

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta stavební

Ústav stavební mechaniky

Ing. Jiří Vrba

**NUMERICKÁ ANALÝZA ŠÍŘENÍ VLNĚNÍ
VRSTEVNATÝM PROSTŘEDÍM**

**NUMERICAL ANALYSIS OF PROPAGATION WAVES
ON LAYERED MEDIUM**

ZKRÁCENÁ VERZE PHD THESIS

Obor: Teorie konstrukcí
Školitel: Ing. Vlastislav Salajka, CSc.
Oponenti: Doc. Ing. Luboš Pazdera, CSc.
Prof. Ing. Jiří Novotný, DrSc.
Datum obhajoby: 5. 11. 2001

KLÍČOVÁ SLOVA

dynamika, povrchové vlnění, MKP, FWD

KEY WORDS

Dynamics, Rayleigh waves, FEM, FWD

MÍSTO ULOŽENÍ CELÉ PRÁCE

Oddělení pro vědu a výzkum FaST VUT v Brně

© 2001 Jiří Vrba

ISBN 80-214-2020-0

ISSN 1213-4198

OBSAH

1. SOUČASNÝ STAV ŘEŠENÉ PROBLEMATIKY	5
1.1. Metody pro určení modulů pružnosti tuhé vozovky	5
1.1.1. Rázová zkouška	5
1.1.2. Harmonické buzení	6
1.1.3. Kvazistatické buzení	7
1.1.4. Buzení šumem	7
1.2. Metody používané pro zpětný výpočet u rázové zkoušky	7
1.2.1. Pružný poloprostor	7
1.2.2. Odemarkova metoda	7
1.2.3. Vrstevnatý poloprostor	8
1.2.4. Dynamická teorie ekvivalentní vrstvy	8
1.2.5. Metoda konečných prvků	8
1.3. Teorie šíření vlnění pružným prostředím	8
1.3.1. Šíření vlnění uvnitř pružného neohrazeného tělesa	9
1.3.2. Podélné vlnění	9
1.3.3. Příčné vlnění	9
1.3.4. Šíření vlnění po povrchu poloprostoru	10
1.3.5. Šíření podélného vlnění přímým prutem	10
1.3.6. Symetrické vlnění na povrchu nekonečné desky	10
1.3.7. Antisymetrické vlnění na povrchu nekonečné desky	10
1.3.8. Šíření vlnění po povrchu vrstevnatého poloprostoru	11
2. CÍL PRÁCE	12
3. ZVOLENÉ METODY ZPRACOVÁNÍ	13
3.1. Aplikace metody konečných prvků	13
3.2. Řešení pohybových rovnic	14
3.2.1. Řešení s využitím transformace do frekvenční oblasti	15
3.2.2. Harmonická analýza	15
3.3. Řešení soustavy lineárních rovnic	16
3.4. Určení dominantní frekvence	16
3.5. Určení modulu pružnosti z rychlosti c_R	17
4. HLAVNÍ VÝSLEDKY PRÁCE	18
4.1. Návrh výpočetního modelu	18
4.2. Ověření programu	18
4.3. Způsob zpracování výsledků	18

4.4. Srovnání numerické simulace s analytickým řešením	19
4.4.1. Šíření povrchového vlnění na pružném poloprostoru	19
4.4.2. Šíření povrchového vlnění na rotačně symetrické desce	21
4.4.3. Povrchové vlnění na dvouvrstvém prostředí	22
4.4.4. Srovnání buzení šumem a impulzem	23
ZÁVĚR	24
CONCLUSIONS	25
LITERATURA	27
POUŽITÉ ZNAČENÍ	28
CURRICULUM VITAE	29

1. SOUČASNÝ STAV ŘEŠENÉ PROBLEMATIKY

Pro zkvalitnění návrhů a rekonstrukcí tuhých vozovek se stále více využívá výpočetní techniky. Danou skladbu vozovky lze simulovat výpočetním modelem a podle vypočtené odezvy ji dále optimalizovat. K této simulaci se využívají především numerické metody, které jsou ve srovnání s metodami analytickými výhodné tím, že umožňují vytvářet komplexnější modely, které lépe vystihují geometrii, materiál i zatížení řešené úlohy. Jedním z problémů, se kterým se zde setkáváme je určení vstupních parametrů výpočtových modelů, především mechanických vlastností. Přesnost těchto parametrů přitom podstatným způsobem ovlivňuje vypočtenou odezvu a tím i praktickou použitelnost těchto metod.

Vozovka je pro výpočet většinou idealizována jako deska na vrstevnatém polo-prostoru, kde tloušťky jednotlivých vrstev jsou konstantní a materiály vrstev jsou lineárně pružné, izotropní a homogenní. Homogenní a izotropní materiál je popsán dvěma nezávislými materiálovými konstantami, nejčastěji se dnes používá Youngův modul pružnosti E a Poissonův součinitel ν . Při použití těchto dvou konstant se obvykle určuje modul pružnosti, Poissonův součinitel se pouze odhaduje. Vliv změny Poissonova součinitele na svislý posun povrchu vozovky ukazuje i citlivostní studie [5].

1.1. Metody pro určení modulů pružnosti tuhé vozovky

K určení modulů pružnosti u vozovek se v současnosti používá několik typů nedestruktivních zkoušek. V následujícím textu budou popsány nejdůležitější z nich.

1.1.1. Rázová zkouška

Rázová zkouška se v praxi používá nejčastěji. Určení modulů pružnosti však není jejím hlavním cílem. Používá se především pro diagnostiku stavu vozovky a určení její zbytkové životnosti. Moduly pružnosti jsou zde pouze mezivýsledkem.

Pro rázovou zkoušku FWD (Falling Weight Deflectometer) se využívá mobilní automatizované měřicí zařízení, které vyvodí impulz síly pádem závaží přes tlumič na kruhovou zatěžovací desku. Typická doba trvání impulzu je 20-25 ms. Časový průběh síly je u modernějších zařízení zaznamenán a zároveň jsou sledovány průběhy rychlostí výchylky v 6-9 bodech. Z naměřených rychlostí jsou automaticky integrovány výchylky. Osazení snímačů i většina dalších operací jsou automatizována. Maximální hodnoty síly i výchylek, které pochopitelně nenastávají ve stejném čase, jsou zaznamenány a dále normovány na určitou hodnotu síly, např. 75 kN. Tyto maximální a normované hodnoty se zavádí do zpětného výpočtu.

Při použití rázové zkoušky neexistuje možnost, jak moduly pružnosti jednotlivých vrstev určit přímým výpočtem z měřených veličin. V praxi se využívá iterační řešení pomocí zpětného výpočtu buď Odemarkovou metodou, pomocí teorie vrstevnatého poloprostoru nebo pomocí MKP, eventuálně jinou metodou. Ve zpětném výpočtu se

používá jen statické zatížení.

O interpretaci této zkoušky lze polemizovat, neboť výsledky ovlivňuje několik nežádoucích jevů. Vliv má zanedbání dynamické povahy zatížení při vyhodnocování, výrazný vliv u tuhých vozovek mají okrajové podmínky, tj. především nedokonalé podepření desky. Nosná deska tuhé vozovky rovněž výrazně reaguje na změnu teploty. Tato skutečnost je dokumentována výpočty [4] i měřeními [19], [15] a [14]. Tím vznikají mezery mezi deskou a podkladem, které velmi ovlivňují naměřené výsledky. Technické předpisy pro provádění této zkoušky sice předepisují určité omezení v jakých teplotních podmínkách je možné je provádět, nelze však tuto chybu zcela vyloučit.

Další problém stávajícího výpočtu spočívá v tom, že v některých případech lze pomocí této metody získat několik sad modulů pružnosti jednotlivých vrstev, které vyhovují maximálním průhybům získaným z měření. Používaný postup tedy nemusí mít jednoznačné řešení.

Otázkou zůstává, zda je vůbec možné formulovat jednoznačnou interpretaci výsledků rázové zkoušky nebo by bylo vhodnější používat jiný typ buzení.

Na problémy vzniklé zanedbáním dynamických účinků je poukázáno například v práci [12]. Jedním ze závěrů rozsáhlé studie [20] je, že dynamické účinky u zkoušky FWD nelze při zpětném výpočtu zanedbat. Zmiňovaná studie je součástí projektu, který se snaží sjednotit vyhodnocování této zkoušky v rámci Evropské unie. Uvažováním nelineárního modelu materiálu ve zpětném výpočtu se zabývá [8].

Hlavní předností rázové zkoušky FWD je její jednoduchost. Umožňuje dobře identifikovat poškozené desky a zároveň poskytuje dobré podklady při rozhodování o způsobu rekonstrukce.

1.1.2. Harmonické buzení

Velmi přesný způsob určení modulů pružnosti uvádí G. Martinček v [9]. Navrhl postup určení modulů pružnosti použitím metody fázových rychlostí. Vychází z harmonického buzení na několika frekvencích a sleduje délky povrchových vln. Autor používá následující postup: umístí budič harmonického signálu na desku, se snímačem postupuje podél zvolené přímky a hledá místa s fázovým posuvem o 2π . Tímto způsobem zjistí délku povrchové vlny Λ pro danou frekvenci buzení. Odtud lze již určit rychlost povrchových vln. Problémem této metody je obtížná automatizace, především zjišťování délky vln, které vyžaduje manipulaci s polohou snímačů.

Zajímavou možností je měření s využitím laserových akcelerometrů, které na vozovkách prováděl John Colle [16]. Buzení zde má frekvenci až 10 kHz. Toto řešení je zajímavé právě dosaženou frekvencí, která by u klasických snímačů zrychlení (podle materiálu firmy Brüel & Kjær [2]) už nebyla možná. I pro dosažení frekvencí nižších by bylo zapotřebí snímače speciálně upevňovat, což komplikuje automatizaci měření.

1.1.3. Kvazistatické buzení

Speciální měřicí soustava RDT (Road Deflection Tester) byla vyvinuta ve Švédsku. Jedná se o měřicí vůz osazený dvěma lištami s dvaceti laserovými snímači. První z nich je umístěna uprostřed vozidla a druhá za zadní nápravou. Vozidlo se pohybuje nízkou rychlostí. Rozdíl mezi hodnotami měřenými uprostřed vozidla a za nápravou je považován za průhyb [7].

1.1.4. Buzení šumem

Další možností je buzení pomocí šumu. Tato možnost se využívá spíše ve strojírenství, elektrotechnice a akustice. Její výhodou je rovnoměrné rozdělení budící energie v celém frekvenčním pásmu. Používá se několik druhů šumu, např. bílý šum nebo růžový šum. Využití tohoto buzení je vázáno na způsob vyhodnocení. Aplikací buzení šumem u vozovek se zabývá např. I. J. M. van der Vring.

1.2. Metody používané pro zpětný výpočet u rázové zkoušky

Základním problémem u rázové zkoušky FWD je metoda pro její vyhodnocení. Tato metoda musí být dostatečně rychlá pro použití přímo v terénu a přitom dostatečně přesná. Požadavkům na rychlost lépe vyhovují analytické metody, požadavkům na přesnost naopak metody numerické.

1.2.1. Pružný poloprostor

Základní teorií pro výpočet napětí a deformací v zemině je teorie pružného poloprostoru. Tato teorie umožňuje určit v libovolném bodě napětí, přetvoření i přemístění pro homogenní lineárně pružný izotropní materiál od bodového zatížení na povrchu. Integrací zatížení po ploše lze tyto vztahy rozšířit pro kruhovou nebo jinou plochu zatíženou spojitým zatížením.

Zásadním omezením pro aplikaci na výpočet odezvy vozovky je předpoklad homogenity. Pro použití ve vrstevnatém prostředí je zapotřebí tuto teorii upravit.

1.2.2. Odemarkova metoda

Modifikací teorie pružného poloprostoru je Odemarkova metoda (metoda ekvivalentních tlouštěk)[11]. Tato metoda spočívá v transformaci vrstevnatého prostředí s různými moduly pružnosti do ekvivalentního homogenního prostředí s jediným modulem pružnosti. Tato transformace vychází ze zachování stejné tuhosti. Pro dvouvrstvé pružné prostředí, má-li horní vrstva modul pružnosti E_1 , Poissonův součinitel ν_1 a tloušťku h_1 , je její ohybová tuhost

$$\frac{E_1 h_1^3}{12(1 - \nu_1^2)} \quad (1)$$

Nahradíme-li modul pružnosti horní vrstvy E_1 modulem pružnosti spodní vrstvy E_2

a Poissonův součinitel horní vrstvy ν_1 součinitelem ν_2 , musí při zachování tuhosti platit, že ekvivalentní tloušťka horní vrstvy h_e

$$h_e = h_1 \sqrt[3]{\frac{E_1(1 - \nu_2^2)}{E_2(1 - \nu_1^2)}} \quad (2)$$

Tato metoda je velmi jednoduchá, přesto však poskytuje výsledky srovnatelné s metodami přesnějšími [18].

1.2.3. Vrstevnatý poloprostor

Přesnější analytický přístup vede na teorii vrstevnatého poloprostoru. B. Novotný uvádí v literatuře [10] podrobné vztahy pro zatížení silou, dále vztahy pro kruhovou, eliptickou a mnohoúhelníkovou zatěžovací oblast. Jsou zde odvozeny vztahy pro kontaktní problém, kdy není dopředu známa oblast kontaktu zatěžovací plochy s poloprostorem, vztahy pro viskoelastický a póroelastický pružný poloprostor. Praktické řešení autor použil v programu LAYMED, který je doporučován i v předpisu pro navrhování tuhých vozovek [21]. Odvozené vztahy jsou zde pouze pro statické zatížení.

1.2.4. Dynamická teorie ekvivalentní vrstvy

Analytickým řešením dynamické odezvy desky na viskoelastickém podloží se zabývali E. Šlachta [13] a G. Martinček [9]. V práci E. Šlachty je navržena dynamická teorie ekvivalentní vrstvy na podloží. Vrstevnatou skladbu vozovky nahrazuje ekvivalentní vrstvou se stejnou ohybovou tuhostí. Ekvivalentní vrstvu podporuje viskoelastický poloprostor.

1.2.5. Metoda konečných prvků

V současné době se často používá pro zpětný výpočet metoda konečných prvků. Oproti předchozím metodám se jedná o metodu přibližnou, umožňuje však bez problémů respektovat dynamickou povahu zatížení, vrstevnatost prostředí, okrajové podmínky atd. Pomocí této metody lze formulovat různé modely od nejjednodušších rotačně symetrických, přes kombinaci desky a podloží podle Pasternaka až po prostorový model. Nevýhodou tohoto přístupu je velká výpočetní náročnost.

1.3. Teorie šíření vlnění pružným prostředím

Pro vyhodnocení metod založených na rychlosti šíření povrchového vlnění je nutné porozumět základním vztahům z teorie šíření vlnění. Rychlost šíření povrchového vlnění je méně citlivá na teplotní vlivy a na defekty než průhyby, které se měří při rázové zkoušce. Proto ji lze efektivně využít pro určení mechanických vlastností prostředí.

1.3.1. Šíření vlnění uvnitř pružného neohraničeného tělesa

Dosazením fyzikálních rovnic pro lineárně pružný materiál a geometrických rovnic pro malé deformace do pohybových rovnic pro kontinuum dostáváme

$$\begin{aligned}\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (\lambda + G) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + G \nabla^2 u, \\ \varrho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= (\lambda + G) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + G \nabla^2 v, \\ \varrho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= (\lambda + G) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + G \nabla^2 w.\end{aligned}\quad (3)$$

Jak bude dále ukázáno tyto rovnice představují šíření dvou typů vln, kterým odpovídají dvě rychlosti jejich šíření. Vlnění uvnitř pružného prostředí se šíří bez disperze, tzn. že jeho rychlost se nemění s frekvencí buzení a je jednoznačně definována pouze dvěma materiálovými konstantami a hustotou prostředí. První rychlost odpovídá podélným vlnám a druhá rychlost odpovídá příčným vlnám.

1.3.2. Podélné vlnění

Derivací vztahů (3) podle souřadnic, jejich sečtením a úpravou dostáváme rovnici

$$\varrho \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = (\lambda + 2G) \nabla^2 \Delta. \quad (4)$$

Jedná se o vlnovou rovnici. Z fyzikálního hlediska tato rovnice vyjadřuje, že poměrná objemová změna Δ se prostředím šíří rychlostí

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\varrho}} = \sqrt{\frac{E(1 - \nu)}{\varrho(1 + \nu)(1 - 2\nu)}} \quad (5)$$

Tuto rychlost nazýváme rychlostí podélného vlnění.

1.3.3. Příčné vlnění

Derivujeme-li druhou z rovnic (3) podle z a třetí podle y potom po úpravě dostaneme

$$\varrho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = G \nabla^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad (6)$$

To je opět vlnová rovnice, tentokrát s rychlostí šíření vlnění

$$c_2 = \sqrt{\frac{G}{\varrho}} = \sqrt{\frac{E}{2\varrho(1 + \nu)}} \quad (7)$$

Tuto rychlost nazýváme rychlostí šíření příčného vlnění.

1.3.4. Šíření vlnění po povrchu poloprostoru

Vlnění na povrchu pružného poloprostoru se šíří bez disperze a jeho rychlost lze určit z frekvenční rovnice [17]:

$$\kappa^6 - 8 \kappa^4 + (24 - 16 \alpha^2) \kappa^2 + (16 \alpha^2 - 16) = 0, \quad (8)$$

kde

$$\kappa = \frac{c_R}{c_2}, \quad \text{a} \quad \alpha = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}. \quad (9)$$

Z řešení rovnice (8) pro fyzikálně přípustné hodnoty ν vyplývá, že rychlost šíření povrchového vlnění je vždy menší než rychlost příčného vlnění.

1.3.5. Šíření podélného vlnění přímým prutem

Pohybové rovnice se pro podélné vlnění přímého prutu zjednoduší na tvar

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (10)$$

Jedná se opět o vlnovou rovnici, nyní s rychlostí šíření vlnění:

$$c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (11)$$

1.3.6. Symetrické vlnění na povrchu nekonečné desky

Aplikací okrajových podmínek na pohybové rovnice lze odvodit rovnici pro popis šíření symetrických vln v nekonečné desce

$$\frac{\tanh(\beta h/2)}{\tanh(\zeta h/2)} = \frac{4f^2 \zeta \beta}{(f^2 + \beta^2)^2}, \quad (12)$$

kde

$$f = \frac{2\pi}{\Lambda}, \quad \beta^2 = f^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_2^2}\right) \quad \text{a} \quad \zeta^2 = f^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_1^2}\right). \quad (13)$$

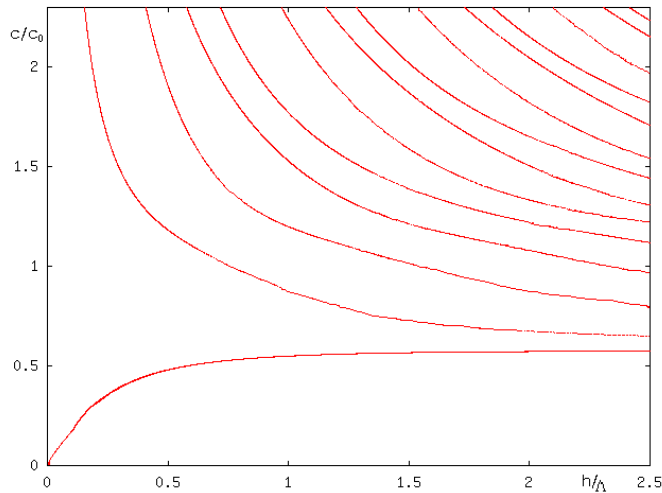
V těchto rovnicích c je rychlost šíření symetrických vln v desce, rychlosti c_1 a c_2 již byly popsány dříve, h je tloušťka desky, Λ je vlnová délka.

1.3.7. Antisymetrické vlnění na povrchu nekonečné desky

Rovnice pro popis šíření antisymetrických vln (ohybových vln) v nekonečné desce má velmi podobný tvar jako u symetrických vln

$$\frac{\tanh(\zeta h/2)}{\tanh(\beta h/2)} = \frac{4f^2 \zeta \beta}{(f^2 + \beta^2)^2}. \quad (14)$$

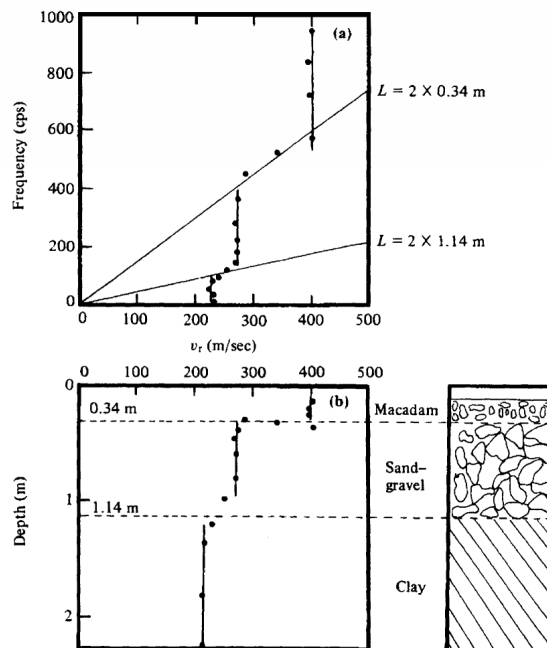
Disperzní křivky, které vzniknou řešením této rovnice pro $\nu = 0,3$ jsou na obrázku 1.



Obr. 1: Disperzní křivky fázových rychlostí antisymetrických vln v desce

1.3.8. Šíření vlnění po povrchu vrstevnatého poloprostoru

Obecné řešení šíření vlnění po povrchu vrstevnatého poloprostoru je velmi komplikovaná úloha, podrobnosti o různých aspektech tohoto problému lze nalézt v [17] a [3]. Tuhé vozovky představují pouze určitý druh úloh, které jsou charakteristické tím, že horní vrstvy mají modul pružnosti větší než vrstvy dolní. Experimentální výsledky měření na vozovce jsou na obrázku 2.



Obr. 2: Experimentálně zjištěná rychlost šíření povrchového vlnění na vozovce, převzato z [1]

2. CÍL PRÁCE

Hlavním cílem této práce je ověřit na numerickém modelu vrstevnatého prostředí možnost určení modulů pružnosti jeho vrstev z rychlosti šíření povrchového vlnění. Pro určení rychlosti šíření vlnění bylo oproti současnému stavu místo harmonického buzení využíváno buzení šumem, které by umožnilo velmi rychlé měření.

Vzhledem k tomu, že se jedná o velmi rozsáhlou problematiku, byly pro tuto práci vytčeny konkrétní úkoly:

- navrhnout vhodný výpočtový model, který simuluje dynamickou odezvu vrstevnatého prostředí,
- ověřit správnost modelu na srovnávacích příkladech,
- navrhnout způsob zpracování výsledků simulace dynamické odezvy,
- na základních příkladech provést srovnání analytického řešení rychlostí povrchového vlnění s hodnotami určenými výpočtem,
- ověřit vliv velikosti modelu, velikosti prvků, okrajových podmínek, vliv útlumu a případné nespojitosti v horní vrstvě na vypočtené rychlosti šíření povrchového vlnění,
- provést simulaci buzení impulzem a šumem a porovnat získané výsledky.

Pro splnění těchto cílů bylo zapotřebí vyvinout program pro výpočet odezvy vrstevnatého prostředí. Odezva byla řešena numericky pomocí metody konečných prvků. Úloha byla idealizována jako rotačně symetrická. Program pro výpočet dynamické odezvy je otevřený, aby umožňoval maximální kontrolu nad prováděnými výpočty. Tento program musel umožňovat výpočet dynamické odezvy na obecné zatížení v čase zadané diskrétními hodnotami.

Pro zjištění délky povrchových vln na dané frekvenci buzení bylo zapotřebí najít algoritmus, který umožní jejich rychlé a přesné určení i při malém počtu bodů. Tato úloha byla řešena modifikací diskrétní Fourierovy transformace.

Rychlost šíření vlnění je součin frekvence buzení a délky vlny. Z takto vypočtené rychlosti je možné za určitých předpokladů určit modul pružnosti. Pro praktické využití je nutné stanovit správné meze frekvenčního rozsahu buzení.

Tato práce navazuje na výsledky G. Martinčeka publikované v [9]. Citovaný autor navrhl metodu fázových rychlostí. Oproti této metodě navržený postup minimalizuje časovou náročnost měření využitím buzení pomocí šumu.

3. ZVOLENÉ METODY ZPRACOVÁNÍ

Řešení naznačené úlohy lze rozdělit na několik dílčích částí:

- získání dynamické odezvy v několika bodech,
- transformace odezvy do frekvenční oblasti,
- určení dominantní délky vln,
- výpočet rychlostí šíření vlnění,
- určení modulů pružnosti.

Pro výpočet dynamické odezvy vrstevnatého prostředí byla zvolena *metoda konečných prvků*. Výpočet odezvy zde simuluje reálné měření. Ověření pomocí výpočtu bylo zvoleno z důvodu kontroly modulů pružnosti určených z povrchových vln s původním zadáním. Druhým důvodem je možnost postup ověřovat nejprve na jednoduchých příkladech. Výstupem jsou zde svislé výchylky uzlů povrchu vozovky v závislosti na čase.

Dále se provede transformace těchto průběhů výchylek do frekvenční oblasti. Výstupem jsou komplexní spektra svislých výchylek povrchu.

Pro jednotlivé harmonické složky se dále hledá dominantní délka povrchové vlny. Pro její určení je použita modifikace diskrétní Fourierovy transformace. Výstupem jsou délky vln pro každou harmonickou složku původního spektra.

Součinem délky vlny a frekvence získáme rychlost šíření vlnění. Z těchto rychlostí jsou nakonec určeny moduly pružnosti.

3.1. Aplikace metody konečných prvků

V rámci této práce byl vyvinut vlastní program FEAX, který byl používán pro výpočet dynamické odezvy rotačně symetrické úlohy. Pro řešení odezvy byl použit čtyřúhelníkový rotačně symetrický izoparametrický prvek se dvěma stupni volnosti v každém uzlu.

Při odvození matic tuhosti a hmotnosti je možné vycházet např. z Lagrangeových rovnic

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (15)$$

Potenciální energii lze pro zvolený typ prvku vyjádřit

$$V^{(e)} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{u}^{(e)}(t) \right]^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)}(t), \quad (16)$$

kde matice tuhosti prvku $\mathbf{K}^{(e)}$

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}^{(e)}]^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} |J^{(e)}| 2\pi r \, d\xi d\eta. \quad (17)$$

Kinetická energie pro tento typ prvku je

$$T^{(e)} = \frac{1}{2} \left[\dot{\mathbf{u}}^{(e)}(t) \right]^T \mathbf{M}^{(e)} \dot{\mathbf{u}}^{(e)}(t), \quad (18)$$

kde matice hmotnosti prvku $\mathbf{M}^{(e)}$ je

$$\mathbf{M}^{(e)} = \rho \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\mathbf{N}^{(e)} \right]^T \mathbf{N}^{(e)} |J^{(e)}| 2\pi r d\xi d\eta. \quad (19)$$

Útlum je uvažován úměrný rychlosti (viskózní), přičemž v dané úloze se vyskytují materiály s různým útlumem. Pro sestavení matice útlumu prvku byl použit následující model útlumu

$$\mathbf{C}^{(e)} = \alpha^{(e)} \mathbf{M}^{(e)} + \beta^{(e)} \mathbf{K}^{(e)}. \quad (20)$$

Koeficienty $\alpha^{(e)}$ a $\beta^{(e)}$ byly voleny pro každý materiál jiné, proto tento vztah platí pouze na úrovni matice prvku.

Vektor zatížení se zde skládá pouze ze dvou částí, jednak z uzlových sil \mathbf{f}_i a jednak z tlumících sil \mathbf{f}_d

$$\mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{f}_i^{(e)} - \mathbf{f}_d^{(e)}, \quad \mathbf{f}_d^{(e)} = \mathbf{C}^{(e)} \dot{\mathbf{u}}. \quad (21)$$

Z jednotlivých matic tuhosti prvků jsou dále obvyklým způsobem sestaveny matice tuhosti modelu. Stejným způsobem jsou sestaveny i matice hmotnosti a útlumu modelu. Máme-li sestaveny tyto matice \mathbf{K} , \mathbf{M} a \mathbf{C} , lze rovnice (18), (19) a (20) dosadit do Lagrangeových rovnic a potom platí

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}_i(t), \quad (22)$$

což jsou pohybové rovnice pro tlumenou soustavu s konečným počtem stupňů volnosti a zatížením s obecným časovým průběhem.

3.2. Řešení pohybových rovnic

Pro řešení soustavy pohybových rovnic je možno použít několik metod. Jedná se o soustavu obyčejných vzájemně závislých diferenciálních rovnic druhého řádu.

Za předpokladu, že matice \mathbf{K} , \mathbf{M} a \mathbf{C} nejsou funkcí času a matice útlumu se dá vyjádřit jako lineární kombinace matic tuhosti a hmotnosti, lze použít rozklad do vlastních tvarů kmitu. Jedná se o velmi efektivní metodu, která oproti ostatním vyžaduje podstatně méně početních operací. Určitou nevýhodou jsou již zmíněná omezení a nutnost výpočtu vlastních frekvencí a tvarů soustavy.

Druhou možností řešení pohybových rovnic je transformace do frekvenční oblasti, která byla použita v této práci.

Nejmenší omezení na matice klade přímá integrace pohybových rovnic, např. pomocí Newmarkovy nebo Wilsonovy metody. Pro lineární úlohy je však početně náročnější a přesnost výsledků je nepřímo úměrná délce časového kroku. Dalším

problémem tohoto postupu je kumulace chyby, neboť řešení v následujícím čase je závislé na předchozím. Z těchto důvodů nebyla tato metoda použita.

3.2.1. Řešení s využitím transformace do frekvenční oblasti

V této práci bylo použito řešení pohybových rovnic () pomocí transformace do frekvenční oblasti. Velmi často je vektor zatížení dán diskretními hodnotami \mathbf{f}_k v časech $t = k\Delta t$. V tom případě můžeme zatížení vyjádřit pomocí diskretní Fourierovy transformace (DFT)

$$\mathbf{f}_k = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{n=-N/2}^{N/2} \bar{\mathbf{f}}_n e^{2\pi i k n/N} \quad k = 0, 1, \dots, (N-1), \quad (23)$$

kde

$$\bar{\mathbf{f}}_n = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}_k e^{-2\pi i k n/N} \quad n = -N/2, -N/2 + 1, \dots, N/2. \quad (24)$$

Dosazení vztahu () do pohybových rovnic () vede na řešení harmonické analýzy. Vektor zatížení \mathbf{f}_k vyjádříme pomocí vztahu () jako součet harmonických funkcí. Tím původní úlohu odezvy na obecné zatížení rozložíme na $N/2$ úloh odezvy na harmonické buzení.

Výsledné řešení u_k v diskretních časech $t = k\Delta t$ potom získáme zpětnou transformací.

3.2.2. Harmonická analýza

Po transformaci do frekvenční oblasti je zapotřebí vyřešit úlohu popsanou rovnicí

$$\mathbf{M}\ddot{u}_n(t) + \mathbf{C}\dot{u}_n(t) + \mathbf{K}u_n(t) = \bar{\mathbf{f}}_n e^{i\Omega_n t}. \quad (25)$$

Řešení hledáme ve tvaru součinu vektoru, který není funkcí času a harmonické funkce stejné frekvence jako budící síla

$$u_n(t) = \bar{u}_n e^{i\Omega_n t}. \quad (26)$$

Dosazením vztahu () do () dostáváme

$$(\mathbf{K} + i\Omega_n \mathbf{C} - \Omega_n^2 \mathbf{M}) \bar{u}_n = \bar{\mathbf{f}}_n, \quad (27)$$

což je komplexní soustava rovnic

$$\mathbf{K}_n^* \bar{u}_n = \bar{\mathbf{f}}_n \quad n = 0, 1, \dots, N/2, \quad (28)$$

kde \mathbf{K}_n^* je pseudotuhostní matice

$$\mathbf{K}_n^* = \mathbf{K} + i\Omega_n \mathbf{C} - \Omega_n^2 \mathbf{M} \quad (29)$$

a Ω_n je kruhová frekvence buzení

$$\Omega_n = 2\pi f_n = 2\pi \frac{n}{\Delta t N}. \quad (30)$$

3.3. Řešení soustavy lineárních rovnic

Výše popsaná formulace úlohy vede na opakované řešení soustav rovnic

$$\mathbf{K}_n^* \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{f}}. \quad (31)$$

Pro řešení těchto soustav rovnic bylo vyzkoušeno několik numerických metod. Nejdříve Gaussova eliminace, která však není vhodná pro velké matice, dále Jacobiho, Gauss-Seidelova a superrelaxační metoda, jejíž konvergence byla v řešených úlohách velmi pomalá. Jako nejvýhodnější se ukázala metoda sdružených gradientů, která je však určena pro pozitivně definitní matice. Použitím vlastní modifikace byla tato metoda upravena i pro indefinitní matice.

Metoda sdružených gradientů je metoda přímá, ale obsahuje určité prvky metod nepřímých. Při výpočtech bez zaokrouhlovací chyby vede k přesnému řešení nejpozději v n -tém kroku. U dobře podmíněné soustavy často postačuje i podstatně méně kroků. Dobrý odhad počátečního řešení opět ušetří mnoho iterací. Metoda je vhodná pro rozsáhlé soustavy.

Rychlost konvergence metody sdružených gradientů (CG) je podle [6] úměrná poměru

$$\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{\kappa}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{\kappa}}}, \quad \text{kde} \quad \kappa = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}. \quad (32)$$

Veličiny λ_{\max} a λ_{\min} jsou maximální a minimální vlastní číslo matice \mathbf{K}_n^* . Pro zlepšení konvergence lze provést úpravu

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{K}_n^* \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{P}^{-1} \bar{\mathbf{f}}, \quad (33)$$

kde matice \mathbf{P} se nazývá preconditioner.

Matice \mathbf{K}_n^* je symetrická, proto je násobena z obou stran, aby symetrie zůstala zachována. Vhodná volba matice \mathbf{P} výrazně urychlí řešení této úlohy. V této práci bylo používáno Jacobiho předpodmínění

$$\mathbf{P} = \text{diag}(\sqrt{k_{1,1}}, \dots, \sqrt{k_{n,n}}). \quad (34)$$

3.4. Určení dominantní frekvence

Rychlost šíření vlnění je rovna součinu délky vlny Λ a budící frekvence f_b . Délka vlny je určována z vypočtené nebo z měřené odezvy na povrchu prostředí.

Výstupem měřené i vypočtené odezvy je časový průběh výchylek v jednotlivých měřených bodech nebo v uzlech modelu. V obou případech se jedná o soubor diskrétních hodnot co se týče prostoru i času. Transformací těchto výchylek do

frekvenční oblasti získáme spektra odezvy v jednotlivých bodech povrchu. Z těchto spekter lze získat tvar povrchu pro každou harmonickou složku obsaženou v budícím signálu.

Tvar povrchu při harmonickém buzení většinou obsahuje jednu dominantní délku vlny. Pro její určení při malém počtu bodů bylo vyzkoušeno několik algoritmů. Jako nejúčinnější se ukázala modifikace diskrétní Fourierovy transformace.

Diskrétní Fourierova transformace je definována vztahem

$$u_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} U_k e^{-i2\pi nk/N}, \quad n = 0, \dots, N. \quad (35)$$

Dominantní vlnové frekvenci bude odpovídat maximální absolutní hodnota u_n .

V řešené úloze je k dispozici pouze malý počet bodů. Tomu odpovídá hrubé rozlišení dominantní frekvence. Pro dosažení lepších výsledků byla provedena úprava tohoto vztahu tak, že krok frekvence byl volen $\Delta f_x = 1/(M\Delta x)$, kde platí $M \geq N$. Tím se výsledný vztah změní na

$$u_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} U_k e^{-i2\pi nk/M}, \quad n = 0, \dots, M. \quad (36)$$

Díky této úpravě je možné přesněji najít maximum u_n a tím i vlnovou frekvenci, která tomuto maximu odpovídá.

3.5. Určení modulu pružnosti z rychlosti c_R

Použitý způsob určení modulu pružnosti vychází z rychlosti šíření Rayleigho vln. Toto řešení by platilo přesně pouze na pružném poloprostoru, kde se vlnění neodráží od okrajů. Jak je ale vidět u šíření vlnění v nekonečné desce, je-li vlnová délka kratší než tloušťka desky, šíří se toto vlnění rovněž rychlostí Rayleigho vln. Pro modely konečných rozměrů lze toto řešení použít pouze tehdy je-li vlnová délka kratší než velikost modelu.

Předpokládáme-li znalost Poissonova součinitele, lze ze vztahu () určit součinitel κ . Dosazením do vztahu () pak určíme rychlost šíření příčných vln c_2 . Známe-li hustotu ρ pak modul pružnosti ve smyku podle vztahu () bude

$$G = \rho c_2^2, \quad E = 2G(1 + \nu). \quad (37)$$

Sloučením vztahů () a () dostáváme

$$E = 2\rho \left(\frac{c_R}{\kappa} \right)^2 (1 + \nu). \quad (38)$$

4. HLAVNÍ VÝSLEDKY PRÁCE

4.1. Návrh výpočetního modelu

Pro simulaci vrstevnatého prostředí (tuhé vozovky) bylo užito metody konečných prvků. Pro udržení maximální kontroly nad veškerými prováděnými výpočty nebyl využíván žádný z komerčních programů, ale byl vytvořen vlastní program FEAX. Jedná se o program pro výpočet dynamické odezvy na obecné zatížení. Program používá čtyřuzlový izoparametrický rotačně symetrický prvek se dvěma stupni volnosti v každém uzlu. Dynamická odezva je řešena pomocí transformace do frekvenční oblasti.

Většina řešených úloh byla velmi rozsáhlá, proto byl navržen rychlý způsob řešení soustav rovnic a efektivní způsob uložení matic v paměti. Soustavy komplexních rovnic jsou řešeny pomocí vlastní modifikace metody sdružených gradientů. Modifikace spočívá v rozšíření této metody i pro symetrické indefinitní matice. Urychlení konvergence bylo dosaženo využitím Jacobiho předpodmínění soustavy rovnic. Dále bylo pro urychlení výpočtů využito extrapolace počátečního řešení z předchozích kroků využitím Lagrangeových polynomů. Řešení probíhalo v oboru komplexních čísel.

4.2. Ověření programu

Pro ověření funkčnosti programu bylo zvoleno několik příkladů ze statiky a dynamiky konstrukcí. Ve všech příkladech vykazoval program dostatečně přesné výsledky jak ve srovnání s analytickým řešením, tak i ve srovnání s komerčním programem ANSYS.

4.3. Způsob zpracování výsledků

Výstupem numerické simulace (nebo měření) je časový průběh svislých výchylek povrchu a časový průběh zatěžovací síly. Z časového průběhu zatěžovací síly je vypočteno její frekvenční spektrum. Rovněž ze svislých výchylek jednotlivých bodů povrchu jsou vypočtena frekvenční spektra¹.

Z takto vypočtených spekter je určen průběh svislých výchylek povrchu pro jednotlivé harmonické složky budící síly. Tyto průběhy jsou výsledkem numerické simulace programem FEAX.

Provedením frekvenční analýzy průběhů svislých výchylek povrchu pro jednotlivé harmonické složky budící síly jsou získány dominantní délky vln obsažené v jednotlivých průbězích. Pro určení délky vlny je použita modifikace diskrétní Fourierovy transformace. Rychlost šíření povrchového vlnění je součin budící frekvence a délky vlny. Výsledkem této analýzy jsou vypočtené rychlosti šíření povrchového

¹ Vzhledem k tomu, že pro výpočet dynamické odezvy zde byla použita transformace do frekvenční oblasti, jsou tato spektra získána již během výpočtu odezvy a není třeba je znovu počítat.

vlnění v závislosti na budící frekvenci.

Modul pružnosti jednotlivých vrstev je určen z rychlosti povrchového vlnění pomocí vztahu (). Použití tohoto vztahu je vázáno určitými předpoklady. Prvním předpokladem je, že se jedná o lineárně pružné izotropní homogenní prostředí. Dalším předpokladem je znalost hustoty a Poissonova součinitele. Třetím předpokladem je, že délka vln musí být menší než vzdálenost volných okrajů.

4.4. Srovnání numerické simulace s analytickým řešením

Navržená metoda byla testována na numerických modelech. Byly zvoleny čtyři série modelů pro ověření různých aspektů této metody. Celkem bylo vyřešeno šestnáct různých příkladů.

4.4.1. Šíření povrchového vlnění na pružném poloprostoru

Základní úlohou je šíření vlnění po povrchu pružného poloprostoru. Vlnění se po povrchu pružného poloprostoru šíří rychlostí c_R , která je nezávislá na budící frekvenci. Právě znalost této rychlosti je klíčová pro určení modulu pružnosti způsobem, který je používán v předkládané práci.

Pomocí metody konečných prvků lze vytvořit model pouze konečných rozměrů. První série příkladů byla proto řešena na modelu, který představoval výřez pružného poloprostoru. Bylo sledováno jaký vliv na vypočtenou rychlost povrchového vlnění mají velikost modelu, útlum a okrajové podmínky. Následující tabulka uvádí přehled řešených příkladů.

model	dělení	útlum β	DOF	poznámka
PP1	15x15	-	512	
PP2	40x40	-	3 362	
PP3	200x200	-	80 802	
PP4	40x40	0,0001	3 362	
PP5	40x40	0,0100	3 362	
PP6	40x40	-	3 362	jiné okrajové podmínky

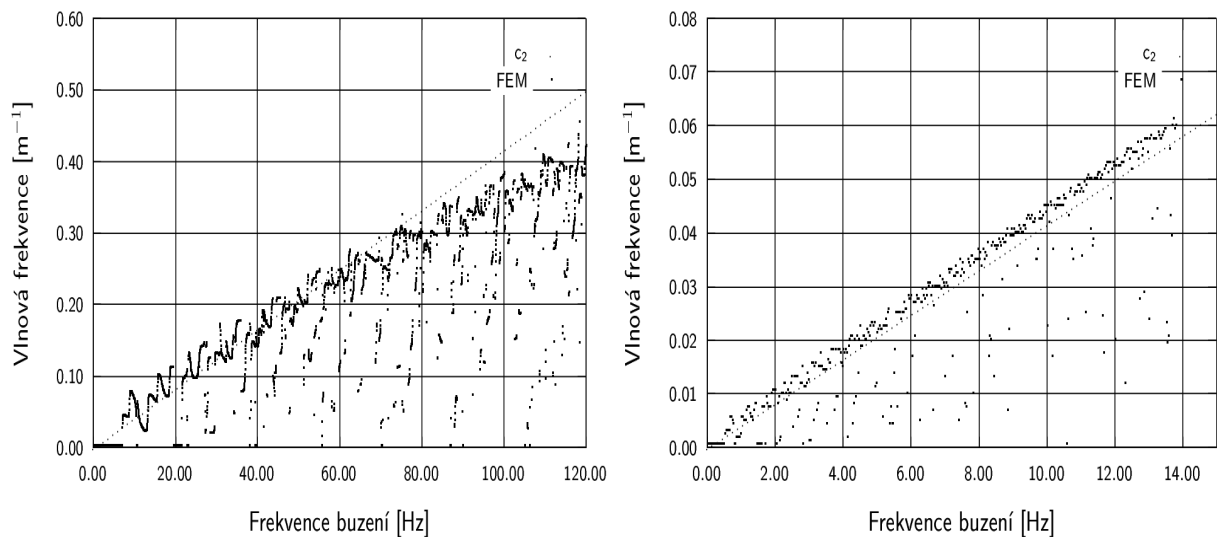
Na řešených příkladech byly zjištěny následující skutečnosti:

- Maximální délka povrchové vlny, kterou lze identifikovat je přibližně rovna velikosti modelu. Odtud lze určit *minimální budící frekvenci* podle vztahu

$$f_{\min} = \frac{c_R}{l_{\max}} \quad (39)$$

kde l_{\max} je největší rozměr modelu.

Velký model umožňuje určit rychlost šíření povrchového vlnění při nízkých frekvencích. Tato skutečnost je nejlépe patrná srovnáním výsledků z modelu PP1 (obr. 3, graf vlevo) a PP3 (graf vpravo).



Obr. 3: Srovnání odezvy dvou velikostí modelu pružného poloprostoru

- Minimální délka vlny, kterou lze identifikovat, je dána velikostí prvků. Tato délka se rovná dvojnásobku délky prvku. Potom *maximální budící frekvence* je

$$f_{\max} = \frac{c_R}{2\Delta x}, \quad (40)$$

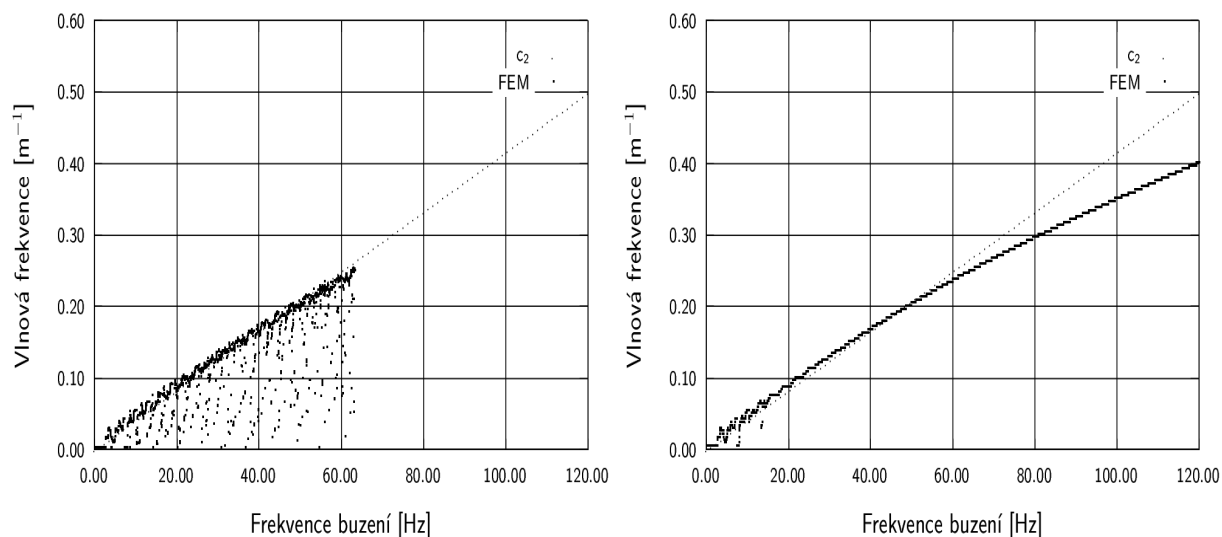
kde Δx je velikost prvků.

- Zároveň však platí, že pro vlny kratší než trojnásobek délky prvku je vypočtená rychlost zkreslená. Pro určení modulu pružnosti je nutné *minimálně šest prvků na délku vlny*, tomu odpovídá frekvence

$$f_6 = \frac{c_R}{6\Delta x}. \quad (41)$$

Zkreslení výsledků se projeví tak, že délka povrchové vlny na modelu je větší než ve skutečnosti, což ve svém důsledku znamená větší rychlost šíření a tedy vyšší modul pružnosti.

- *Viskózní útlum* působí pokles amplitudy povrchového vlnění s rostoucí vzdáleností od zdroje buzení. Srovnáním výsledků na tlumeném modelu PP4 (obr. 4, graf vpravo) s výsledky netlumeného modelu PP2 (graf vlevo) je vidět, že stejné frekvenci buzení u tlumeného modelu odpovídají delší povrchové vlny než u netlumeného modelu. Z tohoto důvodu je určena i vyšší rychlost šíření a tím vyšší modul pružnosti. Tento jev je ve shodě se skutečností, neboť moduly pružnosti určované ultrazvukovou zkouškou jsou vyšší než moduly určené při statické zkoušce. Na grafu vpravo je patrný i menší vliv odražených vln.
- Vliv *okrajových podmínek* na vzdáleném okraji tohoto modelu se projeví jen u vln, jejichž délka je srovnatelná s velikostí modelu. Vlny podstatně kratší než velikost modelu nejsou okrajovými podmínkami ovlivněny.



Obr. 4: Srovnání odezvy netlumeného a tlumeného modelu pružného poloprostoru

4.4.2. Šíření povrchového vlnění na rotačně symetrické desce

Typická skladba tuhé vozovky se skládá z nosné desky, podkladních vrstev a podloží. G. Martinček v [9] ukázal, že povrchové vlnění na desce je podložím ovlivněno pouze při určitých délkách vln.

Proto byla druhá série příkladů zaměřena na šíření povrchového vlnění na rotačně symetrické desce. Sledován byl především vliv velikosti prvků. Povrchové vlnění se v desce šíří s disperzí, proto různým frekvencím buzení odpovídají různé rychlosti šíření vlnění.

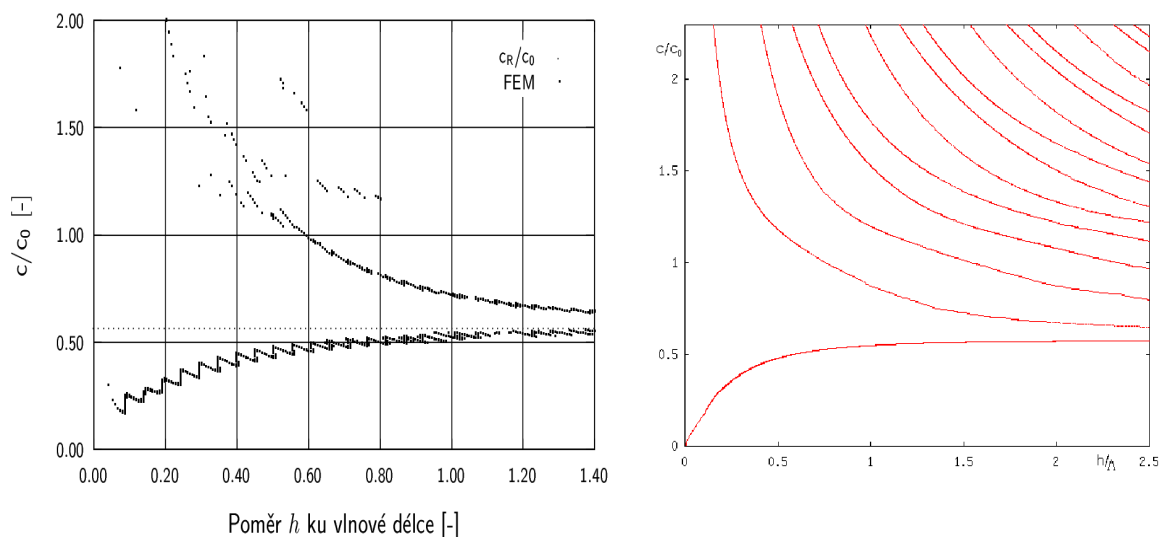
model	dělení	útlum β	DOF
D1	10x1	-	44
D2	30x3	-	248
D3	60x6	-	854
D4	240x24	-	12 050

Na těchto příkladech bylo zjištěno:

- Rychlost šíření vlnění, jehož vlnová délka je menší než tloušťka desky, se blíží rychlosti povrchových vln c_R , vztah ().
- Je-li modul pružnosti určován z rychlosti povrchových vln, je nutné využít budící frekvence od

$$f_E = \frac{c_R}{h}. \quad (42)$$

- Sloučením požadavků šesti prvků na délku vlny a minimální délky vlny rovné tloušťce desky lze odvodit, že minimální počet prvků na tloušťku desky je šest. Při tomto dělení je však frekvenční pásmo využitelné pro určení modulu pružnosti velmi úzké.



Obr. 5: Srovnání odezvy rotačně symetrické desky získané numericky a analyticky

- Při vhodném dělení sítě jsou výsledky získané tímto postupem v dobré shodě s analytickým řešením. Na levém grafu obr. 5 jsou výsledky z modelu D4 a na pravém grafu je analytické řešení.

4.4.3. Povrchové vlnění na dvouvrstvém prostředí

Pro další přiblížení modelu skutečné vozovce bylo sledováno šířením vlnění po povrchu dvouvrstvého prostředí. Jedná se pouze o počáteční přiblížení, neboť skutečná vozovka má větší počet vrstev a jiné mechanické vlastnosti. V této práci byl však důraz kladen na podrobné ověření algoritmů na jednodušších příkladech.

Sledován byl vliv poměru jednotlivých modulů pružnosti. Modul pružnosti horní vrstvy byl vždy vyšší než modul pružnosti dolní vrstvy.

model	dělení	E^d	E^h	DOF	poznámka
VP1	40x40	500 MPa	5 GPa	3362	
VP2	40x40	250 MPa	5 GPa	3362	
VP3	40x40	800 MPa	3 GPa	3362	nespojitosť
VP4	40x40	800 MPa	3 GPa	3362	

Z výsledků vyplývá:

- Povrchové vlny, jejichž délka je kratší než tloušťka horní vrstvy se šíří rychlostí Rayleighových vln materiálu horní vrstvy c_R^h .
- Delší povrchové vlny by se měly po povrchu šířit rychlostí Rayleighových vln spodní vrstvy. To platí přibližně po délku vln

$$\frac{h}{\Lambda} < 0,15. \quad (43)$$

- Délky vln mezi těmito dvěma hranicemi se nacházejí v přechodovém pásmu a pro určení modulů pružnosti je nelze využít.
- Při velkém rozdílu modulů pružnosti horní a dolní vrstvy je nutné velmi podrobné dělení sítě. Pro odhad nutné velikosti prvků lze použít vztah

$$\Delta x = \frac{c_R^d h}{6c_R^h}. \quad (44)$$

4.4.4. Srovnání buzení šumem a impulzem

Snahou navržené metody je využít předností stávajícího způsobu měření pomocí rázové zkoušky (rychlé provedení) a přesnosti metody fázových rychlostí. Toho je dosaženo vyžitím podobného zařízení jako u rázové zkoušky, ale změnou způsobu buzení z impulsu na šum. Tato práce se však nesnaží řešit technické detaily tohoto zařízení, ale způsob analýzy výsledků.

V poslední sérii výpočtů je porovnáno buzení pomocí impulsu síly s buzením pomocí šumu z pohledu určení rychlostí povrchového vlnění při různých frekvencích. Konečnou přesnost měřicí techniky zde simuluje použití pevné desetinné čárky na výstupu programu FEAX.

- Buzení pomocí impulsu síly poskytuje velmi dobré výsledky v úzkém frekvenčním pásmu a je využitelné pouze pro určení modulu pružnosti dolní vrstvy. Použití pevné desetinné čárky ukazuje, že tento způsob buzení je nepoužitelný pro určení rychlosti šíření vlnění při vyšších frekvencích. V důsledku toho není možné určit modul pružnosti horní vrstvy.
- Buzení šumem přineslo podle očekávání lepší výsledky i při použití pevné desetinné čárky.

ZÁVĚR

Disertační práce si kladla za cíl ověřit na numerickém modelu postup pro určení modulů pružnosti jednotlivých vrstev tuhé vozovky pomocí rychlosti šíření povrchových vln. Numerický model byl realizován metodou konečných prvků. V rámci předkládané práce byl vyvinut vlastní program na řešení dynamické odezvy rotačně symetrické úlohy pomocí transformace do frekvenční oblasti. K opakovanému řešení lineárních soustav rovnic s komplexními koeficienty, které tato metoda vyžaduje, byla použita metoda sdružených gradientů s vlastní úpravou pro indefinitní matice.

Při určení modulů pružnosti je nutné nejprve určit délky povrchových vln pro jednotlivé harmonické složky budící síly. Metoda pro jejich určení musí být použitelná při malém počtu diskrétních hodnot. Tato úloha byla realizována modifikací Fourierovy transformace. Rychlosti šíření povrchového vlnění pro jednotlivé frekvence jsou určeny jako součin frekvence buzení a délky jí odpovídající povrchové vlny. Z těchto rychlostí lze za určitých předpokladů využitím vztahů pro Rayleighovy vlny určit moduly pružnosti jednotlivých vrstev.

Výsledky získané na základě provedených simulací potvrzují použitelnost navrhovaného postupu. Moduly pružnosti určené z výsledků simulace měření ve všech případech konvergují k zadaným hodnotám modulů.

V získaných výsledcích se však objevuje chyba, která je způsobena použitím metody konečných prvků. Ukázalo se, že určený modul pružnosti je tím přesnější, čím podrobnější je síť modelu. Dělení sítě jednoznačně určuje frekvenční pásmo v kterém bylo možné numerickou simulaci použít. Způsob určení tohoto pásma je popsán ve shrnutí dosažených výsledků. Na dělení sítě jsou obzvláště velké nároky u modelů kde byl řádový rozdíl v modulech pružnosti jednotlivých vrstev modelu.

Problémy způsobené numerickou simulací se nebudou vyskytovat u skutečného měření, kde dynamická odezva vozovky je přímo měřena.

Bude-li buzení pomocí šumu prakticky využito, není nutné oproti metodě fázových rychlostí manipulovat s polohou snímačů a měřit na několika frekvencích, což výrazně snižuje časové nároky na měření a zjednodušuje jeho automatizaci. Ve srovnání s rázovou zkouškou lze pomocí této metody lze dosáhnout vyšší přesnosti měření.

Metoda pro určení modulů pružnosti jednotlivých vrstev vrstevnatého prostředí byla v této práci aplikována na tuhé vozovky, ale použitelnost je mnohem širší. Jako příklad lze uvést diagnostiku základových desek, vrstevnatých konstrukcí apod. Naznačené postupy, bude-li to možné, budou rozvinuty v rámci postdoktorandského grantu, kde by bylo možné realizovat ověření metody na skutečném měření.

Celkově lze konstatovat, že byla ověřena správnost a použitelnost navržených algoritmů. Deklarované cíle práce byly splněny.

CONCLUSIONS

The objective of this thesis is a verification of the methodology for the determination of Young's modules of concrete pavement layers based upon the velocity of surface waves. Excitation of noise is used in the proposed measurement method and surface response along the chosen straight line is evaluated.

The mathematical model based on finite element method was utilized for the verification. By using the frequency of domain transformation software for measurement simulation of dynamic response of axially symmetrical task was developed. For repeated solution of linear equation system the method of conjugate gradients with author's modification of indefinite matrix was used. Surface wavelength for each harmonic part of excitation force is necessary to assess the elasticity modules. A method for the calculation of wavelength must be feasible for low number of discrete values.

This task was accomplished by the modification of Fourier transform. Surface waves propagation velocity for different frequencies are calculated by multiplying the exciting frequency and length of adequate surface wave. The elasticity modules of different layers are determined from velocities by utilizing relations for Rayleigh's waves. The result of this analysis is modulus of elasticity vs. frequency function. Relevant modules of elasticity are gained due to the correct choice of admissible frequency bands.

Simulations proved the feasibility of the proposed method. Elasticity modules from results of simulation measurement converge to prescribe values of modules. It appeared that the approach described above is meshing dependent (FEM). Meshing unambiguously gives the frequency band for possible numerical simulation. Layers with non-similar order of magnitude of elastic modules lead to a very fine FE mesh. When measuring the dynamic response of pavement is directly obtained the problems are absented.

Measurement time demands are decreased and automation is simplified if exciting by means of noise is used, because it is not necessary to manipulate with accelerometer and to measure on number of frequencies as in the case of phase velocities method. By using this method we can obtain a higher accuracy of measurement in comparison to force exciting testing.

The proposed method is used here for the determination of elasticity modules of layered rigid pavement but the applicability of this method is broader (e.g. foundation plates or layered structures). The approach proposed in this thesis might be developed more and calibrated, for example, within the framework of a postdoctoral project in the near future.

LITERATURA

- [1] Braja M. Das: Fundamentals of Soil Dynamics, Elsevier, New York, 1984
- [2] Døssing O.: Měření pohyblivosti, Brüel & Kjær, 1988
- [3] Ewing M., Jardetzky W., Press F.: Elastic Waves in Layered Media, McGraw-Hill, New York-London, 1957
- [4] Florian A., Vrba J.: Studie vlivu teplotního pole na chování betonových vozovek, fond rozvoje VŠ 96, projekt č. 0773/96, VUT FAST Brno, 1996
- [5] Florian A.: Citlivostní studie, zpráva grantu č. S301/120/601, ministerstvo dopravy ČR, VUT FAST Brno, 1988
- [6] Golub G., O'Leary D.: Matrix Computations, second edition, The Johns Hopkins University press, Baltimore, 1989
- [7] Gschwendt I.: Vozovky a jejich dimenzovanie, Jaga Group vydavateľstvo, Bratislava, 1999
- [8] Karadelis J. N.: A numerical model for the computation of concrete pavement moduli: a non-destructive testing and assessment method, NDT & E international 33 (2000) str. 77-84, Elsevier, 2000
- [9] Martinček G.: Dynamika vozovek, Veda, Bratislava, 1983
- [10] Novotný B., Hanuška A.: Teória vrstevnatého polpriestoru, VEDA vydavateľstvo SAV, Bratislava, 1983
- [11] Odemark N.: Undersökning a elasticitetegenskaperna hos olika jordrter samt teori för beräkning av beläenlight elasticitetsteorin, Statens Väginstitut, 1949
- [12] Parvini M., Stolle D. F. E.: Interpretation of pavement deflection measurement data using an elastodynamic stochastic approach, Can. J. Civ. Eng. 25, str. 151-160, 1998
- [13] Šlachta E.: Chování cementobetonových vozovek při dynamickém namáhání, Inženýrské stavby č. 11, 1964
- [14] Příleský L.: Měření teplotní odezvy dvoudeskové letištní konstrukce, interní zpráva
- [15] Makovník D.: Prvá etapa geodetických meraní vplyvu zmien tepelného režimu na vyztuženú betonovú dosku B17, VŠD Žilina, 1978
- [16] Cogill J.: Acoustic waves used for studying pavements, University of New South Wales, England, 1996
- [17] Kolsky H.: Stress Waves in Solids, originál Oxford 1953, ruský překlad, Izdatělstvo inostranoj litěraty, Moskva 1955
- [18] Ulliddtz P.: Pavement Analysis, Elsevier, New York, 1987
- [19] Vrba J., Hýzl P., Bláha D.: Měření Lipník, zpráva grantu č. S301/120/601, Ministerstvo dopravy ČR, VUT FAST Brno, 1999
- [20] Al-khoury R.I.N., Scarpas A., Gurb C.A.P.M.: Finite Element Dynamics Analysis of Falling Weight Deflection Measurements, Report E97076-A, Zagreb, 1997
- [21] TP77 Navrhování vozovek pozemních komunikací - technické podmínky, VUT FAST, Brno, 1995

POUŽITÉ ZNAČENÍ

E_i	Youngův modul pružnosti i -té vrstvy
G	modul pružnosti ve smyku
\mathbf{G}	operátorová matice
\mathbf{C}	matice útlumu modelu
\mathbf{K}	matice tuhosti modelu
\mathbf{K}^*	pseudotuhostní matice modelu
\mathbf{M}	matice hmotnosti modelu
$\mathbf{N}^{(e)}$	matice tvarových funkcí prvku
T	kinetická energie
V	potenciální energie
c_1	rychlost šíření podélného vlnění
c_2	rychlost šíření příčného vlnění
c_R	rychlost šíření povrchových vln
\mathbf{f}_i	vektor uzlových sil
\mathbf{f}_d	vektor tlumících sil
h_i	tloušťka i -té vrstvy
i	imaginární jednotka, $\sqrt{-1}$
\dot{q}_i	zobecněná rychlost
r, φ, z	souřadnice v cylindrickém souřadném systému
t	čas
\mathbf{u}	pole posunutí
\mathbf{u}_i	vektor uzlových parametrů
$\dot{\mathbf{u}}$	pole rychlostí
u, v, w	složky pole posunutí
x, y, z	souřadnice v kartézském souřadném systému
Δ	poměrná objemová změna
ε, γ	složky tenzoru poměrných deformací
η, ξ	souřadnice na izoparametrickém prvku
κ	poměr c_R/c_2
λ	Lamého konstanta
ν_i	Poissonův součinitel i -té vrstvy
ω	vlastní kruhová frekvence
Ω	budící kruhová frekvence
$\sigma_{x,y,z}$	normálové napětí
ρ	hustota
τ	smykové napětí

CURRICULUM VITAE

Základní údaje

Jméno a příjmení: Jiří Vrba,
Narozen: 14. listopadu 1970 v Dačicích,
Bydliště: Kachlíkova 15, Brno 635 00,
E-mail: vrba.j@fce.vutbr.cz,
Rodinný stav: ženatý, tři děti.

Vzdělání a praxe

1985 - 1989 Střední průmyslová škola stavební ve Valašském Meziříčí,
1989 - 1994 VUT FAST Brno, specializace: automatizace statických výpočtů,
1994 - 2001 doktorandské studium na VUT FAST v Brně,
1995 - 2001 Odborný asistent na Ústavu stavební mechaniky VUT FAST.

Publikace

Vrba J.: Zkreslení dynamické odezvy vlivem poměru velikosti prvku k délce vln, Sborník odborného semináře doktorských prací, VUT FAST Brno, 2001

Vrba J.: Influence of size elements into distortion dynamics response, 3RE Workshop Weimar/Brno - Reliability, Revitalization, Reengineering, VUT FAST Brno, 2000

Florian A., Kudrna J., Vrba J.: Spolehlivostní analýza průhybů a napětí v betonové vozovce, konference Spolehlivost a diagnostika v dopravě 99, Univerzita Pardubice, 1999, str. 48 - 53

Vrba J., Florian A.: Parametrický model tuhé vozovky, seminář Aplikovaná mechanika v dopravě 99, Univerzita Pardubice, 1999, str. 66 - 70

Florian A., Vrba J.: Spolehlivostní analýza vozovky upravené speciálními technologiemi, Inžinierske stavby, 1999, 4-5, str. 150-154

Vrba J.: Interakce podlažní desky se stropním panelem poškozeným pádem letadla, konference Interakce dynamických systémů s okolním prostředím a soustavy se zpětnou vazbou, AV ČR Praha, 1998, str. 135-140

Florian A., Vrba J.: Spolehlivostní analýza tuhých vozovek - popis parametrické studie, projekt č. S301/120/601, Min. dopravy ČR, VUT FAST Brno, 1998

Vrba J., Florian A.: Zpřesněný výpočtový model betonových vozovek - I. fáze, grant č. S301/120/601, Ministerstvo dopravy ČR, VUT FAST Brno, 1997

Novotný J., Vrba J.: Interakce podlažní desky se stropní konstrukcí po její destrukci, konference Interakce dynamických systémů s okolním prostředím a soustavy se zpětnou vazbou, AV ČR Praha, 1997, str. 67-74

Vrba J., Florian A.: Studie vlivu teplotního pole na chování betonových vozovek, fond rozvoje VŠ 96, projekt č. 0773/96, VUT FAST Brno, 1996

Florian A., Vrba J.: Stochastická analýza vozovky, Ministerstvo dopravy ČR, VUT FAST Brno, 1995

Vědecké aktivity

V průběhu doktorantského studia jsem se podílel na řešení dílčích částí těchto grantů:

GA ČR č. 103/93/0929 Podzemní skladování vyhořelého paliva z jaderných elektráren

GA ČR č. 103/93/2012 Modelování a analýza konstrukcí vystavených seizmickým účinkům

GA ČR č. 103/97/0186 Stanovení odezvy konstrukce v interakci s prostředím na krátkodobé zatížení

GA ČR č. 103/00/0093 Statická a dynamická analýza potrubí a nádob v interakci s prostředím

VVZ CEZ J22/98:26220007 Numerické modelování staticky a dynamicky zatížených stavebních konstrukcí

Fond rozvoje VŠ MŠVTV PR 2600773 Predikce chování bezesparých betonových krytů vozovek

Grant MDS ČR č. S301/120/601 Zlepšení stavu pozemních komunikací