

**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES**

Ing. Radek Urbiš

**STABILITA TRHLINY V ČÁSTICOVĚ ZPEVNĚNÝCH  
KOMPOZITECH**

**ON THE CRACK STABILITY IN METAL  
PARTICULATE-REINFORCED BRITTLE MATRIX COMPOSITES**

PhD Thesis

*Obor:* Inženýrská mechanika

*Školitel:* Doc. RNDr. Michal Kotoul, CSc.

*Oponenti:* Prof. RNDr. Zdeněk Knésl, CSc.  
Prof. RNDr. Jaroslav Pokluda, CSc.  
Prof. Ing. Jaroslav Buchar, DrSc.

*Datum obhajoby:* 5. listopadu 2001

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

Lomová mechanika, částicově vyztužené kompozity, silně singulární integrální rovnice, ohyb čela trhliny.

## **KEY WORDS**

Fracture mechanics, Particulate reinforced composites, Strongly singular integral equations, Crack kinking.

## **MÍSTO ULOŽENÍ PRÁCE**

Knihovna FSI VUT v Brně

© 2001 Ing. Radek Urbiš

ISBN 80-214-1999-7

ISSN 1213-4198

# OBSAH

|  |    |
|--|----|
| 1. CÍL PRÁCE   | 5  |
| 2. SOUČASNÝ STAV ŘEŠENÉ PROBLEMATIKY   | 5  |
| 3. KOMBINOVANÝ ÚČINEK PŘEMOSTĚNÍ TRHLINY A<br>OHYBU ČELA TRHLINY                     | 7  |
| 3.1. Formulace problému  | 9  |
| 3.2. Lomová kritéria   | 10 |
| 3.3. Numerické výsledky a závěr  | 11 |
| 4. PARAMETRICKÁ ANALÝZA VLIVU INKLUZÍ NA LO-<br>MOVOU HOUŽEVNATOST                   | 11 |
| 4.1. Formulace problému  | 12 |
| 4.2. Mostící napětí  | 13 |
| 4.3. Lomová kritéria   | 16 |
| 4.4. Slabá pevnost rozhraní matrice/částice pro nulové zpevnění materiálu<br>částice | 16 |
| 4.5. Optimální pevnost rozhraní matrice/částice                                      | 19 |
| 4.6. Závěr   | 23 |
| SUMMARY  | 25 |
| LITERATURA   | 26 |
| SEZNAM AUTOROVÝCH PUBLIKACÍ  | 28 |
| CURRICULUM VITAE   | 29 |



# 1. CÍL PRÁCE

Jak již plyne ostatně z názvu, cílem disertační práce je studovat stabilitu trhliny v částicově zpevněných kompozitech. V dalším textu je uvedena formulace: i) *problému kombinovaného účinku přemostění trhliny a ohybu trhliny v částicově zpevněných kompozitech při smíšeném zatížení* a ii) *parametrické studie vlivu inkluzí na lomovou houževnatost*.

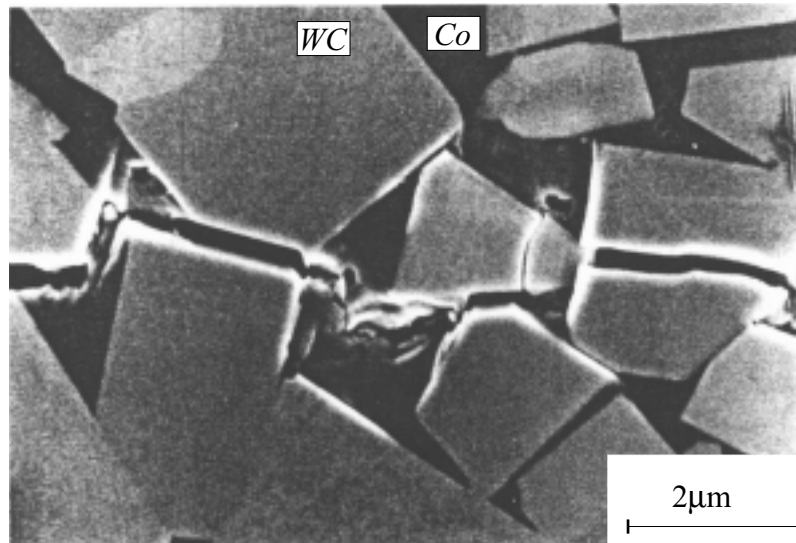
## 2. SOUČASNÝ STAV ŘEŠENÉ PROBLEMATIKY

Je známo, že smíšené zatěžování vede k ohybu trhliny. Ohyb trhliny představuje velmi sledovaný problém v lomové mechanice a v posledních dvou desetiletích byl zkoumán celou řadou autorů např. Wu [1], Lo [2], Karihaloo *et al.* [3], Bilby a Cardew [4], He a Hutchinson [5], Hayashi a Nemat-Nasser [6] a [7], Faber a Evans [8], Wu [9] a Kageyama a Chou [10]. V těchto pracích se řeší problém ohybu trhliny při okrajových podmínkách předepisujících nulové zatížení na površích trhliny. Ve skutečnosti je však mechanismus šíření trhliny ve výše zmíněných kompozitech složitější. Čelo trhliny postupuje křehkou maticí a obchází tvárné částice, které tak zůstávají za čelem trhliny. V průběhu dalšího otevírání trhliny se částice deformují plasticky a nakonec, po dosažení kritického otevření, se porušují tvárným mechanismem. Z tohoto důvodu se používá pro částice přemostující okraje trhliny název plastické můstky, či **ligamenty**. Můstky rovněž snižují otevření trhliny a tím redukuje hnací sílu trhliny. Poněvadž pro další rozšíření trhliny musí hnací síla dosáhnout kritické hodnoty, je zřejmé, že v daném případě musí vnější zatížení dosáhnout vyšší hodnoty než v případě nepřemostěné trhliny. Plastické můstky, např. částice Al v keramice  $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Al}$  nebo Co v cermetu WC/Co, se pozorují v relativně velkých vzdálenostech  $l_p$  za čelem trhliny, viz obr. 2.1 a 2.2.

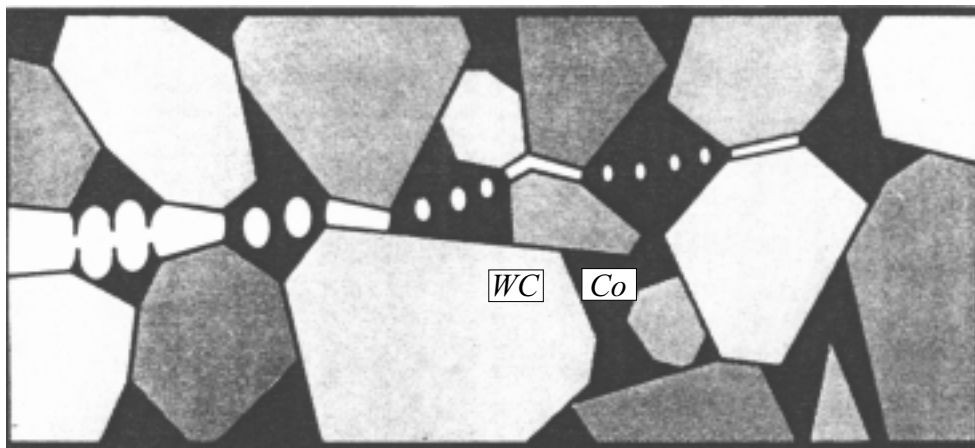
Proto se v literatuře často používá výraz **ligamentovaná zóna** pro přemostěnou část délky trhliny. Podrobnou teoretickou analýzu pro přímou trhlínu provedl Budiansky [12] a Erdogan a Joseph [13].

Výsledkem této analýzy byl poznatek, že pro účinné zvýšení lomové houževnatosti křehké matrice disperzí zhouževnatujících částic musí být splněny jisté podmínky týkající se tuhosti částic a pevnosti rozhraní matrice/částice:

1. Částice musí být elasticky měkčí než matrice, aby se mohla aktivně účastnit lomového procesu. V takovém případě je totiž interakce mezi čelem trhliny a částicí přitažlivá a způsobí mikroohyb čela trhliny ve směru k částici. Kdyby částice byla elasticky tužší, trhlina by se odklonila od částice a při svém šíření by zůstávala jen v maticí. K žádnému zvyšování lomové houževnatosti přemostěním trhliny by nedošlo.
2. Z fyzikálních úvah je zřejmé, že rostoucí tvárnost částic, tedy rostoucí kritické protažení plastických můstek, příznivě ovlivňuje výslednou lomovou houževnatost kompozitu. Sama vysoká tvárnost částice ale nestačí, protože geometrické



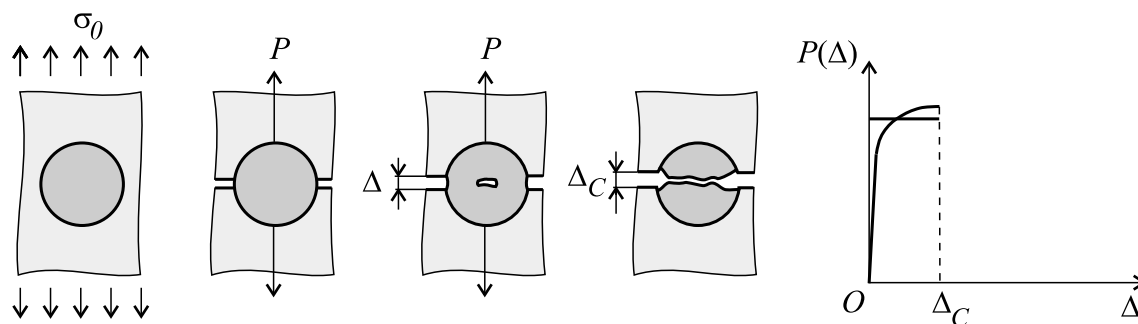
Obr. 2.1: Plastické přetvoření kobaltové fáze při tvárném porušení v kompozitu WC-Co, viz Sigl a Exner [11].



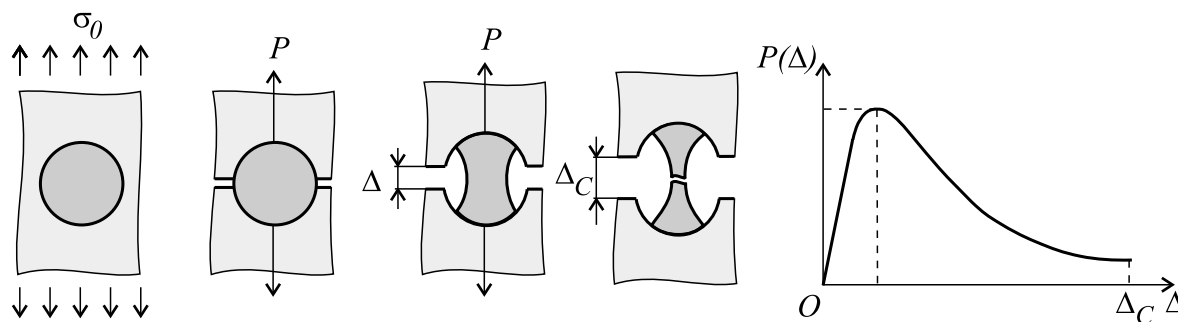
Obr. 2.2: Modelová představa přemostění trhliny v kompozitu WC/Co.

stísnění částice okolní maticí nedovolí rozvoj významnějších plastických deformací v celém objemu částice. Obr. 2.3 např. ilustruje případ, kdy pevnost rozhraní matrice/částice je vysoká a nedochází k žádné dekohezi. Plastická deformace se pak lokalizuje jen v tenké vrstvě ležící v rovině trhliny a kritické otevření trhliny  $\Delta_C$  pro přetržení této vrstvy je nízké. Na druhou stranu nízká pevnost rozhraní by vedla k celkové dekohezi částice a účinek přemostění trhliny by byl nevýznamný. Nedošlo by k žádnému zvýšení lomové houževnatosti kompozitu. Optimální situaci ilustruje obr. 2.4. Částečná dekoheze rozhraní umožní významné plastické deformace téměř v celém objemu částice a vznik krčku. Relativně nízká pevnost částice stačí k udržení rovnováhy se zbytkovou výslednou silou  $P$  na rozhraní matrice/částice. Obrázky 2.3 a 2.4 rovněž kvalitativně ukazují průběh přemostující síly  $P$  v závislosti na otevření trhliny a pevnosti rozhraní. Závislost přemostující síly  $P$  na otevření trhliny se většinou stanovují empiricky, viz např. Erdogan

a Joseph [13]. Nevýhodou je několik empirických konstant, které je zapotřebí stanovit pomocí speciálních cílených experimentů.



Obr. 2.3: Model částice s vysokou pevností rozhraní matrice/částice a schematická závislost síly přenášené částicí na otevření trhliny.



Obr. 2.4: Model částice s optimální pevností rozhraní matrice/částice a schematická závislost síly přenášené částicí na otevření trhliny.

### 3. KOMBINOVANÝ ÚČINEK PŘEMOSTĚNÍ TRHLINY A OHYBU ČELA TRHLINY

Ještě jednou připomeňme, že ohyb trhliny jedním z důležitých mechanismů zvyšování lomové houževnatosti kompozitních materiálů tvořených křehkou maticí zhouževnanou distribucí částic schopných plastické deformace. Ohyb trhliny je úzce spojen se smíšeným módem zatěžování, kdy napjatost na čele trhliny je popsána kombinací otevíracího módu I, smykového módu II a případně antirovinného smyku III. V této souvislosti vzniká také otázka formulace vhodného kritéria stability trhliny, viz Wu [9].

Pro zjednodušení matematického modelování uzavírajících sil se nahradí izolované můstky kontinuem s efektivním normálovým napětím  $s_0$ , které působí do specifikované vzdálenosti  $l_p$  za čelem trhliny, viz Smith [14], určené délkou ligamentované zóny a předpokládá se, že můstky nepřenášejí smykové napětí. Síla přenášená ligamenty podél trhliny je funkcí polohy a tedy otevření trhliny. Efektivní normálové napětí  $s_0$  lze svázat se zbytkovou silou  $P$  přenášenou jedním plastickým můstkem následujícím

postupem: necht'  $R$  je poloměr nedeformovaných částic a pomocí  $l$  střední mezičásticovou vzdálenost. Pak  $s_0 = P/l^2$ , přičemž  $R/l = (3f/(4P))^{1/3}$ , kde  $f$  je objemový podíl částic. Takže

$$s_0 = \frac{P}{R^2} \left( \frac{3f}{4P} \right)^{2/3}. \quad (3.1)$$

V první části disertační práce, věnované kombinovanému účinku přemostění trhliny a ohybu čela trhliny, se pro jednoduchost uvažuje mostící síla přenášená jednou částicí  $P$  konstantní a tedy i  $s_0$  konstantní, viz obr. 2.3, a v druhé části, věnované parametrické analýze vlivu inkluzí na lomovou houževnatost přímé trhliny, je již  $P$  i  $s_0$  funkcí polohy a rozevření trhliny, viz obr. 2.4. Pro postup **fyzikálního vrcholu trhliny**, tj. místa, za kterým se nacházejí volné povrchy trhliny, je nezbytné splnit dvě podmínky:

1. podmínku šíření čela trhliny v křehké matrici,
2. podmínku kritického otevření trhliny pro tvárné porušení plastických můstků.

Tyto podmínky je nutné splnit současně. Samotné splnění 1. podmínky nemusí totiž automaticky zajistit takové rozevření trhliny na konci ligamentované zóny, aby došlo k přerušení můstků a tím k posunu k fyzikálního vrcholu trhliny. Kritéria daného typu byla použita také v práci Kotoula a Profanta [15].

Studium součinnosti mechanismu ohybu trhliny a vlivu plastických můstků na stabilitu trhliny je jedním z cílů disertační práce. Za tímto účelem je analyzován problém šíření trhliny v kompozitním materiálu typu křehké matrice s distribucí částic schopných plastické deformace v podmínkách smíšeného zatěžování I a II. Protože částice se deformují pružně-plasticky jen tehdy, když přemostují trhlínu, modeluje se uvedený problém jako lineární elastické izotropní prostředí s hlavní trhlínou, přičemž elastické konstanty prostředí odpovídají homogenizovaným elastickým konstantám kompozitu, které lze stanovit např. podle směšovacího pravidla. Aplikované zatížení je charakterizováno nominálními součiniteli intenzity napětí  $K_I^N$  a  $K_{II}^N$ . Smíšený mód zatěžování způsobí ohyb trhliny a lokální stav napětí před čelem trhliny je popsán dvojicí lokálních součinitelů intenzity  $K_I^{lok}$  a  $K_{II}^{lok}$ . Na rozdíl od předešlých prací se uvažuje, že ohyb je přemostěn izolovanými tvárnými můstky, které vedou ke vzniku uzavírajících sil. Lomová kritéria jsou vyjádřena pomocí  $K_I^{lok}$  a  $K_{II}^{lok}$  a velikosti otevření trhliny v místě ohybu  $\Delta$ .

Předpokládá se, že k porušení křehké matrice dojde podle kritéria maximálního tahového napětí před čelem trhliny, což je ekvivalentní s podmínkou  $K_{II}^{lok} = 0$ , zatímco  $K_I^{lok}$  dosahuje hodnoty lomové houževnatosti matrice  $K_{IC}$ . Podmínka kritického otevření  $\Delta = \Delta_C$  je nejdříve splněna na konci ligamentované zóny, tj. v tomto případě v bodě ohybu. Kritické otevření trhliny  $\Delta_C$  vstupuje do výpočtu mezních křivek stability trhliny v  $K_I^N - K_{II}^N$  rovině pouze prostřednictvím bezrozměrného pevnostního parametru

$$A = \frac{E\Delta_C s_0}{(1 - \nu^2)K_{IC}^2} \quad (3.2)$$

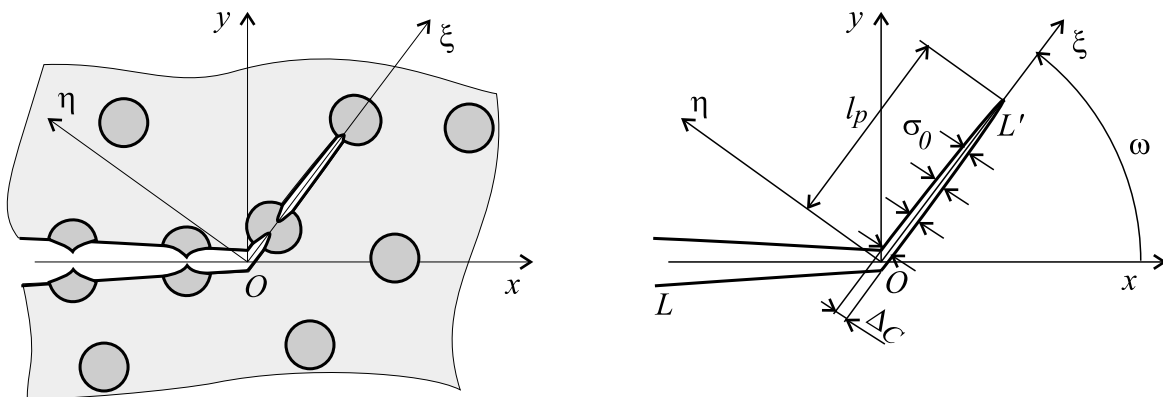


charakterizujícího daný kompozit. Pro přímou trhlinu zatěžovanou pouze v módu I je zvýšení lomové houževnatosti částicového kompozitu vůči křehké matici popsáno jednoduchým vztahem  $(K_I/K_{IC})_{ef} = \sqrt{1+A}$ , kde  $(K_I)_{ef}$  je efektivní lomová houževnatost kompozitu. Z měření veličiny  $(K_I)_{ef}$  je pak možné stanovit parametr  $A$ . Kromě přímého měření veličiny  $\Delta_C$  byl proveden také teoretický odhad pomocí numerické simulace metodou konečných prvků deformace jedné částice vložené do křehké matrice, viz Sigl *et al.* [16] a Tvergaard [17] a [18]. Typický obor hodnot parametru  $A$  je pro celou řadu částicově zpevněných kompozitů  $A \in \langle 0,5;5 \rangle$ , viz Erdogan a Joseph [13].

Při řešení okrajové úlohy pro ohyb trhliny je výhodné popsat ohnutou část trhliny pomocí neznámé distribuce hranových dislokací a úlohu převést na systém integrálních rovnic pro neznámou hustotu dislokací. V posledních deseti letech se při řešení lomové mechanických problémů v částicových, resp. vláknových kompozitech, velmi ujala metoda singulárních integrálních rovnic se silnou singularitou, viz Ioakimidis [19], Kaya a Erdogan [20] a Nemat–Nasser a Hori [21], ve kterých singulární část integrálů neexistuje dokonce ani v Cauchyho smyslu hlavní hodnoty. Tyto integrály je nutné vyčíslit ve smyslu Hadamardovy koncepce konečné části divergentního integrálu, viz Hadamard [22]. Hori a Nemat–Nasser [23] a Willis a Nemat–Nasser [24] vyvinuli metodu pro nalezení asymptotického řešení pro třídu silně singulárních rovnic obsahujících malý parametr. Tento postup nachází uplatnění při výpočtu lokálních součinitelů intenzity napětí, když uzavírající síly v můstcích závisejí nelineárně na otevření trhliny.

### 3.1. Formulace problému

Uvažujme dvourozměrné prostředí s hlavní trhlinou, jejíž délka je značně větší než charakteristické rozměry mikrostruktury (střední vzdálenost částic, velikost částic, apod.) a než délka ohnuté části trhliny  $L'$ , viz obr. 3.5. Dále se předpokládá, že interakce mezi hlavní trhlinou  $L$  a vznikajícím ohybem není ovlivněna hranicemi tělesa. Pak je možné přijmout model polonekonečné trhliny zatížené v módu I a II dvojicí



Obr. 3.5: Schéma geometrie přemostěného ohybu trhliny.

nominálními (aplikovanými) součiniteli intenzity napětí  $K_I^N$  a  $K_{II}^N$ , které reprezentují zatížení v nekonečnu. Přítomnost  $K_{II}^N$  vede k nesymetrii napětového pole vzhledem k ose  $x$  a trhlinka se může rozšířit ve směru, který svírá úhel  $w$  s hlavní trhlinou  $L$ . Součinitelé  $K_I^N$  a  $K_{II}^N$  slouží jako zatěžující parametry a mohou být stanoveny řešením odpovídající úlohy na makroúrovni např. metodou konečných prvků. Dále se předpokládá, že interakce ohnuté části trhliny  $L'$  a hlavní trhliny  $L$  je jen slabě ovlivněna přítomností částic v matici a v dalším se proto kompozit modeluje jako izotropní homogenní a lineárně elastické prostředí. Pevný kartézský systém  $x, y$  je zvolen tak, že polonekonečná trhlina  $L$  leží podél záporné osy  $x$ . Ohnutá část trhliny  $L'$  leží na ose  $x$  a vychází z bodu  $(0,0)$  do bodu  $(0, l_p)$  v potočeném kartézském souřadném systému  $x, h$ , viz obr. 3.5. Úkolem je nalézt lokální součinitele intenzity napětí  $K_I^{lok}$  a  $K_{II}^{lok}$  na čele ohybu trhliny a otevření trhliny podél ohnuté části trhliny  $L'$  pro zadané aplikované součinitele intenzity napětí  $K_I^N$  a  $K_{II}^N$  a sestavit vhodné kritérium stability trhliny.

Úloha je řešena pomocí Muschelišviliho komplexních potenciálů  $\Phi$  a  $\Psi$ . Okrajové podmínky lze pomocí Muschelišviliho komplexních potenciálů, viz Muschelišvili [25], vyjádřit takto:

1. na povrchu hlavní trhliny  $L$

$$s_{yy} - i s_{xy} = \Phi(x) + \overline{\Phi(x)} + x\overline{\Phi'(x)} + \overline{\Psi(x)} = 0 \quad \text{pro } x \in L, \quad (3.3)$$

2. na povrchu ohybu  $L'$

$$s_{hh} - i s_{xh} = \hat{\Phi}(x) + \overline{\hat{\Phi}(x)} + x\overline{\hat{\Phi}'(x)} + \overline{\hat{\Psi}(x)} = s_0 \quad \text{pro } x \in L', \quad (3.4)$$

kde symboly  $\hat{\Phi}$  a  $\hat{\Psi}$  značí odpovídající komplexní potenciály v kartézském souřadném systému  $x, h$ ,

3. pro bod  $z = x + iy \rightarrow \infty$  napětí konvergují podle

$$s_{yy} - i s_{xy} \rightarrow \frac{K_I^N - i K_{II}^N}{\sqrt{2pz}}. \quad (3.5)$$

### 3.2. Lomová kritéria

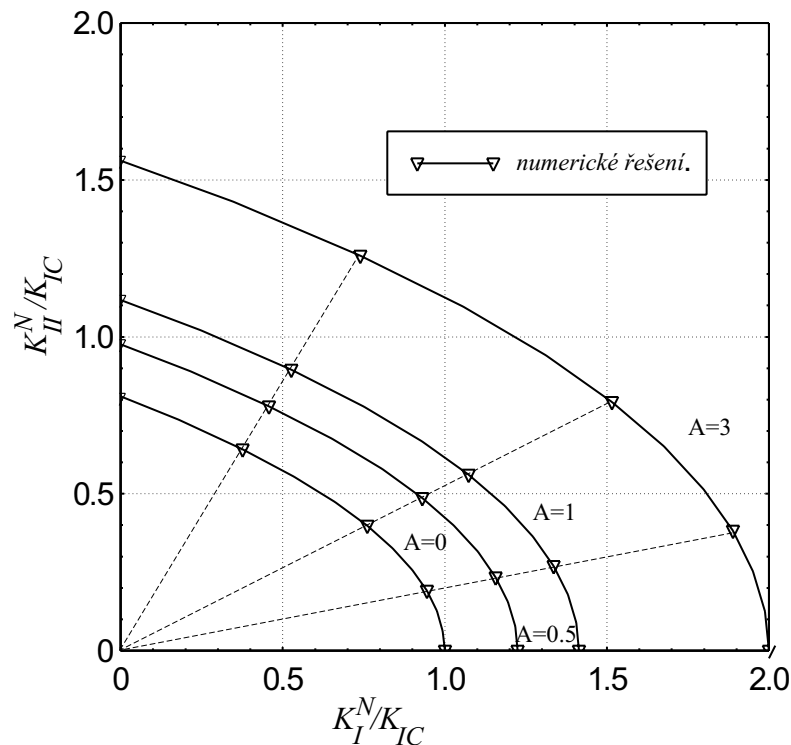
Jak již bylo zmíněno v kapitole 3, pro postup fyzikálního vrcholu trhliny je nezbytné splnit současně tyto podmínky:

$$K_I^{lok} = K_{IC}, \quad K_{II}^{lok} = 0, \quad \Delta_h(x=0) = \Delta_C. \quad (3.6)$$

První dvě podmínky vyjadřují předpoklad křehkého porušení podle kritéria maximálního tahového napětí (MTS kritérium). Třetí podmínka kontroluje tvárné porušení plastických můstků za čelem trhliny za předpokladu, že ligamenty přenášejí pouze normálové napětí.

### 3.3. Numerické výsledky a závěr

Řešení těchto kritérií pro hodnoty aplikovaných součinitelů intenzity napětí  $K_I^N$  a  $K_{II}^N$  dává **mezní křivky** v rovině  $K_I^N - K_{II}^N$ , které vymezují oblast stability trhliny, viz obr. 3.6. Tyto mezní křivky názorně ilustrují silný účinek tvárných částic na zvýšení odporu materiálu proti šíření trhliny.



Obr. 3.6: Exaktní mezní křivky (plné čáry) a aproximativní (čárkované čáry) mezní křivky pro hodnoty bimateriálového pevnostního parametru  $A = 0; 0,5; 1; 3$ .

Je účelné mít jednoduché analytické vyjádření pro tyto mezní křivky. Ukazuje se, že **parametrizovaná soustava parabol** s parametrem  $A$

$$8 \left( \frac{K_{II}^N}{K_{IC}} \right)^2 + 5 \left( \frac{K_I^N}{K_{IC}} \right) \sqrt{1+A} - 5(1+A) = 0, \quad (3.7)$$

fituje velice dobře numericky získané křivky. Toto proložení není na obr. 3.6 uvedeno, protože v grafické podobě je prakticky nerozlišitelné od numerických hodnot.

V tab. 1 je provedeno **srovnání predikce směrů šíření trhliny** zatížené pouze v módu II podle různých kritérií.

## 4. PARAMETRICKÁ ANALÝZA VLIVU INKLUZÍ NA LOMOVOU HOUŽEVNATOST

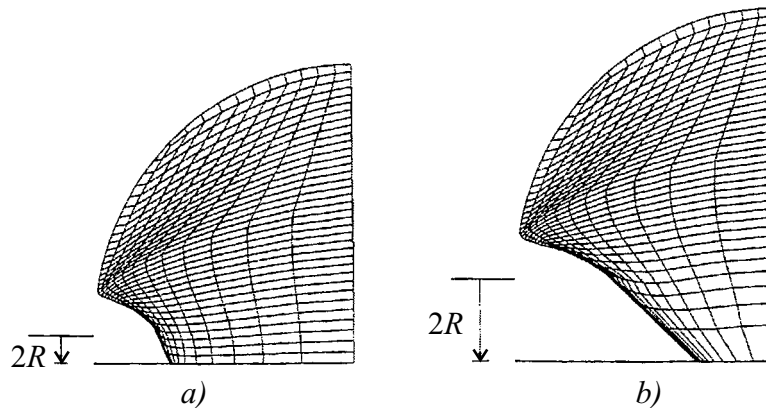
Experimentální pozorování jednoznačně dokládají, že se lomová houževnatost křehkého materiálu zvýší vlivem distribuce tvárných částic. I když podstata mechanismu

| úhel ohybu podle různých kritérií |               |  |                 |
|-----------------------------------|---------------|--|-----------------|
| S - kritérium pro $n = 0.3$ [26]  | MTS kritérium | Energetické kritérium $G = \frac{1-n^2}{E} (K_I^{lok^2} + K_{II}^{lok^2})$ | Kritérium (3.6) |
| $-83.3^\circ$                     | $-82.8^\circ$ | $-75.8^\circ$  | $-79.2^\circ$   |

Tab. 1: Predikce směru šíření trhliny zatížené pouze v módu II podle různých kritérií.

je prostá, metody kvantitativního vyhodnocování procesů vedoucích ke zvýšení houževnatosti nejsou stále na uspokojující úrovni.

Autoři Rubinstein a Wang [27] nedávno navrhli jednoduchý mikromechanický model deformace přemostující sférické částice v závislosti na pevnosti rozhraní matrice/částice. Předpokládají, že ta část objemu částice, která je podrobená plastické deformaci, se nemění. Pevnost rozhraní matrice/částice je charakterizována prostřednictvím geometrického parametru (křivost  $k$  zvoleného parabolického profilu), který ovlivňuje výsledné přetvoření částic a je zaveden do modelu tak, aby tvar přetvořené částice odpovídal numerickým výsledkům, které obdržel Tvergaard [17], [18] pomocí metody konečných prvků, viz obr. 4.7.

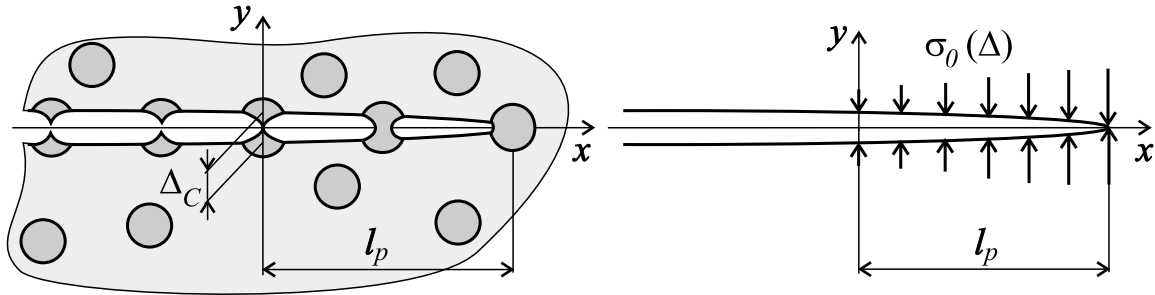


Obr. 4.7: Tvar přetvořené částice pro koeficient zpevnění materiálu částice  $n = 0,1$  a různé hodnoty normovaného otevření trhliny a)  $\Delta/2R = 0,102$ , b)  $\Delta/2R = 0,304$  převzato od Tvergaarda [17].

#### 4.1. Formulace problému

Nechť délka trhliny je značně větší než charakteristické dimenze mikrostruktury (střední vzdálenost částic, velikost částic, apod.) a než délka ligamentované zóny a interakce mezi hlavní trhlinou a ligamentovanou zónou není ovlivněna hranicemi tělesa. Pak je možné přijmout model polonekonečné trhliny zatížené v módu I nominálním (aplikovaným) součinitelem intenzity napětí  $K_I^N$ , který reprezentuje zatížení v nekonečnu. Součinitel  $K_I^N$  slouží jako zatěžující parametr a může být stanoven řešením odpovídající úlohy na makroúrovni např. metodou konečných prvků. Předpokládá

se, že interakce ligamentované zóny a volných povrchů trhliny je jen slabě ovlivněna přítomností částic v matrici a v dalším se proto uvažuje kompozit jako izotropní homogenní a lineárně elastické prostředí. Pevný kartézský systém  $x, y$  je zvolen tak, že polonekonečná trhlina leží podél záporné osy  $x$ . Úkolem je nalézt lokální součinitel intenzity napětí  $K_I^{lok}$  na čele ligamentované zóny trhliny a otevření trhliny podél této zóny pro zadaný aplikovaný součinitel intenzity napětí  $K_I^N$  a sestavit vhodné kritérium stability trhliny. Úloha znázorněná na obr. 4.8 je opět řešena pomocí Muschelišviliho



Obr. 4.8: Schéma geometrie trhliny a souřadnicový systém.

komplexních potenciálů  $\Phi(z)$  a  $\Psi(z)$ , kde  $z = x + iy$ . Symetrie problému umožňuje svázat potenciály vztahem  $\Psi(z) = -z\Phi'(z)$ . Okrajové podmínky lze pomocí Muschelišviliho komplexních potenciálů v tomto případě vyjádřit takto:

$$\begin{aligned} 2\text{Re}(\Phi(z)) &= \begin{cases} 0 & x + i0 \leq 0, \\ s_0(x) & 0 < x + i0 \leq l_p, \end{cases} \\ \text{Im}(\Phi(z)) &= 0, \quad l_p < x + i0, \\ \Phi(z) &\rightarrow \frac{K_I^N}{2\sqrt{2p(z-l_p)}} \quad \text{pro } z \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.1)$$

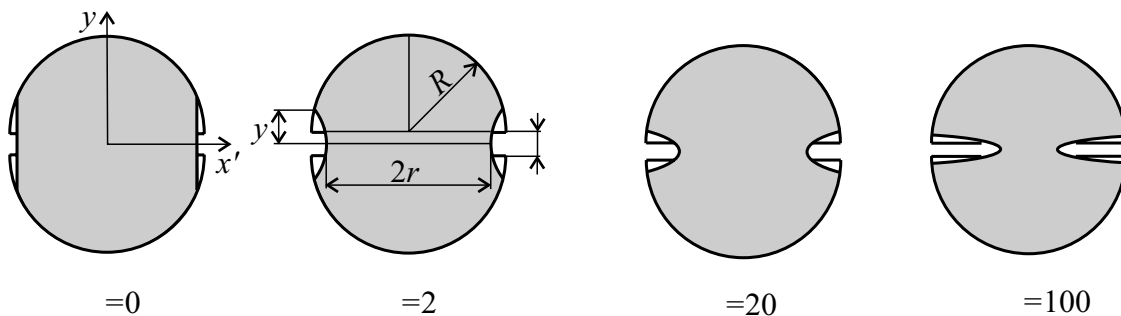
Analogicky jako v kapitole 3.1 je ligamentovaná zóna opět modelována pomocí neznámé distribuce hranových dislokací a okrajová úloha se převádí na integrální rovnici pro neznámou hustotu dislokací.

## 4.2. Mostící napětí

Dále se zaměříme na odvození závislosti  $s_0(\Delta(r)/R)$ . Z obr. 4.9 vyplývá, že původní sférická částice vytváří v průběhu deformace krček s parabolickým profilem. Nechť  $r$  je poloměr nosného průřezu částice a  $y$  vertikální souřadnice průsečíku parabolického krčku s nedeformovanou sférickou částí inkluze. Pak lze tyto veličiny svázat vztahem

$$\frac{r}{R} = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{R} - \frac{\Delta(r)}{2R}\right)^2} - \frac{k}{2} \left(\frac{y}{R}\right)^2, \quad (4.2)$$

kde  $k$  představuje křivost zvoleného parabolického profilu  $x'/R = k/2(y/R)^2 + r/R$ . (Pozn. souřadnicový systém  $x', y$  má počátek ve středu částice.) Z obr. 4.9 je vidět, že

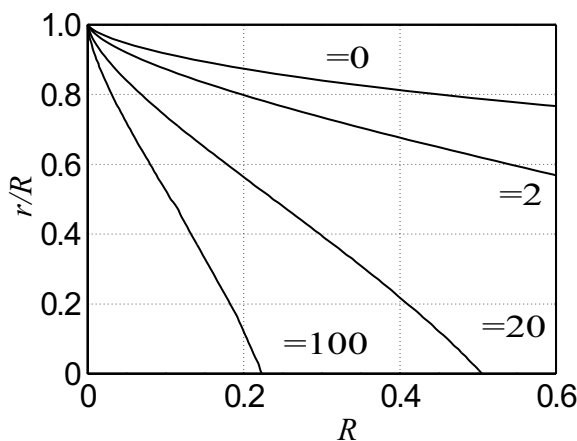


Obr. 4.9: Tvar deformované částice pro různé hodnoty parametru pevnosti rozhraní  $k = 0$  - slabé rozhraní,  $k = 2$ ,  $k = 20$  - středně pevné rozhraní a  $k = 100$  - pevné rozhraní.

tento parametr determinuje rozsah dekoheze rozhraní matrice/částice. Je tedy v těsném vztahu s pevností tohoto rozhraní a lze jej užívat jako jeden z kompozitních parametrů. Záporné hodnoty  $k$  odpovídají parabole otočené o  $180^\circ$  a popisují úplnou dekohezi částice a matrice, čímž je ovšem příznivý vliv částic na zvýšení lomové houževnatosti ztracen. Další rovnice pro stanovení  $r$ ,  $y$  a otevření trhliny  $\Delta(r)$  vyplývají z požadavku konstantního objemu během plastické deformace

$$2 = \left(1 - \frac{y}{R} + \frac{\Delta(r)}{2R}\right)^2 \left(2 + \frac{y}{R} - \frac{\Delta(r)}{2R}\right) + 3 \left[ \frac{k^2}{20} \left(\frac{y}{R}\right)^5 + \frac{k r}{3R} \left(\frac{y}{R}\right)^3 + \frac{y}{R} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right]. \quad (4.3)$$

Na základě těchto dvou rovnic lze pro různé hodnoty křivosti  $k$  numericky vyjádřit závislost  $\Delta(r)/R = f(R/r)$ , viz obr. 4.10.



Obr. 4.10: Závislost normovaného poloměru nosného průřezu částice  $r/R$  na  $\Delta/R$  pro několik hodnot křivosti  $k$ .

Na rozdíl od Rubinsteina a Wangu [27], kteří předpokládají konstantní mostící napětí pro všechny přemostující částice ležící podél celé délky přemostění  $l_p$  za čelem trhliny, jsou tyto izolované můstky nahrazeny kontinuem s efektivním normálovým napětím  $s_0$ . Pomocí rovnic (4.2) a (4.3) lze pak vyjádřit závislost efektivního normálového

napětí  $s_0$  na velikosti otevření trhliny  $\Delta$  a pevnosti rozhraní matrice/částice pro různé hodnoty křivosti  $k$ . Do modelu je navíc zahrnut vliv stavu trojososti napětí v krčku přemostující částice pomocí Bridgmanova odhadu i vliv zpevnění této částice.

Sílu přenášenou jedním plastickým můstkem lze vyjádřit pomocí rovnice (3.1), středního axiálního napětí v krčku částice  $s_1$  a okamžitého poloměru nosného průřezu částice  $r$  jako  $P = pr^2 s_1$ . Střední axiální napětí  $s_1$  lze odhadnout pomocí Bridgmanova řešení, viz Bao a Hui [28]:

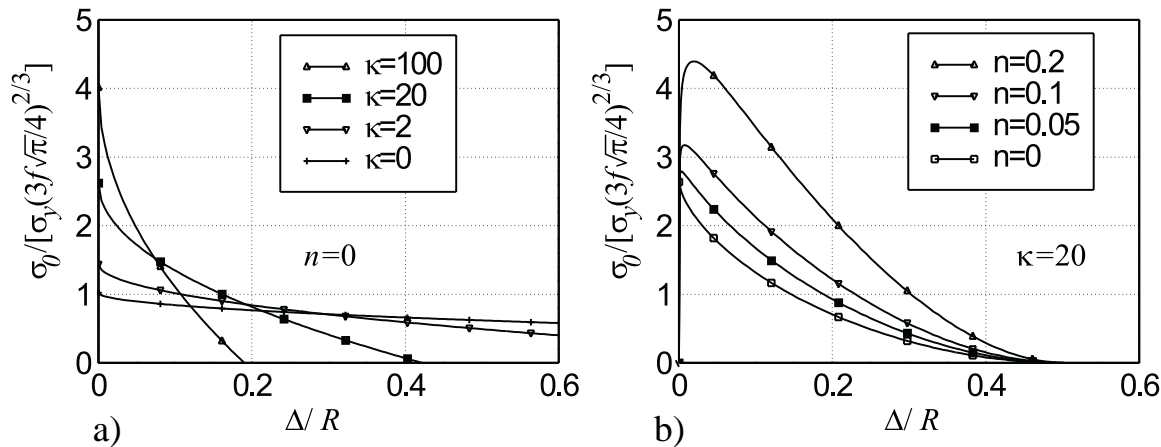
$$s_1 = s_f (1 + 2R/(kr)) \ln(1 + kr/(2R)), \quad (4.4)$$

kde  $s_f$  je deformační napětí v podmínkách jednoosé napjatosti, které lze vyjádřit pomocí Ramberg-Osgoodova vztahu  $s_f/s_y = (e/e_y)^n$ , kde  $s_y$  je mez kluzu částice,  $e_y = s_y/E_p$  ( $E_p$  je modul pružnosti v tahu částice) je odpovídající hodnota osové deformace, která je zvolena analogicky jako v práci Tvergaard [17],  $e_y = 0,005$ , a  $n$  je koeficient zpevnění materiálu částice. Osovou deformaci částice  $e$  lze vztáhnout k počátečnímu poloměru částice a k okamžité hodnotě poloměru krčku vztahem

$$e = 2 \ln(R/r). \quad (4.5)$$

Výsledné efektivní normálové napětí  $s_0$  lze odhadnout jako

$$s_0 = 2^n s_y e_y^{-n} \left( \frac{3f\sqrt{P}}{4} \right)^{2/3} \left[ \ln\left(\frac{R}{r}\right) \right]^n \left( \frac{r}{R} \right)^2 \left( 1 + \frac{2R}{kr} \right) \ln\left( 1 + \frac{kr}{2R} \right). \quad (4.6)$$



Obr. 4.11: Závislost normovaného efektivního normálového napětí na  $\Delta/R$  pro několik hodnot křivosti  $k$  a koeficientů zpevnění  $n$ .

Do tohoto vztahu se dosadí numerická závislost  $r/R = f(\Delta/R; k)$ , která vyplývá z rovnic (4.2) a (4.3) a je znázorněná na obr. 4.10. Průběh normovaného efektivního normálové napětí  $s_0 / [s_y (3f\sqrt{P}/4)^{2/3}]$  podél přemostěné zóny v závislosti na  $\Delta/R$  je vyneseno v obr. 4.11 pro několik hodnot křivosti zvoleného parabolického profilu  $k$  a koeficientů zpevnění  $n$ . Tyto křivky byly aproximovány metodou nejmenších čtverců lineární funkcí vzhledem k  $\sqrt{\Delta/R}$ , tj.

$$s_0 / \left[ s_y (3f\sqrt{P}/4)^{2/3} \right] \doteq -c_1 \sqrt{\Delta/R} + c_2, \quad (c_1 > 0, c_2 > 0). \quad (4.7)$$

Jednotlivé aproximace nejsou na obr. 4.11 vyneseny, protože jsou jen stěží rozeznatelné od numericky získaných křivek. Odmocninová závislost normovaného efektivního normálového napětí na otevření trhliny dovoluje použít *metodu asymptotického rozvoje podle malého parametru* pro řešení výsledné singulární integrální rovnice. Je zajímavé, že podobný typ závislosti byl odvozen pro vláknové kompozity na základě naprosto odlišného modelu.

### 4.3. Lomová kritéria

Nutnou podmínkou pro postup čela trhliny v matrici je obvyklé kritérium LLM, nyní vyjádřené pomocí  $K_I^{lok}$ :

$$K_I^{lok} = K_{IC}, \quad (4.8)$$

kde  $K_{IC}$  je lomová houževnatost matrice. Fyzikální vrchol trhliny se ale nachází ve vzdálenosti  $l_p$  za čelem trhliny v matrici, tj. v místech, kde došlo i k přerušení můstku a trhlina za tímto bodem nepřenese žádné tahové zatížení. Podmínka pro postup fyzikálního vrcholu trhliny tedy je

$$\Delta(x = -1) = \Delta_C, \quad (4.9)$$

kde  $\Delta_C$  je kritické otevření trhliny. Formální tvar obou podmínek je

$$F_i \left( \frac{K_I^N}{K_{IC}}, \frac{l_p}{R}; k, n, k, \frac{s_y}{E}, n, \frac{\Delta_C}{R}, f \right) = 0 \quad i = 1, 2, \quad (4.10)$$

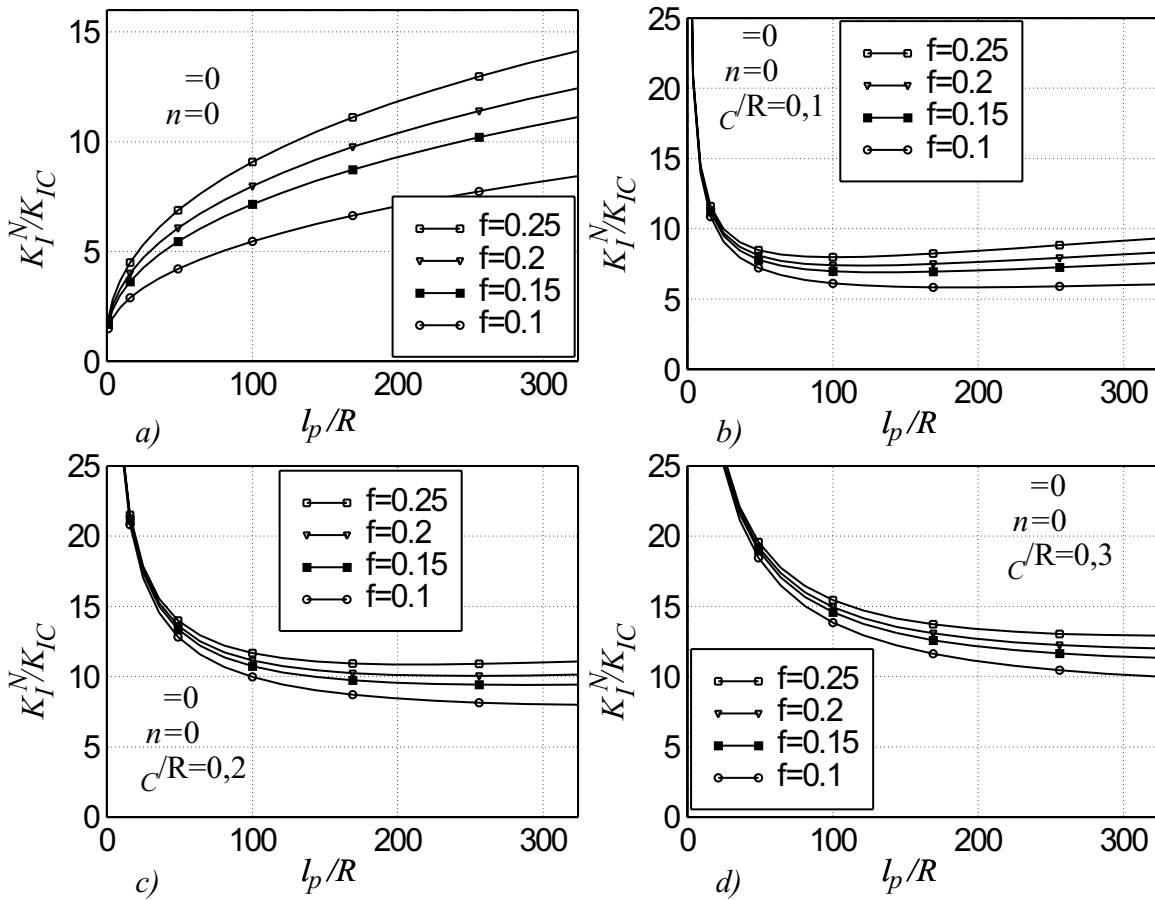
kde  $F_i$  jsou nelineární funkce proměnných  $\frac{K_I^N}{K_{IC}}$  a  $\frac{l_p}{R}$  a parametrů  $k, \frac{s_y}{E}, n, \frac{\Delta_C}{R}$  a  $f$ .

### 4.4. Slabá pevnost rozhraní matrice/částice pro nulové zpevnění materiálu částice

Nejprve se budu podrobněji zabývat případem  $k = 0$  a  $n = 0$ , protože např. studie Rubinsteina a Wanga [27] a Venkateswara Rao *et al.* [29] ukazují, že pro tuto hodnotu získáme optimální houževnatost. Velikost kritického otevření trhliny  $\Delta_C$  bude brán jako nezávislý parametr modelu. V další části se budu věnovat vlivu pevnosti rozhraní charakterizované pomocí křivosti  $k$  parabolického krčku částice a na závěr bude analyzován vliv trojososti napětí, která je taktéž funkcí křivosti  $k$  parabolického krčku.

Rovnice (4.8) a (4.9) jsou řešeny pro neznámé  $K_I^N/K_{IC}$  a  $l_p/R$ , přičemž řešení pro  $K_I^N/K_{IC}$  je označeno symbolem  $(K_I^N/K_{IC})_{ef}$ . Tato veličina, kterou nazýváme **normovanou efektivní lomovou houževnatostí kompozitu**, popisuje účinek distribuce částic na zlepšení lomové houževnatosti matrice kompozitu. Na základě rovnic (4.8) a (4.9) lze nyní studovat vliv různých parametrů modelu na  $(K_I^N/K_{IC})_{ef}$ . Obr. 4.12a ilustruje vztah mezi  $K_I^N/K_{IC}$  a  $l_p/R$  stanovený z podmínky (4.8) pro různé hodnoty  $f$ . Každá závislost mezi  $K_I^N/K_{IC}$  a  $l_p/R$ , vypočtená na základě kritéria (4.8) rozděluje



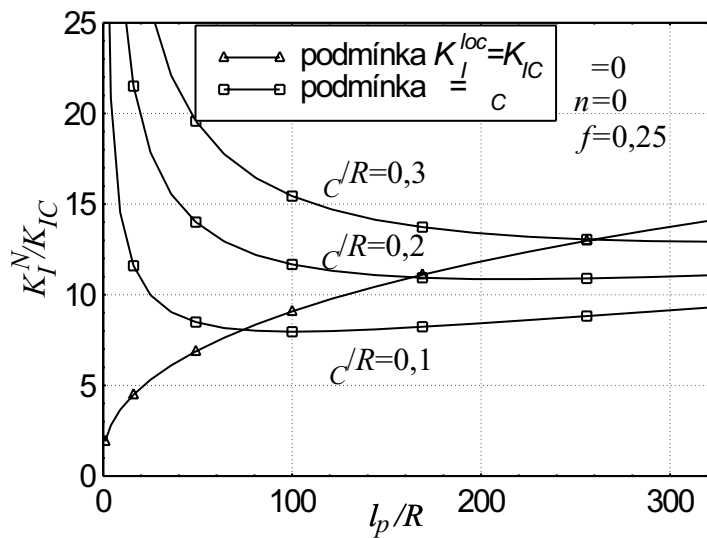


Obr. 4.12: Závislost normované lomové houževnatosti kompozitu  $K_I^N/K_{IC}$  na normované délce ligamentované zóny  $l_p/R$  pro  $k = 0,5$ ,  $n = 0$ ,  $n = 0,2$ ,  $k = 0$  a několik hodnot objemového podílu částic  $f$  a) stanovená z podmínky (4.8), b–d) stanovená z rovnice (4.9) pro různé hodnoty normovaného kritického otevření trhliny  $\Delta_C/R$ .

1. kvadrant v rovině  $l_p/R - K_I^N/K_{IC}$  na dvě oblasti: v oblasti pod křivkou nedochází k postupu čela trhliny v matrici, v oblasti nad křivkou je rozšíření trhliny v křehké matrici možné. (Závislosti mezi  $K_I^N/K_{IC}$  a  $l_p/R$ , odvozené z rovnice (4.8) nezávisí na  $\Delta_C/R$ .) Z obr. 4.12a je vidět, že hodnota  $K_I^N/K_{IC}$  nutná pro rozšíření čela trhliny v matrici roste pro danou délku ligamentované zóny  $l_p$  s poklesem velikosti částic ( $l_p/R$  roste), a s růstem objemového podílu částic  $f$ .

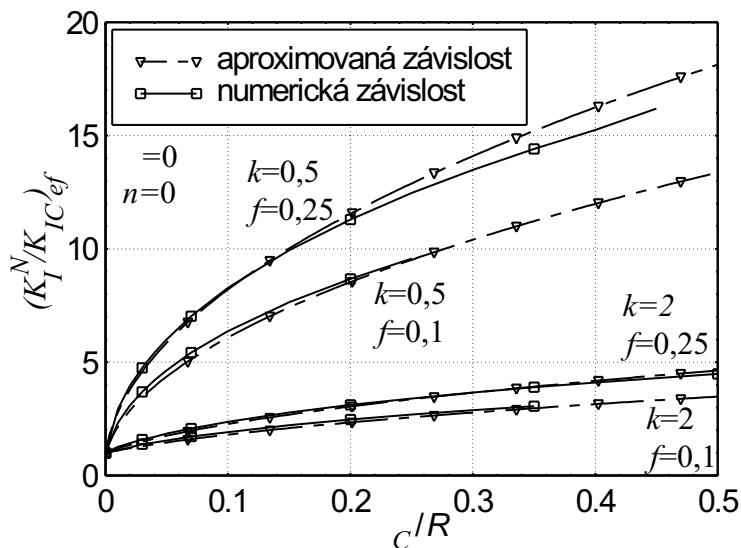
Obrázky 4.12b–d ilustrují vztah daný rovnicí (4.9) mezi  $K_I^N/K_{IC}$  a  $l_p/R$  pro několik hodnot objemového podílu částic  $f$  a několik hodnot normovaného kritického otevření trhliny  $\Delta_C/R$ . Z těchto obrázků je patrné, že hodnota  $K_I^N/K_{IC}$  nutná pro přetržení tvárných můstků klesá pro danou délku ligamentované zóny  $l_p$  s poklesem velikosti částic ( $l_p/R$  roste), a s poklesem objemového podílu částic  $f$ .

Dosavadní výsledky uváděly závislost  $K_I^N/K_{IC}$  na  $l_p/R$ , přičemž veličina  $l_p/R$  se brala jako nezávisle proměnná. Takový způsob interpretace souvisí s tím, že kritéria (4.8) a (4.9) se uvažovala odděleně. Jejich současným řešením se získá v rovině  $l_p/R - K_I^N/K_{IC}$  bod o souřadnicích  $[(l_p/R)_C, (K_I^N/K_{IC})_{ef}]$ . Jestliže do jednoho grafu



Obr. 4.13: Závislost normované lomové houževnatosti kompozitu  $K_I^N/K_{IC}$  na normované délce ligamentované zóny  $l_p/R$  stanovená z podmínek (4.8) a (4.9) pro  $k = 0,5$ ,  $n = 0$ ,  $n = 0,2$ ,  $k = 0$ ,  $f = 0,25$  a normovaného kritického otevření trhliny  $\Delta_C/R$ .

jsou vyneseny závislosti z obr. 4.12a a 4.12b–d pro stejné hodnoty objemového podílu částic  $f$ , lze se snadno přesvědčit, že svislá souřadnice jejich průsečíku  $(K_I^N/K_{IC})_{ef}$  představuje nejmenší hodnotu aplikovaného součinitele intenzity napětí, při které jsou současně splněna obě kritéria a nastane rozšíření trhliny v kompozitu, viz obr. 4.13. Dále tento obrázek ukazuje, že velikost  $(K_I^N/K_{IC})_{ef}$  závisí na  $\Delta_C/R$ .



Obr. 4.14: Numerické závislosti  $(K_I^N/K_{IC})_{ef}$  na  $\Delta_C/R$  pro  $s_y/E = 0,001$ ,  $n = 0,2$  a několik hodnot kompozitních parametrů  $k = \frac{K_{IC}}{2s_y} \sqrt{\frac{\rho}{2R}}$  a objemového podílu částic  $f$ .

Numerická řešení závislosti  $(K_I^N/K_{IC})_{ef}$  na  $\Delta_C/R$  pro několik hodnot parametrů  $k$  a  $f$  jsou uvedena na obr. 4.14. Pro praktické účely je vhodné mít k dispozici analytický vztah, který by dobře popisoval numerické závislosti a zohledňoval vliv jednotlivých

parametrů. Ukazuje se, viz obr. 4.14, že numerické výsledky dobře aproximuje následující vzorec

$$\left(\frac{K_I^N}{K_{IC}}\right)_{ef} = \sqrt{1 + \frac{350 \Delta_C}{k^2 R} \left(\frac{3f\sqrt{P}}{4}\right)^{2/3} \left(1 - 0,035\sqrt{\frac{\Delta_C}{R}}\right)}. \quad (4.11)$$

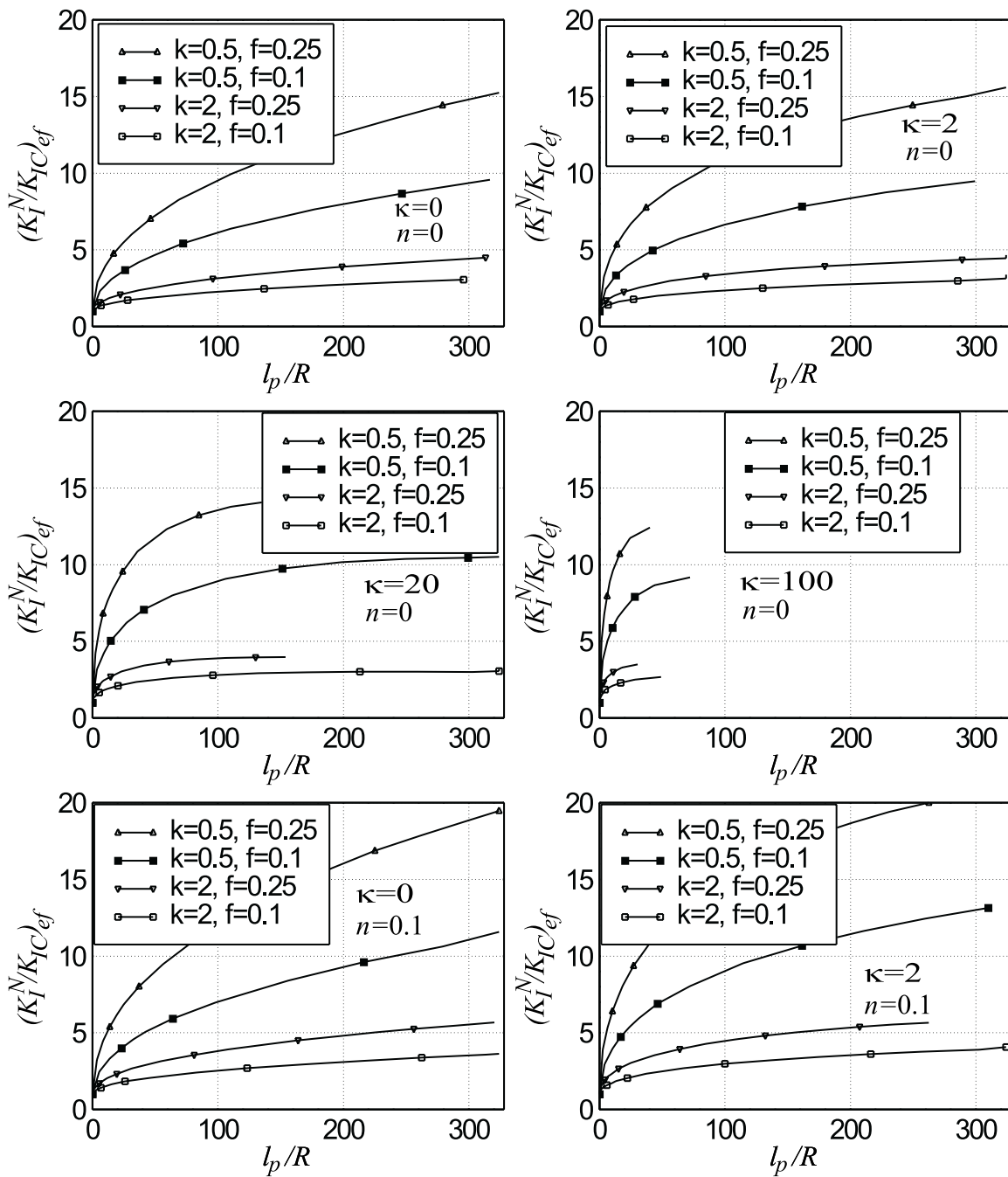
## 4.5. Optimální pevnost rozhraní matrice/částice

Na rozdíl od kapitoly 4.4, kde se předpokládá slabá pevnost rozhraní, v této kapitole se bude vyšetřovat vliv pevnosti rozhraní matrice/částice na výslednou efektivní lomovou houževnatost kompozitu. Na obr. 4.15 a 4.16 jsou uvedena numerická řešení závislosti  $(K_I^N/K_{IC})_{ef}$  na  $\Delta_C/R$  pro několik hodnot parametrů  $k$ ,  $f$ ,  $n$  a  $k$ . Z těchto obrázků vyplývá, že vyšším hodnotám objemového podílu částic  $f$  odpovídá vyšší hodnota efektivní lomové houževnatosti kompozitu. Dále, že vyšší lomová houževnatost kompozitu odpovídá nižším hodnotám parametru  $k$ , tj. větším částicím v daném kompozitním systému. Stejný trend byl zjištěn Rubinsteinem a Wangem [27].

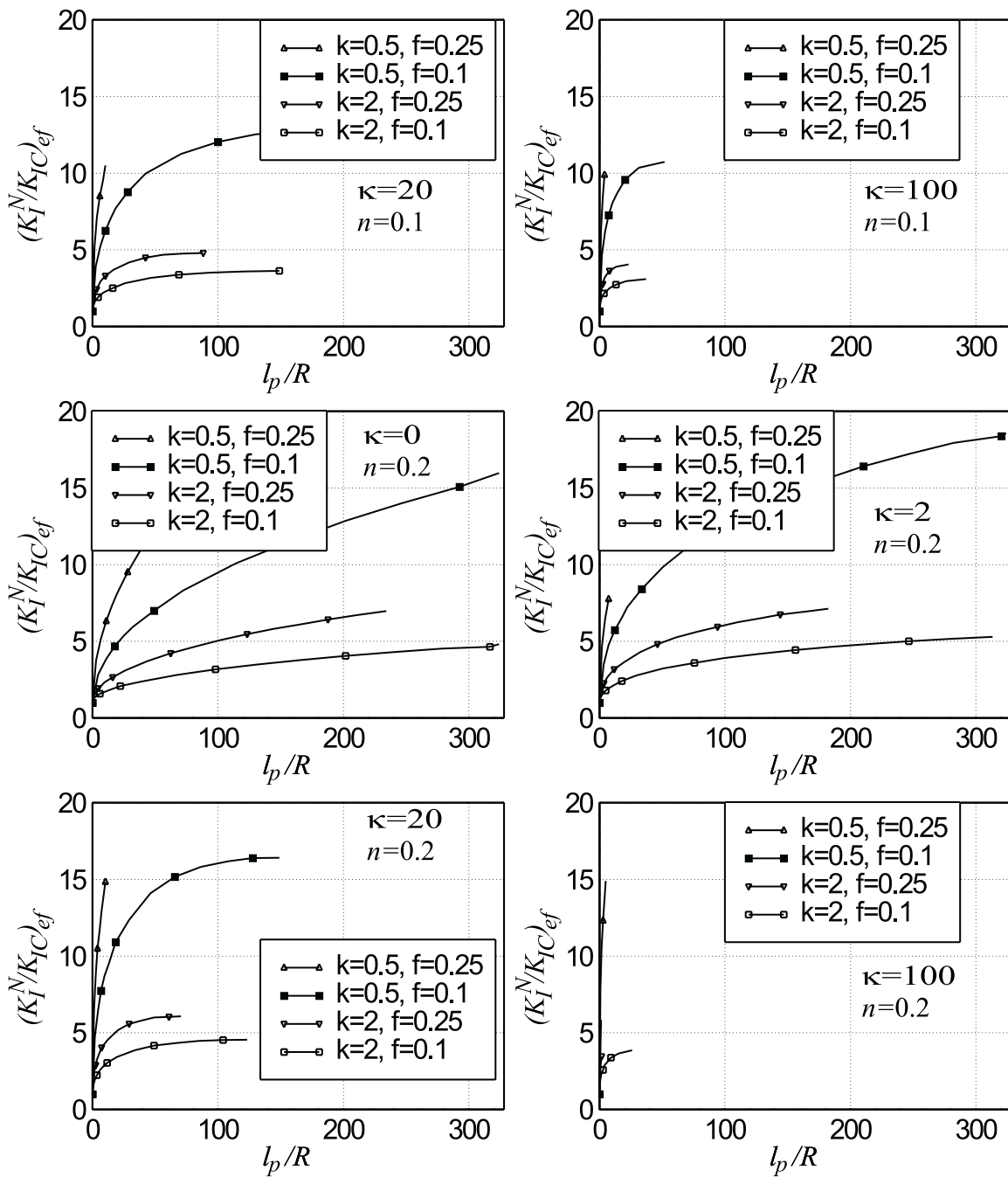
Až doposud se kritické otevření  $\Delta_C/R$  uvažovalo jako nezávislý parametr modelu, který nabýval libovolné hodnoty z intervalu  $0 < \Delta_C/R \leq \Delta_{\max}/R$ , kde  $\Delta_{\max}/R$  je průsečík křivky  $s_0/[s_y(3f\sqrt{P}/4)^{2/3}] - \Delta/R$  s vodorovnou osou  $\Delta/R$ , viz obr. 4.11. Ve skutečnosti je velikost kritického otevření  $\Delta_C/R$  závislá na tvárnosti částice a stavu trojososti napětí a je tedy funkcí křivosti  $k$  zvoleného parabolického profilu, která charakterizuje pevnost rozhraní matrice/částice. V této kapitole bude provedeno srovnání efektivní lomové houževnatosti  $(K_I^N/K_{IC})_{ef}$  pro různé hodnoty křivosti  $k$  a odpovídajícího stavu trojososti napětí pomocí mikrolomového kritéria pro přetržení tvárných částic. Předpokládá se, že k přetržení krčku tvárné částice dochází spojením mikroductin vzniklých na nehomogenitách materiálu částice.

Na základě toho rozboru lze pro dané  $(\Delta_C/R)_{k=0}$  a  $k$  vypočítat hodnotu  $(r/R)_{fr}$  a z relace  $r/R = f(\Delta/R)$ , viz obr. 4.10, určit velikost kritického otevření trhliny  $(\Delta_C/R)_{k \geq 0}$ . Výsledky těchto výpočtů jsou znázorněny na obr. 4.17, který ilustruje vztah mezi  $(\Delta_C/R)_{k \geq 0}$  a  $(\Delta_C/R)_{k=0}$  pro několik hodnot křivosti  $k$ . Z obr. 4.17 vyplývá, že kritické otevření trhliny  $(\Delta_C/R)_{k \geq 0}$  je pro větší hodnoty křivosti  $k$  značně menší než  $(\Delta_C/R)_{k=0}$  díky vlivu trojososti napětí v krčku přemostující částice.

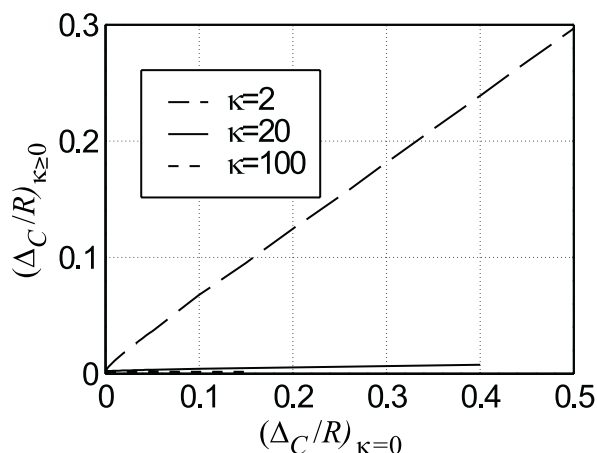
Nyní lze srovnávat hodnoty efektivní lomové houževnatosti kompozitu pro různé hodnoty křivosti  $k$  a s ohledem na vliv trojososti napětí na velikost kritického otevření trhliny. Výsledky z obr. 4.17 společně s předchozími výpočty  $(K_I^N/K_{IC})_{ef}$  z rovnic (4.8) (4.9) vedou ke vztahům mezi  $(K_I^N/K_{IC}|_{k \geq 0})_{ef}$  a  $(\Delta_C/R)_{k=0}$  znázorněným na obr. 4.18. Nezávisle proměnná  $(\Delta_C/R)_{k=0}$  charakterizuje tvárnost mostících částic při jednoosém stavu napjatosti. Obr. 4.18 dokumentuje dva protichůdné vlivy pevnosti rozhraní částice/matrice. Menší pevnost rozhraní, tj. nižší hodnota křivosti  $k$ , dovoluje vyšší hodnoty kritického otevření trhliny a tedy vede k vyšší lomové houževnatosti kompozitu. Současně však nižší stav trojososti napětí v tomto případě odpovídá nižší



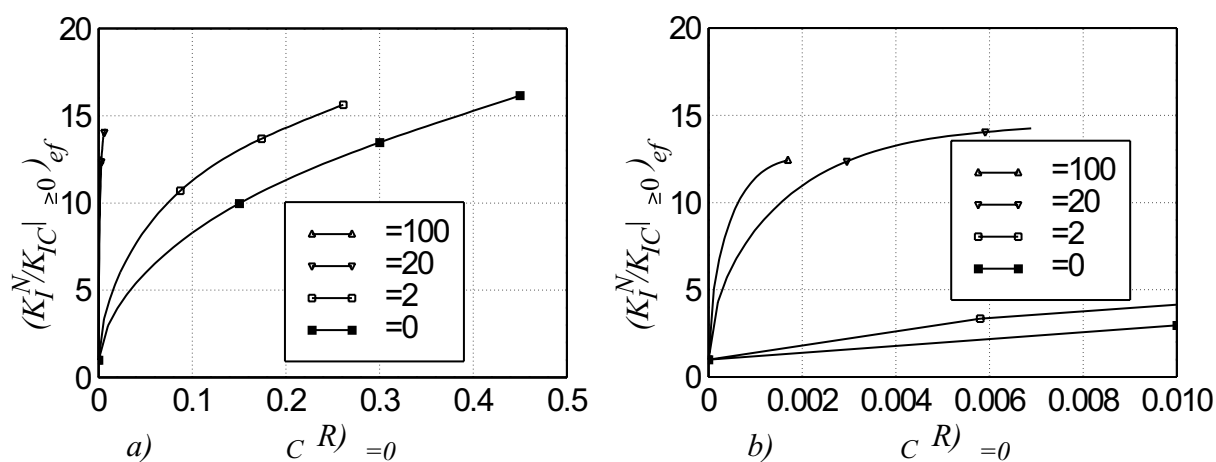
Obr. 4.15: Numerické závislosti efektivní lomové houževnatosti kompozitu  $(K_I^N / K_{IC})_{ef}$  na normalizované délce přemostěné zóny  $l_p / R$  pro  $s_y / E = 0,001$ ,  $n = 0, 2$  a několik hodnot kompozitních parametrů  $k$ ,  $f$ ,  $n$  a  $\kappa$ .



Obr. 4.16: Numerické závislosti efektivní lomové houževnatosti kompozitu  $(K_I^N / K_{IC})_{ef}$  na normalizované délce přemostěné zóny  $l_p / R$  pro  $s_y / E = 0,001$ ,  $n = 0, 2$  a několik hodnot kompozitních parametrů  $k$ ,  $f$ ,  $n$  a  $\kappa$ .



Obr. 4.17: Závislost normovaného kritického otevření trhliny pro  $(\Delta_C/R)_{k \geq 0}$  na  $(\Delta_C/R)_{k=0}$  pro několik hodnot křivosti  $k$ .

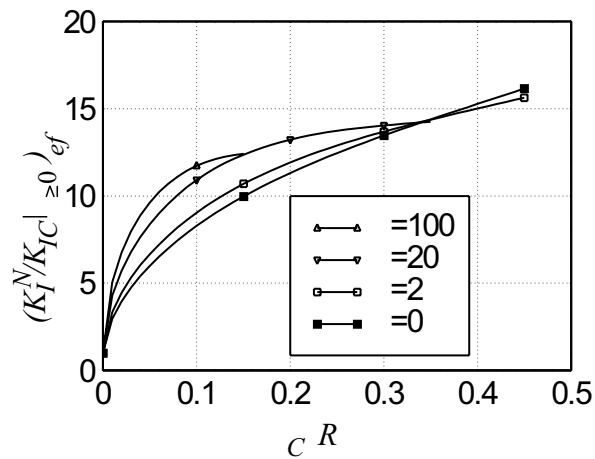


Obr. 4.18: Závislost  $(K_I^N/K_{IC}|_{k \geq 0})_{ef}$  na  $(\Delta_C/R)_{k=0}$  popisující stav trojososti napětí v krčku přemostující částice na kritickém otevření trhliny pro  $k = 0, 5, f = 0, 25$ .

hodnotě efektivního normálového napětí  $s_0$ , viz obr. 4.11, a snižuje lomovou houževnatost kompozitu. Obráceně vyšší stav trojososti napětí odpovídá vyšší hodnotě efektivního normálového napětí  $s_0$  a zvyšuje lomovou houževnatost kompozitu.

Pro srovnání obr. 4.19 ukazuje výpočty lomové houževnatosti  $(K_I^N/K_{IC}|_{k \geq 0})_{ef}$  v závislosti na  $(\Delta_C/R)_{k=0}$  pro případ, že není uvažován vliv trojososti napětí v krčku přemostující částice na kritické otevření trhliny a  $\Delta_C/R$  se mění v celém rozsahu  $(0, \Delta_{max}/R >$ , viz obr. 4.11.

Z předešlých výsledků vyplývá, že pro dosažení optimální lomové houževnatosti kompozitu je nutná jistá optimální pevnost rozhraní částice/matrice v závislosti na tvárnosti nestísňených částic charakterizované parametrem  $(\Delta_C/R)_{k=0}$ . Přitom obr. 4.18 jednoznačně dokládá, že optimální pevnost rozhraní neodpovídá případu  $k = 0$ , jak uvádí některé dřívější práce, viz např. Rubinstein a Wang [27] a Venkateswara *et al.* [29].



Obr. 4.19: Závislost  $(K_I^N/K_{IC}|_{k \ge 0})_{ef}$  na  $\Delta_C/R$  přičemž není uvažován stav trojososti napětí v krčku přemostující částice na kritickém otevření trhliny.

## 4.6. Závěr

- Byl navržen matematický model, který umožňuje sledovat vliv parametrů charakterizujících částicový kompozit, tvořený křehkou maticí s distribucí tvárných částic, na stabilitu magistralní trhliny. Jedná se především o následující parametry: **lomovou houževnatost matrice  $K_{IC}$** , **parametr  $k$**  charakterizující poměr lomové houževnatosti matrice a stínícího součinitele intenzity napětí od jedné částice, normované **kritické otevření trhliny** pro přerušené můstku  $\Delta_C/R$ , **objemový podíl částic  $f$** , **křivost  $k$**  zvoleného parabolického profilu krčku částice charakterizující pevnost rozhraní matrice/částice a vliv stavu trojososti napětí v krčku přemostěné částice.
- Kombinace uvedených parametrů dovoluje sledovat také vliv mezičásticové vzdálenosti  $l$  a to prostřednictvím parametrů  $k$  a relace  $R/l = (3f/(4p))^{1/3}$ . Obr 4.12a ukazuje, že hodnota  $K_I^N/K_{IC}$  nutná **pro rozšíření čela trhliny v matici** roste pro danou délku ligamentované zóny  $l_p$  s poklesem velikosti částic ( $l_p/R$  roste), a s růstem objemového podílu částic  $f$ . Naopak z obr. 4.12b-d vyplývá, že hodnota  $K_I^N/K_{IC}$  nutná **pro přetržení tvárných můstků** klesá pro danou délku ligamentované zóny s poklesem velikosti částic ( $l_p/R$  roste), a s poklesem objemového podílu částic  $f$ .
- Příklad slabé pevnosti rozhraní matrice/částice byl detailně vyšetřován pro nulové zpevnění materiálu částice. Mezní křivky byly proloženy parametrickou rovnicí (4.11), čehož lze s výhodou použít při praktických aplikacích. Počínaje hodnotou otevření  $\Delta_m/R = 0,26$  se můstek prodlužuje především mechanismem plastické deformace, jelikož je překročena podmínka vzniku plastické nestability.
- Z obr. 4.15 a 4.16 vyplývá, že vyšším hodnotám objemového podílu částic odpovídá vyšší hodnota efektivní lomové houževnatosti kompozitu  $(K_I^N/K_{IC})_{ef}$  a že vyšší lomová houževnatost kompozitu odpovídá nižším hodnotám parametru

$k$ , tj. větším částicím. Růst zpevnění materiálu částice vede k vyšším hodnotám efektivní lomové houževnatosti, ale současně se snižuje velikost normované délky ligamentované zóny  $l_p/R$ .

- Vliv poměru **meze kluzu částic** ku **modulu pružnosti v tahu kompozitu**  $s_y/E$  a **Poissonova čísla kompozitu**  $n$  nebyl zahrnut do parametrické studie, i když v důsledku nelineární povahy mechanismu zvyšujícího houževnatost kompozitu hrají významnou roli: ovlivňují otevření trhliny, změnu tvaru částic a nosný průřez částic. Nicméně lze očekávat, že hodnoty těchto parametrů se nebudou zásadně měnit pro různé kompozitní systémy a proto nebyl jejich efekt detailně sledován.
- Podstatným rozdílem oproti studii autorů Rubinsteina a Wanga [27] je zařazení parametru  $\Delta_C/R$ , který rozhoduje o délce ligamentované zóny a představuje důležitou fyzikální charakteristiku popisující tvárnost částic. V modelu těchto autorů [27] je délka ligamentované zóny nezávislým parametrem.
- Bylo provedeno srovnání lomové houževnatosti v závislosti na  $\Delta_C/R$  pro případ, kdy je a kdy není uvažován vliv trojososti napětí v krčku přemostující částice. Přitom obr. 4.18 jednoznačně dokládá, že optimální pevnost rozhraní neodpovídá případu  $k = 0$ , jak uvádí např. Rubinstein a Wang [27] a Venkateswara *et al.* [29], ale je závislá na tvárnosti nestísněných částic.

## PODĚKOVÁNÍ

Tato práce by nemohla vzniknout bez přispění celé řady pracovníků ÚMT FSI VUT Brno a ÚFM AV ČR Brno. Především bych rád poděkoval za pomoc a rady, které mi poskytl můj školitel Doc. RNDr. Michal Kotoul, CSc. Významnou roli také hrála finanční podpora prostřednictvím grantu GAČR č. 101/99/0829 a projektu MŠMT č. J22/98:262100001.



## SUMMARY

Crack extension in composites consisting of brittle matrix reinforced by ductile particles under conditions of mixed in-plane loading is analyzed in first part of my Ph.D. thesis. The applied loading is characterized in the terms of the nominal stress intensity factors  $K_I^N$  and  $K_{II}^N$ . Mixed mode loading leads to crack kinking and the local state of stress ahead of crack tip is described by the local stress intensity factors  $K_I^{lok}$  and  $K_{II}^{lok}$ . Contrary to previous work the kink is subjected to bridging load generated by isolated ductile ligaments. After calculation of  $K_I^{lok}$  and  $K_{II}^{lok}$  and the crack opening displacement appropriate fracture criteria are suggested at the deflection point. The brittle matrix is assumed to fail by maximum tensile stress criterion which is equivalent to the first order to  $K_{II}^{lok} = 0$  condition while  $K_I^{lok}$  reaches the fracture toughness of the matrix. Farther, a critical value of the crack opening displacement,  $\Delta_C$ , determines the ligament rupture. Both criteria have to be fulfilled for further crack extension. Solving these criteria for  $K_I^N$  and  $K_{II}^N$  provides us with a set of fracture loci in the  $K_I^N - K_{II}^N$  plane.

Second part of my Ph.D. thesis is devoted to study of impact of micromechanical patterns of deformation of bridging ductile particle upon the crack stability under condition of the mode I loading. The particles form a bridging zone and, thus, constrain the crack opening. The stress-crack opening displacement relationship relies upon the constant volume plastic flow of the particles according to the model suggested very recently by Rubinstein and Wang. This model incorporates in a certain way also the particle/matrix interface properties. The particles are allowed to deform using several different patterns which correspond to the particular strength of the particle/matrix interface. The deformation patterns are simplified versions of those obtained by Tvergaard using finite element computations. Contrary to Rubinstein and Wang an additional critical crack opening displacement condition is imposed behind the crack tip. The action of the system of discretely distributed particles is replaced by the action of smeared forces. The resulting boundary value problem is reduced to the strongly singular integral equation for the crack opening displacement. This technique is based on a mathematical formalism which involves integral equations with a stronger singularity than the Cauchy type. The improper strongly singular integrals are treated in the Hadamard sense of their finite part. After solving the boundary value problem the local stress intensity factor  $K_I^{lok}$  is calculated in the standard way. The crack extension starts when the local stress intensity factor  $K_I^{lok}$  reaches the fracture toughness of the matrix  $K_{IC}$  and simultaneously the crack opening displacement inside the bridging zone reaches a critical value. The fracture criteria are analyzed for several combinations of micromechanical parameters of composite system and the resistance curves are presented.

## LITERATURA

- [1] Wu, C. H., Elasticity Problems of Slender Z-Crack, *Journal of Elasticity* **8**, (1978), 183–205.
- [2] Lo, K. K., Analysis of Branched Cracks, *ASME Journal of Appl. Mechanics* **45**, (1978), 797–802.
- [3] Karihaloo, B. L., Keer, L. M., Nemat-Nasser, S., Crack Kinking under Nonsymmetric Loading, *Enging Fracture Mech.* **13**, (1980), 879–888.
- [4] Bilby, B. A., Cardew, G. E., The Crack with a Kinked Tip, *Int. Journal of Fracture* **11**, (1975), 708–712.
- [5] He, M. Y., Hutchinson, J. W., Kinking of Crack out of an Interface, *ASME Journal of Appl. Mechanics* **57**, (1989), 270–278.
- [6] Hayashi, K., Nemat-Nasser, S., Energy Release Rate and Crack Kinking. *Int. J. Solids Structures* **17**, (1981), 107–114.
- [7] Hayashi, K., Nemat-Nasser, S., Energy-Release Rate and Crack Kinking under Combined Loading, *ASME Journal of Appl. Mechanics* **48**, (1981), 520–524.
- [8] Faber, K. T., Evans, G. A., Crack Deflection Processes - I. Theory, *Acta Metall.* **31**, (1983a), 565–576.
- [9] Wu, C. H., Maximum-Energy-Release-Rate Criterion Applied to a Tension-Compression Specimen With Crack, *Journal of Elasticity* **8**, (1978), 235–257.
- [10] Kageyama, K., Chou, T. W., Mechanical and Statistical Analyses of Fracture of Whisker-Reinforced Ceramic-Matrix Composites, *Int. Journal of Fracture* **46**, (1990), 297–315.
- [11] Sigl, L. S., Exner, H. E., Experimental Study of the Mechanics of Fracture in WC-Co Alloys, *Metallurgical Transactions A* **18A**, (1987), 1299–1307.
- [12] Budiansky, B., Hutchinson, J. W., Evans, A. G., Matrix Fracture in Fiber-Reinforced Ceramics, *J. Mech. Phys. Solids* **34**, (1986), 167–189.
- [13] Erdogan, F., Joseph, P. F., Toughening of Ceramics through Crack Bridging by Ductile Particles, *J. Am. Ceram. Soc.* **72**, (1989), 262–270.
- [14] Smith, E., The Restraining Effect of Ductile Ligaments of Plane Strain Crack Propagation and Arrest in Ferritic Steels, *Engineering Fracture Mechanics* **19**, (1984), 601–604.
- [15] Kotoul, M., Profant, T., Effective Toughness for Bridged Crack Interacting with an Arbitrary Oriented and Located Microcrack, *Mechanics of Materials* **32**, (2000), 203–234.

- [16] Sigl, L., S., Mataga, P., A., Dalgleish, B., J., McMeeking, R., M., Evans, A., G., On the Toughness of Brittle Materials Reinforced with a Ductile Phase, *Acta metall.* **36**, (1988), 945–953.
- [17] Tvergaard, V., Effect of Ductile Particle Debonding During Crack Bridging in Ceramics, *Int. J. Mech. Sci.* **34**, (1992), 635–649.
- [18] Tvergaard, V., On the Micromechanics and Fracture of Ceramics, *Fracture of Brittle Disordered Materials: Concrete, Rock and Ceramics* ed. G. Baker and B. L. Karihaloo, F&F. N. Spon, London, U.K. 1995, 361–375.
- [19] Ioakimidis, N. I., Application of Finite-Part Integrals to the Singular Integral Equations of Crack Problems in Plane and Three-dimensional Elasticity, *Acta Mechanica* **45**, (1982), 31–47.
- [20] Kaya, A. C., Erdogan, F., On the Solution of Integral Equations with Strongly Singular Kernels, *Quarterly of Appl. Mathematics* **XLV**, (1987), 105–122.
- [21] Nemat–Nasser, S., Hori, M., Toughening by Partial or Full Bridging of Cracks in Ceramics and Fiber Reinforced Composites. *Mechanics of Materials* **6**, (1987), 245–269.
- [22] Hadamard, J., Lectures on Cauchy’s Problem in Linear Partial Differential Equations. New York: Dover, 1952.
- [23] Hori, M., Nemat-Nasser, S., Asymptotic Solution of a Class of Strongly Singular Integral Equations. *SIAM Journal of Appl. Mathematics* **50**, (1990), 716–725.
- [24] Willis, J. R., Nemat–Nasser, S., Singular Perturbation Solution of a Class of Singular Integral Equations. *Quarterly of Appl. Mathematics* **XLVIII**, (1990), 741–753.
- [25] Muschelišvili, N. I., Někotoryje osnovnyje zadači matematičeskoj teorii uprugosti, Nauka, Moskva 1966.
- [26] Sih, G. C., Mechanics of Fracture I - Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems, Ed. G. S. Sih, Noordhoff International Publishing, Leyden, The Netherlands, 1973.
- [27] Rubinstein, A. A., Wang, P., The Fracture Toughness of a Particulate-reinforced Brittle Matrix, *J. Mech. Phys. Solids* **7**, (1998), 1139–1154.
- [28] Bao, G., Hui, C.-Y., Effects of Interface Debonding on the Toughness of Ductile-Particle Reinforced Ceramics, *Int. J. Solids Structures* **26**, (1990), 631–642.
- [29] Venkateswara Rao, K. T., Soboyejo, W. O., Ritchie, R. O., Ductile-phase Toughening and Fatigue-crack Growth in Nb-reinforced Molybdenum Disilicide Intermetallic Composites, *Metallurgical Transactions A* **23A**, (1992), 2249–2257.

# SEZNAM AUTOROVÝCH PUBLIKACÍ

- [1] Urbiš, R., Modelování ohybu trhliny v kompozitech s křehkou maticí a tvárnými inkluzemi, Diplomová práce, Ústav matematiky FS VUT Brno, 1999.
- [2] Urbiš, R., Kotoul, M., Stress Intensity Factor and COD Calculation of Deflected Crack with a Ligamented Kink, ve sbor. mezinár. konf. Materials Structure & Micromechanics of Fracture (ed. P. Šandera), Brno, 1.6.-3.6. 1998, Abstract Booklet 57.
- [3] Urbiš, R., Kotoul, M., Ohyb přemostěné trhliny v částicových kompozitech, ve sbor. semin. Metodické a aplikační problémy lomové mechaniky, (ed. V. Mentl Škoda výzkum s. r. o.) Žinkovy, 11.5.-13.5. 1999, 45–55.
- [4] Urbiš, R., Kotoul, M., Stabilita trhlín v částicově zpevněných kompozitech, *Inženýrská mechanika* 7/5 (2000), 353-372.
- [5] Kotoul, M., Urbiš, R., On the Stability of Crack with Bridged Kinks, *Enging Fracture Mech.* 68/1, (2001), 81–97.
- [6] Urbiš, R., Kotoul, M., Model šíření trhliny v částicových kompozitech s křehkou maticí, ve sbor. nár. konf. Inženýrská mechanika, (ed. J. Náprstek a J. Minster), Svratka, 15.5.-18.5. 2000, IV 37–42.
- [7] Urbiš, R., Kotoul, M., Vrbka, J., Mikromechanická analýza účinku inkluzí na lomovou houževnatost v částicově zpevněných kompozitech, ve sbor. nár. konf. Výpočtová mechanika (ed. J. Křen), Nečtiny, 30.10.-1.11. 2000, 401–408.
- [8] Urbiš, R., Kotoul M., The Influence of Stress Triaxiality in Ductile Ligaments of Crack upon the Fracture Toughness, ve sbor. nár. konf. Inženýrská mechanika (ed. A. Poživilová a J. Masák), Svratka, 14.5.-17.5. 2001, 275–276.
- [9] Urbiš, R., Kotoul, M., Vrbka, J., Vliv mechanických parametrů částicových kompozitů na stabilitu trhliny, *Inženýrská mechanika* 8/3, (2001), 197-209.
- [10] Urbiš, R., Kotoul, M., Vrbka, J., Parametric Study of the Crack in Metal Particulate-Reinforced Ceramix Matrix Composites, mezinár. konf. Computational Methods in Contact Mechanics V (ed. J. Domínguez, C. A. Brebbia), Seville, 18.6.-20.6. 2001, 87–96.
- [11] Urbiš, R., Kotoul, M., Modelling of Partial Debonding of Ductile Particles from Brittle Matrix in Crack Bridging Zone, ve sbor. mezinár. konf. Materials Structure & Micromechanics of Fracture (ed. P. Šandera), Brno, 27.6.-29.6. 2001, 394–407.
- [12] Kotoul M., Urbiš R., On the Crack Stability in Metal Particulate- Reinforced Brittle Matrix Composites, mezinár. kong. Fracture, Honolulu, 3.12.-7.12. 2001, přijato k publikaci.

# CURRICULUM VITAE

**Jméno: Ing. Urbíš Radek**

**Datum a místo narození:** 4. ledna 1975 ve Frýdku-Místku.

**Trvalé bydliště:** Skalice 271, Frýdek-Místek, 739 08.

**E-mail:** urbis@umtn.fme.vutbr.cz.

**Rodinný stav:** svobodný.

**Národnost:** česká.

**Zdravotní stav:** dobrý, nekuřák.



## **Dosažené vzdělání:**

- 1989–1993 Střední průmyslová škola strojnická v Kopřivnici, obor Strojírenství. Ukončil jsem maturitou s vyznamenáním z těchto předmětů: Matematika, Český jazyk, Stavba a provoz strojů a Strojírenská technologie a Praktická zkouška.
- 1993–1998 Vysoké učení technické v Brně – Fakulta strojní, obor Matematické inženýrství. Téma mé diplomové práce bylo: *Modelování ohybu trhliny v kompozitech s křehkou maticí a tvárnými inkluzemi*. Studium jsem ukončil státní zkouškou a obhajobou mé diplomové práce s vyznamenáním. Za vynikající studijní výsledky, aktivní účast ve vědecko-výzkumné činnosti a odborné činnosti na VUT mně byla udělena cena děkana VUT.
- 1998-2001 Interní postgraduální (doktorandské) studium na VUT v Brně – Fakulta strojního inženýrství, obor Inženýrská mechanika. Téma mé disertační práce bylo: *Stabilita trhlín v částečně zpevněných kompozitech*. Za vynikající výsledky v doktorském studijním programu mně byla udělena cena rektora VUT.

## **Pracovní zkušenosti:**

- 1998-2000 cvičící předmětů Aplikovaná statistika na VUT v Brně - Fakulta podnikatelská
- 1998-2001 cvičící předmětu Pružnost a pevnost I na VUT v Brně - Fakulta strojního inženýrství.
- 1999-2001 spolupráce na grantu Grantové agentury ČR: *Mikromechanika a nefenomenologické konstitutivní modely kompozitů s křehkou maticí v podmínkách víceosého nízkocyklového tlakového zatěžování*.
- 1999-2001 spolupráce na výzkumném záměru Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy: *Výpočtové a fyzikální modelování problému inženýrské termofluidní mechaniky, mechaniky těles a fázových přeměn*.