzické křivky právě jednou, navíc je podstatně přesnější, neboť křivku neinterpoluje, ale sestrojuje přímo fyzický graf křivky dle def. 6. kpt. 3.3, a to pro případ, kdy její nositelka je jednoduchá křivka dle def. 3. kpt. 3.3. Používá pojem sused fyzického pixelu zavedený v def. 8 kpt. 2.4.

### 3.4 KŘIVKY ZADANÉ ROVNICÍ $f(x, y) = 0$

**Pixelový algoritmus:** využívá vrcholového mapování (viz kpt. 2.3.).

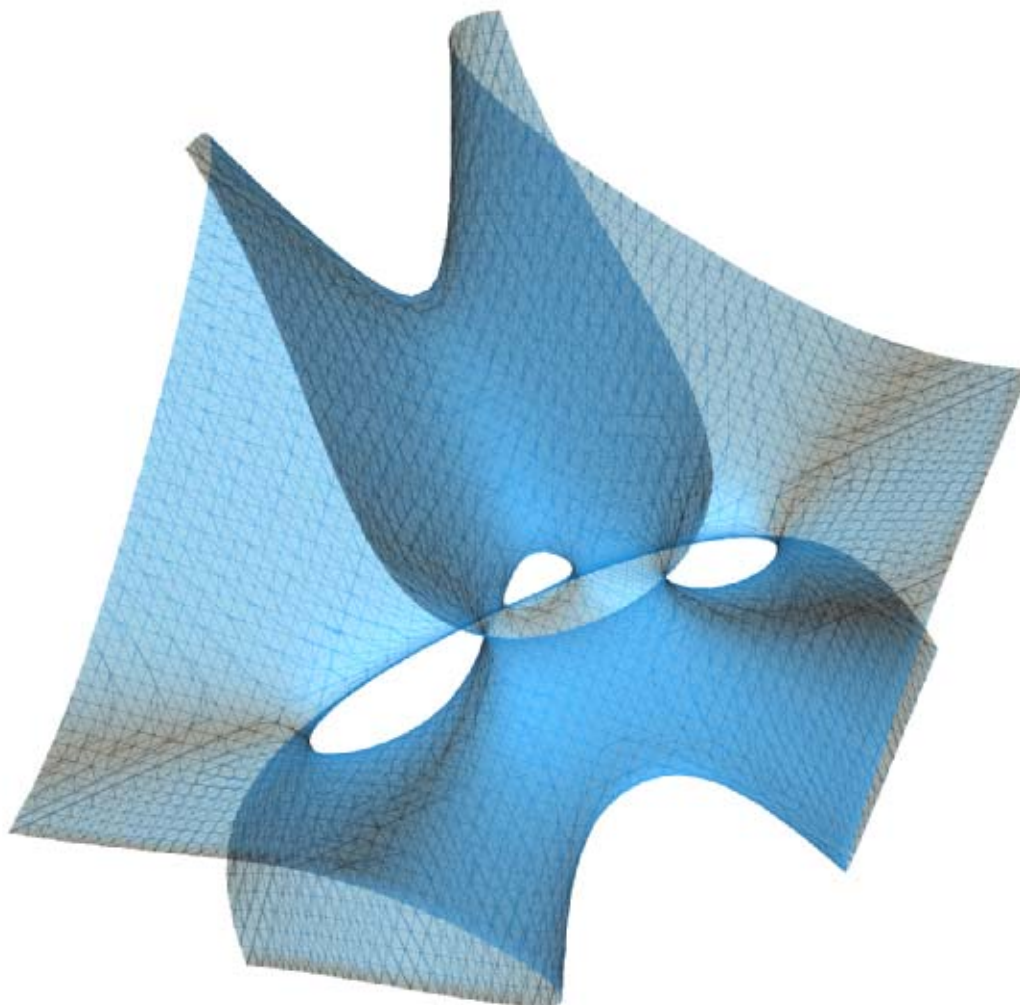
**Sít'ová konstrukce:** Pixelový algoritmus je podstatně urychlen digitální interpolací, která je popsána v práci. Kreslicí plocha je rozdělena na obdélníky  $ABCD$ , kde  $A = [x, y]$ ;  $B = [x + hx, y]$ ;  $C = [x + hx, y + hy]$ ;  $D = [x, y + hy]$  a zjišťuje se, zda křivka  $f(x, y) = 0$  protíná testovaný obdélník.

### 3.5 PLOCHY URČENÉ ROVNICÍ $f(x, y, z) = 0$

Algoritmus konstrukce těchto ploch je trojrozměrným zobecněním síťového algoritmu konstrukce křivek  $f(x, y) = 0$ . Je podstatně přesnější a 20-30 krát rychlejší než algoritmus implementovaný systémem Maple firmy Waterloo. Testováno na Clebschově kubice o rovnici

$$81 \cdot (x^3 + y^3 + z^3) - 189 \cdot (x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) + 54xyz + 126 \cdot (xy + xz + yz) - 9(x^2 + y^2 + z^2) - 9(x + y + z) + 1 = 0$$

v mezích  $x, y, z \in \langle -0.85; 0.85 \rangle$ . Výstup si můžeme prohlédnout na obr. 1.



**Obr.1.: Clebschova kubika sestavená aparátem digitální geometrie**

### 3.6 MĚŘENÍ HAUSDORFFOVY DIMENZE DIGITÁLNÍCH OBJEKTŮ

V této kapitole je studována problematika zobrazení fraktálů na výstupních zařízeních a odhady Hausdorffovy dimenze získávané z takto zobrazených objektů. Pro tyto odhady je v práci odvozen vzorec

$$D \approx \frac{\ln \sum_{j=1}^{n^2} m_j P_j(n)}{\ln n},$$

kde  $n$  je strana pokrývajících čtverce,  $m_j$  počet pokrývajících čtverců, ve kterých se pixely vyskytují s relativní četností  $P_j(n)$ . Kvalita výsledků pochopitelně do značné míry závisí na kvalitě vstupních dat. Metoda demonstrována měřením Hausdorffovy dimenze fyzických grafů úsečky, kruhu a 7. iterace vločky Kochové, generovaných v obrazu s rozlišením (1000;1000), a to až na dvě desetinná místa.

## 4 DIGITÁLNÍ TEORIE BAREV

Obraz na monitoru či tiskárně vzniká různým obarvením fyzických pixelů. Pojem „barva“ je však ve své obecnosti velmi mnohoznačný, takže jeho nedokonale specifikovaný význam může vést ke značným nejasnostem. Abychom pojmy související s barvou mohli objektivizovat, je třeba si uvědomit, jak vzniká barevný vjem. Na jeho vzniku se podílejí tři základní faktory.

### 4.1 ZDROJ SVĚTLA

Zdroje světla lze rozdělit podle několika hledisek. Nejčastěji se dělí podle tvaru, resp. rozměrů na zdroje bodové a plošné a jednak podle příčiny záření na zdroje vlastní a nevlastní. K vlastním zdrojům se počítají zdroje, u nichž záření vyniká přímo v tělese. Jako nevlastní jsou označovány zdroje, které samy nezáří, ale odrážejí a rozptylují záření jiných zdrojů.

### 4.2 POZOROVANÝ PŘEDMĚT

Výsledný barevný vjem ovlivňují dále reflexní a absorpční vlastnosti pozorovaného předmětu. Z nejdůležitějších fyzikálních zákonů jsou v práci zmíněny zákon odrazu a lomu.

### 4.3 POZOROVATEL

Rozlišovací schopnost lidského oka je omezena počtem barev, které je schopno rozeznat a velikostí pozorovaných předmětů. Z celkového zářivého toku jen velmi malá část má schopnost vzbudit zrakový vjem. Zrakový vjem vzniká tím, že svazek paprsků přicházející do oka je jeho optickou soustavou promítnut na sítnici, kde dopadá na fotoreceptory, které ho mění na nervové podráždění. Barevný vjem vzniká pomocí tří fotosenzibilních látek, absorbujících záření v oblastech okolo 600 – 700nm (červená), 500 – 560 nm (zelená) a 450-480 nm (modrá). Práce rozlišuje tzv. fotometrický a fyziologický jas.

Všechny tyto skutečnosti nás opravňují použít aparát digitální geometrie všude tam, kde cílem těchto konstrukcí je jejich vnímání lidským okem. Lidské oko samo je totiž zřejmě velmi dobrým modelem digitální roviny.

### 4.4 BAREVNÝ PROSTOR RGB

**1. DEFINICE – digitální obor záření:** Necht'  $\lambda \in I_\lambda = \langle \lambda_0; \lambda_m \rangle$ ;  $D_\lambda = \{ \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_m \}$  je ekvidistantní dělení intervalu  $I_\lambda$ . Uspořádanou dvojici  $\mathcal{D}^{(1)} = (I_\lambda; D_\lambda)$  budeme nazývat digitálním

oborem záření. Je-li  $\lambda_1 = 380nm$ ;  $\lambda_2 = 720nm$ , pak digitální obor záření nazýváme digitální obor (viditelného) světla.

Lze snadno ukázat, že digitální obor záření je speciálním případem digitálního prostoru  $\mathcal{D}^{(n)}$  pro  $n=1$ . Lze na něm tedy definovat všechny pojmy zavedené v kpt. 2. Jeho prvky – jednorozměrné fyzické domény (pro fyzický prostor) resp. logické domény (pro logický prostor) jsou pak nazývány fyzickými resp. logickými vlnovými délkami.

**2. DEFINICE – digitální spektrum, fotometrická barva, fotometrický barevný prostor:** Nechť  $\mathcal{D}$  je digitální obor záření. Jeho reálnou valuaci nazýváme digitálním spektrem. Je-li tato valuace definována na digitálním oboru viditelného světla, nazýváme ji fotometrickou barvou. Množinu všech fotometrických barev nazýváme fotometrickým barevným prostorem.

**3. DEFINICE – monochromatická fotometrická barva:** Označme  $\mathcal{B}^m$  fotometrický barevný prostor, jehož prvky jsou barvy definované na oboru viditelného světla s fyzickými vlnovými délkami  $\lambda_k$ ;  $k = 1, 2, \dots, m$ . Barvu  $\beta \in \mathcal{B}^m$  nazveme monochromatickou fotometrickou barvou s vlnovou délkou  $\lambda_k$  právě tehdy, když

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, m\} : \beta(\lambda_i) = \begin{cases} c \neq 0 & \Leftrightarrow i = k \\ 0 & \Leftrightarrow i \neq k \end{cases}$$

V práci je matematicky zaveden součet fotometrických barev, násobení barvy reálným číslem a lineární kombinace fotometrických barev. Je ukázáno, že takto zavedený fotometrický barevný prostor je lineárním prostorem. Dále je definována fyziologická barva jako libovolná reálná valuace digitálního oboru viditelného světla  $\mathcal{D}$  s rozlišením  $m = 3$  a fyziologický barevný prostor jako množina všech fyziologických barev.

Pro každý prostor  $\mathcal{B}^m$ , pro který je  $m \geq 3$ , existuje ekvivalence  $\rho$ , taková, že  $\mathcal{B}^3 = \mathcal{B}^m / \rho$ . Těchto ekvivalencí je obecně více. Jednu z nich realizuje zrakové centrum lidského mozku při každém zrakovém vjemu a lze ji slovně popsat jako relaci „vyvolávat stejný zrakový vjem“, zápisy  $[\beta_1; \beta_2] \in \rho$ , resp.  $\beta_1 \rho \beta_2$  je třeba číst „barvy  $\beta_1; \beta_2$  vyvolávají stejný zrakový vjem“ resp.  $\beta_1; \beta_2 \in \beta$  znamená „fotometrické barvy  $\beta_1; \beta_2$  reprezentují tutéž fyziologickou barvu  $\beta$ “. V práci je proto nazývána fyziologická popř. vizuální ekvivalence a barvy  $\beta_1; \beta_2 \in \beta$ , pro které je  $\beta_1 \rho \beta_2$ , jsou nazývány fyziologicky popř. vizuálně ekvivalentními. Barevný prostor  $RGB$  je pak fyziologický barevný prostor, jehož bázi tvoří monochromatické fotometrické barvy Red s fyzickou vlnovou délkou  $\gamma_1 =_R \lambda = 700 nm$ ; Green –  $\gamma_2 =_G \lambda = 546.1 nm$  (zelená spektrální čára rtuti); Blue –  $\gamma_3 =_B \lambda = 435.8 nm$  (modrá spektrální čára rtuti).

Tato matematická teorie pak slouží ke konstrukci různých palet, modelování jasu a průhlednosti v prostoru  $RGB$ , tj. na monitorech a barevných displejích.

#### 4.5 BAREVNÝ PROSTOR CIE

Barevný prostor  $CIE$  je z hlediska výše uvedeného aparátu fyziologickým barevným prostorem, který má s prostorem  $RGB$  společný podprostor – řez prostoru  $RGB$  tzv. rovinou

konstantního jasů. V práci je uvedena transformace prostoru  $RGB$  na prostor  $CIE$  včetně transformace inverzní.

#### 4.6 METRIKY BAREVNÝCH PROSTORŮ

Obarvení objektu  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{F}^{(n)}$  barvou z prostoru  $RGB$  resp.  $CIE$  považovat za valuaci  $\beta_{RGB} : \mathcal{F}^{(2)} \rightarrow R \times G \times B = RGB$  resp.  $\beta_{CIE} : \mathcal{F}^{(2)} \rightarrow X \times Y \times Z = CIE$ , tj. za součin valuací

$$\beta = \beta_R \otimes \beta_G \otimes \beta_B, \beta_R : \mathcal{F}^{(2)} \rightarrow R, \beta_G : \mathcal{F}^{(2)} \rightarrow G, \beta_B : \mathcal{F}^{(2)} \rightarrow B, R, G, B = \{0, 1, \dots, 255\}$$

resp.

$$\beta = \beta_X \otimes \beta_Y \otimes \beta_Z, \beta_X : \mathcal{F}^{(2)} \rightarrow X, \beta_Y : \mathcal{F}^{(2)} \rightarrow Y, \beta_Z : \mathcal{F}^{(2)} \rightarrow Z, R, G, B = \{0, 1, \dots, 255\}.$$

Valuace  $\beta_R, \beta_G, \beta_B$  odpovídají rozkladu snímku na snímky v červeném, zeleném a modrém světle. Tyto rozklady mohou mít značný praktický význam. Například různé části preparátu pro konfokální mikroskop mohou být pro lepší rozlišení obarveny zeleným a červeným barvivem. Podobně při 3-D rekonstrukci stereoskopických fotografií je jedna z fotografií ohodnocena jako *Red*, druhá jako *Green*. Stereofotografii dostaneme jako součin těchto ohodnocení.

Vzhledem k různé citlivosti lidského oka na jednotlivé spektrální barvy neodpovídají subjektivně vnímané rozdíly barev jejich euklidovské vzdálenosti v prostorech  $RGB$  ani  $CIE$ ". Současná literatura však nepracuje s pojmem metrika, a proto snahy o napravení tohoto nedostatku vedou ke značně krkolomným a neefektivním konstrukcím.

#### 4.7 BAREVNÉ PALETY

**1. DEFINICE – paleta:** Necht'  $C_r$  je  $r$  prvková podmnožina barevného prostoru,  $P \subseteq C_r$  nejméně dvouprvková podmnožina množiny  $C_r$ ,  $<_p$  uspořádání množiny  $P$ . Pak množinu  $P$  nazveme paletou vybranou z  $r$ -chromatické množiny  $C_r$ .

Množina  $C_r$  není jen uspořádanou  $r$ -prvkovou množinou tak, jak to vyžaduje předchozí definice. Prakticky vždy pracujeme s barevným prostorem a při výběru barev palety je třeba brát v úvahu metrické vlastnosti příslušného barevného prostoru. Moje osobní zkušenosti bohužel svědčí o tom, že mnozí výrobci softwaru těmto otázkám věnují velmi malou pozornost. Jako příklad je v práci uvedena základní barevná paleta systému Windows a na základě metrických vlastností prostoru  $RGB$  je navržena paleta vhodnější. Je rovněž sestrojena tzv. topografická paleta vhodná pro aplikace v geografii.

### 5. DIGITÁLNÍ FILTRY

#### 5.1 OBRAZ

**1. DEFINICE – vzorkovaná funkce:** Necht'  $\mathbf{I}^{(n)}$  je nosič digitálního prostoru. Funkci  $g(\mathbf{x})$  definovanou pro každé  $x = [x_1; x_2; \dots; x_n] \in \mathbf{R}^n$  nazveme vzorkovanou právě tehdy, když  $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{I}^n : g(\mathbf{x}) = g(\text{Trunc}(\mathbf{x}))$ , kde  $\text{Trunc}(\mathbf{x}) = [\text{Trunc}(x_1); \text{Trunc}(x_2); \dots; \text{Trunc}(x_n)]$ .



**2. DEFINICE – obraz:** Necht'  $W = \langle 0; w \rangle \in \mathbf{R}; w \in \mathbf{R}; H = \langle 0; h \rangle \in \mathbf{R}; h \in \mathbf{R}; V = \langle v_1; v_2 \rangle \subset \mathbf{R}$  jsou intervaly. Funkci  $I: W \times H \rightarrow V$  nazveme obrazem. Je-li  $I$  vzorkovaná, mluvíme o vzorkovaném obrazu. Je-li funkce  $I$  vzorkovaná a  $H \subset \mathbf{R}$ , mluvíme o digitálním obrazu.

Definice 2 je dostatečně obecná na to, aby jí vyhovoval každý „obraz“ tak, jak ho běžně chápeme. Vše závisí na oboru hodnot  $V$  tohoto obrazu.

## 5.2 FILTROVÁNÍ OBRAZŮ

V analýze obrazu jsou běžně používány tzv. lineární obrazové filtry, které hodnotu každého pixelu  $\mathbf{F}_{ij}$  2-D obrazu  $I$  nahrazují hodnotou 2-D konvoluce obrazu  $I$  v pixelu  $\mathbf{F}_{ij}$  s konvoluční maticí  $\mathbf{C}$ . Tyto konvoluce jsou dosud používány výhradně na digitalizovaný 2-D obraz dle def. 2. předchozí kapitoly, jehož valuace je interpretována téměř výhradně jako obarvení.

## 5.3 POJEM A APLIKACE $n-D$ FILTRU

Aparát digitální geometrie umožňuje podstatně obecnější a prakticky velmi užitečné interpretace. Zobecnění lze provést v několika směrech:

- Vhodným „přebarvením“ obrazu před použitím výše uvedených „klasických“ filtrů lze tyto filtry použít k jiným účelům.
- V analýze obrazu je hodnota pixelu vždy chápána jako barva, při zpracování na počítači jako „digitalizovaná barva“. Nic však nebrání tomu, abychom podobně filtrovali nejen barvu, ale například také souřadnice, průhlednost, index lomu apod.

Filtrovat lze více takových vlastností současně. Filtry lze zobecnit také co do „počtu rozměrů“ filtrovaného objektu. Filtrovat lze nejen obraz jako 2-D objekt, ale také  $n-D$  objekty. Tak lze modifikovat např. vlastnosti mikroskopických preparátů, lomových ploch, výbrusů apod.

**1. DEFINICE –  $r - \varepsilon$ -ový obal digitálního prostoru:** Necht'  $({}^*\mathcal{D}^{(n)}, \varphi, \mu)$  je digitální prostor s mapováním  $\varphi$  a metrikou  $\mu$ ,  $({}^*\mathcal{D}^{(n)}, \varphi, \mu)$  jeho podprostor takový, že  $\varepsilon$ -ové okolí každého voxelu  $\mathbf{F} \in {}^*\mathcal{F}^{(n)}$  má v  $\mathcal{F}_i^{(n)}$   $r$  prvků. Pak prostor  ${}^*\mathcal{F}^{(n)} = \bigcap {}^*\varepsilon\mathcal{F}_i^{(n)}$  nazýváme  $r - \varepsilon$ -ovým obalem prostoru  $\mathcal{F}^{(n)}$  (vzhledem k metrice  $\mu$ ).

**2. DEFINICE –  $r - \varepsilon$ -ový obal valuace digitálního prostoru:** Necht'  $\beta: \mathcal{D}^{(n)} \rightarrow A$  je numerická valuace prostoru  $\mathcal{F}^{(n)}$ ,  $\beta: \mathcal{D}^{(n)} \rightarrow A$  valuace  $r - \varepsilon$ -ového obalu taková, že pro každé  $\mathbf{F} \in {}^*\mathcal{F}^{(n)}$  je  $\beta(\mathbf{F}) = {}^*\beta(\mathbf{F})$ . Pak valuaci  $\beta: \mathcal{D}^{(n)} \rightarrow A$  nazýváme  $r - \varepsilon$ -ovým obalem valuace  $\beta: \mathcal{D}^{(n)} \rightarrow A$ .

**3. DEFINICE – prostorový  $n-D$  filtr, zaokrouhlení filtru, lineární filtr:** Necht'  $\beta: \mathcal{D}^{(n)} \rightarrow A$  je numerická valuace digitálního prostoru  $\mathcal{F}_i^{(n)}$ ,  $\beta: \mathcal{D}^{(n)} \rightarrow A$  její  $r - \varepsilon$ -ový obal,

kde  $r - \varepsilon$ -ové okolí  $O_\varepsilon(\mathbf{F})$  domény  $\mathbf{F} \in \mathcal{F}^{(n)}$  má  $r$  prvků. Dále označme  $f: \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}$  funkci  $r$  reálných proměnných a  $O_\varepsilon(\mathbf{F}_i) = \{\mathbf{F}_1; \mathbf{F}_2; \dots; \mathbf{F}_r\} \subset \mathcal{F}^{(n)}$  uspořádané  $r$  prvkové okolí fyzické domény  $\mathbf{F}_i \in \mathcal{F}^{(n)}$ . Numerickou valuaci  $\frac{\Phi\beta}{\Phi f}: \mathcal{D}^{(n)} \rightarrow A$  takovou, že pro každé  $\mathbf{F}_i \in \mathcal{F}^{(n)}$  je  $\frac{\Phi\beta}{\Phi f}(\mathbf{F}_i) = f(\beta(\mathbf{F}_1); \beta(\mathbf{F}_2); \dots; \beta(\mathbf{F}_r))$ , nazýváme zfiltrovanou valuací  $\beta: \mathcal{D}^{(n)} \rightarrow A$ , funkci  $f$  pak prostorovým  $n-D$  filtrem. Funkci  $\text{round} \frac{\Phi\beta}{\Phi f}(\mathbf{F}_i) = \text{round} f(\beta(\mathbf{F}_1); \beta(\mathbf{F}_2); \dots; \beta(\mathbf{F}_r))$  nazýváme zaokrouhlením filtru  $\frac{\Phi\beta}{\Phi f}(\mathbf{F}_i)$ . Jestliže existuje funkce  $g: \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}$  a zobrazení

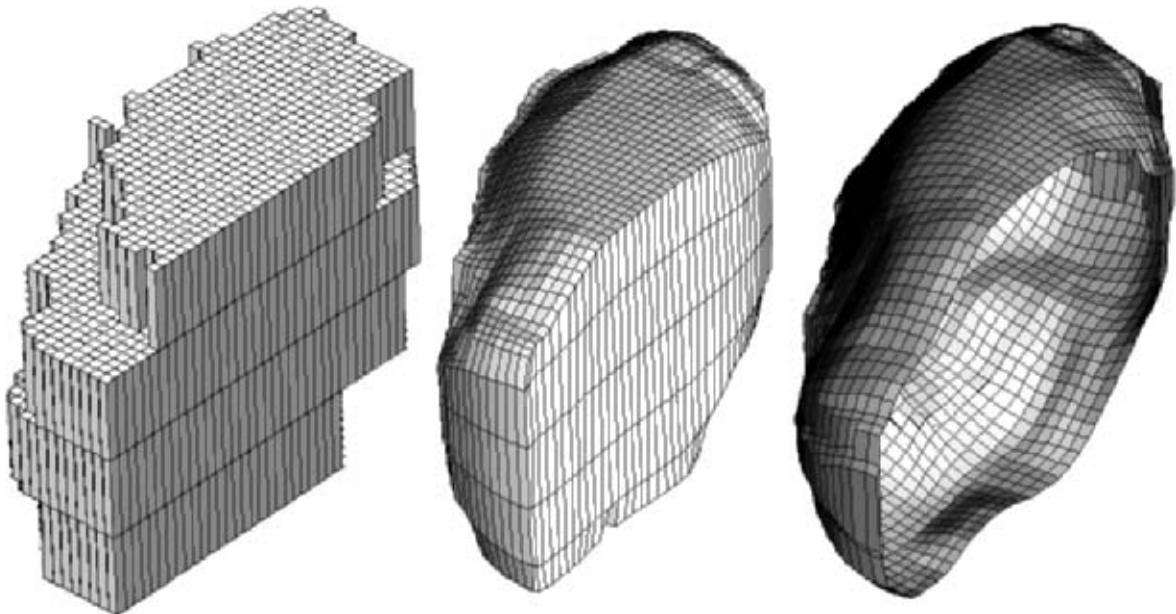
$\mathbf{C}(\mathbf{t}): \prod_{i=1}^n \{-\varepsilon_i; \dots; 0; \dots; \varepsilon_i\} \rightarrow \mathbf{R}$  takové, že

$$\frac{\Phi\beta}{\Phi f}(\mathbf{F}_i) = f(\beta(\mathbf{F}_1); \beta(\mathbf{F}_2); \dots; \beta(\mathbf{F}_r)) = \sum_{\mathbf{t} \in O_\varepsilon(\mathbf{F}_i)} \mathbf{C}(\mathbf{t}) \beta(\mathbf{F}_i - \mathbf{t}),$$

nazýváme funkci  $f$  lineárním filtrem.

Dále je definován tzv. objektový filtr, který se od prostorového filtru liší tím, že nesčítáme přes celé okolí  $O_\varepsilon(\mathbf{F}_i)$ , ale pouze přes průnik tohoto okolí s filtrovaným objektem  $\mathcal{P}$ .

V práci je uvedeno několik aplikací takto zobecněných filtrů. Tyto filtry se mohou uplatnit při vyhlazování hranic objektů, modelování topografického terénu, detekci povrchových ploch, detekci izoploch skalárního pole (v práci demonstrováno vizualizací izoploch účinnosti sacího nástavce), při extrapolaci vývoje skalárního pole (např. bouřkové oblačnosti) apod. Na obr. 2 je model části organely prvoka – vlevo tzv. voxelový model, uprostřed aplikace 3-D objektového filtru dolní propust, vpravo filtru gradientního.



**Obr. 2. Modelování objektu 3-D objektovými filtry**

## 6 MODELOVÁNÍ OPTICKÝCH JEVŮ

K tomu, aby objekt znázorňovaný na obrazovce počítače působil realisticky, je třeba vyřešit několik problémů.

- a) volba vhodného promítání na obrazovku
- b) viditelnost
- c) optické vlastnosti povrchu objektu
- d) konstrukce vržených stínů a odlesků.

Aparát digitální geometrie se zde významně uplatní především v bodě c.

### 6.1 STÍNOVÁNÍ PLOCH METODOU EKVIDISTANTNÍ DISTRIBUCE NORMÁL

Při grafické konstrukci ploch tyto plochy většinou plátujeme. Pláty jsou obecně prostorové segmenty, které při konstrukci interpolujeme pomocí trojúhelníků. Předpokládáme-li jeden izotropní plošný světelný zdroj dostatečně vzdálený od dokonale difuzní plochy, je hodnota stínu rovinného segmentu dána kosinem úhlu, který svírá jeho normála se směrem dopadajícího světla. Pokud však při konstrukci obarvíme celý segment stejnou barvou, pak jsou na původně „oblé“ ploše většinou okem patrné hrany segmentů, a tím nežádoucím způsobem upozorníme na fakt,

že sestavená plocha, o které předpokládáme, že je hladká, je (mnohdy dosti hrubou) interpolací (viz obr. 3). Tento nežádoucí efekt je možno odstranit buď interpolací barvy nebo normály.

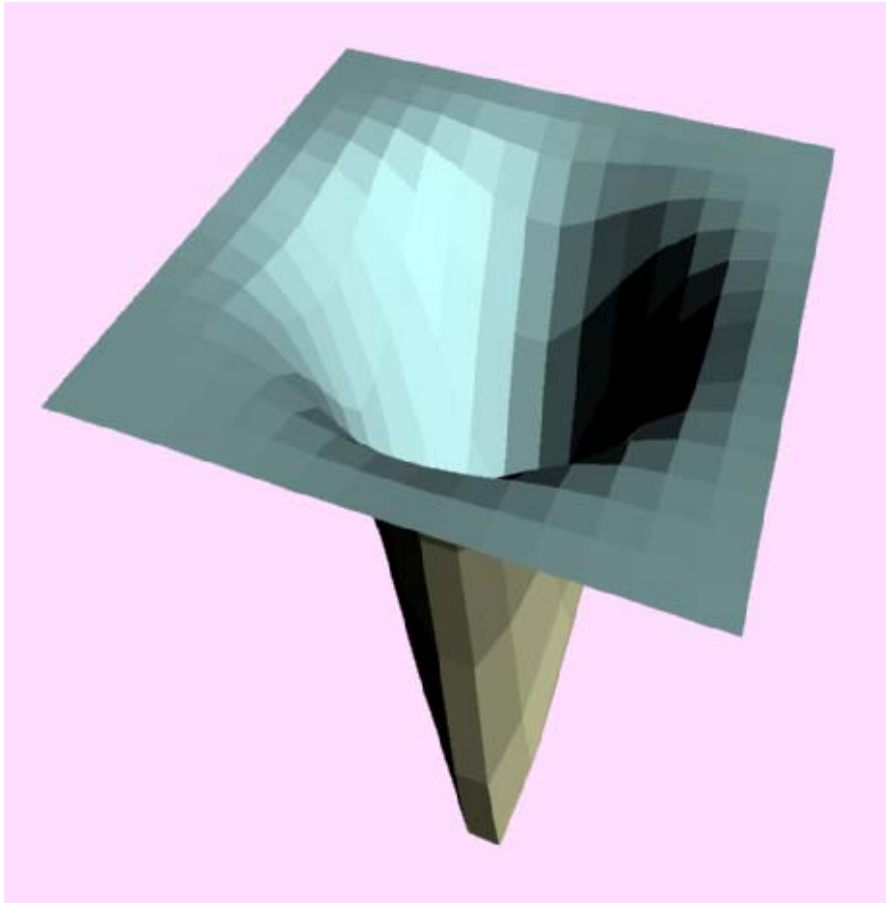
Nejpoužívanější je tzv. Gouraudovo a Phongovo stínování. Tato stínování jsou však korektní jen v triviálních případech, kdy plocha může být segmentována čtyřúhelníky, a to ještě pouze za určitých okolností.

V práci popsaná metoda je založena na odhadu čtyř tečných rovin obecného prostorového segmentu, jejichž normály jsou poté rozmístěny tak, že půdorysy jejich pat tvoří ekvidistantní síť (tj. logickou rovinu  $\mathcal{L}^2$  dle def. 1. kpt. 2.3). Hodnota stínu se pak získá bilineární interpolací čtyř nejbližších normál. Výsledek si můžeme prohlédnout na obr. 4.

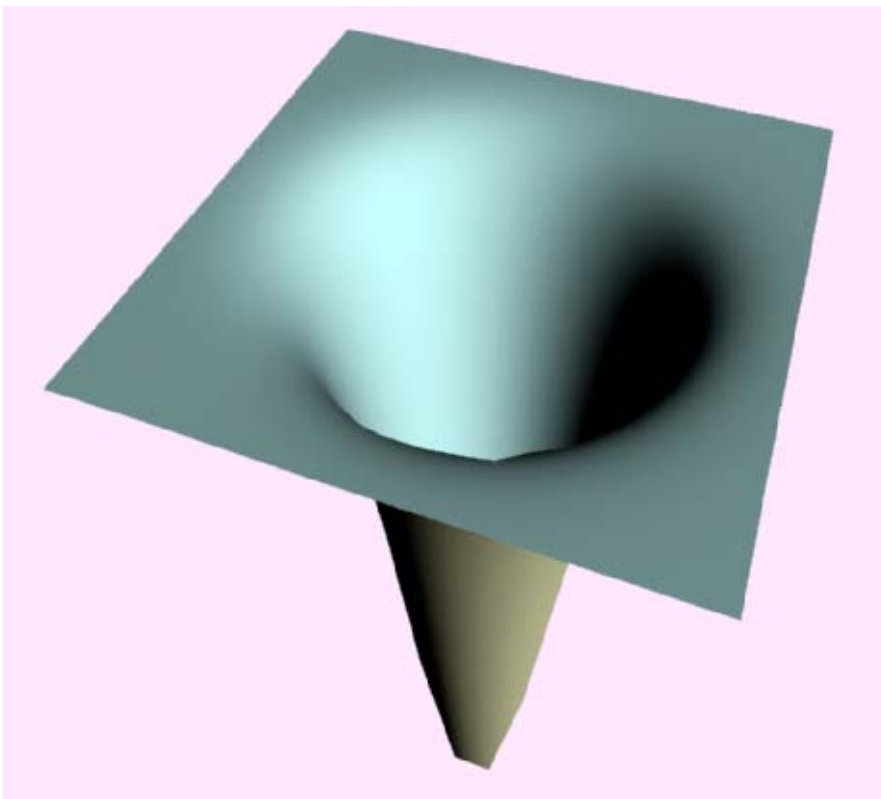
### 6.2 RASTROVÉ TEXTUROVÁNÍ

Různobarevnost plochy vyjádříme nejlépe nanesním textury. Texturou rozumíme funkci, která přiřazuje bodům roviny hodnotu modulované veličiny:  $\mathcal{T} : K \times L \rightarrow H$ , kde  $K, L, H \subset \mathbf{R}$  pro spojitý a  $K, L, H \subset \mathbf{N}$  pro diskrétní případ. Aplikaci textury provedeme definováním tzv. mapovací funkce  $\mathcal{M} : K \times L \rightarrow P$ , která každému bodu z definičního oboru textury přiřadí bod  $A$  na povrchu  $P$  tělesa. Barva tohoto bodu je pak definována hodnotou textury  $h \in H$ . Segmentové texturování spočívá v tom, že každému pixelu textury přiřadíme segment  $ABCD$  námi sestrojované plochy. Při rastrovém texturování postupujeme obráceně: procházíme všechny pixely na výstupním zařízení a každým z nich vyšleme zpětný promítací paprsek. Protne-li zobrazovanou plochu, obarvíme pixel barvou, která přísluší nejbližšímu průsečíku, jinak použijeme barvu pozadí.

Rastrové texturování je podstatně rychlejší než texturování segmentové. Lze ho využít v nejrůznějších situacích – od „čistě grafických“ až po závažné technické aplikace. Použijeme-li



**Obr. 3.: Konstantní stínování**



**Obr. 4.: Metoda ekvidistantní distribuce normál**

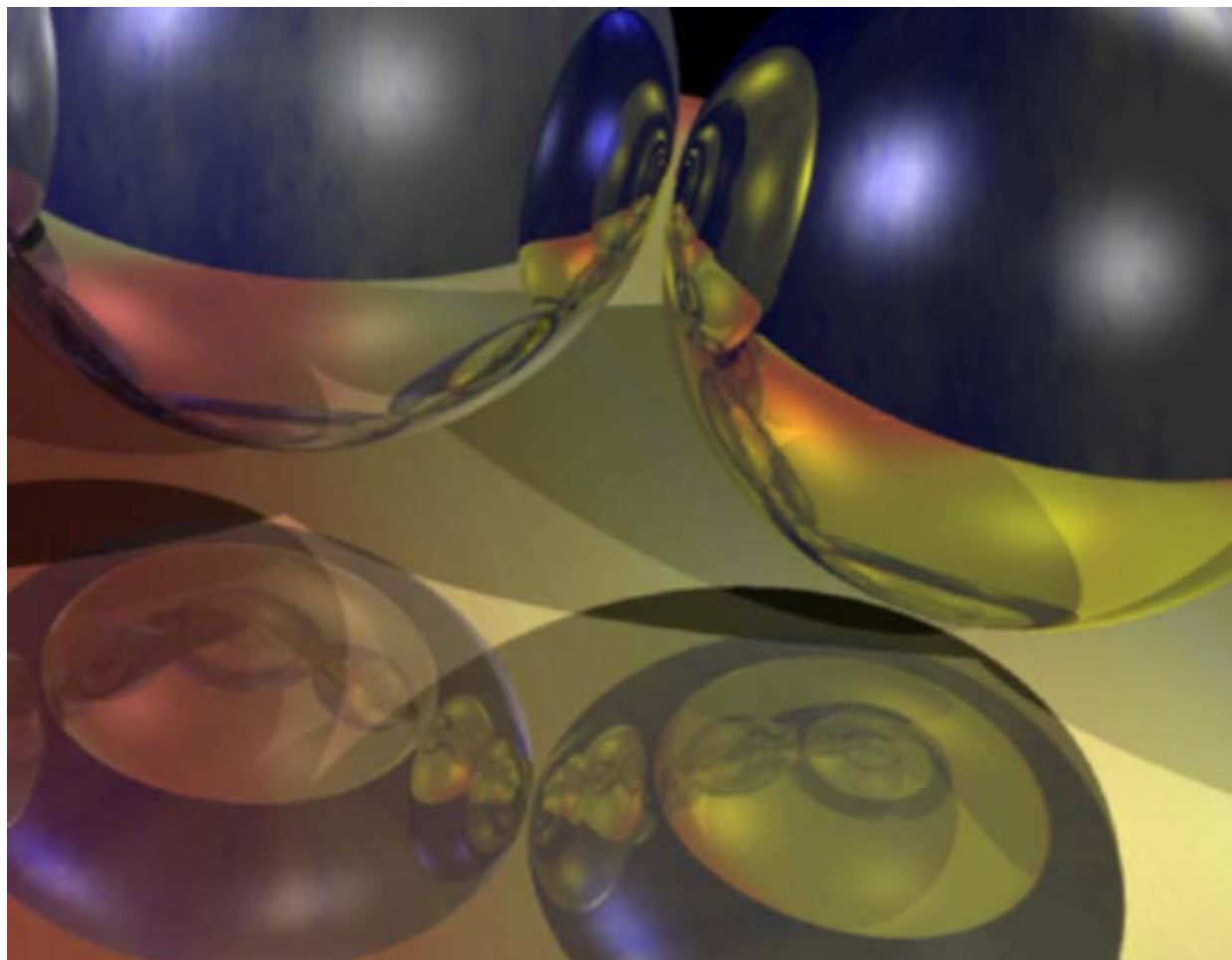
na kulovou plochu jako texturu mapu světa, dostaneme rotující globus. Použijeme-li jako textury např. radarové snímky aktuální oblačnosti, přicházející z meteoradarů v dostatečně krátkých časových intervalech, lze pracovat v reálném čase s animovaným vývojem oblačnosti nad jistým územím a ve spojení s výsledky kpt. 5.3. v reálném čase rovněž predikovat její vývoj. Podobně lze použít i jiná skalární data o zemském povrchu. Rastrové texturování roviny lze využít např. k prostorovým rekonstrukcím objektů z tzv. rovinných optických řezů tak, jak je poskytuje např. konfokální mikroskop, či počítačový tomograf.

### 6.3 ODRAZ SVĚTLA

Každému pixelu  $F_{ij}$  výstupního zařízení přiřadíme bod  $P \in \pi$  použité průmětny. Tímto bodem vyšleme zpětný promítací paprsek směrem k zobrazované scéně a hledáme průsečíky. Jestliže neexistují, pixel bude obarven barvou pozadí a výpočet končí. Jestliže průsečík existuje, pak v tomto bodě vyhodnotíme tzv. osvětlovací model. Sestrojíme odražený, popř. lomený paprsek a výpočet rekurzivně opakujeme podle požadované násobnosti odrazu resp. lomu.

K vyhodnocení odrazu a lomu světla lze přistupovat v podstatě dvojím způsobem:

a) Empirické modely: Nemají přímý vztah k fyzikální podstatě šíření světla. Chápu složitý fyzikální děj jako černou skříňku a jeho výsledek se snaží více či méně jednoduše kvantifikovat. Nemohou poskytnout tak přesné a vizuálně přesvědčivé výsledky, jako modely fyzikální, jsou však značně jednodušší a aplikace, které jsou na nich založeny, jsou podstatně rychlejší. Jsou proto často používány.

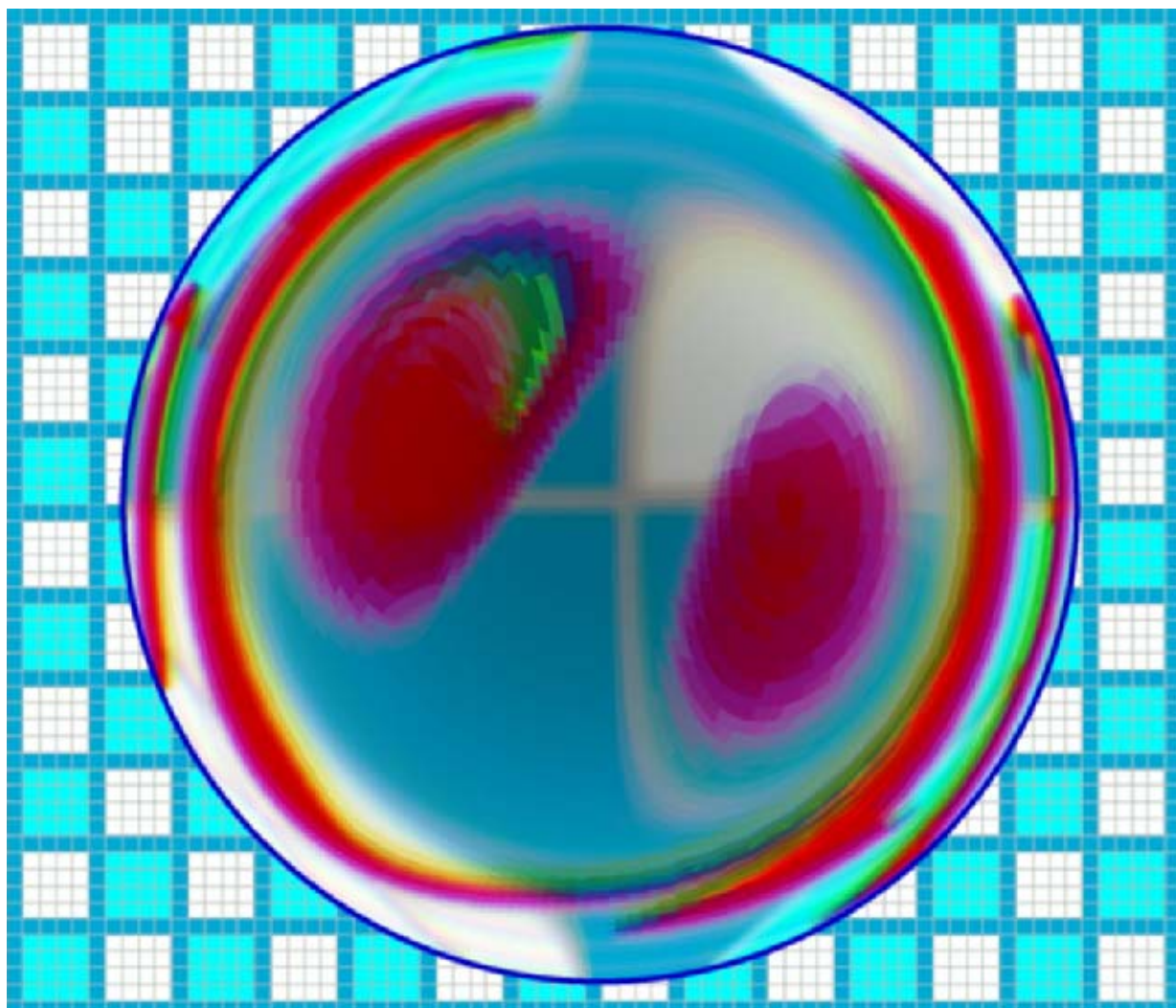


**Obr. 5.: Mnohonásobný odraz světla na kulových plochách (empirický model)**

b) Fyzikální modely: Vycházejí z fyzikálních zákonů šíření světla a odraz od nerovného povrchu se snaží popsat pomocí popisu šíření energie. Tyto metody mohou poskytnout téměř dokonalé fotorealistické výstupy. Jsou však značně složité, časově velmi náročné a pro skutečné výpočty použitelné jen s velkými obtížemi.

#### 6.4 LOM SVĚTLA A JEHO PRŮCHOD ABSORBUJÍCÍM PROSTŘEDÍM

V práci je podrobně popsán fyzikální proces průchodu světla absorbujeícím prostředím. Při algoritmizaci nelze bohužel většinou celý popsáný fyzikální proces postihnout. Jednak pro celkovou složitost a jednak pro nedostupnost potřebných informací. U každého paprsku by totiž bylo třeba propočítat všechny odrazy a lomy a takto získané barvy interferujících paprsků míchat. Navíc by bylo třeba započítat další jevy – absorpci, difuzi, dispersi apod. To ovšem lze udělat pouze pro objekt, který lze popsat analyticky a pro jehož každý bod jsou tyto veličiny známy. Hlavním výsledkem práce v této kapitole je fyzikální model silné spojné čočky, který i při značně zjednodušených předpokladech poskytuje kvalitní výsledky (viz obr. 6).



**Obr. 6.: Otvorová a barevná vada silné spojné čočky**



## 7 DIGITÁLNÍ TEORIE SNÍMACÍCH ZAŘÍZENÍ A JEJÍ APLIKACE

### 7.1 ČOČKA A MIKROSKOP

Tato kapitola popisuje čočku a mikroskop z pozic geometrické optiky a slouží jako východisko k dalšímu textu. Zobrazení  $\mathcal{G} : P_3 \rightarrow P'_3$ , které vyhovuje postulátům geometrické optiky, je nazváno geometrickou projekcí ( $P_3$  – předmětový,  $P'_3$  – obrazový prostor optické soustavy). Rovina  $\omega$ , pro kterou je  $\mathcal{G}^{-1} : \varphi_2 \rightarrow \omega$ , je nazvána rovinou ostrosti ( $\varphi_2$  – předmětová ohnisková rovina mikroskopu).

### 7.2 HRANICE MOŽNOSTÍ OPTICKÝCH SOUSTAV

Zobrazení reálnými optickými přístroji nesplňuje postuláty geometrické optiky nikdy zcela přesně, a to z několika důvodů:

- omezená šířka svazku paprsků.
- vlnová podstata světla.
- nekomplanárnost pozorovaného objektu.
- rozlišovací schopnost snímacího zařízení.

Na základě rozboru těchto jevů je definována:

**1. DEFINICE – vlnová projekce, vlnová stopa:** Necht'  $\mathcal{M}_V \subset \omega \times \varphi_2$  je relace taková, že

$$[P; Q] \in \mathcal{M}_V \Leftrightarrow Q \in \mathcal{S}_V^P = \left\{ X \in \varphi_2 \mid |XP| \leq \frac{\lambda_0}{4A} \wedge P' = \mathcal{G}(P) \right\}$$

Relaci  $\mathcal{M}_V$  nazýváme vlnovou projekcí. Množinu  $\mathcal{S}_V^P$  nazýváme vlnovou stopou bodu  $P$ , číslo

$$d(\mathcal{S}_V^P) = \sup_{X, Y \in \mathcal{S}_V^P} \{a \in R \mid a = |X; Y|\} = \frac{\lambda_0}{2A}$$

nazýváme jejím průměrem.

**2. DEFINICE – euklidovská projekce, euklidovská stopa:** Necht'  $P_3$  je předmětový prostor optické soustavy,  $\mathcal{G} : P_3 \rightarrow P'_3$  geometrická projekce. Dále necht'  $\bar{P} \in P_3; \mathcal{G} : \bar{P} \rightarrow \bar{P}'$ ;  $\mathcal{S}$  je homocentrický svazek procházející bodem  $\bar{P}$  a  $\mathcal{G} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ .

Relaci  $\mathcal{M}_E \subset P_3 \times \varphi = \{ [\bar{P}; \bar{P}'] \mid \exists \bar{p} \in \mathcal{S}' : \bar{P}' \in \bar{p} \cap \varphi \}$  nazýváme euklidovskou projekcí.

Množinu  $\mathcal{S}_E^P = \{ P' \in \varphi \mid [P; P'] \in \mathcal{M}_E \}$  nazýváme euklidovskou stopou bodu  $P$ ,

číslo  $d(\mathcal{S}_E^P) = \sup \{ |X; Y|; X, Y \in \mathcal{S}_E^P \}$  nazýváme jejím průměrem.

### 7.3 PÁSMO OSTROSTI, MULTIFOKÁLNÍ OBRAZ

Díky jevům rozebraným v předchozí kapitole se ostře zobrazí nejen předmětová ohnisková rovina do roviny ostrosti, ale tzv. pásmo ostrosti do optického řezu:

**1. DEFINICE – pásmo ostrosti:** Necht'  $P \in P_3$  je bod předmětového prostoru,  $\mathcal{M}_E \subset P_3 \times \varphi$  euklidovská projekce,  $\mathcal{F}^{(2)}$  je fyzická rovina ohniskové roviny  $\varphi$ ,  $p_x; p_y$  rozměry jejích fyzických pixelů,  $d(\mathcal{J}_E^P)$  průměr euklidovské stopy bodu  $P$ . Množinu

$${}_{(O)}P_3 = \left\{ P \in P_3 \mid d(\mathcal{J}_E^P) < p; p = \min \{ p_x; p_y \} \right\}$$

nazýváme otevřeným pásmem ostrosti snímacího zařízení.

**2. DEFINICE – výška pásma ostrosti:** Necht'  $P = [p_1; p_2; p_3]$ ;  $Q = [q_1; q_2; q_3]$  jsou body otevřeného pásma ostrosti  ${}_{(O)}P_3$ . Číslo

$$v({}_{(O)}P_3) = \sup \{ |p_1 - q_1|; P = [p_1; p_2; p_3]; Q = [q_1; q_2; q_3]; P, Q \in {}_{(O)}P_3 \}$$

nazýváme výškou pásma ostrosti.

**3. DEFINICE – optický řez:** Necht'  $\mathcal{P}$  je pozorovaný objekt,  ${}_{(O)}\overline{P}_3$  pásmo ostrosti mikroskopu. Množinu  $\mathcal{R} = \mathcal{P} \cap {}_{(O)}\overline{P}_3$  nazveme optickým řezem objektu.

Na obr. 7. si můžeme prohlédnout dva optické řezy křídla mouchy (*Drosophila*)

## 7.4 KRITERIA ZAOSTŘENÍ

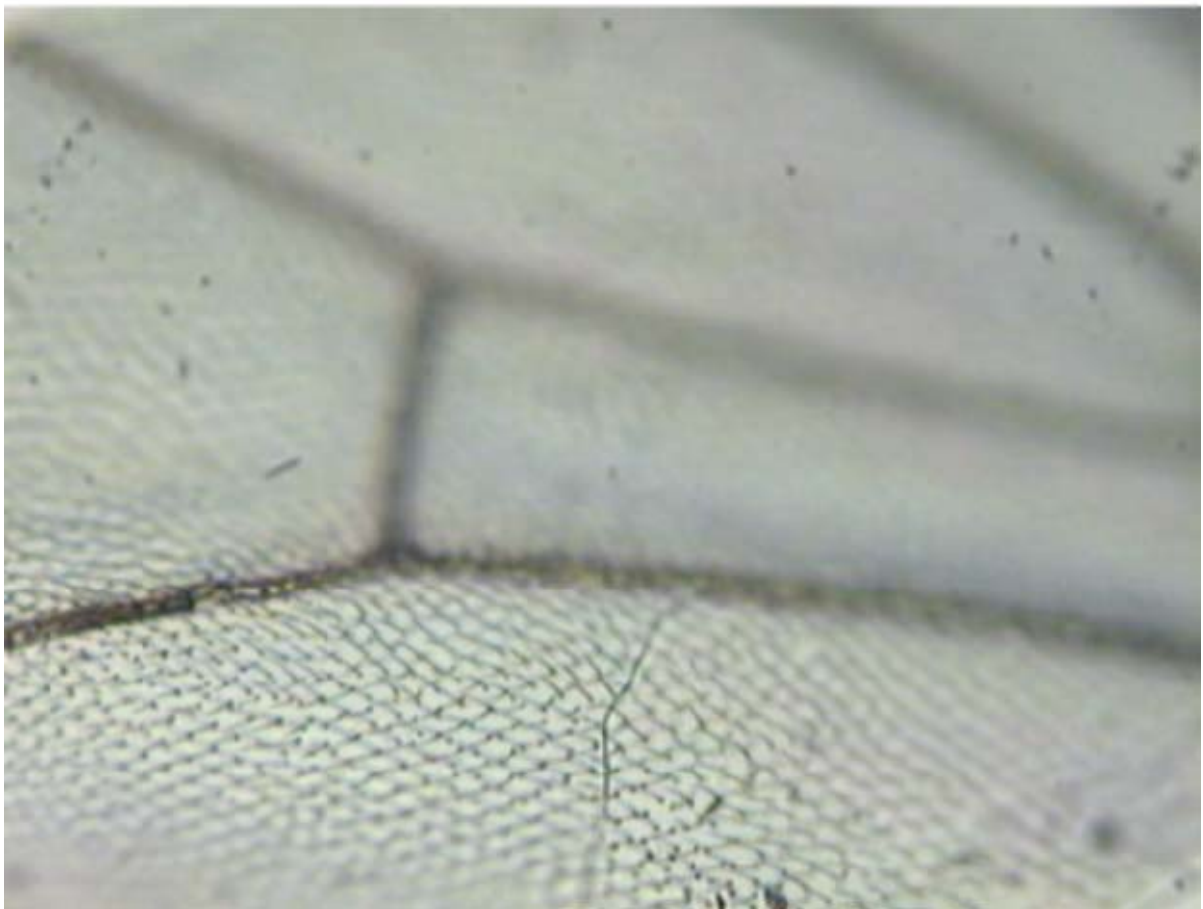
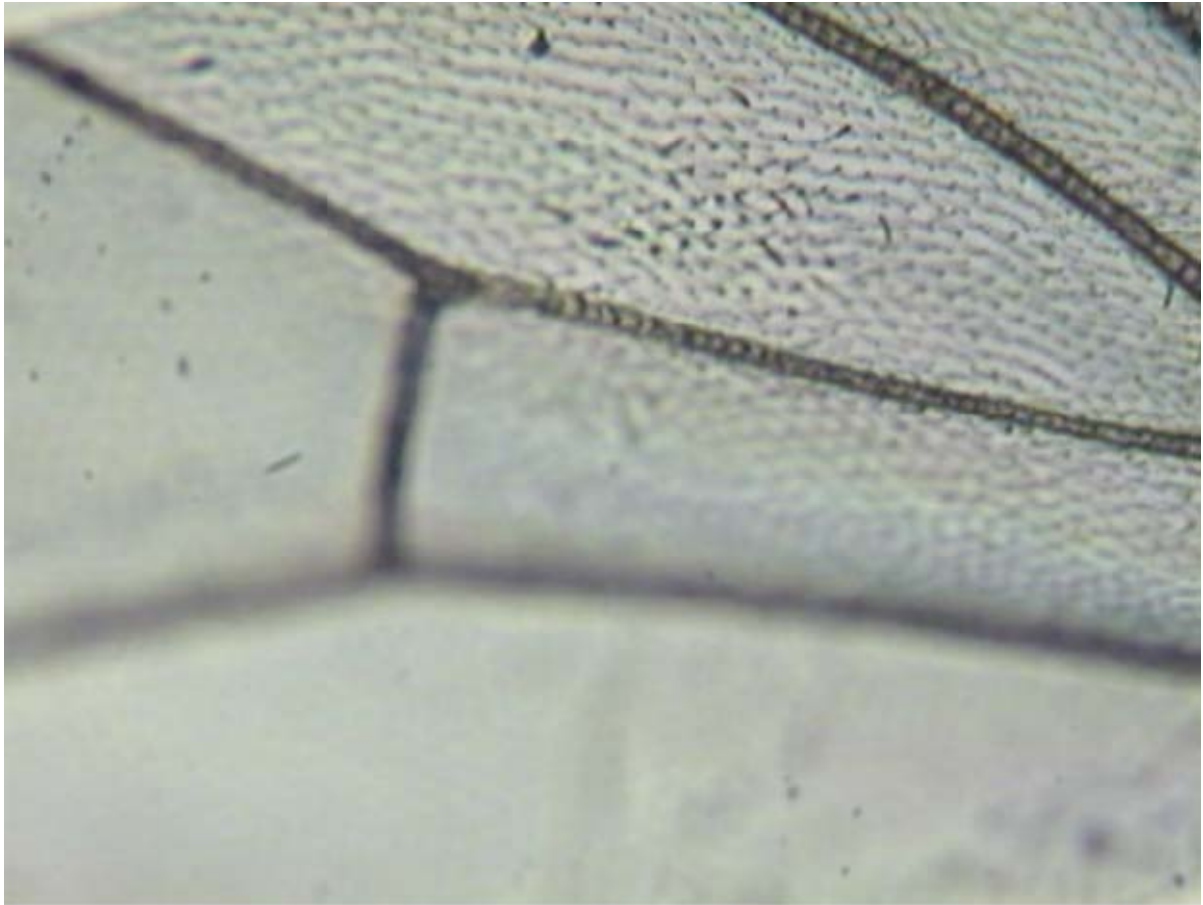
Je-li výška pásma ostrosti menší než výška snímaného objektu, je třeba pořídit tzv.  $n$ -fokální obraz, tj. sérii snímků  ${}^{(k)}O$ ,  $k=1; 2; \dots; n$ , jejichž výšky pásem ostrosti pokrývají celou výšku preparátu. V tom případě je možné nejen sestrojít ostrý  $2-D$  obraz, ale i prostorovou rekonstrukci objektu.

$2-D$  zpracování  $n$ -fokálního obrazu bude zřejmě spočívat ve složení nového obrazu tak, aby se tento nový obraz skládal pouze z obrazů optických řezů jednotlivých projekcí. V této kapitole jsou stanovena kritéria, která indikují příslušnost pixelů na jednotlivých obrazech k optickým řezům. Je sestrojen tzv. zaostřovací pseudoobraz  ${}^{(0)}O: \mathcal{F}^{(2)} \rightarrow C_r$ , jehož hodnoty pixelů udávají, na které složce  $n$ -fokálního obrazu je daný pixel nejlépe zaostřen. Matematicky je definováno zaostření, popsány některé jeho vlastnosti a odvozeno variační, rozptylové a frekvenční kritérium.

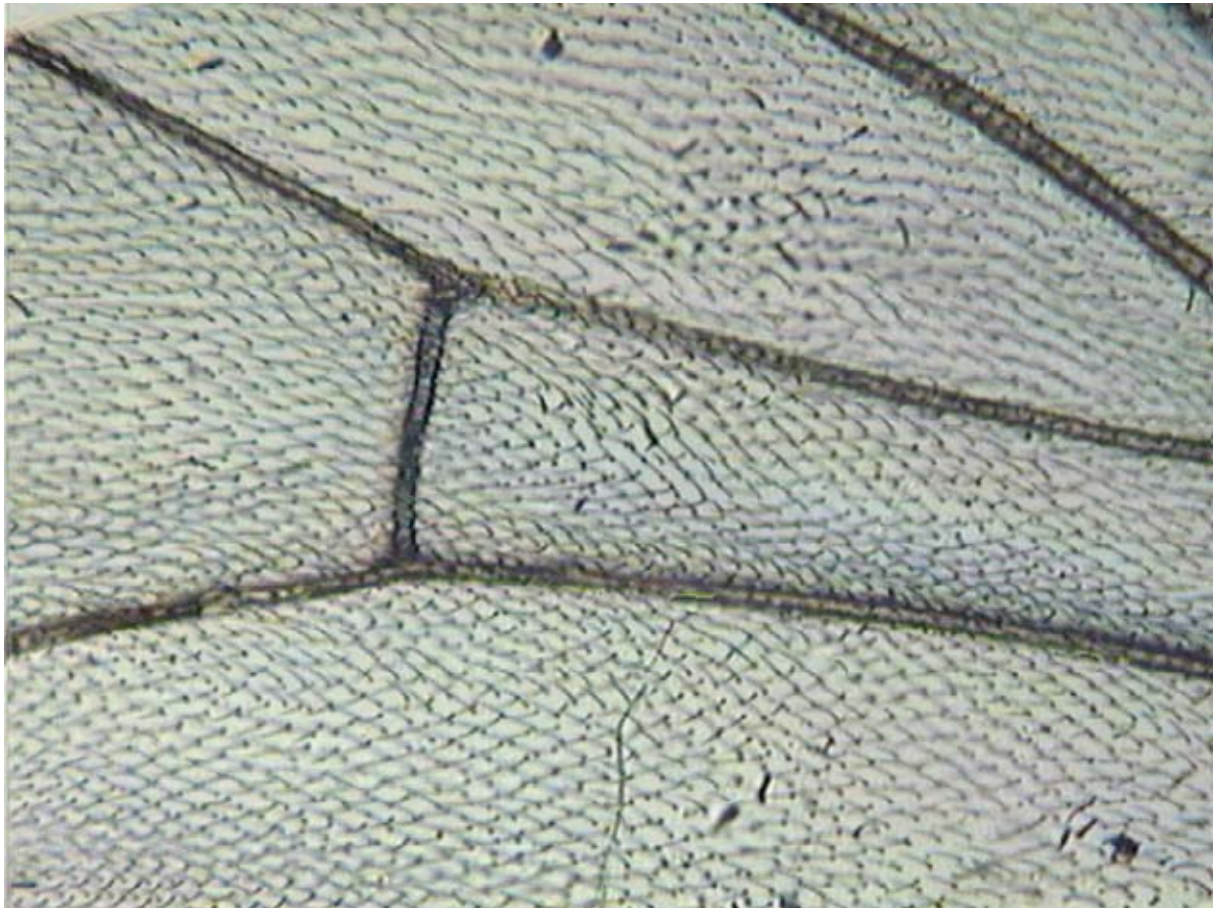
## 7.5 SLOŽENÍ OSTRÉHO OBRAZU

Optické řezy detekované výše uvedenými kritérii odpovídají vstupním datům až na příliš členité hranice mezi řezy. Přímé použití takto členitých množin ke složení výsledného obrazu v sobě skrývá riziko, že se na výsledném obrazu objeví struktury, které na pozorovaném objektu nejsou. Před složením obrazu je tedy třeba hranice poněkud vyhladit a šum z pozadí potlačit. To je možné provést pomocí filtrů popsaných v kpt. 5. Na obr. 8. vidíme ostrý obraz křídla mouchy sestrojený ze sedmi optických řezů, jejichž ukázka je na obr. 7..





**Obr. 7.: Ukázka optických řezů – křídlo mouchy (*Drosophila*)**



**Obr. 8.: Ostrý obraz sestrojený z optických řezů (Drosophila)**

## 7.6 TROJROZMĚRNÉ REKONSTRUKCE

**Metoda řezů konstantní výšky:** Jsou-li pásma ostrosti po dvou disjunktní, známe funkci dvou proměnných, jejíž graf přibližně odpovídá pozorovaného preparátu. Označíme-li  $v$  celkovou výšku preparátu, pak výška pásma ostrosti  $n$  fokálního obrazu je  $v/n$ . Rekonstruovaný objekt pak lze přibližně popsat valuací  $\beta : \mathcal{F}^{(2)} \rightarrow \mathbf{R}$  takovou, že

$$\forall \mathbf{F}_{ij} \in \mathcal{F}^{(2)} : \beta(\mathbf{F}_{ij}) = \frac{1}{n} {}^{(0)}O(\mathbf{F}_{ij})$$

**Metoda filtrovaných řezů:** na valuaci  $\beta$  získanou metodou řezů konstantní výšky 3-D filtr typu dolní propust definovaný na obalu  ${}^\varepsilon\beta$  pro dostatečně velké  $\varepsilon$  a příslušnou filtrovanou ohodnocení valuaci ve funkční interpretaci dle kpt. 5.4.

**Metoda přímého určení výšky:** určuje vzdálenost každého bodu od roviny ostrosti na základě kvantitativního vyhodnocení hodnot zaostřovacích kriterií na jednotlivých složkách. Dává nejkvalitnější výsledky. Na obr. 9 nahoře je 3-D rekonstrukce úločku lávy z osmifokálního obrazu (pořídil ing. Pavel Štarha), dole pro srovnání fotografie téhož úločku pořízená pod stejnými pohledovými úhly (originální velikost cca 5 mm).

## 7.7 ZPRACOVÁNÍ TRANSPARENTNÍCH OPTICKÝCH ŘEZŮ

Tyto optické řezy poskytuje např. konfokální mikroskop. Liší se od řezů popsanych v předchozí kapitole:

- a) velmi úzkým pásmem ostrosti
- b) body mimo pásmo ostrosti nejsou prakticky zobrazeny
- c) řezy jsou transparentní
- d) je jich až několik desítek.

V práci jsou podrobně popsány modifikace výše uvedených metod, které vyplývají z rozdílných vlastností dat. Moderní zařízení jsou schopna poskytovat šestnáctibitová data, rekonstrukce jsou pak kvalitnější. Na obr. 10. vidíme rekonstrukci detailu organely prvoka (*Paramecium*) metodou detekce izoplochy pomocí 3 – *D* gradientního filtru – viz kpt.5.4. Na obr 11. je objemový model prvoka (*Euplodium*) pořízený metodou váženého součtu densit (data Prof. MUDr. Roman Janisch, LF MU).

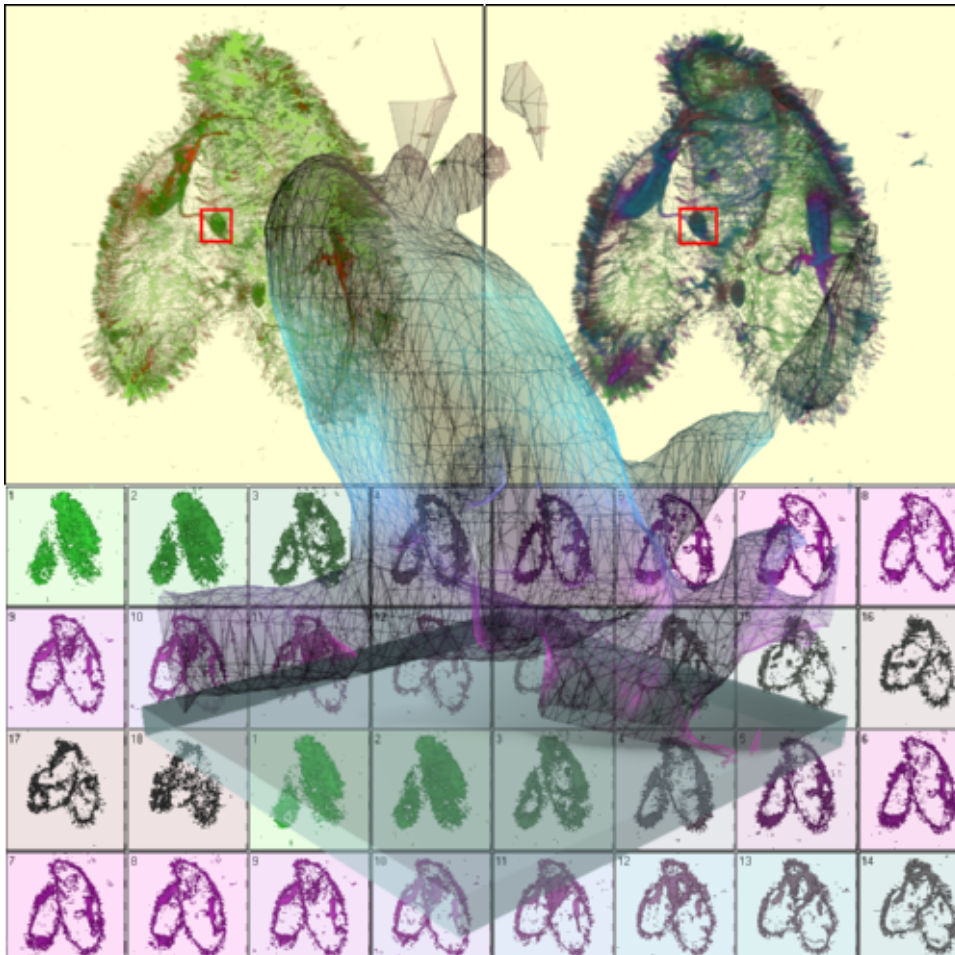
## ZÁVĚR

Možnosti současné výpočetní techniky jsou podstatně větší, než si většina z nás uvědomuje. Autoři literatury zaměřující se na praktické problémy algoritmizace a programování grafických výstupů jsou totiž stále méně ochotni věnovat se (alespoň okrajově) matematické podstatě svých problémů. Základní pojmy, se kterými současná literatura operuje, jsou v naprosté většině vágní, naprosto nevyjasněné a někdy také bohužel zcela chybné. Absence teoretických základů a živelnost rozvoje současné počítačové grafiky tuto disciplínu nejen značně degradují, ale podle mého názoru jí dnes již přímo brání v jejím rozvoji. Touto prací jsem se pokusil naznačit cestu k nápravě.





**Obr. 9.: Nahore: 3 – D rekonstrukce přímým určením výšky  
Dole: fotografie téhož objektu (úlolek lávy o velikosti cca 5 mm)**



Obr. 10.: 3 – D rekonstrukce detailu organely prvoka (Paramecium)



Obr. 11.: 3 – D rekonstrukce organismu prvoka (Euplodium)

## ABSTRACT

This work builds compact mathematic theory of the graphic construction. It relates with computer graphics, image processing, digital topology, optics and other branches but it doesn't joint with any of them. The theory is used for practical applications. Results of the theory are graphical algorithms, which often exceeds conventional techniques and are used in a commercial software. The work also describes unique algorithms, which are published for the first time.

### Chosen from content:

**Chapter 1: Mathematical spaces** – Short introduction of basis mathematical terms (linear and metric space, euclidean space and some others).

**Chapter 2: Digital space** – This chapter discusses raster and vector data and introduces a term of digital space as starting point for plenty of graphical constructions. There is described a fast point access algorithm there.

**Chapter 3: Digital object constructions** – This chapter builds fundamental constructions of computer graphic on a mathematical basis, that has not till been this time published and which enables quite original constructions. Algorithm of construction of lines, curves defined by a parameter, curves defined by formula  $f(x, y) = 0$  and surfaces defined by formula  $f(x, y, z) = 0$ . These algorithm is much better than algorithm implemented in Borland Delphi and Waterloo Maple. This part discusses a software measurement of the Hausdorff dimension too.

**Chapter 4: Digital colours theory** – Mathematical theory of colour spaces and metrics

**Chapter 5: Digital filters** – This chapter presents a generalisation of filters known in image processing. Filters presented here can be used to 3-D objects processing with analogous effects than image filters. They can be used to surface smoothing, erosive filters delete small 3-D objects. The high-pass 3-D filters detect object surfaces. Topographical, meteorological and biological applications are demonstrated.

**Chapter 6: Optical phenomena modelling** – This part discusses visibility, shading, transparency, texture mapping, segment and raster texturing. Optical phenomena modelling, reflection and refraction.

**Chapter 7: Digital theory of scanner apparates and its application** – This part discusses reconstruction of outputs aquired by conventional microscope, confocal microscope, CCD cameras e.t.c. The displaying which is realised by these apparates does not conform exactly to postulates of geometrical optics. We must think about limited width of beam of rays, wave nature of light, non-planarity of the preparation and finity scanner resolution. Calculating these fenomena we can obtain very important 2-D images but 3-D reconstructions too.