

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta strojního inženýrství

Doc. RNDr. Josef Šlapal, CSc.

DIGITÁLNÍ TOPOLOGIE

(Teze přednášky k profesorskému jmenovacímu řízení)

BRNO 2000

© 2000 J. Šlapal
ISBN 80-214-1617-3

Představení autora

Doc. RNDr. Josef Šlapal, CSc. se narodil 21. 12. 1955 v Brně. Po absolvování Střední průmyslové školy elektrotechnické v Brně studoval v letech 1975-1980 odbornou matematiku na přírodovědecké fakultě Univerzity J. E. Purkyně v Brně. Tamtéž složil v roce 1982 rigorózní zkoušku z funkcionální analýzy, čímž získal titul RNDr., a v roce 1992 ukončil aspiranturu v algebře a teorii čísel a získal vědeckou hodnost kandidáta fyzikálně-matematických věd. V roce 1994 se habilitoval na PdF MU a stal se docentem pro obor matematika. V letech 1991-1996 byl po dvě funkční období členem Akademického senátu fakulty strojní VUT a od roku 1994 zastává funkci tajemníka pro vědecko-výzkumnou činnost na Ústavu matematiky FSI VUT.

Dráhu vysokoškolského učitele nastoupil doc. Šlapal v roce 1981 na katedře matematiky Vysoké školy báňské v Ostravě. Po pěti letech přestoupil na katedru matematiky fakulty strojní VUT v Brně, kde pracuje dodnes. Po dobu své pedagogické praxe prováděl doc. Šlapal výuku v mnoha oborech vysokoškolské matematiky. V současné době přednáší matematiku v prvním ročníku inženýrského studia a vede výuku předmětu metody diskrétní matematiky, který v r. 1996 zavedl pro studenty specializace matematické inženýrství. Navazující předmět téhož názvu také zavedl a vyučuje pro studenty doktorského studia. V oboru diskrétní matematiky rovněž působí jako školitel v doktorském studiu na Ústavu matematiky FSI. Dva studenty již úspěšně vyškolil, další dva v současné době jako školitel vede.

Na poli vědecké práce se Josef Šlapal specializuje na diskrétní matematiku. Zabývá se zejména výzkumem v oblastech obecných algebraických systémů (relační systémy, parciální algebry), teorie kategorií (kartézsky uzavřené kategorie, kategorie konvergenčních struktur) a topologie (uzávěrové operace, digitální topologie) z hlediska aplikací v computer science. Výsledky získané doc. Šlapalem jsou obsaženy v jeho padesáti vědeckých pracích, z nichž více než čtyřicet bylo již publikováno - většinou v renomovaných zahraničních časopisech. Referoval také na několika desítkách mezinárodních konferencí v Evropě a Severní Americe a na základě pozvání prezentoval svoje výsledky formou přednášek na univerzitách v SRN, USA a Kanadě. Mezinárodním uznáním kvality výsledků doc. Šlapala jsou i dva studijní pobyty v SRN, na které mu byly uděleny finanční prostředky Německou akademií věd a DAAD a které realizoval na Freie Universität Berlin, jakož i získané stipendium na jednosemestrální pobyt na University of Pittsburgh. Na svůj projekt "Obecné algebraické a topologické systémy" získal v roce 1995 tříletou grantovou podporu z GA ČR, v současné době je členem řešitelského kolektivu, který získal z GA ČR grant na tříletý projekt "Spojité a teoreticko-množinové metody v topologických a algebraických strukturách". Je též zapojen do mezifakultního výzkumného záměru na VUT s názvem "Automatizace technologií a výrobních procesů".

OBSAH

| | |
|------------------------------|----|
| Představení autora | 3 |
| 1. Úvod | 5 |
| 2. Klasický přístup | 7 |
| 3. Topologický přístup | 9 |
| 4. Relačně-uzávěrový přístup | 11 |
| Literatura | 16 |
| Abstract | 17 |

Digitální topologie

1. Úvod

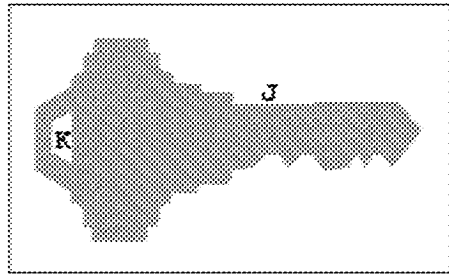
Digitální topologie je poměrně mladá disciplína computer science, která vznikla na začátku sedmdesátých let za účelem řešení problémů geometrické a topologické povahy, které se vyskytují při počítačovém zpracování obrazu. Během své existence zaznamenala bouřlivý vývoj a v současné době, která se vyznačuje masovým pronikáním digitální technologie do všech oblastí lidské činnosti, nacházejí její výsledky bohaté aplikace v počítačové grafice, počítačové tomografii, obrazové analýze, robotickém designu, atd. Užitím prostředí digitální topologie jsou řešeny základní problémy jako úspora paměti při uchovávání obrazů, ztenčování obrazů, detekce hranic, vyplňování obrysů, rozpoznávání objektů, apod. Navzdory názvu byla digitální topologie původně založena na využití nástrojů teorie grafů (viz [5], [6], [10], [11], [12]). Teprve začátkem devadesátých let byly nalezeny čistě topologické metody pro potřeby digitální topologie a mohl tak být zahájen rozvoj topologického přístupu ([3], [4], [7], [8]). Tento přístup k digitální topologii má oproti klasickému grafově-teoretickému přístupu mnohé výhody, neboť většina problémů digitální topologie se týká pojmu souvislosti, který je v topologii základním a dobře probádaným pojmem. V našem příspěvku se budeme také věnovat topologickému přístupu k digitální topologii a ukážeme, jakým způsobem jej lze

užitečně rozvinout. Popíšeme nové topologické metody, které lze s výhodou použít v digitální topologii. Nejprve však stručně připomeneme metody klasické.

Je-li n přirozené číslo, pak n -dimenzionálním digitálním obrazem rozumíme rozklad množiny Z^n (kde Z značí množinu všech celých čísel) na nejméně dvě a nejvýše konečně mnoho tříd. Každá třída je tvořena body téže barvy, přičemž barvy obvykle reprezentujeme přirozenými čísly. Například černobílý obraz je rozklad množiny Z^2 na právě dvě třídy, totiž množinu černých bodů, které obvykle značíme jako jedničky, a množinu bílých bodů, které obvykle značíme jako nuly. Z praktického hlediska mají význam především 2-dimenzionální a 3-dimenzionální digitální obrazy (avšak 4-dimenzionální obrazy jsou také užívány, a to k zachycení pohybu 3-dimenzionálních objektů, např. v tomografii k zachycení tlukotu srdce). V našem příspěvku se omezíme jen na 2-dimenzionální digitální obrazy, které jsou nejčastější. Body množiny Z^2 se obvykle nazývají pixely (anglicky pixels, což je zkratka odvozená z termínu picture elements).

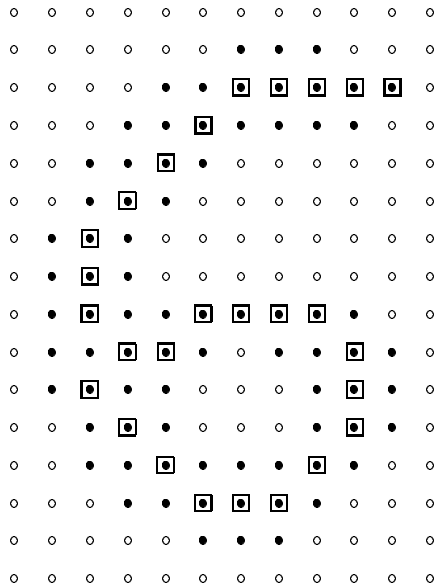
I když obrazovku monitoru lze chápat jako konečnou podmnožinu množiny \mathcal{Z}^2 , ukazuje se výhodné pracovat v digitální topologii s celou množinou \mathcal{Z}^2 . V případě černobílého obrazu tvoří obvykle černé body digitalizaci zobrazovaného objektu, zatímco bílé body tvoří pozadí. Např. v digitálním obrazu textu vytištěného na stránce papíru vytvářejí černé body digitalizaci písmen na pozadí bílých bodů, tj. příslušné stránky. Pro digitální obrazy se definují geometrické a topologické pojmy jako souvislost, hranice, křivka, atd. a digitální topologie je disciplína, která tyto pojmy studuje.

Jednoduchý příklad využití digitální topologie je demonstrován na následujícím černobílém obrázku:



K uložení uvedeného obrázku do paměti počítače je třeba specifikovat u každého jeho bodu, zda je černý či bílý. Je však možno postupovat také tak, že budeme specifikovat body ležící uvnitř uzavřené křivky J - vnějšího obrysu zobrazovaného předmětu, v našem případě klíče, avšak vně křivky K - obrysu oka. Všechny takovéto body budou černé, zatímco zbývající body budou bílé. Tímto postupem ušetříme značnou část paměti (obecně až 90%) při uchování obrazů.

Důležitou aplikaci nachází digitální topologie při rozpoznávání objektů digitálních obrazů. Zde je klíčovým problémem nalezení vhodného algoritmu pro ztenčování obrazů, tj. redukci množiny černých bodů na jistou minimální množinu, tzv. kostru. Na následujícím obrázku je ukázán efekt algoritmu ztenčování na digitální obraz čísla 6 (výsledkem je obraz, jehož černé body jsou orámovány):

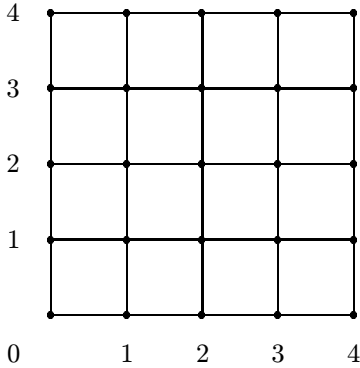


Stěžejním problémem digitální topologie je nalezení vhodné strukturace množiny \mathbb{Z}^2 , která by dovoľovala definovat základní geometrické a topologické pojmy tak, aby jejich chování splňovalo některá přirozená kritéria. Z hlediska výše zmíněných aplikací nejdůležitějším z těchto kritérií je platnost analogie Jordanovy věty. Připomeňme, že Jordanova věta říká, že jednoduchá uzavřená křivka v (reálné) rovině rozděluje tuto rovinu na právě dvě souvislé komponenty. Ukažme nyní, jak byl uvedený problém řešen klasickým přístupem založeným na teorii grafů.

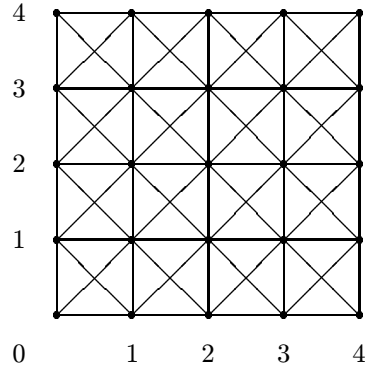
2. Klasický přístup

Bud' $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ bod. 4-přilehlým bodem k bodu (x, y) rozumíme každý ze čtyř bodů $(x \pm 1, y)$, $(x, y \pm 1)$. 8-přilehlým bodem k (x, y) rozumíme každý z osmi bodů $(x \pm 1, y)$, $(x, y \pm 1)$, $(x \pm 1, y \pm 1)$. Zřejmě tedy 4-přilehlost a 8-přilehlost jsou symetrické ireflexivní binární relace na \mathbb{Z}^2 . Na následujícím obrázku jsou obě přilehlosti znázorněny graficky: dva body množiny \mathbb{Z}^2 jsou spojeny hranou, právě když jsou 4-přilehlé, resp. 8-přilehlé.

4-přilehlost:



8-přilehlost:

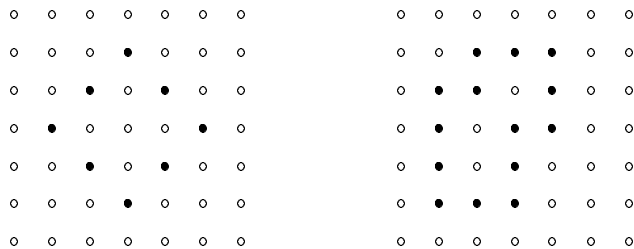


Je-li $k \in \{4, 8\}$, pak k -cestou rozumíme libovolnou konečnou posloupnost p_0, p_1, \dots, p_n bodů množiny \mathbb{Z}^2 takovou, že p_{i-1} je k -přilehlým bodem k p_i pro všechna $i = 1, \dots, n$. Množina $S \subseteq \mathbb{Z}^2$ se nazývá k -souvislá, jestliže každé dva její body lze spojit k -cestou ležící v S . k -komponentou rozumíme maximální (vzhledem k inkluzi) k -souvislou množinu.

Definice. Buď $k \in \{4, 8\}$. Jordanovská k -křivka je k -souvislá množina, která s každým svým bodem obsahuje právě dva body k němu k -přilehlé.

Věta. (A. Rosenfeld, 1975 [11]) Buď $k \in \{4, 8\}$ a necht' J je jordanovská k -křivka obsahující alespoň 5 bodů. Pak J rozděluje \mathbb{Z}^2 na právě dvě $(12 - k)$ -komponenty (tj. $\mathbb{Z}^2 - J$ se skládá z právě dvou $(12 - k)$ -komponent).

V předchozí větě nelze psát k místo $12 - k$, jak ukazují následující dva obrázky:



Na prvním obrázku je znázorněna jordanovská 8-křivka, jejíž komplement je 8-souvislý. Druhý obrázek znázorňuje jordanovskou 4-křivku, jejíž komplement má tři 4-souvislé komponenty.

Klasický přístup k digitální topologii je nevýhodný, jelikož musíme pracovat se dvěma strukturacemi množiny \mathcal{Z}^2 , se 4-přilehlostí a 8-přilehlostí. V případě dvoubarevných obrazů jednu z nich uvažujeme pro černé body a druhou pro body bílé, avšak u barevných obrazů nastávají problémy. Tyto nedostatky klasického přístupu vedly k jeho nahrazení přístupem novým, který popíšeme v následující kapitole.

3. Topologický přístup

Tento přístup je založen na využití aparátu obecné topologie. Připomeňme proto některé základní topologické pojmy.

Topologií na dané množině X rozumíme zobrazení $u : 2^X \rightarrow 2^X$ splňující následující, tzv. Kuratowského axiomy:

- (i) $u\emptyset = \emptyset$,
- (ii) $A \subseteq uA$ pro libovolnou podmnožinu $A \subseteq X$,
- (iii) $u(A \cup B) = uA \cup uB$ pro libovolné podmnožiny $A, B \subseteq X$,
- (iv) $uuA = uA$ pro libovolnou podmnožinu $A \subseteq X$.

Dvojici (X, u) pak nazýváme topologickým prostorem a pro libovolnou podmnožinu $A \subseteq X$ nazýváme množinu uA uzávěrem množiny A . Podmnožina $A \subseteq X$ se nazývá uzavřená, jestliže $uA = A$. Topologický prostor (X, u) se nazývá souvislý, jestliže pro libovolné neprázdné uzavřené množiny $A, B \subseteq X$ s vlastností $A \cup B = X$ platí $A \cap B \neq \emptyset$.

Nejznámějším (souvislým) topologickým prostorem je n -rozměrný euklidovský prostor, tedy množina \mathcal{R}^n spolu s euklidovskou vzdáleností $d(A, B)$ definovanou pro libovolnou dvojici bodů $A, B \in \mathcal{R}^n$. Euklidovská vzdálenost totiž indukuje na \mathcal{R}^n topologii u následujícím předpisem: $uA = \{X \in \mathcal{R}^n; \inf\{d(X, Y); Y \in A\} = 0\}$ pro každou podmnožinu $A \subseteq \mathcal{R}^n$.

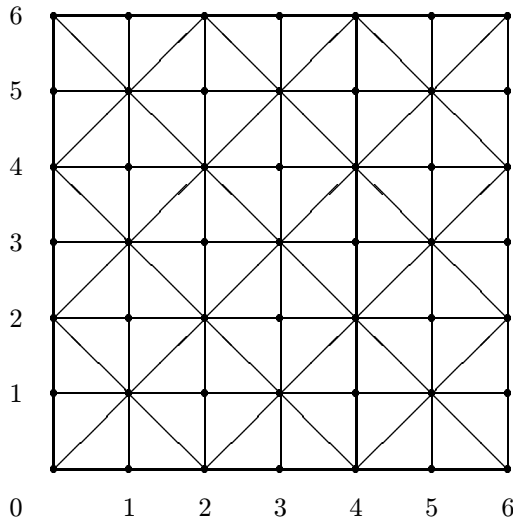
Budte (X, u) , (Y, v) topologické prostory a nechtě $Y \subseteq X$. Pak (Y, v) se nazývá podprostor prostoru (X, u) , jestliže pro každou podmnožinu $A \subseteq Y$ platí $vA = uA \cap Y$. Libovolná podmnožina Y topologického prostoru (X, u) se nazývá souvislá, jestliže podprostor (Y, v) prostoru (X, u) je souvislý. Maximální souvislá podmnožina topologického prostoru se nazývá jeho komponentou.

Topologii u na množině X (a topologický prostor (X, u)) nazýváme kvazidiskrétní, jestliže pro každou neprázdnou podmnožinu $A \subseteq X$ platí $uA = \bigcup_{x \in A} u\{x\}$. Tedy kvazidiskrétní topologie u na X je určena uzávěry všech jednoprvkových podmnožin množiny X .

Na množině \mathcal{Z}^2 je samozřejmě možno uvažovat topologii u indukovanou euklidovskou vzdáleností. Tato topologie je však neužitečná, neboť pro každou podmnožinu $A \subseteq \mathcal{Z}^2$ platí $uA = A$. Pro potřeby digitální topologie se jako nejvhodnější jeví tzv. Khalimského topologie, pojmenované podle matematika, který ji první studoval. Khalimského topologie na množině \mathcal{Z} je kvazidiskrétní topologie u na \mathcal{Z} , která je dána předpisem $u\{x\} = \{x\}$ pro každé sudé $x \in \mathcal{Z}$ a

$u\{x\} = \{x-1, x, x+1\}$ pro každé liché $x \in \mathbb{Z}$. Jestliže u je Khalimského topologie na \mathbb{Z} , pak definujeme kvazidiskrétní topologii v na \mathbb{Z}^2 vztahem $v\{(a, b)\} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2; x \in u\{a\}, y \in u\{b\}\}$ pro libovolný bod $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Topologie v na \mathbb{Z}^2 se také nazývá Khalimského topologie a topologický prostor (\mathbb{Z}^2, v) se nazývá digitální rovina. Jsou-li $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}^2$ libovolné body, pak bod z_1 se nazývá přilehlý k bodu z_2 , jestliže $z_1 \neq z_2$ a množina $\{z_1, z_2\}$ je souvislá podmnožina digitální roviny. Zřejmě je přilehlost ireflexivní symetrická binární relace na \mathbb{Z}^2 .

Na následujícím obrázku je znázorněn tzv. souvislostní graf digitální roviny, v němž jsou dva body spojeny hranou, právě když jsou navzájem přilehlé:



Z obrázku je patrné, že vzhledem k souvislosti se digitální rovina skládá ze dvou druhů bodů. Jedná se o body, k nimž přilehlými jsou právě 8-přilehlé body, a body, k nimž přilehlými jsou právě 4-přilehlé body. První z těchto bodů se nazývají čisté body a jsou to zřejmě body, jejichž obě souřadnice jsou sudé nebo liché. Druhé body se nazývají smíšené a jsou to tedy ty body, jejichž jedna souřadnice je sudá a druhá liché. Takže souvislost v digitální rovině je vlastně kombinací 8-souvislosti a 4-souvislosti.

Definice. Jordanovskou křivkou rozumíme libovolnou konečnou souvislou podmnožinu digitální roviny, která s každým svým bodem obsahuje právě dva body k němu přilehlé.

Věta. (Khalimsky, Kopperman, Meyer, 1990 [3]) Jordanovská křivka J s alespoň čtyřmi body rozděluje digitální rovinu na právě dvě komponenty (tj. podprostor $\mathcal{Z}^2 - J$ má právě dvě komponenty).

Z předchozího obrázku je patrné, že jordanovské křivky se nemohou lámat v ostrých úhlech a ve smíšených bodech dokonce ani v pravých úhlech. Tento nedostatek odstraníme volbou nového přístupu k digitální topologii.

4. Relaçně-uzávěrový přístup

Relaçně uzavěrový přístup je vlastně zobecnění přístupu topologického - místo topologie budeme pracovat s obecnější strukturou na \mathcal{Z}^2 , tzv. uzavěrovou operací. Budeme využívat konstrukce z prací [13] - [16].

Bud' X množina. Uzavěrovou operací na X rozumíme zobrazení $u : 2^X \rightarrow 2^X$ splňující následující tři axiomy:

- (I) $u\emptyset = \emptyset$,
- (II) $A \subseteq uA$ pro každou podmnožinu $A \subseteq X$,
- (III) $A \subseteq B \Rightarrow uA \subseteq uB$ pro libovolné podmnožiny $A, B \subseteq X$.

Dvojici (X, u) pak nazýváme uzavěrovým prostorem. Zřejmě je každá topologie (topologický prostor) uzavěrovou operací (uzavěrovým prostorem), neboť axiom (III) je slabší než Kuratowského axiom (iii). Naopak, uzavěrová operace u na X (uzavěrový prostor (X, u)) je topologií na X (topologickým prostorem), právě když splňuje následující dva axiomy:

- (IV) $u(A \cup B) \subseteq uA \cup uB$ pro libovolné podmnožiny $A, B \subseteq X$,
- (V) $uuA \subseteq uA$ pro libovolnou podmnožinu $A \subseteq X$.

Uzavěrové prostory byly studovány E. Čechem v jeho významném článku z r. 1937 (jehož anglický překlad je uveden v [1]). Na tyto prostory můžeme přirozeným způsobem rozšířit všechny topologické pojmy z kapitoly 3, tedy pojmy uzavřené množiny, podprostoru, souvislé podmnožiny, komponenty a kvazidiskrétnosti při zachování základních vlastností těchto pojmů.

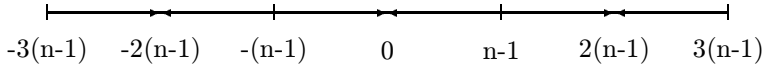
Bud' X množina a $n > 1$ přirozené číslo. Pak n -ární relací na X rozumíme libovolnou podmnožinu $R \subseteq X^n$. Jinými slovy, R je množina uspořádaných n -tic $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_i | i < n)$, kde $x_i \in X$ pro každé $i < n$. Dvojice (X, R) se potom nazývá n -ární relační systém. Uspořádaná n -tice $(x_i | i < n) \in X^n$ se nazývá konstantní, jestliže existuje $x \in X$ tak, že $x_i = x$ pro všechna $i < n$. Daná n -ární relace R na X se nazývá reflexivní, jestliže pro libovolnou konstantní n -tici $(x_i | i < n) \in X^n$ platí $(x_i | i < n) \in R$. Budte $(X, R), (Y, S)$ n -ární relační systémy. Jejich součinem rozumíme n -ární relační systém $(X \times Y, R * S)$, kde $R * S = \{((x_i, y_i) | i < n) \in (X \times Y)^n; (x_i | i < n) \in R, (y_i | i < n) \in S\}$.

Bud' R reflexivní n -ární relace na množině X a pro libovolnou podmnožinu $A \subseteq X$ položme $u_R A = \{x \in X; \text{existuje } (x_i | i < n) \in R \text{ a } i_0, 0 < i_0 < n, \text{ tak, že } x = x_{i_0} \text{ a } x_i \in A \text{ pro všechna } i < i_0\}$. Pak u_R je uzavěrová operace na X , která se nazývá asociovaná s R .

Definujme nyní n -ární relaci R_n na \mathcal{Z} následujícím způsobem:

$R_n = \{(x_i | i < n) \in \mathcal{Z}^n; (x_i | i < n) \text{ je konstantní } n\text{-tice nebo existuje liché číslo } l \in \mathcal{Z} \text{ takové, že platí buďto } x_i = l(n-1) + i \text{ pro všechna } i < n \text{ nebo } x_i = l(n-1) - i \text{ pro všechna } i < n\}$.

Tedy nekonstantní n -tice $(x_i | i < n) \in \mathcal{Z}^n$ je prvkem R_n , právě když $(x_i | i < n)$ je aritmetická posloupnost s diferencí 1 nebo -1 taková, že $x_0 = l(n-1)$, kde $l \in \mathcal{Z}$ je nějaké liché číslo. Všimněme si, že každé číslo $z \in \mathcal{Z}$ patří do alespoň jedné a nejvýše dvou nekonstantních n -tic z R_n . Zřejmě z patří do dvou (různých) nekonstantních n -tic z R_n , právě když existuje číslo $l \in \mathcal{Z}$ s vlastností $z = l(n-1)$ (a v tomto případě je z prvním členem každé z obou n -tic, jestliže l je liché, a z je posledním členem každé z obou n -tic, jestliže l je sudé). Zřejmě je R_2 uspořádání (tj. reflexivní, tranzitivní a antisymetrická binární relace) na \mathcal{Z} . Na následujícím obrázku jsou nekonstantní n -tice relace R_n reprezentovány jako šipky orientované od prvních k posledním členům těchto n -tic :



Uzávěrovou operaci u_{R_n} na \mathcal{Z} označíme stručně zymbolem u_n . Je snadno vidět, že uzávěrová operace u_2 je právě Khalimského topologie na \mathcal{Z} . Buď S_n n -ární relace na \mathcal{Z}^2 daná vztahem $S_n = R_n * R_n$ a pro každou podmnožinu $A \subseteq \mathcal{Z}^2$ položme $v_n A = u_{S_n} A$. Pak v_n je uzávěrová operace na \mathcal{Z}^2 a uzávěrový prostor (\mathcal{Z}^2, v_n) nazveme n -ární digitální rovinou. Zřejmě v_2 je Khalimského topologie na \mathcal{Z}^2 , takže pojem binární digitální roviny splývá s pojmem digitální roviny z předchozí kapitoly.

Definice. Jordanovskou křivkou v n -ární digitální rovině rozumíme konečnou souvislou množinu $J \subseteq \mathcal{Z}^2$, která splňuje následující dvě podmínky:

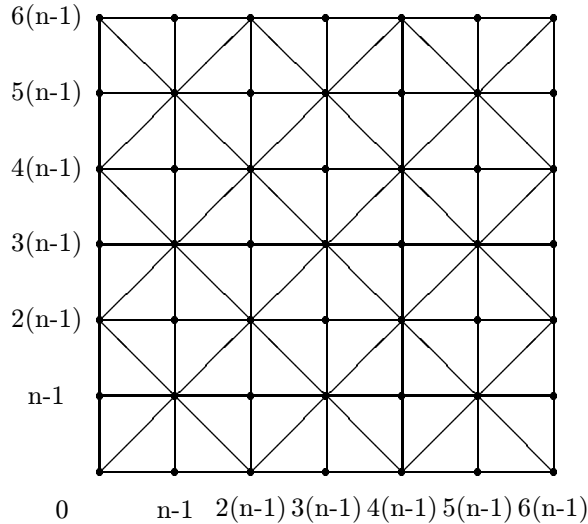
(1) Pro libovolný bod $z \in J$ má množina $T_z = \{(z_i | i < n) \in S_n; z \in \{z_i | i < n\} \subseteq J\}$ vlastnost

$$\text{card } T_z = \begin{cases} 3, & \text{jestliže existují } k, l \in \mathcal{Z} \text{ tak, že } z = (k(n-1), l(n-1)), \\ 2 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(2) Pro libovolnou n -tici $(z_i | i < n) \in S_n$ z podmínky $z_0, z_1 \in J$ plyne $\{z_i | i < n\} \subseteq J$.

Jordanovské křivky v binární digitální rovině splývají s jordanovskými křivkami definovanými v předchozí kapitole. Pro $n > 2$ jsou jordanovské křivky v n -ární digitální rovině právě kružnice v následujícím grafu, jehož hrany jsou ve skutečnosti tvořeny $(n-2)$ -ticemi bodů. (Připomeňme, že kružnicí v grafu rozumíme libovolný jeho konečný podgraf K takový, že každý uzel $p \in K$ je v K

spojen hranami s právě dvěma jinými uzly a z je možno se dostat po hranách obsažených v K do libovolného jiného uzlu grafu K .)

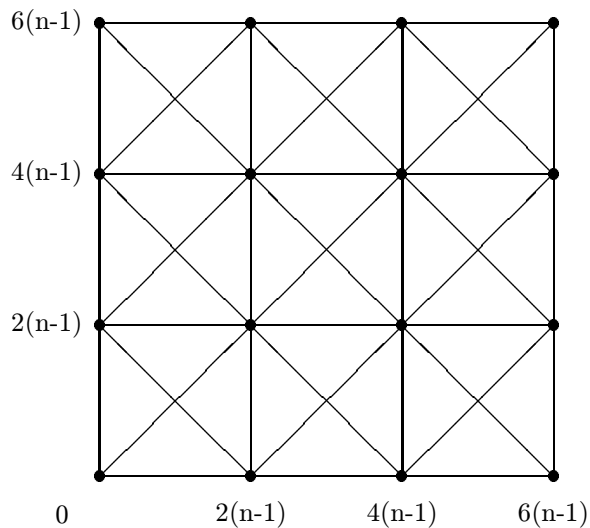


Pro libovolný bod $z \in \mathbb{Z}^2$ označme symbolem $N(z)$ množinu všech 8-přilehlých bodů k z . Zřejmě pro každou jordanovskou křivku J v n -ární digitální rovině a libovolný bod $z \in J$ platí $\text{card}(J \cap N(z)) = 2$. V souladu s předchozí kapitolou pro libovolné dva body $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{Z}^2$ označíme symbolem $d(z_1, z_2)$ jejich euklidovskou vzdálenost, tj. $d(z_1, z_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

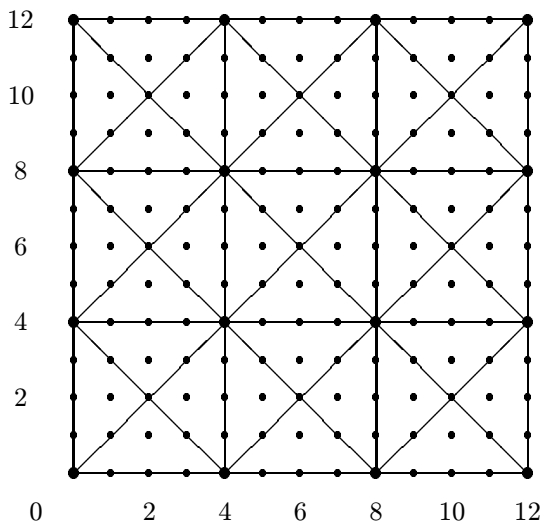
Následující věta ukazuje, že n -ární digitální rovina má pro každé $n > 1$ vhodnou strukturaci pro řešení problémů počítačového zpracování obrazů, neboť v ní platí analogie Jordanovy věty:

Věta. Buď J jordanovská křivka v n -ární digitální rovině taková, že pro libovolný bod $z \in J$ z podmínek $\{z_1, z_2\} = J \cap N(z)$ a $d(z_1, z_2) < d(z_1, z) + d(z, z_2)$ plyne existence sudých čísel $k, l \in \mathbb{Z}$ s vlastností $z = (k(n-1), l(n-1))$. Pak J rozděljuje n -ární digitální rovinu na právě dvě komponenty.

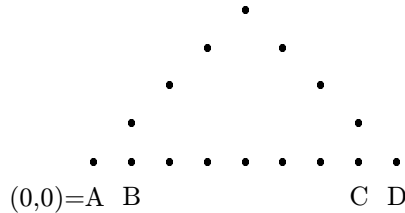
Podmínka z předchozí věty znamená, že J se může lámat pouze v bodech $(k(n-1), l(n-1))$, kde $k, l \in \mathbb{Z}$ jsou sudá čísla. Takoveto jordanovské křivky jsou pro $n > 2$ právě kružnice v následujícím grafu (jehož hrany jsou ve skutečnosti tvořeny $(2n-3)$ -ticemi bodů):



Tedy pro $n > 2$ se mohou jordanovské křivky v n -ární digitální rovině, které rozdělují tuto rovinu na právě dvě komponenty, lámat v ostrých úhlech (což není možné v případě $n = 2$). Dostáváme tak bohatší množinu těchto křivek a tedy širší možnosti aplikací než poskytuje binární digitální rovina. Pro konkrétní aplikace stačí obvykle volit nejjednodušší případ $n = 3$, pro nějž má předchozí graf následující tvar:



Zmíněnou přednost n -ární digitální roviny pro $n > 2$ oproti binární digitální rovině, tedy přednost relačně-uzávěrového přístupu v porovnání s přístupem topologickým, lze jednoduše demonstrovat na následujícím digitálním obrázku trojúhelníka:



V ternární digitální rovině je uvedený trojúhelník jordanovskou křivkou rozdělující \mathbb{Z}^2 na právě dvě komponenty, což ovšem neplatí v binární digitální rovině, tj. v případě Khalimského topologie na \mathbb{Z}^2 . Aby tento trojúhelník byl jordanovskou křivkou vzhledem ke Khalimského topologii na \mathbb{Z}^2 , musíme z něj vypustit body A,B,C a D (a pak bude ovšem také rozdělovat \mathbb{Z}^2 na právě dvě komponenty). Tím ale dojde ke značné deformaci zobrazovaného trojúhelníka. Relačně-uzávěrový přístup k digitální topologii tedy umožňuje vytváření věrnějších obrazů zobrazovaných objektů než přístup topologický. Toho lze pak s výhodou využít v nejrůznějších disciplínách při aplikaci metod založených na zpracování digitálních obrazů.

Závěrem poznamenejme, že pro každou podmnožinu $A \subseteq \mathbb{Z}^2$ n -ární digitální roviny (pro libovolné přirozené číslo $n > 1$) platí $v_n A = \bigcup \{v_n B; B \subseteq A, \text{card } B < n\}$. Tedy uzavěrová operace v_n je určena uzavěří všech podmnožin množiny \mathbb{Z}^2 mohutnosti $< n$. Proto pro $n > 2$ již v_n není kvazidiskrétní a se zvyšujícím se n má n -ární digitální rovina stále spojitější strukturu. Mohou tedy nastat i situace, kdy je výhodné pracovat s n -ární digitální rovinou pro $n > 3$.

Literatura

- [1] E. Čech, *Topological spaces*, in: Topological Papers of Eduard Čech, ch. 28, Academia, Prague, 1968, 436–472.
- [2] E. Čech, *Topological Spaces*, revised by Z. Frolík and M. Katětov, Academia, Prague, 1966.
- [3] E.D. Khalimsky, R. Kopperman and P.R. Meyer, *Computer graphics and connected topologies on finite ordered sets*, Topology Appl. 36 (1990), 1–17.
- [4] E.D. Khalimsky, R. Kopperman and P.R. Meyer, *Boundaries in digital plane*, J. Appl. Math. Stochast. Anal. 3 (1990), 27–55.
- [5] T.Y. Kong and W. Roscoe, *A theory of binary digital pictures*, Comput. Vision Graphics Image Process. 32 (1985), 221–243.
- [6] T.Y. Kong and A. Rosenfeld, *Digital topology: Introduction and survey*, Comput. Vision Graphics Image Process. 48 (1989), 357–393.
- [7] T.Y. Kong, R. Kopperman and P.R. Meyer, *A topological approach to digital topology*, Amer. Math. Monthly 98 (1991), 902–917.
- [8] R. Kopperman, P.R. Meyer and R.G. Wilson, *A Jordan surface theorem for three-dimensional digital spaces*, Discrete Comput. Geom. 6 (1991), 155–161.
- [9] G. Preuß, *Allgemeine Topologie*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.
- [10] A. Rosenfeld, *Connectivity in digital pictures*, J. Assoc. Comput. Mach. 17 (1970), 146–160.
- [11] A. Rosenfeld, *A converse to the Jordan Curve Theorem for digital curves*, Inform. and Control 29 (1975), 292–293.
- [12] A. Rosenfeld, *Digital topology*, Amer. Math. Monthly 86 (1979), 621–630.
- [13] J. Šlapal, *Relations and topologies*, Czech. Math. J. 43 (1993), 141–150.
- [14] J. Šlapal, *A Galois correspondence between closure spaces and relational systems*, Quaest. Math. 21 (1998), 187–193.
- [15] J. Šlapal, *Closure operations for digital topology*, Preprint Nr.A/7-99, Fachbereich Mathematik und Informatik, Freie Universität Berlin 1999, 10 pp.

Abstract

DIGITAL TOPOLOGY

In the paper, the two classical approaches to digital topology are reminded, namely the graph-theoretic approach and the topological one. By generalizing the topological approach a new approach to digital topology is found that is called the relation-closure approach. It is based on utilizing a special kind of closure operations associated with relations. This new approach is studied and, in particular, an analogy of the Jordan curve theorem is found. We also show the advantages of the relation-closure approach with respect to applications to digital image processing.