

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles

**Ing. Tomáš Profant**

**INTERAKCE MIKROTRHLIN S ČÁSTICEMI DRUHÉ FÁZE**

THE INTERACTION OF AN ARRAY OF MICROCRACKS WITH AN  
ARRAY OF INCLUSIONS

ZKRÁCENÁ VERZE PH.D. THESIS

**Obor:** Inženýrská mechanika

**Školitel:** prof. RNDr. Michal Kotoul, DrSc.

**Oponenti:** prof. RNDr. Zdeněk Knésl, CSc.,  
prof. RNDr. Jaroslav Pokluda, CSc.,  
Ing. Radek Urbiš, Ph.D.

**Datum obhajoby:** 15. 12. 2003

**KLÍČOVÁ SLOVA**

interakce trhlin, částicové kompozity, bi-materiálové rozhraní, směrová stabilita šíření trhlin

**KEY WORDS**

cracks interaction, particle composites, bi-material interface, crack paths stability

**MÍSTO ULOŽENÍ PRÁCE**

Knihovna FSI VUT v Brně

## OBSAH

1	ÚVOD . . . . .	5
2	SOUČASNÝ STAV SLEDOVANÉ PROBLEMATIKY . . . . .	6
3	PROBLÉM INTERAKCE MIKROTRHLIN S ČÁSTICEMI DRUHÉ FÁZE . . . . .	11
	3.1 FORMULACE PROBLÉMU . . . . .	11
	3.2 NEKONEČNÁ ŘADA MIKROTRHLIN A ČÁSTIC . . . . .	13
	3.3 STABILITA SMĚRU ŠÍŘENÍ MIKROTRHLIN . . . . .	16
4	DISKUSE . . . . .	19
	4.1 NEKONEČNÁ ŘADA MIKROTRHLIN A ČÁSTIC . . . . .	19
	4.2 STABILITA SMĚRU ŠÍŘENÍ MIKROTRHLIN . . . . .	23
5	ZÁVĚR . . . . .	25
	LITERATURA . . . . .	26
	SEZNAM AUTOROVÝCH PUBLIKACÍ . . . . .	30
	ŽIVOTOPIS . . . . .	31
	ABSTRACT . . . . .	32



# 1 ÚVOD

Pokrok technologie v oblasti zpracování moderních materiálů vede k stále širšímu využívání plastů, keramik a kompozitů, které svými vlastnostmi předčí klasické konstrukční materiály. Struktura moderních materiálů je však nepoměrně komplikovanější než u materiálů tradičních, což sebou přináší výhody v možnosti kombinování jejich vlastností a charakteristik, ale i komplikace spojené se složitějším popisem jejich chování. Z tohoto důvodu se aplikací klasické lomové mechaniky v teorii kompozitních materiálů a plastů dosáhlo smíšených úspěchů. Vzhledem ke komplikovanosti chování složených materiálů není bohužel možné vytvořit univerzální teorii šíření lomu, která by v sobě zahrnovala veškeré parametry ovlivňující růst trhliny. Místo toho vznikají modely odpovídající různým individuálním případům zhouževnatujících mechanismu bránících rozvoji křehkého lomu. Cesty vývoje těchto modelů jsou dvě - buď vedené snahou vytvořit co nejpřesnější geometrii modelu a posléze hledat přibližné řešení problému pomocí numerických nástrojů jako je např. metoda konečných prvků při poměrně vysokých výpočetních nákladech, nebo geometrii zjednodušit a idealizovat a získat přesné řešení pomocí klasických matematických prostředků. Předkládaná disertační práce bude věnovat pozornost druhému případu.

Keramiky se vyznačují vysokou pevností, ale i křehkostí. Z tohoto důvodu se jejich matricí šíří většinou křehký lom, který v případě přítomnosti částic sekundární elasticky měkčích než matrice k těmto částicím inklinuje, což může vést k zlepšení lomových charakteristik dané keramiky. Jeden z možných zhouževnatujících mechanismů v keramikách je synergismus sítě mikrotrhlin a částic sekundární fáze. Pro díly zhotovené z kompozitů s křehkou matricí je často typická vysoká koncentrace mikrotrhlin, které vznikají již při vlastní výrobě nebo při zatěžování. Síť mikrotrhlin vzniká často před čelem hlavní trhliny. Růst jednotlivých mikrotrhlin bývá zablokovan na překážkách typu hranic zrn nebo částic sekundární fáze a shluk mikrotrhlin může za jistých okolností hlavní trhlínu stabilizovat. Po vyčerpání nukleačních míst je konfigurace shluku mikrotrhlin stabilní až do okamžiku dosažení kritického zatížení, kdy dochází k rychlé koalescenci mikrotrhlin navzájem a s hlavní trhlínou. Koalescence neprobíhá obvykle přímou srážkou čel trhlin, nýbrž tak, že čela rostoucích trhlin se vzájemně obcházejí a později se propojí s lícem míjené trhliny, viz Melin [1]. Takový mechanismus zpravidla vyžaduje více energie než čelní srážka a je pravděpodobné, že je jedním z faktorů, které přispívají ke stínění hlavní trhliny.

Jak již bylo řečeno, mezi trhlínou a elasticky měkčí částicí existuje přitažlivá interakce. Po přiblížení dvou mikrotrhlin, mezi jejichž čely leží částice, může mechanismus koalescence probíhat jedním z následujících způsobů:

- Mikrotrhliny se rozšíří přes rozhraní částice/matrice a uvnitř částice dojde k jejich vzájemnému obcházení. Tím se současně odstraní geometrické stínění a v tvárných částicích vznikne mezi čely mikrotrhlin plastický můstek. Z hlediska disipace energie se jedná o příznivý případ.
- Mikrotrhliny se začnou odklánět před dosažením rozhraní částice/matrice a v ne-

příznivém případě se budou šířit podél tohoto rozhraní. Lomová houževnatost rozhraní je zpravidla menší než lomová houževnatost matrice a z makroskopického hlediska bude kompozit vykazovat horší lomové vlastnosti než matrice.

- Mikrotrhliny se budou odklánět před dosažením rozhraní částice/matrice, přičemž se budou šířit matricí. Vliv částic na lomovou houževnatost keramiky bude nevýznamný.

Z výše uvedeného je zřejmé, že pro pochopení lomového chování částicových kompozitů tvořených křehkou matricí má význam zabývat se mechanikou shluků mikrotrhlin interagujících s částicemi druhé fáze a předkládaná disertační práce si proto klade za cíl prohloubit pochopení této problematiky.

## 2 SOUČASNÝ STAV SLEDOVANÉ PROBLEMATIKY

Technické keramické materiály se vzhledem ke své struktuře a typem meziatomových sil vyznačují kromě vysoké pevnosti také křehkostí (viz Munz a Fett [2]). Proto je u nich kladen velký důraz na jejich schopnost odolávat šíření křehkého lomu.

*Změna směru šíření trhliny* (angl. crack deflection) je jedním z nejobvyklejších mechanismů zvyšování lomové houževnatosti a úzce souvisí s tzv. *smíšeným módem zatěžování*, při němž dochází k ohybu trhliny kolem osy kolmé ke směru jejího šíření (angl. tilting) případně kolem osy rovnoběžné se směrem jejího šíření (angl. twisting). Obě poruchy růstu trhliny mohou způsobit např. částice sekundární fáze nacházející se v blízkosti čela trhliny. Faber a Evans [3] a [4] studovali vliv sférických částic, částic diskového tvaru a náhodně orientovaných vláken (whiskerů) na změnu směru šíření trhliny a ukázali, že k zvyšování lomové houževnatosti vlivem změny směru šíření trhliny dochází zejména za účasti částic s větším poměrem podélného a příč průřezu. Méně vhodné jsou diskové a sférické částice. Změna směru šíření čela trhliny nemusí proběhnout jen jednou, ale může docházet ke *klikatění* trhliny (angl. zig-zag crack) nebo jejímu *větvení* (angl. crack branching). Tímto problémem se zabývají např. práce Sureshe [5], Sureshe a Shiha [6], Kitagawy *et al.* [7]. Práce Kotoula a Urbiše [8] také řeší problém trhliny s ohnutým čelem, avšak v kombinaci s přemostěním trhliny plastickými můstky. Rostoucí trhlina se buď může sekundárním částicím vyhnout nebo částice čelo trhliny zachytí a dochází k prohnutí čela trhliny (angl. crack bowing). Tento jev se také nazývá *intrinsické zhouževnatění*. Tímto problémem se zabývá např. práce Wiederhorna [9].

Další zhouževnaťujícím mechanismem je *drsnostně indukované zavírání trhliny*, které se uplatňuje jen u cyklického zatěžování rozvětvených trhlin. V důsledku křivolakosti líců trhliny dochází k jejich mechanické interakci. Trhlina je otevírána a zavírána v lokálním smíšeném módu. Během zatěžovacího cyklu není zpětná deformace ve smykovém módu plně vratná a po odlehčení nevymizí smykový posuv obou lomových ploch, což způsobuje růst lomové houževnatosti materiálu, viz Suresh [10].

Další mechanismus vedoucí k zvyšování lomové houževnatosti souvisí s *elastickým přemostěním trhliny částicemi druhé fáze*. Obecně platí, že pro účinné

zvýšení lomové houževnatosti křehké matrice disperzí tvárných částic musí být splněny jisté podmínky týkající se relativní tuhosti částic a matrice, relativní tepelné roztažnosti částic a matrice a pevnosti rozhraní částice/matrice. Pokud nepůsobí residuální napětí, která jsou způsobena rozdílnou teplotní roztažností částic a matrice, je pro aktivní zapojení částic do lomového procesu nutné, aby částice byly elasticky měkčí než matrice. V takovém případě je totiž interakce mezi čelem trhliny a částicí přitažlivá a způsobí mikroohyb čela trhliny ve směru k částici. Kdyby částice byla elasticky tužší, trhlina by se odklonila od částice a při svém šíření by zůstávala jen v matrici. K žádnému zvyšování lomové houževnatosti vlivem přemostění by nedošlo. V případě, že teplotní roztažnost částic  $\alpha_f$  je menší než teplotní roztažnost matrice  $\alpha_m$ , vznikají v okolí částice zbytková tahová obvodová napětí a tlaková radiální napětí. Protože se trhlina přednostně šíří rovnoběžně s tlakovým napětím a kolmo tahová napětí, dojde k přitahování čela trhliny přímo k částici. Tento mechanismus může dokonce převládnout nad odpudivou interakcí v situaci elasticky tužších částic. Z fyzikálních úvah je zřejmé, že rostoucí tvárnost částice, tedy rostoucí kritické protažení plastických můstků, příznivě ovlivňuje výslednou lomovou houževnatost kompozitu. Sama vysoká tvárnost částice ale nestačí, protože geometrické stísnění částice okolní matricí nedovolí rozvoj významnějších plastických deformací v celém objemu částice. Když je pevnost rozhraní částice/matrice vysoká a nedochází k žádné dekohezi, plastická deformace se lokalizuje jen v tenké vrstvě ležící v rovině trhliny a kritické rozevření trhliny  $\Delta_C$  pro přetržení této vrstvy je nízké. Na druhou stranu nízká pevnost rozhraní vede k celkové dekohezi částice a účinek přemostění trhliny je nevýznamný. Částečná dekoheze rozhraní umožní významné plastické deformace téměř v celém objemu částice a vznik krčku. Relativně nízká pevnost částice stačí k udržení rovnováhy se zbytkovou výslednou silou  $P$  na rozhraní částice/matrice. Z technologického hlediska je poměrně obtížné zajistit řadu předpokladů, které vedou k účinnému zapojení mechanismu zhouževnatění křehké matrice prostřednictvím přemostění líců hlavní trhliny tvárnými částicemi. Situaci komplikuje značná citlivost účinnosti tohoto mechanismu na řadě materiálových a mikrostrukturních faktorů a na teplotě. Zpravidla se nedaří zajistit optimální dekohezi rozhraní částice/matrice, která je nutnou podmínkou pro vznik rozsáhlejší přemostěné zóny za čelem trhliny. Pokles dekoheze rozhraní vede k poklesu délky přemostěné zóny. Limitním případem je stav, kdy jsou líce trhliny přemostěny jen řadou částic rozložených podél čela trhliny, tzv. *zachycení čela trhliny*. V daném kontextu se mluví o změně mechanismu zhouževnatění od přemostění trhliny (tzv. *extrinšické zhouževnatění*) k zachycení čela trhliny (intrinsické zhouževnatění). Uvedená změna mechanismu zhouževnatění souvisí s rozsahem dekoheze rozhraní částice/matrice, která závisí na řadě faktorů jako je pevnost rozhraní, lomová houževnatost matrice, mez kluzu částic, velikost a objemový podíl částic. Choe *et al.* [11] doložili ve své studii o lomovém chování slitin Mo-12Si-8.5B, že zachycení čela trhliny částicemi molybdenu je hlavním zdrojem (intrinsického) zhouževnatění při nižších teplotách. Naproti tomu při 1300°C došlo k částečné dekohezi částic Mo od matrice Mo<sub>3</sub>Si/Mo<sub>5</sub>SiB<sub>2</sub> a k plastickému přetvoření ve významné

části jejich objemu. Důsledkem byl pak vznik tvárných můsků v brázdě trhliny a extrinsické zhouževnatení slitiny Mo-12Si-8.5B při zvýšených teplotách. Teoretické zdůvodnění experimentálních poznatků, společně s odvozenou teoretickou predikcí přírůstku lomové houževnatosti, bylo podáno v práci Kotoula a Vrbky [12]. Navržený teoretický model umožňuje vysvětlit pozorovaný přechod od mechanismu přemostění trhliny k mechanismu zachycení čela trhliny a jeho závislost na velikosti a objemovém podílu částic, na mezi kluzu částic a na poměru  $G_d/G_{IC}$ , kde  $G_d$  je specifická energie pro dekohezi rozhraní a  $G_{IC}$  je kritická hnací síla pro matici. Ukazuje se, že existuje prahová hodnota poměru  $(G_d/G_{IC})^*$  taková, že pro  $G_d/G_{IC} > (G_d/G_{IC})^*$  nemůže dojít k dekohezi částic a matrice, přičemž tato prahová hodnota roste s poklesem meze kluzu částic a s roustoucím objemovým podílem částic.

V případě za tepla lisovaných kompozitů, např.  $Al_2O_3$  vyztužený whiskery  $SiC$ , nemusí docházet k žádnému z výše popsáných mechanismů zvyšování lomové houževnatosti. Příčinou je způsob výroby těchto kompozitů, kdy se podélná osa náhodně rozmístěných whiskerů v matici orientuje kolmo ke směru lisování. Z tohoto důvodu při postupu trhliny v rovině rovnoběžné s whiskery nedochází k přemostování ani klikatění jejího čela. Jediný mechanismus zhouževnatění (kromě sítě mikrotrhlin před čelem šířící se trhliny), který se v omezené míře uplatňuje, je *přenášení napětí z méně tuhé matrice na whiskery*. Přestože mezi whiskery a maticí neexistuje chemická vazba zajišťující dostatečně pevné rozhraní mezi sekundární fází a maticí, rozdílnost teplotních součinitelů délkové roztažnosti matrice a whiskerů způsobuje hydrostatické stlačení whiskerů okolní maticí, tzv. *svírání* (angl. clamping), které do jisté míry může dovolit přenos napětí z méně tuhé matrice na whiskery. Práce Giannakopoulou a Brederové [13] a Brederové *et al.* [14] zkoumají podmínky, které musí matrice a whiskery splňovat, aby došlo k přenosu napětí na whiskery. Princip zhouževnatění v daném případě souvisí s tím, že v malé oblasti čela trhliny překonají tahová napětí zbytkové síly svírající whiskery. Velikost této zóny může být podstatně větší než průměrná délka whiskerů. V této zóně dochází jen k slabému přenosu napětí z matrice na whiskery, zvláště při nepřítomnosti chemické vazby mezi maticí a whiskery. Matrice se stává porézní a ukazuje se, že pro hodnoty poměru modulů pružnosti whiskerů a matrice  $E_f/E_m < 3$  nedochází k zhouževnatění a materiál křehne při přírůstku objemového podílu sekundárních částic  $f$ . Zkřehnutí kompozitu vlivem jeho porozity lze popsat vztahy získanými na základě experimentů, viz Munz a Fett [2]. Další práce zabývající se problematikou lisovaných kompozitů  $Al_2O_3/SiC$  jsou od Wereszczaka a Ferbera [15], Brederové *et al.* [16].

Zvyšování odolnosti keramik proti šíření křehkého lomu je možné také dosahovat pomocí tzv. *transformačního zpevnění*. Jeho fyzikální podstatu podrobně popsali např. Karihaloo a Andreasen [17], Evans a Cannon [18] a Chen [19]. V důsledku překročení kritického napětí v okolí čela rostoucí trhliny dojde k martenzitické fázové přeměně (např. metastabilní částice  $ZrO_2$ ) provázené zvětšením objemu a lokálními smykovými deformacemi. Takto transformovaná oblast stíní čelo trhliny podobně jako plastická zóna.



Jak již bylo řečeno, pro kompozitní materiály s křehkou maticí jsou charakteristické vysoké koncentrace mikrotrhlin, které vznikají převážně na hranici zrn mnohdy již během výroby, jako důsledek rozdílné teplotní roztažnosti matrice a částic a tím vznikajících zbytkových napětí, resp. jako důsledek zatěžování a rozdílnosti materiálových vlastností matrice a sekundárních částic. Při šíření magistrální trhliny křehkou maticí dochází v okolí jejího čela často k vzniku sítě mikrotrhlin, které mají příznivý vliv na částečné uvolnění koncentrace napětí. Základní rysy různých studovaných modelů vykazují pro zvýšení kritické hnací síly  $\Delta G_C$  vyvolané tvorbou sítě mikrotrhlin v procesní zóně trhliny nepřímou úměrnou závislost přírůstku energie na velikosti částic sekundární fáze a přímou úměru na velikosti procesní zóny a specifické energii pro dekohezi rozhraní částice/matrice, viz Rice [20]. Zvyšováním lomové houževnatosti sítí mikrotrhlin se zabývají např. práce Charalambidese a McMeekinga [21], [22], Hoaglanda *et al.* [23], [24], Claussena [25], Claussena *et al.* [26], Wua *et al.* [27], Evanse a Fabera [28], Evanse a Fua [29] a Hutchinsona [30].

Ve skutečnosti žádný z výše popsaných mechanismů zhouževnatění nepůsobí samostatně, ale dochází k jejich synergismu. Ten může zvyšovat lomovou houževnatost kompozitu, ale i snižovat v případě, když se zhouževnatující efekty jednotlivých mechanismů vzájemně vylučují. Bohužel nelze stanovit univerzální popis synergismu zhouževnatujících mechanismů a je třeba každý samostatný případ studovat individuálně. Problém kombinace účinků *přemostění hlavní trhliny šířící se v křehké matici kompozitu částicemi druhé fáze a obecně umístěné a orientované mikrotrhliny* řeší práce Kotoula a Profanta [31], [32]. Při šíření lomu postupuje čelo trhliny křehkou maticí a obchází tvárné inkluze, u kterých dochází k částečné dekohezi rozhraní částice/matrice. Částice postupně vytvářejí za čelem trhliny izolované tvárné můstky schopné přenášet napětí a uzavírat trhlínu. Tento mechanismus vede ke zvyšování lomové houževnatosti kompozitu. Mimoto může v daných materiálech docházet k nukleaci mikrotrhlin v okolí kořene hlavní trhliny, které obecně ovlivňují lomovou houževnatost v pozitivním i negativním smyslu. V prvním případě se mluví o tzv. *stínění* čela magistrální trhliny, v druhém případě o *anti-stínění*. Aby bylo možné problém analyticky zvládnout, nahrazuje se soustava izolovaných můstků za čelem trhliny kontinuem s jistou efektivní mezí kluzu v rozsahu vzdálenosti  $l_p$  za čelem trhliny. Tato zóna se pak modeluje pomocí neznámého spojitého rozdělení hranových dislokací. V práci se předkládá self-konzistentní schéma výpočtu, který spočívá na bodové reprezentaci mikrotrhliny a simultánním řešení integrální rovnice pro neznámou dislokační hustotu. Metoda umožňuje stanovit lokální součinitele intenzity napětí ve vrcholu magistrální trhliny  $K_I^{loc}$  a  $K_{II}^{loc}$  a otevření trhliny na konci zóny tvárných můstků  $\Delta$  pro obecnou polohu, orientaci a délku mikrotrhliny. Vypočtené hodnoty lokálních součinitelů intenzity napětí a rozevření na konci ligamentované zóny pak vystupují v kritériích pro iniciaci růstu hlavní trhliny. Z těchto kritérií se posléze vypočte kritická hodnota aplikovaného součinitele intenzity napětí, která se ztotožní s efektivní lomovou houževnatostí kompozitu. Řešení je aproximativní a přesnost se testuje pomocí přesného řešení pro kolinéární trhlínu. Při formulaci problému se před-

pokládá že délka mikrotrhliny, délka ligamentované zóny a vzdálenost mikrotrhliny od vrcholu hlavní trhliny jsou značně menší než délka hlavní trhliny. To umožňuje uvažovat hlavní trhlinu jako polonekonečnou a zanedbat interakci systému hlavní trhlina - mikrotrhlina s vnější hranicí tělesa. Koncepce polonekonečné trhliny dovoluje aproximovat nominální napětové pole (tj. pole, které by existovalo v nepřítomnosti mikrotrhliny a ligamentované zóny) singulárním členem asymptotického rozvoje pole napětí v okolí vrcholu hlavní trhliny, ve kterém vystupuje tzv. nominální (aplikovaný) součinitel intenzity napětí  $K_I^N$ , resp.  $K_{II}^N$ . Nominální součinitelé intenzity napětí slouží pak jako zatěžovací parametry a lze je nalézt na makroúrovni např. metodou konečných prvků. Výsledky ukazují, že různé konfigurace mikrotrhliny způsobují jak stínící tak i anti-stínící účinky na čelo magistralní trhliny, avšak dominantní vliv na lomovou houževnatost kompozitu má zóna plastických můstků.

V kompozitních materiálech tvořených křehkou maticí zpevněnou částicemi sekundárního materiálu se musí řešit kromě vzájemné interakce trhlín a částic také problém chování čela trhliny v blízkosti rozhraní částice/matrice. Bez znalosti tohoto chování neexistuje možnost stanovení kritérií rozhodujících, za jakých podmínek zůstane trhlina v původním materiálu, pronikne-li přes rozhraní do materiálu druhé fáze nebo dojde-li k ohybu jejího čela, které se bude dále šířit podél rozhraní částice/matrice. V případě trhliny kolmé k rozhraní je trhlina šířící se elasticky tužším materiálem přitahována k rozhraní s materiálem měkčím. Jakmile ho dosáhne, nastává kritický okamžik kdy může dojít k průniku čela trhliny do druhého materiálu nebo může dojít k ohnutí čela a trhlina se bude dále šířit podél rozhraní částice/matrice. Pro složky napětí v okolí vrcholu trhliny v tomto případě platí následující vztah

$$\sigma_{ij} = \frac{H_I}{\sqrt{2\pi r^\lambda}} f_{ij}(\theta, \lambda, \alpha, \beta), \quad i, j = 1, 2 \quad (2.1)$$

kde  $(r, \theta)$  jsou polární souřadnice s počátkem ve vrcholu trhliny,  $\alpha$  a  $\beta$  jsou tzv. *Dundurovy koeficienty* (viz Dundurs [33]), a  $f_{ij}$  jsou známé ohraničené funkce (viz Bogy [34], Fenner [35]). Charakter singularity napětí v okolí vrcholu trhliny se mění z původní hodnoty  $\lambda = 1/2$  na nějaké reálné číslo z intervalu  $\lambda \in (0, 1)$ , viz např. Náhlík [36]. Zda jde o hodnotu menší nebo větší než původní  $\lambda = 1/2$ , závisí na tom, zda se trhlina šíří z tužšího materiálu do měkčího, nebo naopak. Z tohoto důvodu koeficient intenzity napětí  $K_I$  podle původní definice, viz např. Anderson [37], ztrácí smysl a zavádí se ve vztahu (2.1) tzv. *zobecněný faktor intenzity napětí*  $H_I$ , viz např. Knésl a Knápek [38], pro který v případě homogenního tělesa platí  $H_I = K_I$ . Existuje řada prací zabývajících se popisem zobecněného faktoru intenzity napětí pomocí numerických metod, viz např. Gröger *et al.* [39], [40], Qian *et al.* [41], [42] a Qian a Hasebe [43]. Z důvodu změny charakteru singularity napětí  $\lambda$  v okolí čela trhliny neexistuje univerzální kritérium, které by rozhodovalo o tom, zda trhlina pronikne do druhého materiálu, nebo zda-li dojde k jejímu ohybu. Jedno z možných kritérií proniknutí trhliny do materiálu sekundární fáze je založeno na určení napjatosti (2.1) v blízkém okolí čela trhliny. Při rozšíření trhliny musí maximální tahové

napětí dosahovat kritických hodnot pro homogenní materiál sekundární fáze v určité oblasti charakteristické pro daný materiál. Např. v práci Knésla a Knápka [38] je takovéto kritérium formulováno pro trhlinu kolmou k bi-materiálovému rozhraní. Jako srovnávací veličina je použita střední hodnota napětí  $\bar{\sigma}$  v okolí vrcholu trhliny, která je vypočtena přes určitou oblast před vrcholem trhliny, jejíž charakteristický rozměr je označen jako  $d^*$ . Tato veličina závisí na mikrostruktuře zkoumaného materiálu. Za předpokladu, že se trhlina bude šířit ve směru maximálních hodnot napětí  $\sigma_{\theta\theta}$ , může být střední napětí  $\bar{\sigma}$  určeno ze vztahu

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{d^*} \int_0^{d^*} (\sigma_{\theta\theta})_{\max} dr, \quad (2.2)$$

kde funkce  $f_{\theta\theta}$  ze vztahu (2.1) nabývá tvaru

$$f_{\theta\theta}(\theta, \lambda, \alpha, \beta) = (1 - \lambda) (2 - \lambda + g_r(\alpha, \beta, \lambda)) \quad (2.3)$$

a kde  $g_r$  je známá funkce kompozitních parametrů  $\alpha$ ,  $\beta$  a exponentu singularity napětí  $\lambda$ . Kritériem stability je podmínka, že střední napětí  $\bar{\sigma}$  musí být menší, než kritická hodnota napětí  $\sigma_C$  určená pomocí lomové houževnatosti prostředí, do kterého se trhlina šíří, tj. musí platit

$$\bar{\sigma} < \sigma_C, \quad (2.4)$$

kde

$$\sigma_C = \frac{2K_{IC}}{\sqrt{2\pi d^*}} \quad (2.5)$$

a  $K_{IC}$  je lomová houževnatost materiálu, do kterého se trhlina šíří. Dalším možným kritériem šíření trhliny do sekundárního materiálu částic je posouzení velikosti procesní zóny. Pro další růst trhliny musí procesní zóna dosahovat kritické velikosti. Bohužel výzkum této problematiky je teprve na počátku a opravdu spolehlivých výsledků je zatím dosahováno jen na základě experimentů. V případě slabého rozhraní částice/matrice se může trhlina ohnout a šířit podél rozhraní. Některá kritéria pro ohyb čela trhliny na rozhraní navrhli např. Cook a Erdogan [44] a He a Hutchinson [45]. Po ohybu čela trhliny ztrácí vliv hlavní trhliny (tj. trhliny kolmé k rozhraní) na významu a smyková napětí často přinutí ohnuté čelo trhliny dalším ohybem k proniknutí do sekundárního materiálu. V případě, že šířící se trhlina leží v elasticky měkčím materiálu, může někdy dojít k ohybu jejího čela zpět do původního materiálu. Trhlina se potom šíří podél rozhraní v jeho těsné blízkosti.

### 3 PROBLÉM INTERAKCE MIKROTRHLIN S ČÁSTICEMI DRUHÉ FÁZE

V této kapitole bude formulován a podán popis řešení problému, který je tématem předkládané disertační práce.

#### 3.1 FORMULACE PROBLÉMU

Jak již bylo řečeno, problémem kompozitů tvořených křehkou maticí je výskyt

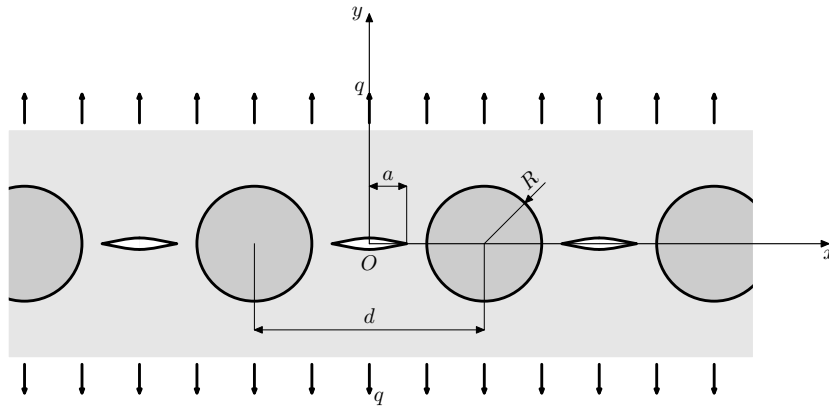
vysoké koncentrace mikrotrhlin. Sekundární částice mohou být jednou z překážek ve struktuře kompozitu, které blokují růst mikrotrhlin a přispívají k zvyšování lomové houževnatosti kompozitu, zejména v případě částic elasticky měkčích s vyšší lomovou houževnatostí než okolní matrice. Proces růstu mikrotrhlin probíhá do vyčerpání všech nukleačních míst v matrici a vzniklá síť mikrotrhlin zůstává stabilní, dokud není překročeno kritické zatížení, kdy dochází k vzájemné koalescenci mikrotrhlin. Koalescence mikrotrhlin neprobíhá přímou srážkou jejich čel, nýbrž jejich vzájemným obcházením s následným propojením. Problematiku obcházení čel mikrotrhlin v homogenním materiálu řeší práce Melin [1]. Přítomnost částic v matrici takové chování mikrotrhlin významně ovlivňuje.

Nové, přinejmenším kvalitativní poznatky o interakci sítě mikrotrhlin s částicemi druhé fáze lze získat řešením rovinného problému s následujícím vymezením:

- Necht' rovina  $xOy$  představuje lineární isotropní elastické prostředí (matrici) s takovým tvarem vnější hranice ( $x, y \rightarrow \infty$ ), že Airyho funkci napětí  $U(x, y)$  lze vyjádřit polynomem.
- Materiál částic má obecně jiné elastické konstanty než matrice.
- Spojení částic a matrice je dokonalé.
- Částice mají kruhový tvar a stejný poloměr  $R$ . Středů částic leží na ose  $x$  a jsou periodicky rozloženy podél celé osy  $x$  s periodou  $d$ .
- Síť mikrotrhlin se modeluje nekonečnou řadou kolineárních mikrotrhlin ležících podobně jako částice na ose  $x$ , mikrotrhliny jsou stejné délky  $2a$  a leží vždy ve středu mezi částicemi.
- Matrice je zatížena vnějším tahovým napětím  $\sigma_{yy}^{\infty} = q$ .

Mikrotrhliny se modelují pomocí spojitě rozložených dislokací a řešení úlohy se hledá na základě Buecknerova principu, který vede k řešení hraniční singulární integrální rovnice pro neznámou hustotu Burgersova vektoru. Pomocí nalezeného řešení se studují následující případy:

- Čela mikrotrhlin leží v matrici. V tomto případě se sleduje změna koeficientu intenzity napětí  $K_I$  v závislosti na vzájemné konfiguraci mikrotrhlin a částic a na rozdílných elastických vlastnostech obou materiálů.
- Čela mikrotrhlin leží na rozhraní částice/matrice. V důsledku obecně rozdílných elastických vlastností materiálu částic a matrice se mění charakter singularity napětí na čelech mikrotrhlin. Na základě kritéria uvedeného v práci Knésla a Knápka [38] se počítá kritické vnější napětí  $q^C$ , při kterém dojde k rozšíření mikrotrhlin do částic, v závislosti na vzájemné velikosti částic a mikrotrhlin a pro různé poměry hodnot elastických a lomových vlastností částic a matrice.
- Čela mikrotrhlin se nacházejí v matrici, avšak krátkým koncovým úsekům mikrotrhlin o délce  $\delta$  je udělen ohyb. V tomto případě se na základě modifikace kritéria uvedeného v práci Melin [1] studuje stabilita směru šíření mikrotrhlin.



Obr. 3.1: Nekonečná řada kolineárních mikrotrhlin a kruhových částic. Vrcholy mikrotrhlin neleží na rozhraní částice/matrice.

### 3.2 NEKONEČNÁ ŘADA MIKROTRHLIN A ČÁSTIC

Nechť rovina  $xOy$  představuje nekonečné lineárně elastické prostředí (matrici), které je zatížené vnějším napětím  $\sigma_{yy}^{\infty} = q$ . Na ose  $x$  je umístěna nekonečná periodická řada kruhových částic stejného poloměru  $R$  z materiálu, který má obecně jiné elastické konstanty než matrice. Středů částic jsou od sebe vzdáleny o  $d$  a mezi nimi v symetrické poloze leží vždy jedna mikrotrhlina délky  $2a$ . Vrcholy mikrotrhlin mohou, ale i nemusí ležet na rozhraní částice/matrice, viz obrázek 3.1. Cílem je stanovit koeficient intenzity napětí  $K_I$  v případě mikrotrhlin, jejichž vrcholy leží v matrici, a kritické vnější napětí  $q^C$  v případě mikrotrhlin, jejichž konce se nacházejí na hranici částice/matrice.

Okrajové podmínky úlohy jsou následující. Spojení mezi částicemi a matricí je ideální, tj. musí platit

$$g_{e,x} = g_{i,x}, \quad g_{e,y} = g_{i,y}, \quad \sigma_{e,n_x} = -\sigma_{i,n_x}, \quad \sigma_{e,n_y} = -\sigma_{i,n_y} \quad (3.6)$$

pro  $[x, y] \in \gamma$ , kde  $\gamma$  je rozhraní mezi částicemi a matricí. Dále platí

$$\sigma_{yy} = q \quad (3.7)$$

pro  $x, y \rightarrow \infty$  a pro líce mikrotrhlin, tj. pro  $[x, 0]$ , kde  $x \in (-a + md, a + md)$ , platí

$$\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0, \quad (3.8)$$

kde  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Napětí  $\sigma_{yy}^{1dis}$  v matrici podél osy  $x$  vyvolané přítomností řady dislokací střídavě s Burgersovým vektorem  $b_y$  a  $-b_y$  mezi částicemi se může vyjádřit vztahem

$$\sigma_{e,yy}^{1dis}(x) = \Re \{ \overline{\varphi_{1e}'(x)} + \psi_{1e}'(x) \}, \quad (3.9)$$

kde Muschelišviliho komplexní potenciály  $\varphi_{1e}(z)$  a  $\psi_{1e}(z)$  jsou určeny aproximativně pomocí Bubnovovy-Galerkinovy metody (viz Savin [46]). Místo Burgersova vektoru  $b_y$  se zavede dislokační hustota  $B_y(c)$  a následnou integrací vztahu (3.9) podle polohy dislokací  $c$  v mezích  $\pm a$  se vytvoří periodické distribuce spojitě rozložených dislokací

interagujících s částicemi, přičemž jsou splněny okrajové podmínky (3.6). Ke splnění zbývajících okrajových podmínek (3.7) a (3.8) je potřeba vhodně „nastavit“ neznámou hustotu Burgersova vektoru  $B_y(c)$ . K tomu je výhodné použít Buecknerova principu, který vede na hraniční singulární integrální rovnici, ve které jako neznámá vystupuje právě hustota Burgersova vektoru  $B_y(c)$

$$\frac{\pi(\kappa_e + 1)}{\mu_e} \sigma_{yy}^{appl}(x) + \frac{2\pi}{d} \int_{-a}^a B_y(c) \frac{\cos(\pi c/d)}{\sin(\pi x/d) - \sin(\pi c/d)} dc + \int_{-a}^a B_y(c) K_{yy}(x, c) dc = 0. \quad (3.10)$$

K této rovnici je ještě nutné přidat podmínku konzistence

$$\int_{-a}^a B_y(c) dc = 0. \quad (3.11)$$

Nesingulární jádro  $K_{yy}(x, c)$  z rovnice (3.10) v podstatě reprezentuje interakci mezi dislokací a částicemi a samozřejmě závisí na poloze dislokace  $c$ . Napětí  $\sigma_{yy}^{appl}$  je napětí působící podél osy  $x$  mezi částicemi v prostředí bez mikrotrhlin, které se podobně jako napětí  $\sigma_{e,yy}^{1dis}(x)$  vyjádří aproximativně pomocí Bubnovovy-Galerkinovy metody. Substitucemi

$$s_0 = \sin\left(\frac{\pi}{d}c\right), \quad t_0 = \sin\left(\frac{\pi}{d}x\right), \quad (3.12)$$

$$s_0 = \sin\left(\frac{\pi}{d}a\right)s, \quad t_0 = \sin\left(\frac{\pi}{d}a\right)t \quad (3.13)$$

se převede rovnice (3.10) na tvar

$$\frac{\pi(\kappa_e + 1)}{\mu_e} \sigma_{yy}^{appl}(t) + 2 \int_{-1}^1 \frac{B_y(s)}{t - s} ds + \frac{d}{\pi} \int_{-1}^1 B_y(s) \frac{K_{yy}(t, s) \sin(\pi a/d)}{\sqrt{1 - \sin^2(\pi a/d)s^2}} ds = 0. \quad (3.14)$$

Hustotu  $B_y(s)$  není bohužel možné vyjádřit analyticky, lze ji však vyjádřit přibližně pomocí numerických metod. Z teorie singulárních integrálních rovnic je známo, že se musí hledat ve tvaru (viz Kaya a Erdogan [47])

$$B_y(s) = w(s)\phi_y(s), \quad (3.15)$$

kde  $\phi_y(s)$  je nějaká ohraničená funkce na intervalu  $[-1, 1]$  a  $w(s)$  je fundamentální řešení rovnice (3.14) v případě, že  $K_{yy}(s, t) = 0$ . Tvar  $w(t)$  závisí na charakteru řešené úlohy. V daném případě

$$w(s) = (1 - s^2)^{-\lambda}, \quad (3.16)$$

kde obecně  $\lambda \in (0, 1)$  závisí na materiálových charakteristikách matrice a částic. Funkce  $\phi_y(s)$  může být vyjádřena jen přibližně, např. jako prvek nějakého vhodného lineárního prostoru funkcí. Každý prvek tohoto prostoru je lineární kombinací jeho

bázových prvků. Podle Erdogana, Gupty a Cooka [48] se zvolí jako báze systém ortogonálních Jakobihho polynomů  $P_n^{(-\lambda, -\lambda)}(s)$  a funkce  $\phi_y(s)$  se hledá jako jejich lineární kombinace ve tvaru

$$\phi_y(s) = \sum_{n=0}^{N_B} c_n P_n^{(-\lambda, -\lambda)}(s). \quad (3.17)$$

Protože jádro  $K_{yy}(t, s)$  z rovnice (3.14) známe jen v určitých hodnotách  $s = s_i$ , aproximujeme jej v proměnné  $s$  vhodným systémem polynomů, např. do řádu  $N_f$ . S výhodou lze opět využít Jacobihho polynomů

$$\frac{d}{\pi} K_{yy}(t_i, s) \frac{\sin(\pi a/d)}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2(\pi a/d)}} = \sum_{n=0}^{N_f} d_n(t_i) P_n^{(-\lambda, -\lambda)}(s). \quad (3.18)$$

Aproximace se provede pro body  $t = t_i$ , kde  $i = 0, 1, \dots, N_B - 1$ , a  $N_B$  je stupeň aproximace funkce  $\phi_y(s)$  ve vztahu (3.17). Hodnoty  $t_i$  na ose  $x$  odpovídají bodům na lících mikrotrhlin, ve kterých se kontroluje splnění okrajových podmínek (3.8).

Hustota Burgersova vektoru  $B_y(t)$  v blízkosti konců mikrotrhlin vykazuje velké změny, proto je vhodné volit body  $t_i$  tak, aby jejich hustota rostla v blízkosti hodnot  $\pm 1$ . K tomu se hodí např. hodnoty kořenů Čebyševových polynomů

$$t_i = \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{2i + 1}{N_B}\right). \quad (3.19)$$

Z podmínky konzistence (3.11) vyplyne, že  $c_0 = 0$ . Odtud, dosazením (3.17) a (3.18) do rovnice (3.14) a ze vztahů pro integrály, které lze nalézt např. v práci Erdogana, Gupty a Cooka [48] se dostane soustava algebraických rovnic, ve které jako neznámé vystupují parametry  $c_n$ , kde  $n = 1, 2, \dots, N_B$ .

Pro případ, že vrcholy mikrotrhlin leží na rozhraní částice/matrice, je možné stanovit tzv. zobecněný faktor intenzity napětí na základě vztahu

$$H_I = \lim_{r \rightarrow 0} \mu^* \sqrt{2\pi} r^\lambda \frac{d\Delta(r)}{dr} = \pm \lim_{x \rightarrow \pm a^\mp} \mu^* \sqrt{2\pi} (a \mp x)^\lambda B_y(x), \quad (3.20)$$

kde  $r$  je vzdálenost od vrcholu mikrotrhlin,  $\Delta(r)$  je rozevření mikrotrhlin v místě  $r$  a

$$\mu^* = \frac{2\mu_e(1 + \alpha)}{(1 + \kappa_e)(1 - \beta^2)} \frac{1 + 2\beta(1 - \lambda)}{\sin \pi \lambda}. \quad (3.21)$$

Koeficienty  $\alpha, \beta$  jsou již zmiňované Dundursovy parametry, viz Dundurs a Mura [49], dané vztahy

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\mu_i(\kappa_e + 1) - \mu_e(\kappa_i + 1)}{\mu_i(\kappa_e + 1) + \mu_e(\kappa_i + 1)}, \\ \beta &= \frac{\mu_i(\kappa_e - 1) - \mu_e(\kappa_i - 1)}{\mu_i(\kappa_e + 1) + \mu_e(\kappa_i + 1)}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Dosazením (3.15) do (3.20) se po úpravách obdrží

$$H_I = \mu^*(2\pi)^{\frac{1}{2}-\lambda} \left[ d \tan \left( \frac{\pi}{d} a \right) \right]^\lambda \phi_y(1). \quad (3.23)$$

Pro případ mikrotrhlin, jejichž vrcholy leží v matici ( $\lambda = 1/2, \alpha = 0, \beta = 0$ ) přejde výraz (3.23) v koeficient intenzity napětí  $K_I$

$$K_I = \frac{2\mu_e}{\kappa_e + 1} \sqrt{d \tan \left( \frac{\pi}{d} a \right)} \phi_y(1). \quad (3.24)$$

K vyšetřování stability mikrotrhlin, jejichž vrcholy leží na rozhraní částice/matrice je vhodnější místo zobecněného součinitele intenzity napětí  $H_I$  sledovat jinou charakteristiku, např. střední napětí  $\bar{\sigma}$  v určité oblasti  $d^*$  před čelem mikrotrhlin, které nesmí překročit nějakou kritickou hodnotu  $\sigma_C$ . V každém prvku  $c_n$  vystupuje lineárně vnější zatížení  $q$ , takže se funkce  $\phi_y(t)$  může psát ve tvaru

$$\phi_y(t) = \frac{\kappa_e + 1}{\mu_e} q \sum_{n=1}^{N_B} c_n^* P_n^{(-\lambda, \lambda)}(t). \quad (3.25)$$

Odtud, ze vztahu (2.2) a z kritéria stability mikrotrhlin

$$\bar{\sigma} < \sigma_C, \quad (3.26)$$

se dostane výraz, který má po normování na homogenní případ tvar

$$\frac{q^C}{q_{hom}^C} = \frac{(2\pi)^{\lambda-1/2} (1-\beta^2) (1-\lambda) \sin(\pi\lambda)}{(1+\alpha) (1+2\beta(1-\lambda)) \sum_{n=1}^{N_B} c_n^* P_n^{(-\lambda, -\lambda)}(1)} \times \frac{K_{IC,i}}{K_{IC,e}} \left( \frac{d^*}{d} \right)^{\lambda-1/2} \left[ \tan \left( \frac{\pi a}{d} \right) \right]^{1/2-\lambda}. \quad (3.27)$$

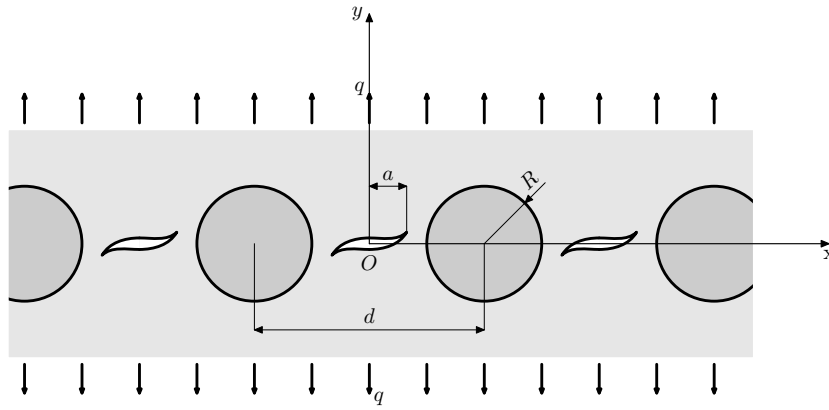
Zde  $K_{IC,i}$  je lomová houževnatost částic,  $K_{IC,e}$  je lomová houževnatost matrice,  $q_{hom}^C$  je vnější kritické napětí pro případ homogenního materiálu a  $q^C$  je vnější kritické napětí pro případ matrice s řadou částic. Vztah (3.27) vyjadřuje závislost poměru kritického zatížení periodické řady mikrotrhlin v nehomogenním a homogenním materiálu na geometrické konfiguraci mikrotrhlin a částic a na elastických a lomových vlastnostech matrice a částic.

### 3.3 STABILITA SMĚRU ŠÍŘENÍ MIKROTRHLIN

Následující odstavec je věnován otázce směrové stability šíření mikrotrhlin v problému řešeném v předchozím odstavci.

Podobně jako výše uvažme nekonečné isotropní a lineárně elastické prostředí (matici) obsahující nekonečnou řadu kruhových částic stejného poloměru  $R$ . Středů částic jsou od sebe vzdáleny o  $d$  a jejich materiál má obecně jiné elastické konstanty než matrice.





Obr. 3.2: Nekonečná řada kolineárních slabě ohnutých mikrotrhlin a kruhových částic.

Mezi částicemi leží mikrotrhliny, které se kvazistaticky šíří v podmínkách módu  $I$ . Malá porucha zatížení způsobí, že trajektorie šíření mikrotrhlin se odchýlí od původního přímého směru. Cílem je analyzovat stabilitu přímého směru šíření mikrotrhlin v podmínkách módu  $I$  v závislosti na konfiguraci mikrotrhlin a částic a na elastických vlastnostech částic a matrice.

Analýza je založena na článku Melin [1], kde byl problém řešen pro případ řady trhlin v homogenním prostředí. Problém se bude řešit pomocí techniky spojitě rozložených dislokací a Buecknerova principu a aby byl analyticky zvládnutelný, je nutné uvažovat následující zjednodušující předpoklady:

- Odchylka od horizontálního směru šíření v okolí vrcholů mikrotrhlin je popsána dostatečně hladkou lichou funkcí  $y(x)$ , která je periodická s periodou  $d$  a pro její absolutní hodnotu derivace platí  $|y'(x)| \ll 1$ .
- Přibližné řešení pro dislokační hustoty složek Burgersova vektoru  $B_\tau(x)$  a  $B_\eta(x)$  (systém souřadnic  $(\tau, \eta)$  je lokální a zavádí se na křivce mikrotrhlin  $y(x)$ , viz níže) podél slabě ohnutých mikrotrhlin hledáme v aproximaci  $O(y'(x))$ , tj. ponecháme jen členy lineární v  $y'(x)$ . V takovém případě interakční členy (integrály s regulárními jádry ve výše uvedených rovnicích, které popisují interakce dislokací a částic) bereme v aproximaci  $o(y'(x))$ , tj. odpovídající přímým mikrotrhlinám.

V místě dislokace  $[c, 0]$  se na křivce  $y(x)$  zavede nový souřadný systém  $(\tau, \eta)$ , pro který za podmínky  $|y'(x)| \ll 1$  platí následující transformační vztahy vzhledem k souřadnému systému  $(x, y)$

$$\tau = x - c, \quad (3.28)$$

$$\eta = y(c) - y(x) - y'(c)(c - x). \quad (3.29)$$

Neznámé hustoty složek Burgersova vektoru  $B_\tau(x)$  a  $B_\eta(x)$  se hledají při  $|y'(x)| \ll 1$  ve tvaru

$$B_\tau(x) = B_\tau^{(0)}(x) + B_\tau^{(1)}(x), \quad (3.30)$$

$$B_\eta(x) = B_\eta^{(0)}(x) + B_\eta^{(1)}(x), \quad (3.31)$$

kde  $B_\tau^{(1)}(x) = O(y'(x))$  a  $B_\eta^{(1)}(x) = O(y'(x))$ . Z rovnováhy normálových a smykových napětí na lících mikrotrhlin obdržíme modifikací rovnic uvedených v [1] soustavu integrálních rovnic, ve kterých jako neznámé vystupují hustoty Burgersova vektoru  $B_\tau(x)$  a  $B_\eta(x)$ . Tyto se mohou určit pomocí iterační metody jako první iterace řešení dané soustavy integrálních rovnic, přičemž nulté iterace  $B_\tau^{(0)}(x)$  a  $B_\eta^{(0)}(x)$  odpovídají řešení soustavy při  $y'(x) = 0$ .

Mikrotrhliny se šíří za podmínky  $K_{II} = 0$ . Odtud dosazením  $B_\tau(x)$  do vztahu

$$K_{II} = \sqrt{2\pi} \frac{2\mu_e}{\kappa_e + 1} \lim_{x \rightarrow a} (a - x)^{1/2} B_\tau(x) \quad (3.32)$$

a jeho následnou úpravou se dostane kritérium směrové nestability řady mikrotrhlin

$$\begin{aligned} & -\frac{a_0}{d} \left\{ \sum_{m=0}^{N_T} e_m \left[ \frac{2\pi \cos(\pi a/d)}{d \sin(\pi a/d)} \left( \sum_{n=0}^m u_{n,m}^K D_n(1) - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{m+1} u_{n,m+1}^K D_n(1) - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{m-1} u_{n,m-1}^K D_n(1) \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2\pi \cos(2\pi a/d)}{d \sin(2\pi a/d)} T_{m+1}(1) \right] \right\} / \left( \sum_{m=0}^{N_T} (2f_m + e_m) T_{m+1}(1) \right) > 1, \end{aligned} \quad (3.33)$$

kde  $a_0$  je poloviční délka mikrotrhlin, při níž došlo k počátečnímu nekonečně malému vychýlení konců mikrotrhlin od horizontálního směru šíření z nulové hodnoty na hodnotu  $y_0$ ,  $e_m$ ,  $f_m$  a  $N_T$  jsou koeficienty a stupeň aproximace superpozice normálových a tečných dodatkových napětí od částic a napětí mezi částicemi v prostředí bez mikrotrhlin,  $u_{n,m}^K$  je  $n$ -tý koeficient Čebyševova polynomu druhého druhu stupně  $m$ ,  $T_{m+1}(1)$  je hodnota Čebyševova polynomu prvního druhu stupně  $m + 1$  v bodě 1, a

$$D_n(1) = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 0, \\ \sum_{k=0}^{n-1} d_k^D & \text{pro } n \geq 1, \end{cases} \quad (3.34)$$

$$d_k^D = \begin{cases} 0 & \text{pro } n - k \text{ sudé,} \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((n-k)/2)}{\Gamma((n-k+1)/2)} & \text{pro } n - k \text{ liché} \end{cases} \quad (3.35)$$

a  $\Gamma(n)$  je funkce gama. Nedostatkem kritéria (3.33) je, že v něm vystupují parametry, které lze určit jen numericky.

## 4 DISKUSE

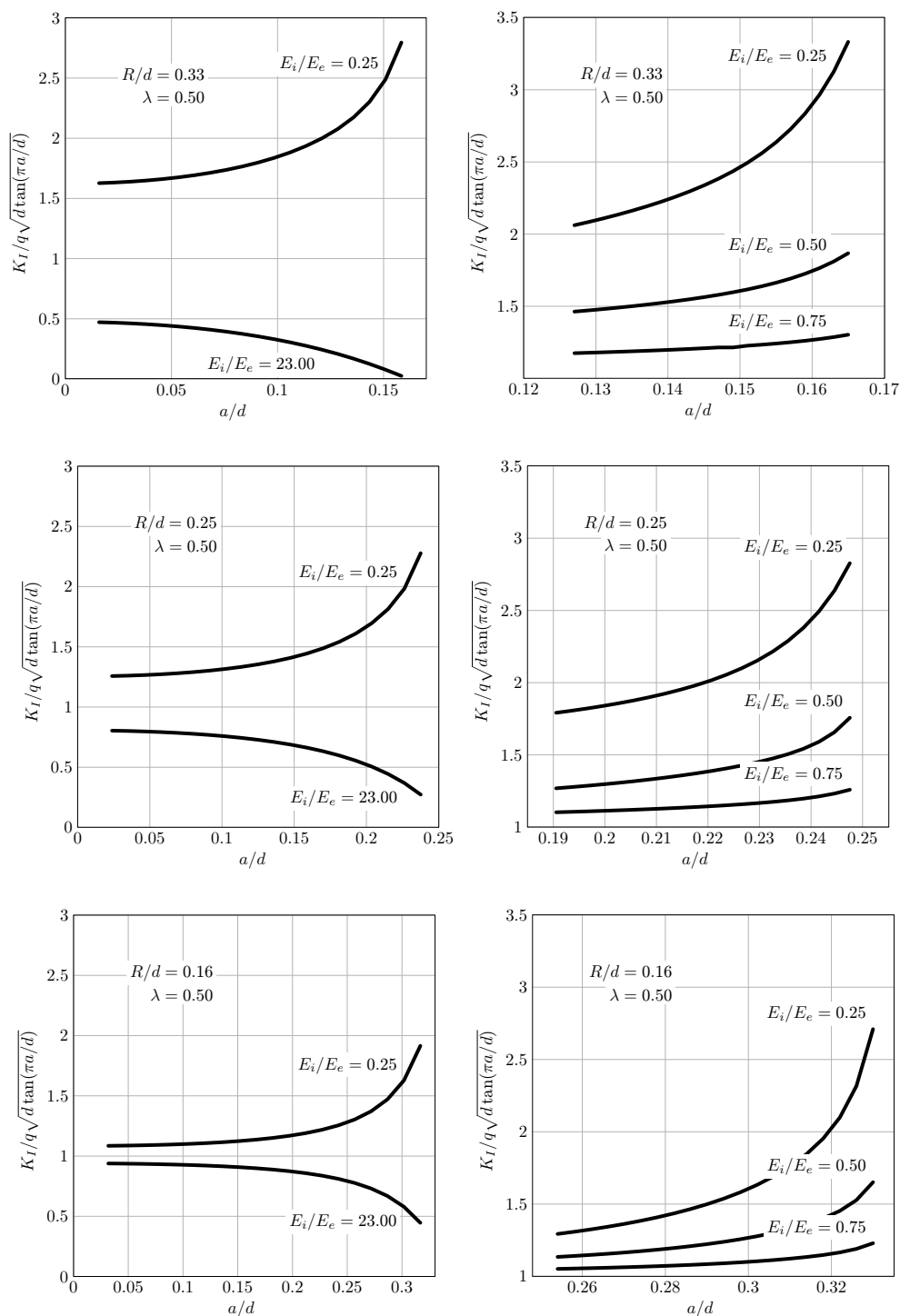
V této kapitole budou diskutovány numerické výsledky řešení problémů z kapitoly 3.

### 4.1 NEKONEČNÁ ŘADA MIKROTRHLIN A ČÁSTIC

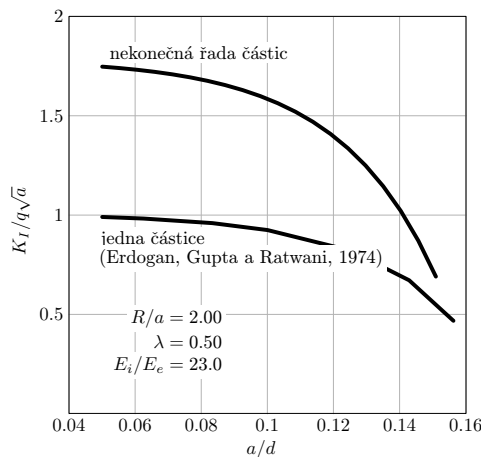
V tomto odstavci se diskutují dvě konfigurace mikrotrhlin a částic. V prvním případě se jedná o mikrotrhliny, jejichž vrcholy leží pouze v matici, ve druhém případě leží konce mikrotrhlin na rozhraní částice/matrice.

Na obrázku 4.3 jsou grafy zachycující chování koeficientu intenzity napětí  $K_I$  v závislosti na relativní délce mikrotrhlin  $a/d$ , jejichž vrcholy leží stále v matici. Hodnoty koeficientu intenzity napětí  $K_I$  jsou normovány vzhledem k homogennímu případu. Stupeň aproximace hustoty Burgersova vektoru  $B_y(x)$  byl zvolen  $N_B = 11$ , stupeň aproximace Bubnovovy-Galerkinovy metody pro aplikované napětí  $\sigma_{yy}^{appl}(x)$  byl zvolen  $N_G = 7$ , stupeň aproximace Bubnovovy-Galerkinovy metody pro napětí  $\sigma_{e,yy}^{1dis}(x)$  byl zvolen  $N_G = 14$  a stupeň aproximace nesingulárního jádra  $K_{yy}(x, c)$  byl zvolen  $N_f = 10$ . V levém sloupci jsou grafy zobrazující závislost  $K_I/q\sqrt{d}\tan(\pi a/d)$  na relativní délce mikrotrhlin  $a/d$  pro široký interval hodnot  $a/d$ , pro  $E_i/E_e = 1/4$  a  $E_i/E_e = 23/1$  (tento poměr odpovídá kovovým částicím v epoxidové matici), v pravém sloupci jsou grafy závislosti  $K_I/q\sqrt{d}\tan(\pi a/d)$  na relativní délce mikrotrhlin pro úzký interval hodnot  $a/d \geq 3/4$  pro poměry elastických konstant  $E_i/E_e = 1/4, 1/2$  a  $3/4$ . Poměr poloměru a vzdálenosti středů částic byl shora omezen,  $R/d \leq 1/3$ , protože v opačném případě by bylo třeba volit mnohem vyšší stupeň aproximace napětí  $\sigma_{e,yy}^{1dis}(x)$ . Z grafů na obrázku 4.3 lze vidět, že vliv částic klesá s jejich rostoucí vzájemnou vzdáleností a rostoucí tuhostí. Např. z grafů v prvním řádku ( $R/d = 1/3$ ) vyplývá, že vliv částic je natolik velký, že i pro krátké mikrotrhliny v případě poměru materiálových konstant  $E_i/E_e = 1/4$  je hodnota  $K_I/q\sqrt{d}\tan(\pi a/d)$  téměř dvojnásobná, než pro matici bez částic. Oblast vlivu částic v matici není však velká, protože např. graf odpovídající  $R/d = 1/6$  ukazuje, že k výraznému růstu koeficientu intenzity napětí  $K_I$  dochází až v okamžiku, kdy se čela mikrotrhlin nacházejí v těsné blízkosti částic ( $E_i/E_e = 1/4$ ).

Na obrázku 4.4 je graf srovnávající koeficient intenzity napětí  $K_I$  pro nekonečnou řadu mikrotrhlin a částic a pro případ jedné mikrotrhliny a částice. Vrcholy mikrotrhlin resp. mikrotrhliny leží v matici. Jednotlivé stupně aproximací byly voleny stejně jako v předchozím případě. Mikrotrhliny resp. mikrotrhlina celou svou délkou zůstává v matici. Poměr mezi poloměrem částic  $R$  a poloviční délkou mikrotrhlin resp. mikrotrhliny  $a$  je konstantní ( $R/a = 2$ ), přičemž se mění vzdálenost mezi částicemi resp. vzdálenost mezi částicí a mikrotrhlinou. Problém interakce libovolně orientované mikrotrhliny a kruhové částice řeší práce Erdogana, Gupty a Ratwaniho [50]. V grafu na obrázku 4.4 je však vyneseno pouze to řešení autorů Erdogana, Gupty a Ratwaniho [50], které je vhodné k srovnání se zde diskutovanou problematikou, tj. případ mikrotrhliny kolmé k částici. Tuhost částice je o řád vyšší než tuhost matrice (např. kovové částice v epoxidové matici). Z grafu na obrázku 4.4 vyplývá:



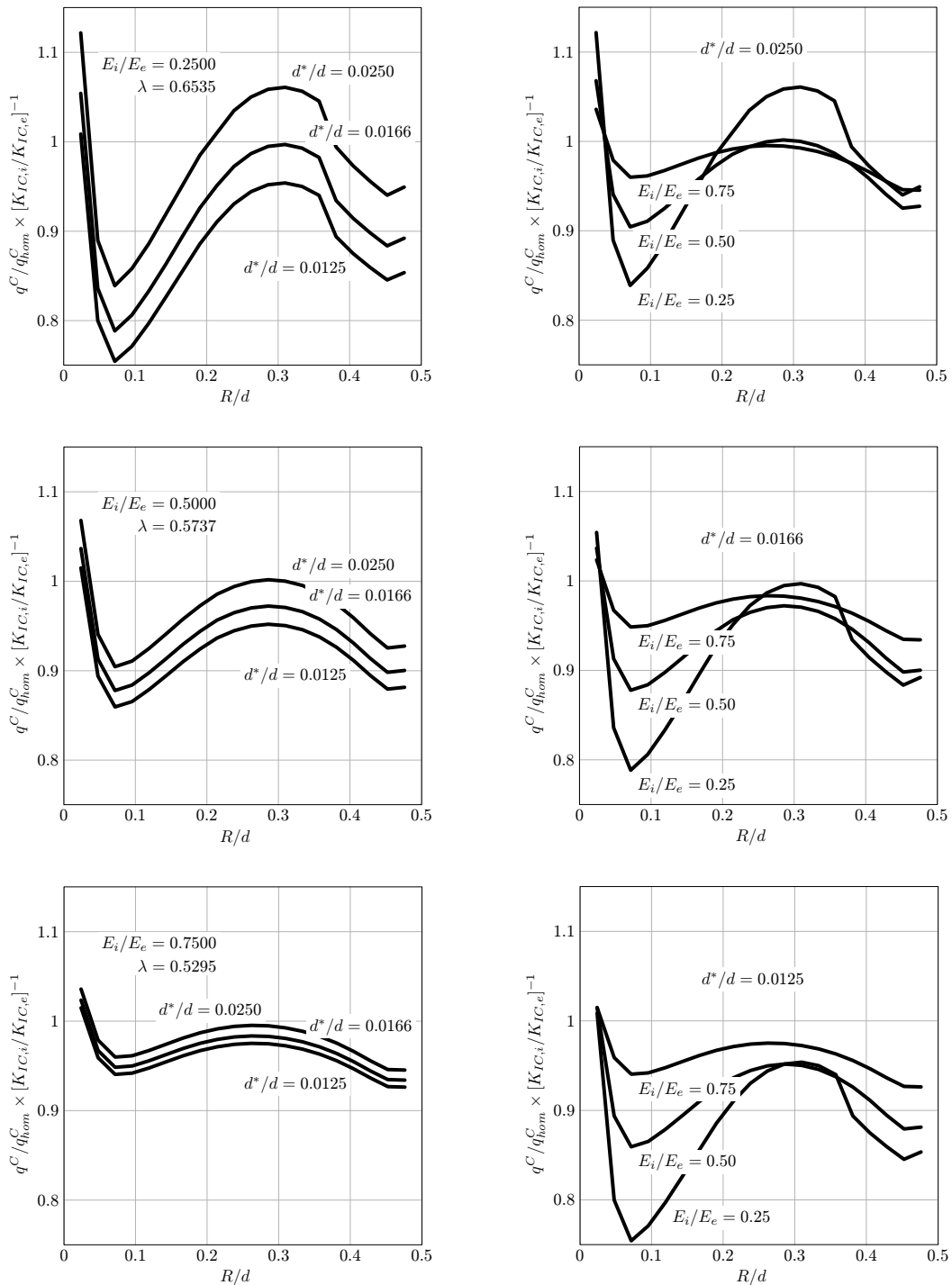
Obr. 4.3: Závislost koeficientu intenzity napětí  $K_I$  na relativní délce mikrotrhlin  $a/d$  pro periodickou řadu mikrotrhlin a částic, kdy vrcholy mikrotrhlin leží v matici.



Obr. 4.4: Srovnání závislostí koeficientů intenzity napětí  $K_I$  na relativní délce mikrotrhlin v případě problému nekonečné řady částic a mikrotrhlin a problému jedné částice a jedné mikrotrhliny (poznamenejme, že  $a/d = 1/6 \doteq 0,17$  odpovídá případu, kdy vrcholy mikrotrhlin leží na rozhraní částice/matrice).

- v případě periodické řady mikrotrhlin je v daném intervalu hodnot  $a/d$  zesilující účinek interakce mikrotrhlin s rostoucím  $a/d$  slabší než stínící účinek částic,
- vlivem interakce mikrotrhlin jsou hodnoty normovaného faktoru intenzity napětí vyšší pro periodickou řadu mikrotrhlin v porovnání s jednou mikrotrhlinou.

Řešení kritéria stability pro řadu mikrotrhlin (3.27), jejichž vrcholy se nacházejí na rozhraní matrice a částic, bude ukázáno pro případ, kdy poměr Youngových modulů pružnosti částic a matrice je  $E_i/E_e = 1/4, 1/2$  a  $3/4$  a pro následující hodnoty poměru délky procesní zóny mikrotrhlin a vzdálenosti středů částic  $d^*/d = 1/40, 1/60, 1/80$ . Poznamenejme, že poměr  $E_i/E_e = 1/4$  vede k hodnotě exponentu singularity napětí  $\lambda = 0,6535$ , poměr  $E_i/E_e = 1/2$  vede k exponentu  $\lambda = 0,5737$  a poměr  $E_i/E_e = 3/4$  k exponentu  $\lambda = 0,5295$ . Numerické výsledky pro normovanou hodnotu kritického aplikovaného zatížení  $q^C/q_{hom}^C \times [K_{IC,i}/K_{IC,e}]^{-1}$  v závislosti na relativní velikosti částic  $R/d$  jsou uvedeny na obrázku 4.5. K výpočtu hodnot kritického vnějšího zatížení  $q^C$  byly použity stejné stupně aproximací jako ve výše diskutovaném případě mikrotrhlin, jejichž vrcholy se nacházely v matrici. Křivky v grafech prvního sloupce odpovídají různým hodnotám parametru  $d^*$  při pevně zvoleném poměru elastických konstant  $E_i/E_e$ , křivky v grafech druhého sloupce jsou přeuspořádány pro pevně zvolenou hodnotu poměru  $d^*/d$  a pro různé hodnoty poměru elastických konstant částic  $E_i$  a matrice  $E_e$ . Poněkud zvláštní charakter závislosti  $q^C/q_{hom}^C \times [K_{IC,i}/K_{IC,e}]^{-1}$  na  $R/d$  lze objasnit následujícím způsobem: počáteční pokles  $q^C/q_{hom}^C \times [K_{IC,i}/K_{IC,e}]^{-1}$  souvisí s růstem poměru velikosti částic a rozměru oblasti dominance singulárního členu asymptotického rozvoje napětí před čelem mikrotrhliny - jinými slovy, s rostoucí velikostí částic se stále více uplatňuje efekt bimateriálového rozhraní na trhlínu šířící se z elasticky tužšího prostředí do elasticky měkčího prostředí. Postupně však dochází k saturaci tohoto efektu, tak jak oblast dominance singulárního členu je stále více uzavřena v částici. V další fázi převáží vliv



Obr. 4.5: Závislosti kritického normovaného vnějšího zatížení  $q^C / q_{hom}^C \times [K_{IC,i} / K_{IC,e}]^{-1}$  na relativní velikosti částic  $R/d$ . Vrcholy mikrotrhlin leží na rozhraní částice/matrice.

poklesu zobecněného součinitele intenzity napětí  $H_I$  v důsledku zmenšující se relativní délky mikrotrhlin, což se projeví růstem  $q^C/q_{hom}^C \times [K_{IC,i}/K_{IC,e}]^{-1}$ . Nicméně, v jistém momentu je tento trend převážen účinkem rostoucí koncentrace napětí mezi částicemi, která vede k opětovnému růstu  $H_I$  a tudíž k poklesu kritického normovaného  $q^C/q_{hom}^C \times [K_{IC,i}/K_{IC,e}]^{-1}$ .

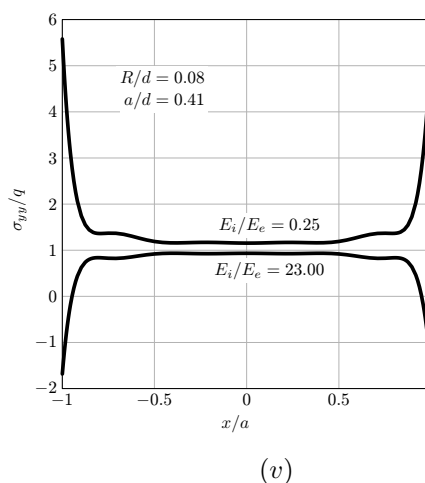
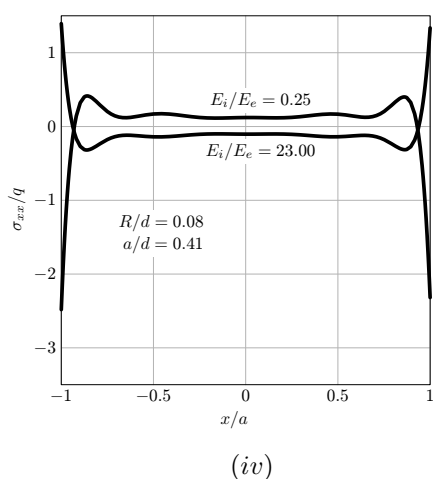
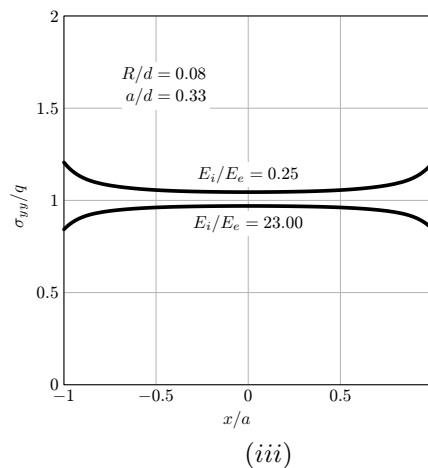
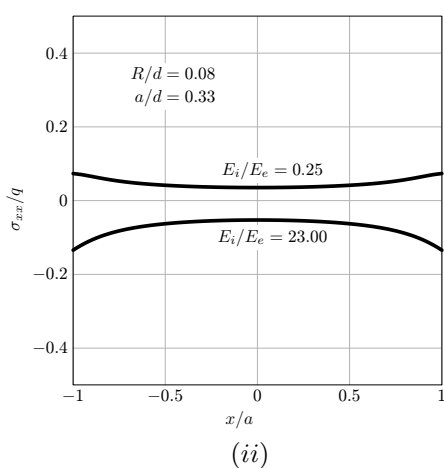
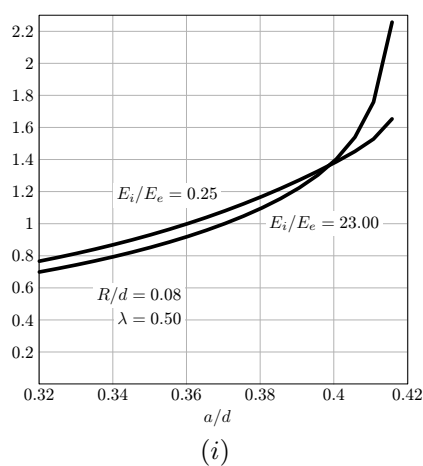
## 4.2 STABILITA SMĚRU ŠÍŘENÍ MIKROTRHLIN

V tomto odstavci bude diskutována stabilita směru šíření mikrotrhlin na základě kritéria (3.33), které graficky zachycuje obrázek 4.6, který odpovídá případu konfigurace mikrotrhlin a sekundárních částic  $R/d = 8/100$ . Byly studovány pro dva případy tuhosti částic a matrice odpovídající poměrům  $E_i/E_e = 1/4$  a  $23/1$ . Aproximace v dílčích stádiích výpočtu vedoucí k řešení problému byly voleny následovně: stupeň aproximace hustoty Burgersova vektoru  $B_y(x)$  byl zvolen  $N_B = 11$ , stupeň aproximace Bubnovovy-Galerkinovy metody pro aplikované napětí  $\sigma_{xx}^{appl}(x)$  a  $\sigma_{yy}^{appl}(x)$  byl zvolen  $N_G = 7$ , stupeň aproximace Bubnovovy-Galerkinovy metody pro napětí  $\sigma_{e,xx}^{1dis}(x)$  a  $\sigma_{e,yy}^{1dis}(x)$  byl zvolen  $N_G = 14$  a stupeň aproximace nesingulárního jádra  $K_{xx}(x, c)$  a  $K_{yy}(x, c)$  byl zvolen  $N_f = 11$ . Stupně aproximace normálových a tečných napětí v místech mikrotrhlin byly zvoleny  $N_T = 11$ . Kritérium stability směru šíření mikrotrhlin popisuje graf s označením (i) v prvním řádku obrázku 4.6. Zbývající čtyři grafy ilustrují napětí  $\sigma_{xx}$  a  $\sigma_{yy}$  v místech mikrotrhlin, přičemž grafy (ii) a (iii) odpovídají nejkratším studovaným mikrotrhlinám a grafy (iv) a (v) odpovídají mikrotrhlinám, jejichž vrcholy leží v nejtěsnější blízkosti rozhraní částice/matrice.

Konfigurace částic a mikrotrhlin pro  $R/d = 8/100$  odpovídá případu, kdy nezávisle na tuhosti částic, dochází při dostatečné délce mikrotrhlin k nestabilitě jejich směru šíření. Tento jev nastává dříve u matrice s elasticky měkčími částicemi než u matrice s částicemi elasticky tužšími. Od jisté vzájemné konfigurace mikrotrhlin a částic se však projeví vliv větší tuhosti částic a křivka stability pro elasticky tužší částice přejde z hodnot nižších než hodnoty křivky stability pro částice elasticky měkčí k hodnotám vyšším. Napětí v místech mikrotrhlin vykazují menší vliv sekundárních částic, který se projevuje jen u mikrotrhlin blíže částicím. Pokles vlivu sekundárních částic se projevuje blízkými normovanými hodnotami napětí  $\sigma_{xx}/q$  k hodnotě 0 a blízkými hodnotami normovaných napětí  $\sigma_{yy}/q$  k hodnotě 1. Směrová stabilita šíření citlivě závisí na vzájemném vztahu napětí  $\sigma_{xx}$  a  $\sigma_{yy}$  v místech mikrotrhlin. Pokles  $\sigma_{xx}$  a  $\sigma_{yy}$  vede k stabilitě přímého směru šíření mikrotrhlin, zatímco růst obou napětí podmiňuje nestabilitu přímého směru šíření mikrotrhlin.

V případě mikrotrhlin s vrcholy v blízkosti částic se z důvodu vlivu sekundárních částic projevuje nepatrná nesymetrie u napětí  $\sigma_{xx}$ . Její odstranění vyžaduje vyšší aproximace použité Bubnovovy-Galerkinovy metody. Zvlnění průběhů napětí je z důvodů malé oblasti extrémních napětí v blízkosti vrcholů mikrotrhlin.

Výsledky se mohou shrnout do závěru, že vliv částic na stabilitu směru šíření mikrotrhlin je dominantní pouze u částic, jejichž vzdálenost středů je řádově shodná



Obr. 4.6: Grafické znázornění kritéria stability směru šíření mikrotrhlin. Graf (i) popisuje kritérium stability šíření mikrotrhlin, grafy (ii) a (iv) popisují průběhy normovaných napětí  $\sigma_{xx}/q$  v závislosti na  $x/a$ , grafy (iii) a (v) popisují průběhy normovaných napětí  $\sigma_{yy}/q$  v závislosti na  $x/a$ .



s jejich poloměrem. Při větších vzdálenostech středů částic, ztrácejí částice vliv a sme šíření mikrotrhlin ovlivňují zejména samy mikrotrhliny.

## 5 ZÁVĚR

Disertační práce si kladla za cíl popsat pomocí analytických matematických prostředků chování sítě mikrotrhlin v kompozitu tvořeném křehkou maticí s distribucí zpevňujících částic. Splnění tohoto úkolu se může stručně shrnout do následující bodů:

- Na základě dostupné literatury byl navržen zjednodušený matematický model matrice kompozitu zatížené tahovým vnějším napětím a obsahující síť mikrotrhlin. Síť mikrotrhlin byla modelována pomocí nekonečné periodické řady kolineárních mikrotrhlin stejné délky, které byly vzájemně odděleny sekundárními kruhovými částicemi stejného poloměru.
- S ohledem na matematické možnosti použité metody a předpokládané chování mikrotrhlin ve skutečném kompozitu byly zkoumány tři druhy konfigurací mikrotrhlin. V prvním případě byl zkoumán vliv sekundárních částic na mikrotrhliny, jejichž vrcholy se nacházely jen v matici. Druhý zkoumaný případ bylo stanovení kritického vnějšího zatížení matrice v případě, že vrcholy mikrotrhlin leží rozhraní částice/matrice. A poslední třetí případ se týkal stability směru šíření mikrotrhlin, která byla zkoumána z hlediska vývoje počáteční malé poruchy přímočaré trajektorie mikrotrhlin. Vrcholy mikrotrhlin se nacházely v matici kompozitu.
- Výsledky potvrdily známý fakt přitažlivé interakce mikrotrhlin a elasticky měkčích částic, avšak ukázaly také, že oblast vlivu sekundárních částic není velká.
- V případě relativně malých vzdáleností mezi částicemi se ukázalo, že elasticky tužší částice v porovnání s maticí vedou k větší směrové stabilitě šíření periodicky rozmístěných mikrotrhlin než částice elasticky měkčí.
- Za daných předpokladů (ideální spojení částic a matrice) existuje optimální rozložení sekundárních částic v matici kompozitu tak, že částice vedou k zvyšování lomové houževnatosti kompozitu, zejména v případě, kdy čela mikrotrhlin dosáhla rozhraní částice/matrice.
- Podobně v případě studia směrové stability mikrotrhlin se ukázalo, že existuje takové rozložení částic a mikrotrhlin, kdy dochází k porušení stability přímočaré trajektorie mikrotrhlin a následnému obcházení částic mikrotrhlinami a tedy vyloučení částic z lomového procesu.
- Důsledkem studia chování periodických mikrotrhlin a částic bylo nalezení řešení partikulárních úloh, které představovaly jednotlivé fáze řešení celého problému. Z dostupné literatury se zdá, že řešení některých z nich nebyla dosud publikována.

Získané výsledky mohou být zajímavé nejen pro mechaniku shluků mikrotrhlin v částicových kompozitech, nýbrž i pro některé další problémy, jako např:

- Problematika koalescence mikrotrhlin před čelem hlavní trhliny v částicových kompozitech.
- Mechanika mikrotrhlin v příčných vrstvách (lamelách) dvousměrných vláknových kompozitů (tj. lamelách orientovaných pod úhlem  $90^\circ$  ke směru zatížení).
- Problematika integrity relativně silných, křehkých povlaků na kovových substrátech, které slouží jako tepelné bariéry. Vzhledem k velké rozdílnosti součinitele teplotní roztažnosti tepelné bariéry a substrátu a vzhledem k tomu, že komponenty s tepelnou bariérou se zpravidla nacházejí v podmínkách značně proměnlivých teplot, dochází ke vzniku velkých cyklických tepelných napětí. Pro zmírnění tepelných napětí se tepelné bariéry navrhují tak, aby vykazovaly velkou poddajnost v rovině kolmé k povrchu. Toho se dosahuje záměrným zabudováním uspořádaných řad mikrotrhlin oddělených houževnatými heterogenitami.

## LITERATURA

- [1] Melin, S. (1983) Why Do Cracks Avoid Each Other?, *Int. J. Fract.*, 53, pp.121–128.
- [2] Munz, D. & Fett, T. (1999) *Ceramics, Mechanical Properties, Failure Behaviour, Materials Selection*, Springer, Heilderberg.
- [3] Faber, K. T. & Evans, G. A. (1983) Crack Deflection Processes - I. Theory, *Acta Metall.*, 31, pp.565–576.
- [4] Faber, K. T. & Evans, G. A. (1983) Crack Deflection Processes - II. Experiment, *Acta Metall.*, 31, pp.577–584.
- [5] Suresh, S. (1983) Crack Deflection: Implications for the Growth of Long and Short Fatigue Cracks, *Metall. Trans. A*, 14A, pp.2375–2385.
- [6] Suresh, S. & Shih., C. F. (1986) Plastic Near-Tip Fields For Branched Cracks, *Int. J. Fracture*, 30, pp.237–259.
- [7] Kitagawa, H., Yuuki, R. & Ohira, T. (1975) Crack-Morphological Aspect in Fracture Mechanics, *Enging. Fracture Mech.*, 7, pp.515–529.
- [8] Kotoul, M. & Urbis, R., (2001) On the Stability of Crack with Bridged Kinks, *Enging. Fracture Mech.*, 68/1, pp.81–97.
- [9] Wiederhorn, S. M. Brittle Fracture and Toughening Mechanism in Ceramics, *Ann. Rev. Mater. Sci.*, 14, pp.373–403.
- [10] Suresh, S. (1998) *Fatigue of Materials*, Univ. Press, Cambridge.

- [11] Choe, H., Chen, D. & Schneibel, J. H. *et al.* (2001) Ambient to High Temperature Fracture Toughness and Fatigue-Crack Propagation Behavior in a Mo-12Si-8.5B Intermetallic, *Intermetallics*, 9, pp.19–329.
- [12] Kotoul, M. & Vrbka, J. Crack Bridging and Trapping Mechanisms Used to Toughen Brittle Matrix Composites. *J. Theoret. Appl. Frac. Mech.*, v tisku.
- [13] Giannakopoulos, A. E. & Breder, K. (1991) Synergism of Toughening Mechanism in Whisker-Reinforced Ceramic-Matrix Composites, *J. Am. Ceram. Soc.*, 74, pp.194–202.
- [14] Breder, K., Giannakopoulos, A. E., Zeng, K. & Rowcliffe, D. J. (1990) Fracture Toughness Anisotropy of a Hot Pressed  $Al_2O_3/SiC_w$ , *J. Mater. Sci. Lett.*, 9, pp.1085–1086.
- [15] Wereszczak, A. A. & Ferber, M. K. (1997) Directional Dependence of Fracture in Hot-Pressed  $SiC$ -Whisker Reinforced Alumina at Room and Elevated Temperature, *J. Comp. Mater.*, 3, pp.1905–1920.
- [16] Breder, K., Zeng, K. & Rowcliffe, D. J. (1989) Indentation Testing of an  $Al_2O_3/SiC$  Whisker Composite, *Ceram. Eng. Sci. Proc.*, 10, pp.1005–1013.
- [17] Karihaloo, B. L. & Andreasen, J. H. (1996) *Mechanics of Transformation Toughening and Related Topics*, Elsevier Science B.V., Amsterdam.
- [18] Evans, A. G. & Cannon, R. M. (1986) Toughening of Brittle Solids by Martensitic Transformations, *Acta Metall.*, 34, pp.761–800.
- [19] Chen, I. W. (1991) Model of Transformation Toughening in Brittle Materials, *J. Am. Ceram. Soc.*, 74, pp.2564–2572.
- [20] Rice, R. W. (1981) Mechanisms of Toughening in Ceramic Matrix Composites, *Ceram. Eng. Sci. Proc.*, 2, pp.661–701.
- [21] Charalambides, P. G. & McMeeking, R. M. (1987) Finite Element Method Simulation of Crack Propagation in Brittle Microcracking Solid, *Mechanics of Materials*, 6, pp.71–87.
- [22] Charalambides, P. G. & McMeeking, R. M. (1988) Near-Tip Mechanics of Stress-Induced Microcracking in Brittle Materials, *J. Am. Ceram. Soc.*, 71, pp.465–472.
- [23] Hoagland, R. G., Hahn, G. T. & Rosenfield, A. R. (1973) Influence of Microstructure on the Fracture Propagation in Rock, *Roc. Mech.*, 5, pp.77–106.
- [24] Hoagland, R. G. & Embury, J. D. (1980) A Treatment of Inelastic Deformation around a Crack Tip Due to Microcracking, *J. Am. Ceram. Soc.*, 63, pp.404–410.
- [25] Claussen, N. (1976) Fracture Toughness of  $Al_2O_3$  with an Unstabilized  $ZrO_2$  Dispersed Phase, *J. Am. Ceram. Soc.*, 59, pp.49–51.

- [26] Claussen, N., Steeb, J. & Pabst, R. F. (1977) Effect of Induced Microcracking on Fracture Toughness of Ceramics, *Ceramic Bulletin*, 56, pp.559–562.
- [27] Wu, C. C., Freiman, S. W., Rice, R. W. & Mecholsky, J. J. (1978) Microstructural Aspects of Crack Propagation in Ceramics, *J. Mater. Sci.*, 13, pp.2659–2670.
- [28] Evans, A. G. & Faber, K. T. (1984) Crack-Growth Resistance of Microcracking Brittle Materials, *J. Am. Ceram. Soc.*, 67, pp.255–260.
- [29] Evans, A. G. & Fu, Y. (1985) Some Effects of Microcrack on the Mechanical Properties of Brittle Solids-II. Microcrack Toughening, *Acta Metall.*, 33, pp.1525–1531.
- [30] Hutchinson, J. W. (1987) Crack Tip Shielding by Micro-Cracking in Brittle Solids, *Acta Metall*, 35, pp.1605–1619.
- [31] Kotoul, M. & Profant, T. (2000) Effective Toughness for Bridged Crack Interacting with an Arbitrary Oriented and Located Microcrack, *Mechanics of Materials*, 32, pp.203–234.
- [32] Kotoul, M. & Profant, T. (1999) Combined Influence of Ductile Particles and Microcracks on Main Stability in Particle Composites, *Sborník konference Inženýrská mechanika*, Svratka, 17.5–20.5. 1999, pp.373–378.
- [33] Dundurs, J. (1969) Elastic Interaction of Dislocations with Inhomogeneities, *Mathematical Theory of Dislocations*, ASME Pub., New York, pp.70–115.
- [34] Bogy, D. B. (1971) On the Plane Elastostatic Problem of a Loaded Crack Terminating at a Material Interface, *J. Appl. Mech.*, 38, pp. 911–918.
- [35] Fenner, D. N. (1976) Stress Singularities in Composite Materials with an Arbitrarily Oriented Crack Meeting an Interface, *International Journal of Fracture*, 12, pp.705–721.
- [36] Náhlík, L. (2000) Analýza rozdělení napětí pro trhlinu s vrcholem na rozhraní dvou materiálů, *Sborník pedagogicko-vědecké konference u příležitosti 100. výročí založení FSI, Brno.*, pp.221–224.
- [37] Anderson, T. L. (1995) *Fracture mechanics, Fundamentals and Applications*, Second Edition, CRC Press, Boca Raton.
- [38] Knésl, Z. & Knápek, A. (1996) Lomově-mechanický popis trhliny s vrcholem v bimateriálovém rozhraní, *Sborník konference Inženýrská mechanika 1996*, Svratka, pp.71–76.
- [39] Gröger, R. (2002) Integral Methods for Determination of Fracture Characteristics of the General Stress Concentrators, *Sborník konference Aplikovaná mechanika 2002, TU Ostrava*, pp.95–104.

- [40] Gröger, R. & Náhlík, L. (2002) Výpočty lomových parametrů obecných koncentrátorů napětí: II. Integrální formulace výpočtu lomových parametrů pro materiálově nehomogenní tělesa, *Sborník semináře Únava a lomová mechanika 2002*, Žinkovy.
- [41] Qian, Z. Q. (2001) On the Evaluation of Wedge Corner Stress Intensity Factors of Bimaterial Joints with Surface Traction, *Computers and Structures*, 79, pp.53–64.
- [42] Qian, Z. Q. & Akisanya, A. R. (1999) Wedge Corner Stress Behaviour of Bonded Dissimilar Materials, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 32, pp.209–222.
- [43] Quian, J. & Hasebe, N. (1998) On the Technique of Shifting Side Nodes in Isoparametric Elements to Impose Arbitrary Singularity, *Computers and Structures*, 6, pp.841–846.
- [44] Cook, T. S. & Erdogan, F. (1972) Stresses in Bonded Materials with a Crack Perpendicular to the Interface, *Int. J. of Engng. Sci.*, 10, pp.677–697.
- [45] He, M. Y. & Hutchinson, J. W. (1989) Crack Deflection at an Interface Between Dissimilar Elastic Materials, *Int. J. of Solids Structures*, 25, pp.1053–1067.
- [46] Savin, G. N. (1951) *Koncentracija naprjaženij okolo otverstvij*, Gostčizdat, pp.138–150.
- [47] Kaya, A. C. & Erdogan, F. (1987) On the Solution of Integral Equations with Strongly Singular Kernels, *Q. Appl. Math.*, 45, pp.105–122.
- [48] Erdogan, F., Gupta, G. D. & Cook, T. S. (1973) Numerical solution of singular integral equations. *Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems*, Ed. G. C. Sih, Noordhoff, Leiden, pp.368–425.
- [49] Dundurs, J. & Mura, T. (1964) Interaction Between an Edge Dislocation and a Circular Inclusion. *J. Mech. Phys. Solids*, 12, pp.177–189.
- [50] Erdogan, F., Gupta, G. D. & Ratwani, M. (1974) Interaction Between a Circular Inclusion and an Arbitrary Oriented Crack. *J. of Appl. Mech.*, 12, pp.1007–1013.

## SEZNAM AUTOROVÝCH PUBLIKACÍ

- [1] Profant, T. (1999) Interakce mikrotrhliny s hlavní trhlinou přemostěnou plastic-  
kými můstky, Diplomová práce, Ústav matematiky FS VUT Brno.
- [2] Kotoul, M. & Profant, T. (1999) Combined Influence of Ductile Particles and  
Microcracks on Main Crack Stability in Particle Composites, *Sborník konfe-  
rence Inženýrská mechanika*, Svratka 17.5–20.5 1999, pp.373–375.
- [3] Kotoul, M. & Profant, T. (2000) Interakce trhliny s magistrální trhlinou přemostě-  
nou tvárnými částicemi. Část II: Libovolně orientovaná a umístěná mikrotrhlina,  
*Inženýrská mechanika*, 7, pp.35–58.
- [4] Kotoul, M. & Profant, T. (2000) Effective Toughness for Bridged Crack In-  
teracting with an Arbitrary Oriented and Located Microcrack, *Mechanics of  
Materials*, 32, pp.203–234.
- [5] Profant, T. & Kotoul, M. (2003) Periodická řada kolineárních trhlin oddělených  
kruhovými elastickými inkluzemi. Část I. Fundamentální řešení pro dislokaci  
mezi dvěma inkluzemi, přijato k publikaci v *Inženýrská mechanika*.
- [6] Profant, T. & Kotoul, M. (2003) Periodická řada kolineárních trhlin oddělených  
kruhovými elastickými inkluzemi. Část II. Aplikace techniky spojitě rozdělených  
dislokací, zasláno k publikaci v *Inženýrská mechanika*.
- [7] Profant, T. & Kotoul, M. (2003) Study of Interaction of Periodical Array of Coli-  
near Cracks with Periodical Array of Circular Inclusions in Particle Composites.  
*CD sborník konference Inženýrská mechanika 2003*, Svratka, 12.5.–15.5.  
2003.
- [8] Profant, T. & Kotoul, M. (2003) On the Interaction of an Array of Collinear  
Microcracks with Periodic Array of Inclusions, *Key Engineering Materials  
Vols*, 251–252, pp.279–284.

## ŽIVOTOPIS

*Jméno a příjmení:* Tomáš Profant.

*Datum a místo narození:* 15. červen 1975, Vsetín.

*Trvalé bydliště:* Majdalenky 15, 638 00 Brno.

*Rodinný stav:* svobodný.

*Národnost:* česká.



### Vzdělání:

2002–2003 prezenční forma postgraduálního studia na VUT v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles. Od dubna 2000 do května 2002 distanční forma studia. Téma disertační práce: Interakce mikrotrhlin s částicemi druhé fáze. Složení odborných zkoušek.

1993–1998 VUT v Brně, Fakulta strojního inženýrství, obor Matematické inženýrství. Téma diplomové práce: Interakce mikrotrhliny s hlavní trhlinou přemostěnou plastickými můstky. Státní zkouška s vyznamenáním. Za vynikající studijní výsledky a vědeckou činnost udělena cena děkana FSI VUT v Brně.

1989–1993 Střední průmyslová škola v Kopřivnici, obor Strojírenství. Maturitní zkouška: stavba a provoz strojů, strojírenská technologie, matematika, český jazyk.

Řidičský průkaz skupiny A, B.

### Praxe:

2000–2002 Nová Mosilana a.s., člen koncernu Marzotto (Itálie), úsek normování práce (ufficio tempi e metodi).

### Znalosti:

Jazyky: Italský,  
Anglický,  
Ruský.

Počítače: MS Office, Latex, Pascal, MapleV, Adobe Photoshop, HTML.

### Koníčky a zájmy:

Kresba, film, počítače.

## ABSTRACT

The presented Ph.D. thesis investigates a crack problem for an array of collinear microcracks in composite matrix with their tips allowing to terminate at inclusions interfaces. Inclusions are situated in between the neighbouring microcracks tips and exhibit different elastic properties than matrix. The problem is solved using the technique of distributed dislocations and the Bueckner principle. First using the Muschelischvili complex potentials and the Galerkin method the fundamental solution for a single dislocation lying in general point between inclusions is developed. Next this solution for a single dislocation is employed in the distribution of continuously distributed dislocations to microcracks modelling, which converts the problem to investigating the solution of a singular integral equation. The solution of singular integral equation can not be found in closed form. Instead, numerical quadrature methods based on special properties of the Jacobi polynomials are used to assemble this solution. There are investigated three configurations of microcracks in the Ph.D. thesis. The first configuration corresponds to straight microcracks which lie entirely in the matrix. The dependence of the stress intensity factor  $K_I$  on the microcracks-inclusions geometry and the mismatch of elastic properties is evaluated in this case. The second case corresponds to the straight microcracks whose tips lie at the inclusions/matrix interfaces. In this case, the dependence of the critical applied loading  $q^C$  on geometric and materials parameters is calculated. The third case deals with an assessment of the straight microcrack paths stability/instability in a periodic array of originally colinear, slowly growing microcracks.