VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
Fakulta strojního inženýrství

RNDr. Ing. Jiří V. Horák, CSc.

UŽITÍ NEROVNIC V MECHANICE

APPLIED VARIATIONAL INEQUALITIES

ZKRÁCENÁ VERZE HABILITAČNÍ PRÁCE

VUTIUM

Brno 2002

KLÍČOVÁ SLOVA:
variační nerovnice, svázaná termopružnost, semikoercivní úlohy.

KEY WORDS:
variational inequality, coupled thermoelasticity, semi-coercive problems.

Místo uložení práce
Oddělení pro vědu a výzkum FSI VUT v Brně

ISBN 80 – 214 – 2111 – 8
ISSN 1213 – 418x

Obsah

Představení autora habilitační práce

Předkladatel habilitační práce *Jiří Vladimír Horák* se narodil v roce 1946 v Přerově, Česká republika. Po zaměstnáních v Kovoprojektě Brno, Sigma Výzkumném ústavu Olomouc a na ÚGN AV ČR v Ostravě pracuje od roku 1992 jako vysokoškolský pedagog na Katedře matematické analýzy a aplikací matematiky, Přírodovědecká fakulta University Palackého v Olomouci.

V roce 1969 ukončil vysokoškolská studia na VUT FAST Brno, zaměření KDS, obor ocelové konstrukce (titul Ing.). Další vysokoškolské vzdělání získal na MFF UK Praha, ukončené v roce 1980 v oboru matematika, zaměření matematická analýza (titul promovaný matematik). V tomto zaměření pokračoval v dalším vzdělávání na MFF UK Praha, kde získal v roce 1995 titul CSc., ve stejném zaměření získal v roce 2001 na PřF UP Olomouc titul RNDr.

V posledních letech se autor práce podílel na řešení i vedení celé řady projektů, například jako: spoluřešitel grantového projektu "Mechanismus rozpojování hornin vysokotlakým vodním mediem", č. 31 655 (1988 – 1992), Ústav geoniky, Akademie věd České republiky, Ostrava; vedoucí projektu "Matematické modelování procesu rozpojování hornin" (grant MŠMT, FDRVŠ č. 0365, 1993); vedoucí a spoluřešitel projektů "Matematické a počítačové modelování speciální třídy variačních nerovnic" a "Počítačové modely svázaných polí, nerovnice a optimalizace" (vnitřní granty PřF UP Olomouc 1996-8); vedoucí projektu "Modernizace výuky matematiky a jejích aplikací" (grant MŠMT, FRVŠ F4 0701, 1999, PřF UP Olomouc); spolunositel grantového projektu "Matematické modelování optimálních návrhů kotevních výztuží" (GAČR, grant 105/99/1651, 1999 – 2001); spoluřešitel projektu "Výzkumný záměr kateder matematiky" (PřF UP Olomouc, J14/98 153100011, 2000 – 2002).

Odborné aktivity předkladatele práce jsou zaměřeny především na matematické modelování okrajových úloh mechaniky kontinua, zejména matematické teorie pružnosti a na související problematiku řešitelnosti semikoercivních variačních nerovnic s aplikacemi na kontaktní úlohy se třením. V rámci evolučních variačních nerovnic se zabývá otázkami řešitelnosti úloh svázané termopružnosti.

Autor práce se dále podílí na přípravě a organizaci řady konferencí "Olomoucké dny aplikované matematiky – ODAM" a spolupracuje při vydávání sborníku těchto konferencí ve funkci editora (ODAM 1999, 2001).

Pedagogická činnost je soustředěna na výuku předmětů parciální diferenciální rovnice, mechanika kontinua, variační nerovnice a nelineární úlohy mechaniky, tvarová optimalizace, a na vedení diplomových prací bakalářského i magisterského studia a na přípravě studentů doktorandského studia.

Dosažené výsledky v oblasti matematického modelování byly v průběhu let a ve spolupráci s technickou praxí aplikovány (zejména v koncernu SIGMA – výrobní podniky Lutín, Hranice, Olomouc, Závadka) při numerickém řešení pevnostní a teplotní problematiky pro čerpací zařízení pro klasickou i jadernou energetiku. Dále v Severočeském hnědouhelném revíru Most při modelování problematiky dobývání uhlí kolesovým rypadlem, a v Ústavu geoniky ČAV Ostrava při modelování procesu rozpojování hornin mechanickým nástrojem.

1 Úvod

V habilitační práci se zabýváme problematikou řešitelnosti variačních rovnic a nerovnic a možnostmi jejich využití při modelování úloh matematické fyziky. Navržené a analyzované matematické modely mají tvar lineárních, nelineárních variačních rovnic a variačních nerovnic 1. a 2. druhu, viz [33].

Základním východiskem práce je problematika svázaných polí s omezením na linarizovanou teorii svázané termopružnosti (viz [1], [5], [6], [9], [22], [25], případně [49], [66], [70]). Pro uvedené aplikace ([96], [98], [100], [105]) bylo z důvodů vlastností použitých materiálů možno použít teorii teplotních napětí, proto je důraz v práci kladen na analýzu úloh čtvrtého řádu a jejich zjednodušení ([18], [66] a [70]).

Habilitační práce je tvořena třemi tématicky samostatnými částmi. První, *úvodní* blok obsahuje vstupní text do studované problematiky a skládá se z předmluvy, seznamu označení a úvodu.

Druhý tématický blok je z matematického hlediska tvořen *teoretickou částí* práce a obsahuje kapitoly I. až III. V první kapitole je odvození základních řídících rovnic svázané teorie termopružnosti v 3D a jejich linearizace, a modelových rovnic (metodou dimenzionální redukce). Ve třetí kapitole je analyzována jednak řešitelnost typových modelových úloh pro různé typy okrajových podmínek a jednak jejich vliv na dekompozici úlohy a tedy na její další možné zjednodušení. Zvláštní pozornost je věnována semikoercivním případům, kdy je nutné formulovat další podmínky (na bilanci či orientaci zatížení, velikost tření, atd.), zajišťující řešitelnost úlohy.

Třetí a poslední tématický blok práce je zaměřen na ilustraci užití moderního matematického aparátu pro řešení konkrétních technických problémů, s omezením na teorii teplotních napětí. V práci je uvedeno několik, pro autorovu činnost charakteristických oblastí aplikací matematického modelování při řešení konkrétních technických úloh pro potřeby průmyslu (viz [56], [59] a [105], podrobnosti lze nalézt v [58], [60], [61], [102] až [106]).

Pokud jde o řešitelnost úloh druhého řádu v rámci linearizované teorie svázané termopružnosti, byla studována celou řadou autorů. Problematika koeficientu svázanosti je diskutována v [5], [25], [28], [36], [41]. Otázky existence a jednoznačnosti řešení, asymptotické stability řešení jsou studovány v [3], pro problematiku termodifuze v [12]. Numerické aspekty úlohy byly řešeny v [31] (pro neklasické okrajové podmínky a nesvázanou teorii), pro klasické okrajové podmínky a svázanou teorii je numerická analýza prezentována v [34], [35] a [40]. U úloh čtvrtého řádu se v rovnicích vyskytuje člen se smíšenou derivací typu $\partial_t \partial_x^2 u(x,t)$, což situaci komplikuje. Proto se tomuto problému věnujeme podrobněji.

V tomto smyslu předkládaná práce navazuje na [66], [70], a doplňuje a rozšiřuje články [71] až [74], [76], [77] a [79]. Z důvodů jednoduchosti je práce omezena na homogenní a isotropní materiál a lineární teorii matematické pružnosti.

2 Svázaná termopružnost

2.1 Východiska a původ zkoumané úlohy

Technika odvození výchozích řídících rovnic ve třech dimenzích je uvedena v [9], viz také [16], modifikované a upravené vztahy pro naše cíle jsou uvedeny v [49].

Základní výchozí vztahy jsou termodynamické zákony a předpoklady na průběh celého termodynamického procesu (vliv historie, okolí, axiomy determinismu, objektivity), na vlastnosti materiálu (konstitučními vztahy), tedy základní vztahy linearizované teorie svázané termoelasticity mají tvar $\mathbf{g} = \nabla\theta$, $\mathbf{q} = -\mathbf{K}\mathbf{g}$, $\mathbf{E} = \frac{1}{2}\,(\nabla\mathbf{U} + \nabla\mathbf{U}^T)$, $\mathbf{S} = \mathbf{C}[\mathbf{E}] + (\theta - \theta_0)\mathbf{M}$, $\mathrm{div}\,\mathbf{S} + \mathbf{b} = \rho\ddot{\mathbf{U}}$, $-\mathrm{div}\,\mathbf{q} + \theta_0\mathbf{M}\cdot\dot{\mathbf{E}} + r = c\dot{\vartheta}$.

Za předpokladu $\ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{0}$ lze úplný systém rovnic pro *kvazistatický případ linearizované teorie svázané termopružnosti* v 3D psát ve tvaru

$$\mathrm{div}\,\mathbf{C}[\nabla\mathbf{U}] + \mathrm{div}\,(\vartheta\mathbf{M}) + \mathbf{b} = \mathbf{0},$$
$$\mathrm{div}\,(\mathbf{K}\nabla\vartheta) + \theta_0\mathbf{M}\cdot\nabla\dot{\mathbf{U}} + r = c\dot{\vartheta}.$$

2.2 Odvození řídících rovnic $1D$ modelové úlohy

Pro dimensionální redukci $3D$ rovnice vedení tepla předpokládáme

$$\vartheta(x,y,z,t) \cong \vartheta_1(x,t) + y\vartheta_2(x,t), \quad r(x,y,z,t) \cong r_1(x,t) + yr_2(x,t).$$

V důsledku omezení na „technickou“ teorii ohybu ($u_1 = u_1(x,t)$ je osové posunutí, $u_2 = u_2(x,t)$ průhyb, $\boldsymbol{U} = \{\boldsymbol{u},\boldsymbol{\vartheta}\}$, $\boldsymbol{u} = \{u_1,u_2\} \equiv \{u_1,u_2,0\}$, $\boldsymbol{\vartheta} = \{\vartheta_1,\vartheta_2\}$) platí

$$\boldsymbol{u} = \{u_1 - y\frac{\partial u_2}{\partial x}, u_2, 0\}, \quad \mathrm{div}\,\dot{\boldsymbol{u}} = \frac{\partial^2}{\partial x\partial t}u_1 - y\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}).$$

Pro odvození pohybové rovnice vycházíme z *Bernoulliovy – Eulerovy hypotézy*. Úplná soustava řídících rovnic pro modelovou úlohu reprezentující ohyb termopružného nosníku (deskového pásu) pro čtveřici funkcí $\{\{u_1,u_2\},\{\vartheta_1,\vartheta_2\}\}$ má výsledný tvar

$$\frac{\partial^2\vartheta_1}{\partial x^2} - \frac{\alpha_h+\alpha_d}{kH}\vartheta_1 + \frac{\alpha_h-\alpha_d}{2k}\vartheta_2 - \theta_0\frac{E\alpha}{k}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial t} + \tilde{r}_1 = a\frac{\partial\vartheta_1}{\partial t}\ , \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\vartheta_2}{\partial x^2} - \left(\frac{12}{H^2} + \frac{3(\alpha_h+\alpha_d)}{kH}\right)\vartheta_2 - \frac{6(\alpha_h-\alpha_d)}{kH^2}\vartheta_1 + \\ +\theta_0\frac{E\alpha}{k}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right) + \tilde{r}_2 = a\frac{\partial\vartheta_2}{\partial t},\end{aligned} \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(EH\frac{\partial}{\partial x}u_1) - \frac{\partial}{\partial x}(\alpha EH\vartheta_1) = \tilde{q}_1, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(EJ\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_2) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\alpha EJ\vartheta_2) = \tilde{q}_2, \tag{4}$$

kde

$$\tilde{r}_1 = r_1 + \frac{\alpha_h\vartheta_h + \alpha_d\vartheta_d}{kH}, \qquad \tilde{r}_2 = r_2 + \frac{6(\alpha_h\vartheta_h - \alpha_d\vartheta_d)}{kH^2}.$$

3 Modelové $1D$ úlohy čtvrtého řádu

V práci jsou uvedeny klasické formulace úloh pro upravené řídící rovnice a různé typy okrajových podmínek. Je užito označení $I = (0,T), T \in \mathbf{R}^+, T > 0, \Omega = (0,L), L \in \mathbf{R}^+, L > 0, \partial\Omega = \{0,L\}, \Gamma = \partial\Omega \times I$, $\Omega_0 = \Omega \times \{0\}, Q = \Omega \times I$, pro koeficienty $a_1 = a, a_2 = \theta_0 \frac{E\alpha}{k}, a_{1,1} = \frac{\alpha_h+\alpha_d}{kH}, a_{1,2} = \frac{\alpha_h-\alpha_d}{2k}, a_{2,2} = \frac{12}{H^2} + \frac{3(\alpha_h+\alpha_d)}{kH}, a_{2,1} = \frac{6(\alpha_h-\alpha_d)}{kH^2}, r_1 = \frac{\tilde{r}_1}{k} + \frac{\alpha_h\vartheta_h+\alpha_d\vartheta_d}{kH}, r_2 = \frac{\tilde{r}_2}{k} + \frac{6(\alpha_h\vartheta_h-\alpha_d\vartheta_d)}{kH^2}$, $q_1 = \frac{\tilde{q}_1}{EF}, q_2 = \frac{\tilde{q}_2}{EJ}$.

Podrobně jsou formulovány jak klasické okrajové podmínky Dirichletova a Neumannova typu, tak i jejich různé kombinace. Dále jsou formulovány neklasické okrajové podmínky Newtonova typu a jejich jednostranné varianty, a podmínky zachycující vliv tření. Z důvodů stručnosti uvedeme jen jednu definici klasického řešení.

Definice 1 *Předpokládejme, že* $\{\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}\} \in [C(Q)\times C(Q)]^2$, $\boldsymbol{q} = \{q_1,q_2\}$, $\boldsymbol{r} = \{r_1,r_2\}$ *je daná čtveřice spojitých abstraktních funkcí. Nechť* $\hat{\boldsymbol{u}}_1$, $\hat{\boldsymbol{u}}_2$, $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_1$, $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_2 \in \mathbf{R}^2$ *jsou dané dvojice čísel,* $\hat{s}_{2,0}, \hat{M} \in \mathbf{R}^1$, *a* $\vartheta_{0,1} = \vartheta_{0,1}(x)$, $\vartheta_{0,2} = \vartheta_{0,2}(x)$ *jsou dané funkce. Potom čtveřice dostatečně hladkých funkcí* $\{\{u_1,u_2\},\{\vartheta_1,\vartheta_2\}\}$, *pro níž platí*

$$
(P_v)\left\{\begin{array}{ll}
D^2\vartheta_1 - a_{1,1}\vartheta_1 + a_{1,2}\vartheta_2 - a_2 D_t(Du_1) + r_1 = a_1 D_t\vartheta_1 & \text{v } Q,\\
D^2\vartheta_2 - a_{2,2}\vartheta_2 - a_{2,1}\vartheta_1 + a_2 D_t(D^2u_2) + r_2 = a_1 D_t\vartheta_2 & \text{v } Q,\\
D^2u_1 - \alpha D\vartheta_1 = q_1 & \text{v } Q,\\
D^4u_2 + \alpha D^2\vartheta_2 = q_2 & \text{v } Q,\\
\gamma(u_1) = \hat{\boldsymbol{u}}_1,\ \gamma^{(0)}(u_2) = \hat{\boldsymbol{u}}_2,\ \gamma(\vartheta_1) = \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_1,\ \gamma(\vartheta_2) = \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_2 & \text{na } \Gamma,\\
\gamma^{(1)}(u_2) = \hat{s}_{2,0} & \text{na } \{0\}\times I,\\
\gamma_N^{(2)}(u_2) = \hat{M}, & \text{na } \{L\}\times I,\\
\vartheta_1 = \vartheta_{0,1},\quad \vartheta_2 = \vartheta_{0,2} & \text{v } \Omega_0
\end{array}\right.
$$

se nazývá klasickým *řešením modelové úlohy pro vetknutý nosník (v* $x = 0$*) v rámci linearizované teorie svázané termopružnosti.*

Ze známých důvodů nevystačíme s pojmy klasického řešení a proto zavádíme pojem zobecněného řešení. Definujeme vhodné prostory funkcí a pomocné formy umožňující zápis nové formulace převést na formálně „jednotný“ tvar.

Definujeme lineární prostory kinematicky přípustných složek funkcí $\boldsymbol{U}$

$$H_0^1(\Omega) \subseteq \mathcal{V}_1 \subseteq H^1(\Omega),\ H_0^2(\Omega) \subseteq \mathcal{V}_2 \subseteq H^2(\Omega),\ H_0^1(\Omega) \subseteq \mathcal{U}_i \subseteq H^1(\Omega),\ i = 1,2,$$

kde $H^k(\Omega)$, $H_0^k(\Omega), k = 1,2$ značí Sobolevovy prostory funkcí (viz [2], [14]).

Odpovídající prostor funkcí s konečnou energií je tvořen kartezským součinem příslušných prostorů testovacích funkcí a má tvar $\mathcal{H} = \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$.

Pro úlohy s jednostrannými okrajovými podmínkami Signoriniho typu, definujeme konvexní množinu $\mathcal{K}$ kinematicky přípustných průhybů $\mathcal{K} = \{\boldsymbol{V} \in \mathcal{H} \mid u_2(x) \geq 0, Du_2(x) \leq 0, x = 0, L\}$ a pro úlohy s okrajovými podmínkami modelujícími „dané“ tření zavádíme funkcionály $j, j_i : \mathcal{H} \to \mathbf{R}^1$, definované předpisy $j(\boldsymbol{V}) = \sum_i j_i(\boldsymbol{V})$, kde $j_i : \mathcal{H} \to \mathbf{R}^1$ jsou dány vztahy

$$j_i(\boldsymbol{V}) = \mathcal{T}_i|v_2(x_i)|,\ j_i(\boldsymbol{V}) = \mathcal{M}_i|Dv_2(x_i)|,$$

kde $\mathcal{T}_i$, $\mathcal{M}_i \geq 0$, $i = 1, 2$ jsou hodnoty daného tření.

Jednostranné varianty podmínek se třením jsou dány funkcionály

$$j_i^+(\boldsymbol{V}) = \mathcal{T}_i(v_2(x_i))^+,\ j_i^-(\boldsymbol{V}) = \mathcal{M}_i(Dv_2(x_i))^-.$$

Pro zobecněnou formulaci úlohy potřebujeme bilineární formy

$$\boldsymbol{a}^{(i)}(u,v) = (D^i u, D^i v)_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega D^i u(x) D^i v(x) dx\ u, v \in H^i(\Omega),\ i = 0, 1, 2,$$
$$\boldsymbol{b}(\vartheta,\eta) = (D\vartheta,\eta)_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega D\vartheta(x)\eta(x) dx \quad \vartheta,\eta \in H^1(\Omega),$$

a hraniční bilineární formy (z okrajových podmínek Newtonova typu)

$$\boldsymbol{h}^{(T)}(u,v) = [k_{(x)} u(x) v(x)]_0^L,\ \boldsymbol{h}^{(M)}(u,v) = [m_{(x)} Du(x) Dv(x)]_0^L,$$

pro vektorové funkce definujeme

$$\mathcal{H}^{(T)}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) \equiv \boldsymbol{h}^{(T)}(u_2,v_2),\ \mathcal{H}^{(M)}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) \equiv \boldsymbol{h}^{(M)}(u_2,v_2).$$

Jejich nelineární analogie pro jednostranné pružné podpory mají tvar

$$\boldsymbol{h}^{(T^+)}(u,v) = [k_{(x)} u(x)^+ v(x)]_0^L,\ \boldsymbol{h}^{(M^-)}(u,v) = [m_{(x)} (Du(x))^- Dv(x)]_0^L,$$

a pro vektorové funkce definujeme

$$\mathcal{H}^{(T^+)}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) \equiv \boldsymbol{h}^{(T^+)}(u_2,v_2),\ \mathcal{H}^{(M^-)}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) \equiv \boldsymbol{h}^{(M^-)}(u_2,v_2).$$

Výsledné bilineární formy reprezentující deformační energii pro osové a ohybové účinky, a příspěvky od svázanosti mají tvary

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}_S(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) = -\boldsymbol{a}^{(1)}(u_1,v_1) + \boldsymbol{a}^{(1)}(\vartheta_1,\eta_1) + a_{1,1}\boldsymbol{a}^{(0)}(\vartheta_1,\eta_1) && \text{pro } \boldsymbol{U},\boldsymbol{V} \in \mathcal{H},\\
&\mathcal{A}_B(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{a}^{(2)}(u_2,v_2) + \boldsymbol{a}^{(1)}(\vartheta_2,\eta_2) + a_{2,2}\boldsymbol{a}^{(0)}(\vartheta_2,\eta_2) && \text{pro } \boldsymbol{U},\boldsymbol{V} \in \mathcal{H},\\
&\mathcal{B}_S(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) = a_1(\vartheta_1,\eta_1)_{L_2(\Omega)} - a_2\boldsymbol{a}^{(0)}(u_1,D\eta_1) && \text{pro } \boldsymbol{U},\boldsymbol{V} \in \mathcal{H},\\
&\mathcal{B}_B(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) = a_1(\vartheta_2,\eta_2)_{L_2(\Omega)} + a_2\boldsymbol{a}^{(1)}(u_2,\eta_2) && \text{pro } \boldsymbol{U},\boldsymbol{V} \in \mathcal{H},\\
&\mathcal{B}_C(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) = -a_{1,2}\boldsymbol{a}^{(0)}(\vartheta_2,\eta_1) + a_{2,1}\boldsymbol{a}^{(0)}(\vartheta_1,\eta_2) && \text{pro } \boldsymbol{U},\boldsymbol{V} \in \mathcal{H},\\
&\mathcal{C}_S(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) = \alpha\boldsymbol{b}(\vartheta_1,v_1) && \text{pro } \boldsymbol{U},\boldsymbol{V} \in \mathcal{H},\\
&\mathcal{C}_B(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) = \alpha\boldsymbol{a}^{(1)}(\vartheta_2,v_2) && \text{pro } \boldsymbol{U},\boldsymbol{V} \in \mathcal{H},
\end{aligned}$$

a jejich užitím definujeme

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) &= \mathcal{A}_S(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) + \mathcal{A}_B(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) && \text{pro } \boldsymbol{U},\boldsymbol{V} \in \mathcal{H},\\
\mathcal{B}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) &= \mathcal{B}_S(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) + \mathcal{B}_B(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) + \mathcal{B}_C(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) && \text{pro } \boldsymbol{U},\boldsymbol{V} \in \mathcal{H},\\
\mathcal{C}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) &= \mathcal{C}_S(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) + \mathcal{C}_B(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) && \text{pro } \boldsymbol{U},\boldsymbol{V} \in \mathcal{H}.
\end{aligned}$$

Nakonec definujeme lineární formu odpovídající potenciální energii vnějších sil (podle typu okrajových podmínek) $\mathcal{F}(\boldsymbol{V}) = \sum_{i=1}^2 (q_i, v_i)_{(i)} + \sum_{i=1}^2 \langle r_i, \vartheta_i \rangle_{(i)} + \hat{M} \cdot Dv(0)$, $\boldsymbol{V} \in \mathcal{H}$, kde $(.,.)_{(i)}$ a $\langle .,. \rangle_{(i)}$ značí dualitu na $\mathcal{V}_{(i)}^* \times \mathcal{V}_{(i)}$ a $\mathcal{U}_{(i)}^* \times \mathcal{U}_{(i)}$ (viz [26]).

Definujeme pojem zobecněného (slabého) řešení pro první modelovou úlohu (P_v) (je typickým představitelem úloh majících tvar *lineární variační rovnice*).

Definice 2 *Předpokládejme, že je dána čtveřice abstraktních funkcí*

$$\{\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}\} \in L_2(I; \mathcal{V}_1^* \times \mathcal{V}_2^*) \times L_2(I; \mathcal{U}_1^* \times \mathcal{U}_2^*)$$

představující zatížení a teplotní zdroje, a dvojice reálných funkcí

$$\boldsymbol{\vartheta}_0 = \{\vartheta_{0,1}, \vartheta_{0,2}\} \in L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$$

představujících počáteční podmínku. Nechť dále $\hat{\boldsymbol{U}} = \hat{\boldsymbol{U}}(t)$ je daná abstraktní funkce $\hat{\boldsymbol{U}}(t) \in H^1(\Omega) \times H^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ s.v. $t \in I$ a taková, že stopy funkčních hodnot jejích komponent jsou dány pomocí $\hat{\boldsymbol{u}}_1(t)$, $\hat{\boldsymbol{u}}_2(t)$, $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_1(t)$, $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_2(t) \in \mathbf{R}^2$ a stopa první derivace u_2 v $x = 0$ vztahem $\hat{s}_{2,0}(t) \in \mathbf{R}^1$; nechť dále $\hat{M}(t) \in \mathbf{R}^1$ reprezentuje daný ohybový moment v $x = L$. Potom abstraktní funkci $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(t) : I \to \mathcal{H}$ takovou, že pro ni platí

$$\boldsymbol{U} \in L_2(I; \mathcal{H}) \cap AC(I; \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times [L_2(\Omega)]^2) \tag{5}$$

$$D_t\boldsymbol{U} \in L_2(I; \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times [L_2(\Omega)]^2) \tag{6}$$

$$(P_{(0,0,3,4)}\boldsymbol{U})(0) = \{\vartheta_{0,1}, \vartheta_{0,2}\} \text{ v } C(I; L_2(\Omega)) \tag{7}$$

a takovou, že splňuje

$$\int_I \mathcal{A}(\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{V}(t) - \hat{\boldsymbol{U}}(t)dt - \int_I \mathcal{C}(\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{V}(t) - \hat{\boldsymbol{U}}(t))dt + \tag{8}$$
$$+ \int_I \mathcal{B}(D_t\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{V}(t) - \hat{\boldsymbol{U}}(t))dt = \int_I \mathcal{F}(\boldsymbol{V}(t) - \hat{\boldsymbol{U}}(t))dt \; \forall \boldsymbol{V} \in L_2(I; \mathcal{H})$$

nazveme zobecněným *(slabým) řešením první modelové úlohy (P_v) pro jednostranně vetknutý nosník.*

Obecnější variantu předchozí formulace mající tvar *lineární variační rovnice* je úloha se zadáním okrajových podmínek Newtonova typu, jež se ve formulaci projeví zahrnutím také hraničních bilineárních forem $\boldsymbol{h}^T$ a $\boldsymbol{h}^M$.

Analogicky zavádíme definice pro modelové případy, mající výsledný tvar nelineární variační rovnice. Například zavádíme

Definice 3 *Předpokládejme, že je opět dána čtveřice abstraktních funkcí*

$$\{\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}\} \in L_2(I; \mathcal{V}_1^* \times \mathcal{V}_2^*) \times L_2(I; \mathcal{U}_1^* \times \mathcal{U}_2^*)$$

a dvojice reálných funkcí

$$\boldsymbol{\vartheta}_0 = \{\vartheta_{0,1}, \vartheta_{0,2}\} \in L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$$

představujících počáteční podmínku, a nechť $k_{(0)}$, $k_{(L)}$, $m_{(0)}$, $m_{(L)} \geq 0$, jsou dané tuhosti posuvných a natáčivých podpor. Potom funkci $\boldsymbol{U} : I \to \mathcal{H}$ pro niž

$$\boldsymbol{U} \in L_2(I; \mathcal{H}) \cap AC(I; \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times [L_2(\Omega)]^2) \tag{9}$$

$$D_t\boldsymbol{U} \in L_2(I; \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times [L_2(\Omega)]^2) \tag{10}$$

$$(P_{(0,0,3,4)}\boldsymbol{U})(0) = \{\vartheta_{0,1}, \vartheta_{0,2}\} \text{ v } C(I; L_2(\Omega)) \tag{11}$$

a takovou, že splňuje

$$\int_I \mathcal{A}(\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{V}(t))dt - \int_I \mathcal{C}(\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{V}(t))dt + \tag{12}$$
$$+ \int_I \mathcal{H}^{(T^+)}(\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{V}(t))dt + \int_I \mathcal{H}^{(M^-)}(\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{V}(t))dt +$$
$$+ \int_I \mathcal{B}(D_t\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{V}(t))dt = \int_I \mathcal{F}(\boldsymbol{V}(t))dt \quad \text{pro} \, \forall \, \boldsymbol{V} \in L_2(I; \mathcal{H})$$

nazveme zobecněným *(slabým) řešením druhé modelové úlohy* (P_{New^+}) *s jednostrannými Newtonovými okrajovými podmínkami pro průhybovou funkci* u_2.

Dalším studovaným případem je *třetí modelová úloha* mající tvar *variační nerovnice* 1. druhu (viz [33]). Prostor funkcí s konečnou energií volíme ve tvaru $\mathcal{H} = \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, kde platí $\mathcal{V}_1 = H_0^1(\Omega)$, $\mathcal{V}_2 = H^2(\Omega)$, $\mathcal{U}_i = H_0^1(\Omega)$, $i = 1, 2$. Tedy definujeme

Definice 4 *Necht'je dána čtveřice abstraktních a dvojice reálných funkcí*

$$\{q_1, q_2, r_1, r_2\} \in L_2(I; [L_2(\Omega)]^4), \;\; \{\vartheta_{1,0}, \vartheta_{2,0}\} \in [L_2(\Omega)]^2.$$

Potom abstraktní funkci $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(t) : I \to \mathcal{H}$ *pro níž platí*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U} &\in L_2(I; \mathcal{K}) \cap AC(I; \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times [L_2(\Omega)]^2), \\ D_t\boldsymbol{U} &\in L_2(I; \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times [L_2(\Omega)]^2), \\ \mathbf{P}_{(0,0,3,4)}\boldsymbol{U}(0) &\equiv \{\vartheta_1, \vartheta_2\}(0) = \{\vartheta_{1,0}, \vartheta_{2,0}\} \quad (\text{v } C(I; [L_2(\Omega)]^2)), \end{aligned}$$

a takovou, že splňuje

$$\int_I \mathcal{A}(\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{V}(t) - \boldsymbol{U}(t))dt + \int_I \mathcal{C}(\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{V}(t) - \boldsymbol{U}(t))dt$$
$$+ \int_I \mathcal{B}(D_t\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{V}(t) - \boldsymbol{U}(t))dt \geq \int_I \mathcal{F}(\boldsymbol{V}(t) - \boldsymbol{U}(t))dt \, \forall \, \boldsymbol{V} \in L_2(I; \mathcal{K}),$$

nazveme zobecněným *řešením třetí modelové úlohy* $(P_{\mathcal{S}})$ *s jednostrannými okrajovými podmínkami Signoriniho typu pro průhybovou funkci* u_2.

Poslední modelová úloha zahrnuje vliv tření v podporách odpovídající průhybové funkci. Odpovídající prostor funkcí s konečnou energií je dán vztahem $\mathcal{H} = \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, kde opět $\mathcal{V}_1 = H_0^1(\Omega)$, $\mathcal{V}_2 = H^2(\Omega)$, $\mathcal{U}_i = H_0^1(\Omega)$, $i = 1, 2$. Tedy zavádíme definici variační nerovnice 2. druhu (viz [33]).

Definice 5 *Necht'je dána čtveřice abstraktních a dvojice reálných funkcí*

$$\{q_1, q_2, r_1, r_2\} \in L_2(I; [L_2(\Omega)]^4), \;\; \{\vartheta_{1,0}, \vartheta_{2,0}\} \in [L_2(\Omega)]^2.$$

Potom abstraktní funkci $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(t) : I \to \mathcal{H}$ *pro níž platí*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U} &\in L_2(I; \mathcal{K}) \cap AC(I; \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times [L_2(\Omega)]^2), \\ D_t\boldsymbol{U} &\in L_2(I; \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times [L_2(\Omega)]^2), \\ \mathbf{P}_{(0,0,3,4)}\boldsymbol{U}(0) &\equiv \{\vartheta_1, \vartheta_2\}(0) = \{\vartheta_{1,0}, \vartheta_{2,0}\} \quad (\text{v } C(I; [L_2(\Omega)]^2)), \end{aligned}$$

a takovou, že splňuje

$$\int_I \mathcal{A}(\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{V}(t) - \boldsymbol{U}(t))dt + \int_I \mathcal{C}(\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{V}(t) - \boldsymbol{U}(t))dt + \int_I j(\boldsymbol{V}(t)) - \int_I j(\boldsymbol{U}(t))$$
$$+ \int_I \mathcal{B}(D_t\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{V}(t) - \boldsymbol{U}(t))dt \geq \int_I \mathcal{F}(\boldsymbol{V}(t) - \boldsymbol{U}(t))dt \; \forall \boldsymbol{V} \in L_2(I; \mathcal{H})$$

se nazývá zobecněným *řešením čtvrté modelové úlohy* $(P_{\mathcal{F}})$ *s daným „tuhým" třením na průhybovou funkci* u_2.

Je zřejmé, že k uvedeným prototypům modelových úloh lze definovat nejrůznější zobecnění a to pomocí různých variant zde uvedených či dalších typů okrajových podmínek.

4 Řešitelnost typových modelových úloh

4.1 Zjednodušení modelových úloh

Řídící rovnice studované třídy modelových úloh tvoří soustavu čtyř vzájemně svázaných rovnic. K jejich podstatnému zjednodušení stačí předpokládat, že okolní prostředí má stejné fyzikální vlastnosti pod i nad nosníkem (deskou), tj. $\alpha_h = \alpha_d = \bar{\alpha}$.

V tomto případě se svázaný systém o čtyřech rovnicích rozpadne na dva systémy o dvou rovnicích jež však zůstanou i nadále svázané prostřednictvím deformačních a teplotních veličin. Tyto nové a jednodušší systémy umožní oddělit chování nosníku v ose a kolmo k ose na:

— osové účinky

$$\frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial x^2} - \frac{2\bar{\alpha}}{kH}\vartheta_1 - \theta_0 \frac{E\alpha}{k}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} + \tilde{\tilde{r}}_1 = a\frac{\partial \vartheta_1}{\partial t} \;, \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(EH\frac{\partial}{\partial x}u_1) - \frac{\partial}{\partial x}(\alpha EH\vartheta_1) = \tilde{q}_1, \tag{14}$$

— ohybové účinky

$$\frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial x^2} - \left(\frac{12}{H^2} + \frac{6\bar{\alpha}}{kH}\right)\vartheta_2 + \theta_0 \frac{E\alpha}{k}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right) + \tilde{\tilde{r}}_2 = a\frac{\partial \vartheta_2}{\partial t} \;, \tag{15}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(EJ\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_2) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\alpha EJ\vartheta_2) = \tilde{q}_2, \tag{16}$$

kde $\tilde{\tilde{r}}_1 = r_1 + \frac{\bar{\alpha}}{kH}(\vartheta_h + \vartheta_d)$, $\tilde{\tilde{r}}_2 = r_2 + \frac{6\bar{\alpha}}{kH^2}(\vartheta_h - \vartheta_d)$.

Problematika spojená s řešitelností první soustavy je analogická problémům jež jsou diskutovány např. v [1], [3], [12], [25], [28], [29], [34], [35], [36], [40]. V naší práci jsme se zaměřili na studium úloh reprezentujících (po rozpadu) pouze ohybové účinky. Např. úlohu $(\mathcal{P}_v)$ rozložíme na úlohu $(\mathcal{P}_v^{Str})$ a úlohu $(\mathcal{P}_v^{Ben})$ a místo úlohy svázané termopružnosti $(\mathcal{P}_v)$ (ve slabé formulaci) pro čtveřici neznámých funkcí $\boldsymbol{U} = \{\{u_1, u_2\}, \{\vartheta_1, \vartheta_2\}\}$ máme dvě navzájem nezávislé úlohy svázané termopružnosti pro dvojice funkcí $\boldsymbol{U}_1 = \{u_1, \vartheta_1\}$ a $\boldsymbol{U}_2 = \{u_2, \vartheta_2\}$.

Analogický přístup je použit i pro ostatní modelové úlohy.

4.2 Řešitelnost první modelové úlohy

V této části je dokázána existence a jednoznačnost řešení úlohy ohybu termopružného nosníku v rámci linearizované teorie svázané termopružnosti z definice 2., tj. *první modelové úlohy* s omezením na ohybové účinky.

Tato formulace obsahuje takové typy okrajových podmínek, že ji nelze přeformulovat na ekvivalentní tvar umožňující její transformaci na nesvázanou úlohu. Ú loha (P_v^{Ben}) je tedy řešena jako úloha *svázané termopružnosti* (viz [66], [70]). Zbývající zde studované úlohy lze metodou faktorizace rozložit a zjednodušit.

Po úpravě má zobecněná formulace úlohy (P_v^{Ben}) tvar

Definice 6 *Necht'je dána dvojice abstraktních funkcí*

$$\{q, r\} \in L_2(I; \mathcal{V}^*) \times L_2(I; H^{-1}).$$

Potom abstraktní funkce $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(t) : I \rightarrow \mathcal{H}$ *taková, že*

$$\boldsymbol{U} \in L_2(I; \mathcal{H}) \cap AC(I; \mathcal{V} \times L_2(\Omega)) \tag{17}$$

$$D_t\boldsymbol{U} \in L_2(I; \mathcal{V} \times L_2(\Omega)) \tag{18}$$

$$(P_{(0,2)}\boldsymbol{U})(0) = 0 \ \text{ v } \ C(I; L_2(\Omega)) \tag{19}$$

a splňující

$$\begin{aligned} &\int_I \mathcal{A}(\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{V}(t))\mathrm{d}t - \int_I \mathcal{C}(\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{V}(t))\mathrm{d}t + \\ &\quad + \int_I \mathcal{B}(D_t\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{V}(t))\mathrm{d}t = \int_I \mathcal{F}(\boldsymbol{V}(t))\mathrm{d}t \quad \text{pro } \forall\, \boldsymbol{V} \in L_2(I; \mathcal{H}) \end{aligned} \tag{20}$$

se nazývá zobecněným řešením úlohy (P_v^{Ben}).

O řešitelnosti úlohy (P_v^{Ben}) platí následující tvrzení.

Věta 1 *Předpokládejme, že jsou dány funkce* $\{q, r\} \in \mathcal{V}^* \times L_2(\Omega)$. *Potom existuje jediné zobecněné řešení úlohy* (P_v^{Ben}).

Věta 2 *Necht' jsou splněny předpoklady věty 1. Potom řešení úlohy* (P_v^{Ben}) *závisí spojitě na daných datech, přesněji: jestliže funkce* $\boldsymbol{U}^1$ *a* $\boldsymbol{U}^2$ *jsou dvě zobecněná řešení úlohy* (P_v^{Ben}) *odpovídající funkcionálům* $\mathcal{F}^1$ *a* $\mathcal{F}^2$, *potom platí*

$$\|\boldsymbol{U}^1 - \boldsymbol{U}^2\|_{C(\bar{I}; H^1(\Omega) \times L_2(\Omega))} \leq C \|\mathcal{F}^1 - \mathcal{F}^2\|_{H^*},$$

kde C *je konstanta nezávislá na* $\mathcal{F}^i$, $i = 1, 2$.

K důkazu existenčního výsledku bylo použito Rotheho metody časové diskretizace, viz [39], [37] a [66].

Z jednoznačnosti řešení úlohy (P_v^{Ben}), plyne několik dalších tvrzení, majících praktický význam pro konstrukci numerického řešení pomocí posloupnosti Rotheho funkcí $\{\boldsymbol{U}^{(\mathrm{n})}\}_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$.

Důsledek 1 *Celá posloupnost Rotheho funkcí* $\{\boldsymbol{U}^{(\mathrm{n})}\}_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ *konverguje slabě v prostoru* $L_2(I;\mathcal{H})$ *pro* $n \to \infty$ *ke zobecněnému řešení úlohy* (P_v^{Ben}).

Platí také tvrzení o silné konvergenci celé posloupnosti.

Důsledek 2 *Posloupnost Rotheho funkcí* $\{\boldsymbol{U}^{(\mathrm{n})}\}_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ *konverguje silně (ve smyslu prostoru* $C(\bar{I};H^1(\Omega) \times L_2(\Omega))$ *pro* $n \to \infty$ *ke slabému řešení úlohy* (P_v^{Ben}) *(tedy konverguje stejnoměrně vzhledem k* $t \in \bar{I}$*),*

Pro výpočtový model úlohy (P_v^{Ben}) je užitečný konvergenční výsledek

Důsledek 3 (O konvergenci diskretizovaných Rotheho funkcí $\boldsymbol{U}_h^{(n)}$)
Posloupnost aproximací $\{\boldsymbol{U}_h^{(n)}\}$ *konverguje silně k funkci* $\boldsymbol{U}^{(n)}$ *pro* $h \to 0^+$ *a pro každé* $n \in \mathbf{N}$ *(to je* $h \to 0^+ \;\Rightarrow\; \boldsymbol{U}_h^{(n)} \to \boldsymbol{U}^{(n)}$*).*

Uvedené výsledky byly získány za různých omezení na chování zatížení a teplotních zdrojů. Jejich zobecnění je zřejmé: lze studovat obecnější teplotní zdroje, časovou závislost pro zatížení, pružné jednostranné podloží, vnitřní překážky, atd. (viz [18], [39], [66]).

Ve zbývající části práce je uvedena analýza takových okrajových podmínek, jež umožňují matematický model úlohy podstatně zjednodušit.

Formulace úlohy (P_{New}) s Newtonovými okrajovými podmínkami v sobě zahrnuje celou třídu dalších úloh, jež jsou jejími speciálními případy a mohou být získány z úlohy (P_{New}) vhodnými manipulacemi s pružnými posuvnými a natáčivými tuhostmi $k_{(0)}, k_{(L)}, m_{(0)}, m_{(L)} \geq 0$.

K důkazu řešitelnosti těchto úloh lze užít postup realizovaný při důkazu řešitelnosti úlohy (P_v), jen do výpočtů odhadů je nutno zahrnout i vliv hraničních členů. Pokud jde o řešitelnost úlohy (P_{New+}), teoretický aparát a vedení důkazu jsou analogické postupu pro úlohu $(P_{\mathcal{S}})$ analyzované v dalším.

5 Dekompozice modelových úloh

5.1 Speciální případy okrajových podmínek

Některé typy okrajových podmínek hrají při analýze úloh čtvrtého řádu zcela vyjímečnou roli. Např. v matematické teorii svázané termopružnosti pro nosníky nebo desky, lze pro jistou třídu okrajových podmínek rozložit úlohu čtvrtého řádu na dvě úlohy druhého řádu, což umožňuje jak snížení řádu řešené úlohy, tak transformaci svázané úlohy v úlohu nesvázanou.

Idea takového postupu je ukázána na vzorovém příkladě s kombinovanými okrajovými podmínkami Dirichletova a Neumannova typu. Stejného postupu lze užít i pro další typy podmínek, celkem je jich šest, tři základní a tři zobecněné, v práci je nazýváme *vyjímečnými případy* okrajových podmínek.

V předkložené práci je také ukázáno, že existuje celá, podstatně širší třída okrajových podmínek, jež za jistých, dodatečných podmínek dekompozice, umožňují vynucení realizace vyjímečných typů okrajových podmínek, a tedy umožňujících transformaci svázané úlohy na úlohu jednodušší, nesvázanou. V semikoercivních případech mohou hrát roli podmínek dekompozice například podmínky řešitelnosti úlohy.

5.1.1 Metoda faktorizace

Vzorová *modelová úloha* umožňující dekompozici svázané úlohy čtvrtého řádu na dvě nesvázané úlohy druhého řádu má tvar (klasická formulace)

$$(P_{pp})\begin{cases} D^4u+\alpha D^2\vartheta=q & \text{v } Q\ ,\\ a_1D_t\vartheta=D^2\vartheta-a_2\vartheta+a_3D_tD^2u+r & \text{v } Q\ ,\\ \gamma^{(0)}(u)=\hat{\boldsymbol{u}},\ \gamma_N^{(2)}(M)=\hat{\boldsymbol{M}},\ \gamma(\vartheta)=\hat{\boldsymbol{\vartheta}} & \text{na } \Gamma\ ,\\ \vartheta=\vartheta_0 & \text{na } \Omega_0\ ,\end{cases}$$

kde a $\hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{\vartheta}}, \hat{\boldsymbol{M}}$ jsou předepsané vertikální poklesy podpor, předepsané teploty a zadané ohybové momenty na koncích nosníku.

Užitím metody faktorizace (viz [18]), lze svázanou úlohu čtvrtého řádu (P_{pp}) ekvivalentně přeformulovat na tři stále vzájemně svázané úlohy druhého řádu pro neznámou trojici funkcí $\{M,u,\vartheta\}$, z nichž lze eliminací členu $a_3D_tD^2u$ získat vzájemně nesvázanou soustavu dvou úloh druhého řádu jež mají tvar

- První je úloha pro teplotu $\vartheta=\vartheta(M,r,\hat{\boldsymbol{\vartheta}},\vartheta_0)$

$$(\tilde{P_\vartheta})\begin{cases} (a_1+\alpha a_3)D_t\vartheta=D^2\vartheta-a_2\vartheta-\frac{a_3}{EJ}D_tM+r & \text{v } Q\ ,\\ \gamma(\vartheta)=\hat{\boldsymbol{\vartheta}} & \text{na } \Gamma\ ,\\ \vartheta=\vartheta_0 & \text{na } \Omega_0\ ,\end{cases}$$

- druhá je úloha pro posunutí $u=u(\vartheta,\hat{\boldsymbol{u}},M)$

$$(P_u)\begin{cases} -EJ(D^2u+\alpha\vartheta)=M & \text{v } Q\ ,\\ \gamma(u)=\hat{\boldsymbol{u}} & \text{na } \Gamma,\end{cases}$$

kde funkce $M=M(x,t)$, může být nalezena řešením úlohy (P_M)

$$(P_M)\begin{cases} -D^2M=\tilde{q} & \text{v } Q,\\ \gamma(M)=\hat{\boldsymbol{M}} & \text{na } \Gamma,\end{cases}$$

Výsledkem uvedené dekompozice je možnost nalézt řešení svázané úlohy (P_{pp}) postupem

$$(P_M)\longrightarrow(\tilde{P_\vartheta})\longrightarrow(P_u).$$

Tento, úspěšně použitý postup pro úlohu (P_{pp}) (to je pro 1. prosté podepření), lze také použít pro 2. jednostranné vetknutí dané podmínkami:

$$(P_{vv})\begin{cases} \gamma^{(0)}(u)=\hat{u}_0^0,\ \gamma^{(1)}(Du)=\hat{u}_1^0,\ \gamma(\vartheta)=\hat{\vartheta}^0 & \text{v x} = 0,\\ \gamma_N^{(3)}(D^3u)=\hat{T}^L,\ \gamma_N^{(2)}(D^2u)=\hat{M}^L,\ \gamma(\vartheta)=\hat{\vartheta}^L & \text{v x} = \text{L},\end{cases}$$

a pro 3. prosté podepření a vázané natočení, to je pro podmínky

$$(P_{pv})\begin{cases} \gamma^{(0)}(u)=\hat{u}_0^0,\ \gamma_N^{(2)}(D^2u)=\hat{M}^0,\ \gamma(\vartheta)=\hat{\vartheta}^0 & \text{v x} = 0,\\ \gamma^{(1)}(u)=\hat{u}_1^0,\ \gamma_N^{(3)}(D^3u)=\hat{T}^L,\ \gamma(\vartheta)=\hat{\vartheta}^L & \text{v x} = \text{L}.\end{cases}$$

Analogický postup může být realizován také pro *zobecnění* předchozích základních případů, to je pro zobecnění úlohy (P_{pp}) zadáním kombinace Newtonových a Neumannových podmínek

$$(P_{ppp})\left\{\ \gamma_N^{(3)}(D^3u)+k\gamma^{(0)}(u)=\hat{\boldsymbol{u}},\ \gamma_N^{(2)}(M)=\hat{\boldsymbol{M}},\ \gamma(\vartheta)=\hat{\boldsymbol{\vartheta}}\quad \text{na } \Gamma,\right.$$

a pro zobecnění úlohy (P_{vv}), to je pro okrajové podmínky

$$(P_{ppv})\left\{\begin{array}{c}\gamma_N^{(3)}(D^3u)+k\gamma^{(0)}(u)=\hat{T}^0,\gamma_N^{(2)}(D^2u)-m\gamma^{(1)}(Du)=\hat{M}^0,\gamma(\vartheta)=\hat{\vartheta}^0,\\ \gamma_N^{(3)}(D^3u)=\hat{T}^L,\ \gamma_N^{(2)}(D2u)=\hat{M}^L,\ \gamma(\vartheta)=\hat{\vartheta}^L,\end{array}\right.$$

a pro zobecnění úlohy (P_{pv}), to je pro úlohu s podmínkami

$$(P_{pvv})\left\{\begin{array}{c}\gamma_N^{(3)}(D^3u)+k\gamma^{(0)}(u)=\hat{T}^0,\ \gamma_N^{(2)}(D^2u)=\hat{M}^0,\ \gamma(\vartheta)=\hat{\vartheta}^0,\\ \gamma_N^{(2)}(D^2u)-m\gamma^{(1)}(Du)=\hat{M}^L,\ \gamma_N^{(3)}(D^3u)=\hat{T}^L,\ \gamma(\vartheta)=\hat{\vartheta}^L.\end{array}\right.$$

Snadno lze ukázat, že všechny úlohy s vyjímečnými typy okrajových podmínek jsou jednoznačně řešitelné. Řešitelnost úlohy vedení tepla získáme standardním způsobem, pro ohybovou variantu úlohy (P_{pp}), to je pro úlohu (P_{pp}^{Ben}) platí (prostor kinematicky přípustných posunutí má tvar $\mathcal{V}=H^2(\Omega)\cap H_o^1(\Omega)$) následující tvrzení.

Věta 3 *Předpokládejme, že jsou dány funkce* $\{q,r\}\in\mathcal{V}^*\times L_2(\Omega)$. *Potom existuje jediné zobecněné řešení úlohy* (P_{pp}^{Ben}).

Důkaz věty plyne z ekvivalence norem na $\mathcal{V}$ (viz [70]). Analogické tvrzení dostaneme i pro zbývající vyjímečné případy okrajových podmínek.

5.1.2 Dekompozice a řešitelnost druhé modelové úlohy

Zde a v dalším se zabýváme pouze ohybovými variantami úloh, v tomto případě úlohou (P_{New+}^{Ben}) jež se vyznačuje pouze semikoercivní bilineární formou. Je tedy nutné formulovat dodatečné podmínky řešitelnosti. V tomto případě se podmínky řešitelnosti stávají současně podmínkami dekompozice. Platí

Věta 4 *Nutná podmínka pro existenci řešení úlohy* (P_{New+}^{Ben}) *má tvar*

$$0\geq\langle q_2(t),L-x\rangle,\quad 0\geq\langle q_2(t),x\rangle,\ q_2(t)\in L_2(\Omega),\ \text{s.v. } t\in I,$$

postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení, a pro dekompozici úlohy (P_{New+}^{Ben}) *mají stejný tvar, ale s ostrou nerovností, to je*

$$0>\langle q_2(t),L-x\rangle,\quad 0>\langle q_2(t),x\rangle,\ q_2(t)\in L_2(\Omega),\ \text{s.v. } t\in I.$$

5.1.3 Dekompozice a řešitelnost třetí modelové úlohy

Porovnáním třetí a předchozí druhé modelové úlohy vidíme, že nyní jde o speciální (limitní případ) případ jednostranného pružného posuvného podepření. Pro řešení třetí modelové úlohy s okrajovými podmínkami Signoriniho typu můžeme postupovat zcela analogicky jako v předchozím případě. Opět řešíme pouze úlohu $(P_{\mathcal{S}}^{Ben})$, jež je pouze semikoercivní. Pro její řešení platí analogické tvrzení jako v předchozí větě, jejich důkazy jsou obdobné: nutnost podmínek je zřejmá, zatímco k jejich postačitelnosti lze využít neortogonálního rozkladu prostoru $\mathcal{V}_2 = H^2(\Omega)$, tedy $\mathcal{V}_2 = \tilde{\mathcal{V}} + \mathbf{P}^1$, $\tilde{\mathcal{V}} = H^2(\Omega) \cap H_o^1(\Omega)$ a definici nové normy $\|D^2 u\|_{L_2(\Omega)}$ jež je ekvivalentní se standardní normou $\|u\|_{H_2(\Omega)}$ na $\tilde{\mathcal{V}}$ (viz například [70]). Lineární prostor „tuhých“ posunutí a kinematicky přípustných posunutí mají v tomto případě tvar $\mathcal{R} = \mathbf{P}^1$, $\mathcal{V}_2 = H^2(\Omega)$ a $\mathcal{R} \cap \mathcal{V}_2 = \mathbf{P}^1$.

5.1.4 Dekompozice a řešitelnost čtvrté modelové úlohy

V této úloze je obsažena řada možností a variant. Zde se omezíme jen na dva speciální, ale ilustrativní případy úlohy $(P_{\mathcal{F}})$.

a) Elementární modelovou úlohu $(P_{\mathcal{F}_\mathcal{M}}^{Ben})$ získáme z úlohy $(P_{\mathcal{F}})$ užitím následujících dat a limitního přechodu

$$\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}_1 \in (\mathbf{R}^1)^+, \quad \mathcal{T}_1 \to \infty, \quad \mathcal{T}_2 = 0, \quad \mathcal{M}_2 = 0,$$

lineární prostor virtuálních posunutí má tvar $\mathcal{V}_2 = \{v_2 \in H^2(\Omega) \bigm| v_2(0) = 0\}$, konvexní funkcionál reprezentující práci tření je dán předpisem $j(\boldsymbol{V}) \equiv j_3(\boldsymbol{V}) = \mathcal{M}|Dv_2(0)|$. O řešitelnosti této úlohy platí tvrzení

Věta 5 *Nutná podmínka pro existenci řešení úlohy $(P_{\mathcal{F}_\mathcal{M}}^{Ben})$ má tvar*

$$\mathcal{M}(t) \geq |\int_\Omega q_2(t,x) x dx|, \quad q_2(t) \in L_2(\Omega), \text{ s.v. } t \in I,$$

postačující podmínka pro existenci a jednoznačnost, a pro dekompozici úlohy $(P_{\mathcal{F}_\mathcal{M}}^{Ben})$ má stejný tvar, ale s ostrou nerovností, to je

$$\mathcal{M}(t) > |\int_\Omega q_2(t,x) x dx|, \; q_2(t) \in L_2(\Omega), \quad \text{s.v. } t \in I.$$

Také v tomto případě je podmínka dekompozice vynucena postačující podmínkou řešitelnosti úlohy $(P_{\mathcal{F}_\mathcal{M}}^{Ben})$. Úloha může být transformována na tvar vyjímečného případu a potom dekomponována. Lineární prostor přípustných „tuhých“ posunutí má tvar $\mathcal{R} \cap \mathcal{V}_2 = \mathbf{P}_0^1$, kde $\mathbf{P}_0^1 = \{p \in \mathbf{P}^1 | p(0) = 0\}$.

Důkaz nutnosti podmínky je zřejmý, k důkazu postačitelnosti použijeme variantu Friedrichsovy nerovnosti a definici nové, ekvivalentní normy na $\tilde{\mathcal{V}}$, kde $\tilde{\mathcal{V}}$ je dán neortogonálním rozkladem prostoru $\mathcal{V}_2 = \{v_2 \in H^2(\Omega) \bigm| v_2(0) = 0\}$, tedy

$$\mathcal{V}_2 = \tilde{\mathcal{V}} + \mathbf{P}_0^1, \quad \tilde{\mathcal{V}} = \{v \in H^2(\Omega) \bigm| v_2(0) = 0, Dv_2(0) = 0\}.$$

b) Druhým elementárním případem, na kterém lze ilustrovat dekompozici a řešitelnost úlohy s daným třením $(P_{\mathcal{F}})$ je úloha $(P_{\mathcal{F}_\mathcal{T}}^{Ben})$, definována daty

$$\mathcal{T}_1, \; \mathcal{T}_2 \in (\mathbf{R}^1)^+, \quad \mathcal{M}_1 = 0, \quad \mathcal{M}_2 = 0.$$

Odpovídající definice prostoru virtuálních posunutí a funkcionálů reprezentujících práci tření jsou následující $\mathcal{V}_2 = H^2(\Omega)$, $j(\boldsymbol{V}) = \sum_{i=1}^{2} j_i(\boldsymbol{V})$, $j_1(\boldsymbol{V}) = \mathcal{T}_1|v_2(0)|$, $j_2(\boldsymbol{V}) = \mathcal{T}_2|v_2(L)|$.

Pro tuto formulaci úlohy se třením platí následující tvrzení.

Věta 6 *Nutné podmínky pro existenci řešení úlohy* $(P^{Ben}_{\mathcal{F}_\mathcal{T}})$ *mají tvar*

$$\mathcal{T}_1 \geq |\langle q_2(t), 1 - x/L\rangle|, \quad \mathcal{T}_2 \geq |\langle q_2(t), x/L\rangle|, \quad q_2(t) \in L_2(\Omega), \quad \text{s.v. } t \in I,$$

postačující podmínky pro existence, jednoznačnost a také dekompozici úlohy $(P^{Ben}_{\mathcal{F}_\mathcal{T}})$ *mohou být napsány v analogickém tvaru, ale s ostrými nerovnostmi, to je*

$$\mathcal{T}_1 > |\langle q_2(t), 1 - x/L\rangle|, \quad \mathcal{T}_2 > |\langle q_2(t), x/L\rangle|, \quad q_2(t) \in L_2(\Omega), \quad \text{s.v. } t \in I.$$

Přestože úlohy $(P^{Ben}_{\mathcal{F}_\mathcal{T}})$ a $(P^{Ben}_{\mathcal{S}})$, mají zcela odlišný původ i charakter jsou podmínky dekompozice opět i v tomto případě vynuceny postačujícími podmínkami pro existenci řešení úlohy.

Úloha $(P^{Ben}_{\mathcal{F}_\mathcal{T}})$ může být při splnění uvedených podmínek transformována na úlohu nazvanou 1. vyjímečný případ, poté dekomponována a jednoznačně řešena.

Také podmínky řešitelnosti i dekompozice mají v obou případech zcela rozdílný mechanický význam. V úloze $(P^{Ben}_{\mathcal{S}})$ jde o požadavek na velikost a orientaci zatížení, v úloze $(P^{Ben}_{\mathcal{F}_\mathcal{T}})$ zase jde o požadavek na maximální hodnoty reakcí, které jsou ještě schopny přenést zatížení bez uvedení systému do pohybu.

Lineární prostor přípustných tuhých posunutí má v tomto případě tvar $\mathcal{V}_2 \cap \mathcal{R} = \mathbf{P}^1$, což signalizuje možnou semikoercivitu úlohy.

Důkaz první části věty je opět zřejmý, pro důkaz druhé části, to je pro postačitelnost podmínek použijeme neortogonální rozklad prostoru $\mathcal{V}_2 = \tilde{\mathcal{V}} + \mathbf{P}^1$, $\tilde{\mathcal{V}} = H^2(\Omega) \cap H^1_o(\Omega)$ a použijeme stejnou definici ekvivalentní normy na $\tilde{\mathcal{V}}$ jako v úloze $(P^{Ben}_{\mathcal{S}})$.

5.2 Varianty modelových úloh

Mimo vzorových variant okrajových podmínek, umožňujících transformaci úlohy na některý vyjímečný případ lze volit i komplikovanější typy okrajových podmínek. Například:

- lze kombinovat podmínky jednostranné Signoriniho typu a podmínky daného tření (jednostranného i oboustranného),
- lze uvažované podmínky nějakým způsobem omezit, např. pružné podpory Newtonova typu (jednostranné i oboustranné) mohou být omezeny maximální hodnotou zatížení, které jsou schopny přenést, atd.,
- lze studovat obecnější typy předpisů popisující vztah mezi hodnotami funkce a jejími derivacemi na hranici (nelineární pružné podpory, nemonotónní tření odpovídající nekonvexnímu superpotenciálu, atd.,
- lze uvažovat situace, kdy podmínky řešitelnosti a podmínky dekompozice jdou proti sobě, to je kdy požadavek na rozpad a tedy zjednodušení úlohy má opačný charakter než požadavek na řešitelnost úlohy.

Poslední možnost ilustrují následující příklady.

Uvažujme například jednu variantu čtvrté modelové úlohy, to je úlohy s okrajovými podmínkami reprezentujícími dané tření, kdy máme $\mathcal{M}_2 = 0$. Potom jeden možný požadavek na dekompozici úlohy prostřednictvím její transformace na první vyjímečný případ by mohl být zapsán ve tvaru

$$\mathcal{M}_1(t) < |\int_\Omega q_2(t,x)xdx|, \; q_2(t) \in L_2(\Omega), \quad \text{s.v. } t \in I,$$

a současně požadavek na řešitelnost by měl tvar

$$\mathcal{T}_1 > |\langle q_2(t), 1 - x/L \rangle|, \quad \mathcal{T}_2 > |\langle q_2(t), x/L \rangle|, \quad q_2(t) \in L_2(\Omega), \quad \text{s.v. } t \in I.$$

Pokud bychom ve stejné úloze zadali namísto daného posuvného tření jednostrannou posuvnou podporu Signoriniho typu v $x = L$, pak požadavek na dekompozici i řešitelnost by mohl mít tvar

$$\mathcal{M}_1(t) < |\int_\Omega q_2(t,x)xdx|, \; q_2(t) \in L_2(\Omega), \quad \text{s.v. } t \in I,$$

a současně

$$\mathcal{T}_1 > |\langle q_2(t), 1 - x/L \rangle|, \quad 0 > \langle q_2(t), x \rangle, \quad q_2(t) \in L_2(\Omega), \quad \text{s.v. } t \in I,$$

což by zajistilo transformaci úlohy opět na první vyjímečný případ.

V jiné kombinaci podmínek lze pro dekompozici úlohy požadovat

$$\mathcal{M}_1(t) > |\int_\Omega q_2(t,x)xdx|, \; q_2(t) \in L_2(\Omega), \quad \text{s.v. } t \in I,$$

a současně

$$\mathcal{T}_1 > |\langle q_2(t), 1 - x/L \rangle|, \quad 0 = \langle q_2(t), x \rangle, \quad q_2(t) \in L_2(\Omega), \quad \text{s.v. } t \in I,$$

což by umožnilo transformaci úlohy na druhý vyjímečný případ.

Zřejmě takto lze dále postupovat a analyzovat nabízené možnosti podle situace s daty úlohy a požadavků zadavatele.

6 Aplikace matematického modelování

Matematické modelování různých úloh technické praxe bylo autorem práce systematicky využíváno již od počátku osmdesátých let minulého století. Řešené úlohy vycházely z návrhu matematického modelu, analýzy jeho korektnosti, k přibližnému řešení byl použit minimalizační proces pro funkcionál potenciální energie nad množinou kinematicky přípustných posunutí. K diskretizaci úlohy byla užita metoda konečných prvků (viz [10], [18] a [23]). Takto byla řešena řada technických úloh, v poslední době také s využitím komerčního SW ANSYS, viz například [67] .

Výčet řešených úloh je obsáhlý, pokud jde o strojírenství, řada výpočtů je popsána ve zprávách [80] až [100], podrobnosti výpočtů realizovaných při modelování úloh geomechaniky jsou uvedeny ve zprávách [101] až [104]. Rozsáhlé výpočty byly realizovány pro řešení dobývání zeminy kolesovým rypadlem (viz [105] a [106]).

V současné době se autor práce zabývá matematickým modelováním zpevňovacích systémů (zejména kotevních systémů) v geomechanice ve spolupráci s LMM Ú GN AV ČR v Ostravě. Problematika je řešena v rámci grantového projektu GAČR č. 105 - 99 - 1651 a navazuje na předchozí práce autora, viz [67] až [69] a [78].

6.1 Aplikace ve stavbě čerpadel

Oblast strojírenství byla prvním oborem, kde autor použil matematického modelování k pevnostnímu a teplotnímu řešení strojních zařízení. Byly realizovány pevnostní výpočty částí čerpadel, včetně komplikovaných úloh pro jadernou energetiku (viz [80] až [100] a články [43] až [48] a [50], atd).

Výchozím bodem matematických analýz bylo modelování kontaktní úlohy s Coulombovským modelem tření ve tvaru variační nerovnice (viz [33]). Problém byl ekvivalentně přeformulován na úlohu nalezení sedlového bodu a k jeho numerické realizaci byl použit známý Uzawův algoritmus.

Výpočtové algoritmy byly částečně převzaty a částečně upraveny pro vlastní potřeby. Byl zpracován návrh adaptivního algoritmu pro postupné hledání sedlového bodu. Při analýzách byly nalezeny odhady řádu optimální hodnoty konvergenčního parametru pro některé úlohy pružnosti, majícího význam tuhosti (fyzikální rozměr N/m).

6.2 Modelování procesu rozpojování hornin

Dalším oblastí užití matematických modelů byla geomechanika, a to problematika modelování rozpojování hornin mechanickým pracovním nástrojem (i ve spolupráci s vodním paprskem). Podrobnosti jsou uvedeny ve zprávách [101] až [104], a v článcích [51], [53], [55], [57], [58], [61] a [62].

Klíčovými problémy v těchto úlohách byly semikoercivita matice tuhosti a modelování vlivu tření. V průběhu řešení byla realizována celá řada numerických výpočtů pro různé tvary nástrojů (analýza vlivu otupení nástroje) a pro různé velikosti Coulombova koeficientu tření. Podrobnosti lze nalézt ve výše uvedené literatuře.

6.3 Modelování procesu dobývání zeminy

Další aplikací byl návrh matematického modelu pro analýzu procesu dobývání zeminy kolesovým rypadlem, a to pro konkrétní zařízení vyráběné Uničovskými strojírnami a umístěné v Mostecké uhelné pánvi. Při procesu dobývání v nehomogenní zemině se občas vyskytuje materiál s jinými, výrazně vyššími hodnotami E, μ (proplástek), což má za následek častější poškození zubů korečku kolesového rypadla. Proto byla realizována celá řada výpočtů semikoercivních úloh (koleso se může volně otáčet) a stanoveny maximální hodnoty srovnávacích napětí v místech napěťových koncentrací.

Podrobnosti všech realizovaných výpočtů jsou uvedeny ve zprávách [105] a [106], přehledné informace o přístupu k řešení jsou uvedeny v článcích [52], [54], [56], [59] a [60].

6.4 Modelování kotvení stropů

Aktuálním tématem vědeckého zájmu autora práce je problematika modelování kotevních systémů, návrh výpočtového modelu pro interaktivní soustavu pružných těles. Jde o pokračování v předchozím výzkumu, zahájeném v letech 1993 - 1994, viz například práce [67] až [69], nebo nověji také [78].

Opět jde o obtížnou úlohu, jež má v matematické formulaci tvar semikoercivní variační nerovnice s nediferencovatelnými členy. Efektivnost a spolehlivost zpevňovacího systému závisí na schopnosti realistického modelování chování jednotlivých kotev v systému pracujících na efektu tření, kdy je součinnost kotvy s okolním materiálem zajištěna jen pomocí kontaktních sil a působením tření.

Sestavení korektního matematického modelu pro úlohy uvedeného typu představuje vyřešení celé řady stále otevřených problémů, viz výše uvedené citace. Jde především o problematiku optimálního řízení koeficientem tření na rozhraních (únosnost kotvy), problematiku nalezení kritické křivky vymezující efektivní okolí kotvy a oddělující významně nespolupracující materiál a stanovení charakteru okrajových podmínek na hranici efektivní oblasti Ω_{ef} , to je typ spolupráce okolního materiálu.

Další otevřené problémy, jejich popis, ani diskusi k nim zde z důvodů stručnosti neuvádíme a zájemce odkazujeme na citovanou literaturu.

7 Závěr

V práci byla studována problematika řešitelnosti úlohy čtvrtého řádu v rámci linearizované teorie svázané termopružnosti, a to od odvození soustavy řídících rovnic až po formulace modelových úloh. Bylo ukázáno pro které typy okrajových podmínek úlohu lze nebo nelze dekomponovat, zjednodušit a řešit jako nesvázanou. Podmínky dekompozice byly v některých semikoercivních případech vynuceny dodatečnými podmínkami řešitelnosti.

V práci byla uvedena řada praktických aplikací pro úlohy druhého řádu, které byly v průběhu uplynulých let řešeny pomocí moderního matematického aparátu. Tyto úlohy byly, s ohledem na jejich charakter, modelovány pouze v rámci teorie teplotních napětí.

Z pohledu matematické analýzy, zde byly formulovány tvrzení o existenci a případně i jednoznačnosti řešení modelových úloh a jejich variant pro různé typy okrajových podmínek, včetně podmínek umožňujících dekompozici a zjednodušení svázané úlohy její redukcí na úlohu nesvázanou. V této práci však byly všechny matematické věty omezeny pouze na ty varianty okrajových podmínek, jež odpovídají průhybové funkci. Ostatní neznámé funkce, posunutí v ose (před zjednodušením) a obě teplotní funkce, měly ponechány stejnou okrajovou podmínku na hranici ve všech zde analyzovaných případech. Kontrolou předchozích tvrzení i použité důkazové techniky, lze snadno nahlédnout, že i pro tyto komponenty neznámé funkce $\boldsymbol{U}$ lze užít různé další typy okrajových podmínek a prakticky všechny zde předložené výsledky zůstanou v platnosti.

Pokud jde o další zobecnění uvedených tvrzení, je například možné opustit první zjednodušující fyzikální předpoklad o koeficientech výměny tepla na horním a dolní povrchu nosníku.

Podstatnějšího zobecnění, pokud jde o realističtější vystižení skutečného chování podpor, to je o přesnější reprezentaci okrajových podmínek v matematickém modelu úlohy, lze také dosáhnout uvažováním předpisů zachycujících v jistém smyslu porušení materiálu, to je skokovou změnu v chování podpory. Některé podrobnosti týkající se formulací takového předpisu lze nalézt jednak již v [38], ale nověji, včetně numerických analýz především v [42] (pro úlohu kotvení stropů je taková podmínka uvažována také v [78]).

Podobně lze postupovat také při zobecňování předpisů pro modelování tření. Formulaci studované úlohy lze dále rozšířit o analýzu vlivu podloží, a to pro analogické modely podloží jako byly předpisy pro okrajové podmínky. Obdobný přístup lze aplikovat zřejmě i na modelování konstitučních vztahů, pro jejichž předpis může být použit kterýkoliv ze vztahů zde uváděných pro okrajové podmínky.

Výsledné úlohy budou potom mít vždy tvar buďto variační rovnice (lineární i nelineární), variační nerovnice nebo také hemivariační nerovnice.

Literatura

[1] Boley, B.A., Weiner, J.H.: *Theory of Thermal Stresses*, J.Wiley and sons, New York, 1960

[2] Nečas, J.: Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques, Masson, Paris 1967

[3] Dafermos, C.M.: *On the Existence and the Asymptotic Stability of Solution to the Equations of Linear Thermoelasticity,* Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 29, 1968, pp. 241-271

[4] Washizu, K.: *Variational Methods in Elasticity and Plasticity,* Pergamon Press, Oxford, 1968

[5] Kovalenko, A.D.: *Fundamentals of thermoelasticity, (v ruštině),* Izdatelstvo Naukova dumka, Kiev 1970

[6] Nowacki, W.: *Dynamical problems of thermoelasticity, (v ruštině),* Izdatelstvo Mir, Moskva 1970

[7] Céa, J.: *Optimisation, Theorie et algorithmes*, Dunod, Paris, 1971

[8] Aubin, J.P.: *Approximation of Elliptic Boundary - Value Problems,* Wiley-Interscience, London 1972

[9] Carlson, D.E.: *Linear Thermoelasticity, Encyklopedia of Physics, ed. S. Flüge, Volume VIa/2, Mechanics of Solids II,* Springer-Verlag, Berlin 1972

[10] Kolář, V., Kratochvíl, J., Leitner, F., Ženíšek, A.: *Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků,* SNTL, Praha, 1972

[11] Lions, J.L.: *Někatoryje metody rešenija nelinejnych krajevych zadač, (v ruštině),* Izdatelstvo Mir, Moskva 1972

[12] Fichera, G.: *Uniqueness, existence and estimationof the solution in the dynamical problem of thermodiffusion in an elastic solid,* Archives of Mechanics, Archiwum Mechaniki Stosowanej, 26, 5, str. 903 - 920, Warszava, 1974

[13] Rektorys, K.: *Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky,* SNTL, Praha 1974

[14] Adams, R.A.: *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975

[15] Michlin, S.G.: *Variational methods in mathematical physics, (ve slovenštině),* Alfa, Bratislava, 1975

[16] Truesdell, C.: *A first course in rational mechanics, (v ruštině),* Izdatelstvo Mir Moskva 1975

[17] Duvuat, G., Lions, J.L.: *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, New York, 1976

[18] Glowinski, R., Lions, J.L. , Trémolieres, R.: *Analyse numérique des inéquations variationnelles,* Dunod, Paris 1976

[19] Ekeland, I., Temam, R.: *Convex Analysis and Variational Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1976

[20] Kufner, A., John, O., Fučík, S.: *Function Spaces,* Academia, Praha 1977

[21] Michlin, S.G.: *Linějnyje uravněnija v častnych proizvodnych, (v ruštině),* Moskva, Vyššaja škola, 1977

[22] Nowacki, W.: *Coupled fields in mechanics of solids,* in W.T.Koiter: Theoretical and Applied Mechanics, Proceedings of the 14^{th} IUTAM Congress, Delft, The Netherlands 1976, North-Holland, Amsterdam, 1977

[23] Ciarlet, P.G.: *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North Holland, New York, 1978

[24] Fučík, S., Kufner, A.: *Nelineární diferenciální rovnice*, SNTL, Praha 1978

[25] Nowinski, J.L.: *Theory of thermoelasticity with applications,* Sijthoff & Noordhoff international Publishers, Aplhen Aan den Tijn, 1978

[26] Aubin, J.P.: *Applied Functional Analysis,* J.Wiley and sons, New York, 1979

[27] Haslinger, J., a kol.: *Variační nerovnice v mechanice,* ALFA, Bratislava, 1979

[28] Day, W.A.: *Justification of the Uncoupled and Quasistatic Approximation in a Problem of Dynamic Thermoelasticity,* Arch. Rational Mech. Anal. 77, pp. 387-396, 1981

[29] Day, W.A.: *Further Justification of the Uncoupled and Quasi-Static Approximations in Thermoelasticity,* Arch. Rational Mech. Anal. 79, pp. 85-95, 1982

[30] Nečas, J., Hlaváček, I.: *Úvod do matematické teorie pružných a pružně plastických těles,* SNTL, Praha 1983

[31] Nedoma, J.: *On one type of Signorini problem without friction in linear thermoelasticity,* Aplikace matematiky, sv. 28, (1983), č.6, str. 393–407

[32] Bock, I., Lovíšek, J., Štangl, J.: *Contact problem for two elastic beams, (ve slovenštině),* Strojnický časopis, 35, 1984, No 3, pp. 353-373

[33] Glowinski, R.: *Numerical Methods for Nonlinear Variationals Problems,* Springer–Verlag, New York, 1984

[34] Ženíšek, A.: *The existence and uniqueness theorem in Biot's consolidation theory,* Aplikace matematiky, sv. 29, (1984), No 3, pp. 194-211

[35] Ženíšek, A.: *Finite element methods for coupled thermoelasticity and coupled consolidation of clay,* R.A.I.R.O. Numer.Anal. 18, (1984), pp. 183 - 205

[36] Day, W.A.: *Heat Conduction Within Linear Thermoelasticity,* Springer-Verlag, New York, 1985

[37] Kačur, J.: *Method of Rothe in Evolution Equations,* Taubner - Texte zur Mathematik, Band 80, Liepzig, 1985

[38] Panagiotopoulus, P.D.: *Inequality problems in mechanics and applications. Convex and nonconvex energy functions*, Birkhasuer, Boston 1985

[39] Rektorys, K.: *Method of dicretization in time and partial differential equations, (v češtině),* TKI, SNTL, Praha 1985

[40] Kačur, J., Ženíšek, A.: *Analysis of approximate solution of coupled dynamical thermoelasticity and related problems,* Aplikace matematiky 31 (1986), No 3, pp.190-223

[41] Tauchert, T.R.: *Thermal Stresses in Plates - Dynamical Problems, chapter 1., in Richard B. Hetnarski, ed.: Thermal Stresses, vol II.,* North - Holland, Amsterdam, 1986

[42] Haslinger,J., Miettinen, M., Panagiotopoulos, P.D.: *Finite Element Method for Hemivariational Inequalities. Theory, Methods, Applications*, Kluwer Academic Press, London 1999

[43] Horák, J., Petřek, J.: *Řešení některých rovinných problémů teorie pružnosti metodou konečných prvků,* článek v časopise „Čerpadla, potrubí, armatury SIGMA“, 1974, č. **2–3**, str. 13–22.

[44] Horák, J., Pospíšil, Z.: *Řešení biharmonické rovnice na dvojnásobně souvislé oblasti metodou sítí,* článek v časopise „Čerpadla, potrubí, armatury SIGMA“, 1974, č. **2–3**, str. 23–31.

[45] Horák, J., Petřek, J., Pospíšil, J.: *Aplikace metody konečných prvků při řešení osově symetrických těles,* článek v časopise „Čerpadla, potrubí, armatury SIGMA“, 1976, č.**1**, str. 7–21.

[46] Horák, J.: *O variačním řešení trojrozměrných úloh pružnosti I,* článek v časopise „Čerpadla, potrubí, armatury SIGMA“, 1978, č.**1**, str. 1–8.

[47] Horák, J., Petřek, J.: *Výpočty nalisování oběžných kol.* Ve sborníku konference „Výpočty tenkostěnných konstrukcí, optimalizační a kontaktní problémy v mechanice“, Vysoké Tatry – Nový Smokovec 1985.

[48] Horák, J.: *Výpočty kontaktních úloh pro rotačně symetrická tělesa.* Ve sborníku konference „Matematické metody v technických vědách“, Karlovy Vary 1985, str. 865–870.

[49] Horák, J.: *Evoluční variační nerovnice v termopružnosti*, písemný referát ke kandidátskému minimu, MÚ ČSAV, Praha, 1985

[50] Horák, J.: *Variační metody a numerické řešení kontaktních úloh teorie pružnosti,* článek v časopise „Čerpadla, potrubí, armatury SIGMA“, č.**1**, 1987, str. 15–23.

[51] Horák, J.: *Řešení úlohy rozpojování hornin užitím variačních nerovnic.* Ve sborníku symposia „Teoretické a technologické aspekty rozpojovania a mechanickej aktivácie nerostov“, Tataraman 88, Vysoké Tatry 1988, str. 100–105.

[52] Horák, J., Gondek, H.: *Matematické modelování úlohy rozpojování zeminy kolesovým rypadlem.* Ve sborníku konfrence „Expertní systémy a počítače v baníctve a geologii“, Starý Smokovec 1989, str. 44–50.

[53] Horák, J.: *Matematické modelování úlohy rozpojování.* Ve sborníku konference „Hornické geomechanika 89“, Hradec nad Moravicí 1989, str. 454–464.

[54] Horák, J., Gondek, H.: *Numerické řešení úlohy rozpojování zeminy kolesovým rypadlem.* Ve sborníku „Vědecká konference ke 40. výročí FSE VŠB“, Ostrava 1990, str. 277–282.

[55] Horák, J., Vašek, J.: *Výpočty napětového pole soustavy hornina – ostrý řezný nástroj.* Ve sborníku konference „Nové poznatky vědy, výzkumu a praxe v mechanike hornín“, Starý Smokovec 1990, str. 127–132.

[56] Horák, J., Gondek, H.: *The Mathematical Modelling of System Earth – Excavator.* Ve sborníku mezinárodního sympozia „International Symposium on Continuous Surface Mining“, Praha 1991, str. 43–47.

[57] Horák, J., Netuka, H.: *Numerical realization of contact problem with friction - semicoercive case.* Ve sborníku konference „Mathematical methods in Engineering“, Plzeň 1991, str. 147–152.

[58] Horák, J., Netuka, H., Polách, V.: *Analysis of the working tool shape influence in the mechanism of rock cutting.* Ve sborníku konference „Mathematical methods in Engineering“, Plzeň 1991, str. 153–158.

[59] Horák, J.: *Numerical solution of contact problems and applications.* Ve sborníku International seminar: „Mathematical Modeling in Engineering“, Prague, September 18–19, 1991, str. 29–31.

[60] Horák, J.: *Numerical solution of contact problems.* V Proceedings of the International Conference „Geomechanics 91“, Hradec nad Moravicí, Ostrava, Czechoslovakia, 24–26 September, 1991, vydala A. A. Balkema, Rotterdam, 1992, str. 347–352.

[61] Horák, J.: *Mathematical modelling of rock cutting.* V Proceedings of the International Conference „Geomechanics 91“, Hradec nad Moravicí, Ostrava, Czechoslovakia, 24–26 September, 1991, vydala A. A. Balkema, Rotterdam, 1992, str. 187–192.

[62] Horák, J., Vašek, J., Sochor, T.: *Mathematical Modeling of Rock Cutting Process.* Ve sborníku „Proceedings of the 3^{rd} Pacific Rim International Conference on Water Jet Technology“, 30.11.–2.12.1992, Taiwan.

[63] Horák, J.: *O neklasických okrajových podmínkách v úlohách matematické fyziky — I.Úvod.* Ve sborníku konference „Moderní matematické metody v inženýrství “, Nová Ves u Frýdlantu, 7.–9.6. 1993, str. 64–69.

[64] Horák, J., Netuka, H.: *Poznámka k používání variačních nerovnic v mechanice.* Ve sborníku „ANSYS Users Meeting“, Brno, 10. listopad, vydal SVS FEM s.r.o., Čechyňská 25, 602 00 Brno, 1993.

[65] Horák, J., Netuka, H., Khair, A.W.: *Kontaktní úlohy: řešení pomocí variačních nerovnic.* Ve sborníku „ANSYS Users Meeting“, Brno, 10. listopad, vydal SVS FEM s.r.o., Čechyňská 25, 602 00 Brno, 1993.

[66] Horák, J.: *Řešení úlohy linearizované teorie svázané termopružnosti,* kandidátská disertační práce, Přírodovědecká fakulta University Palackého v Olomouci, 1993

[67] Horák, J., Netuka, H., Khair, A.W.: *Stress Analysis of Bolt-Resin-Rock Interface.* Ve sborníku „Proceedings of the Fifth Conference on Ground Control for Midwestern U.S. Coal Mines“, June 27–30, 1994, Collinsville, Illinois.

[68] Horák, J., Netuka, H., Horáková, D.: *Remarks on Mathematical Model of Bolt–Resin–Rock Interface,* Ve sborníku mezinárodní konference „Dobývací technika a technologie těžby nerostných surovin“, část II., Září 1994, Hradec nad Moravicí, VŠB Technická univerzita Ostrava, str. 393–413.

[69] Horák, J., Netuka, H.: *Použití ANSYSu při řešení úlohy zpevňování stropů.* Ve sborníku „2. ANSYS Users Meeting“, 25.–26. říjen 1994, Nové Město na Moravě, str. 113–120, vydal SVS FEM s.r.o., Čechyňská 25, 602 00 Brno, 1994.

[70] Horák, J.: *On solvability of one special problem of coupled thermoelasticity, Part I.* Acta Universitatis Palackianae Olomucensis, Facultas Rerum Naturalium, Mathematica 34 (1995), pp 39–58, UP Olomouc

[71] Horák, J.: *On Solvability and Approximation of 1D Models of Coupled Thermoelasticity.* ve sborníku C.Constanda, J.Saranene and S.Seikkala (editors): Integral methods in science and engineering, Volume one: analytic methods, pp. 84–89, Longman 1997.

[72] Horák, J.: *O řešitelnosti úlohy ohybu nosníku se třením.* Sborník ze 6. semináře „Moderní matematické metody v inženýrství", JČMF, str. 79–83, 23.–25.6.1997, Nová Ves u Frýdlantu n.O.

[73] Horák, J.: *O rozpadu a řešitelnosti nelineární úlohy svázané termopružnosti.* Sborník ze 7. semináře „Moderní matematické metody v inženýrství", JČMF, str. 76–82, 17.–19.6.1998, Dolní Lomná, 1998.

[74] Horák, J.: *O okrajových podmínkách a řešitelnosti úlohy ohybu nosníku.* Sborník z 8. semináře „Moderní matematické metody v inženýrství – 3μ", JČMF, str. 36–42, 9.–11.6.1999, Dolní Lomná, 1999.

[75] Horák, J., Netuka, H.: *Poznámka k problematice matematického modelování úloh mechaniky kontinua.* Sborník konference „7. ANSYS Users Meeting", AUM99, str. 1.1–1.6, 16.–17.9.1999, Čejkovice, vydal SVS FEM s.r.o., Čechyňská 25, 602 00 Brno, 1999.

[76] Horák, J.V.: *Poznámky k řešitelnosti jedné třídy semikoercivních 1D úloh 4. řádu*, ve Sborníku konference „Olomoucké dny aplikované matematiky" ODAM1999, Horák, J., Závodný, M., editoři, strany 98-116, KMAaAM, PřF UP Olomouc, 2000

[77] Horák, J.: *Poznámky k řešitelnosti variačních úloh: semikoercivita, příklady.* Sborník z 9. semináře „Moderní matematické metody v inženýrství", JČMF, str. 28–31, 31.5.–2.6.2000, Dolní Lomná, 2000.

[78] Horák, J.: *Poznámky k řešitelnosti výpočtového modelu interaktivní soustavy pro úlohu kotvení stropů.* Sborník konference „8. ANSYS Users Meeting", AUM2000, str. 1.1–1.6, 14.–15.9.2000, Lednice na Moravě, vydal SVS FEM s.r.o., Čechyňská 25, 602 00 Brno, 2000.

[79] Horák, J.V.: *On a Class of Boundary Conditions Splitting Coupled Thermoelasticity Problems*, vyšlo v „Integral Methods in Science and Engineering", 18, pp. 117 – 122, P. Schiavone, eds., Birkhauser, 2002, Boston.

[80] [1] Horák, J.: *Řešení napjatosti dvojnásobně souvislého rovinného tělesa metodou sítí*, (SIGMA VÚ Olomouc, 1972, číslo zprávy ZV–469/73–VZ, samostatně)

[81] Horák, J.: *Řešení osově symetrických těles metodou konečných prvků*, (SIGMA VÚ Olomouc, 1974, číslo zprávy 537/74–DVZ/21, samostatně)

[82] Horák, J.: *Řešení deskových problémů v rovinné teorii pružnosti*, (SIGMA VÚ Olomouc, 1976, číslo zprávy 639/76–DVZ/21, samostatně)

[83] Horák, J.: *Řešení kontaktních problémů metodou konečných prvků*, (SIGMA VÚ Olomouc, 1976, číslo zprávy 668/76–DVZ/21, samostatně)

[1] Tento a následující odkazy představují výzkumné zprávy a publikace zaměřené výhradně na aplikaci matematiky v technické praxi, zejména ve *strojírenství* (ve stavbě čerpadel a čerpacích zařízení) a v *geomechanice*

[84] Horák, J.: *Řešení deskových problémů metodou konečných prvků*, (SIGMA VÚ Olomouc, 1976, číslo zprávy 669/76–DVZ/21, samostatně)
[85] Horák, J.: *Řešení prostorových úloh teorie pružnosti metodou konečných prvků*, (SIGMA VÚ Olomouc, 1978, číslo zprávy 714/78–ÚVZ/21, samostatně)
[86] Horák, J.: *Řešení osově symetrických těles pro nesymetrické zatížení metodou konečných prvků*, (SIGMA VÚ Olomouc, 1978, číslo zprávy 718/78–DVZ/21, samostatně)
[87] Horák, J.: *Řešení prostorových úloh teorie pružnosti metodou konečných prvků*, (SIGMA VÚ Olomouc, 1979, číslo zprávy 758/79–DVZ/21, samostatně)
[88] Horák, J.: *Řešení prostorových úloh teorie pružnosti metodou konečných prvků*, (SIGMA VÚ Olomouc, 1980, číslo zprávy 873/80–ZVZ/21, spoluautor)
[89] Horák, J.: *Řešení jednostranných úloh elastomechaniky*, (SIGMA VÚ Olomouc, 1981, číslo zprávy 947/81–ÚVZ/2100, samostatně)
[90] Horák, J.: *Aplikace obecného algoritmu kontaktní úlohy na případ rotační symetrie*, (SIGMA VÚ Olomouc, 1982, číslo zprávy 1000/82–DVZ/2500, spoluautor)
[91] Horák, J.: *Metoda rozšířeného Lagrangiánu pro kontaktní úlohu*, (SIGMA VÚ Olomouc, 1983, číslo zprávy 2054/83–DVZ/2500, samostatně)
[92] Horák, J.: *Jednostranné úlohy elastomechaniky*, (SIGMA VÚ Olomouc, 1983, číslo zprávy 2066/83–DVZ/2500, samostatně)
[93] Horák, J.: *Vyhodnocení pevnostního výpočtu oběžného kola modulu čerpadla 300 QHX* (SIGMA VÚ Olomouc, 1983, číslo zprávy 2079/83–DVZ/2500, spoluautor)
[94] Horák, J.: *Numerické řešení nalisování oběžného kola napájecího čerpadla 300 KHS*, (SIGMA VÚ Olomouc, 1984, číslo zprávy 2207/84–TP/2500, spoluautor)
[95] Horák, J.: *Řešení kontaktní úlohy se třením*, (SIGMA VÚ Olomouc, 1985, číslo zprávy 2296/85–DVZ/2500, spoluautor)
[96] Horák, J.: *Pevnostní a dynamická kontrola rotoru podávacího čerpadla 400–QHD–725 pro JE Temelín*, (SIGMA VÚ Olomouc, 1985, číslo zprávy 2363/85–DVZ/2500, spoluautor)
[97] Horák, J.: *Návrh úprav spojení hřídele a oběžného kola bagrovacího čerpadla 250–NBA–580*, (SIGMA VÚ Olomouc, 1985, číslo zprávy 2418/86–DVZ/2500, spoluautor)
[98] Horák, J.: *Pevnostní a dynamická kontrola rotoru napájecího čerpadla 125–CHX–310–12*, (SIGMA VÚ Olomouc, 1986, číslo zprávy 2421/86–DVZ/2500, spoluautor)
[99] Horák, J.: *Pevnostní a dynamická kontrola rotoru bagrovacího čerpadla 350–NBV–810–146–VC–000*, (SIGMA VÚ Olomouc, 1986, číslo zprávy 2450/86–DVZ/2500, spoluautor)
[100] Horák, J.: *Pevnostní a dynamická kontrola rotoru napájecího čerpadla 3000 QHX*, (SIGMA VÚ Olomouc, 1986, číslo zprávy 2457/86–DVZ/2500, spoluautor)
[101] Horák, J.: *Matematické modelování úlohy rozpojování hornin*, (kap.2.4. v ”Mechanismus rozpojování hornin vysokotlakým vodním médiem”, Výroční zpráva za rok 1988, HoÚ ČSAV Ostrava, samostatně)
[102] Horák, J.: *Numerické řešení úlohy rozpojování hornin*, (kap.2.4. v ”Mechanismus rozpojování hornin vysokotlakým vodním médiem”, Výroční zpráva za rok 1989, HoÚ ČSAV Ostrava, samostatně)

[103] Horák, J.: *Energetická bilance procesu rozpojování hornin vysokotlakým vodním paprskem*, (kontrolovatelná etapa E03, úkol II–6–1, HoÚ ČSAV, Ostrava, spoluautor)

[104] Horák, J.: *Matematické modelování soustavy hornina – pracovní nástroj*, (kap. 2.4. ve výroční zprávě za rok 1990, úkol II–6–1/03.04, HoÚ ČSAV Ostrava, spoluautor)

[105] Horák, J.: *Matematické modelování soustavy zemina – kolesové rypadlo*, (Vědeckovýzkumná zpráva GŘ SHD Most, spoluautor)

[106] Horák, J.: *Numerické řešení úlohy rozpojování zeminy s proplástkem pomocí kolesových rypadel*, (Závěrečná zpráva VŠB v Ostravě, Ostrava, spoluautor)

Abstract

In the thesis we briefly present the origin and some mathematical formulations of a class of model problems (representing thermoelastic beam or plate strip) for quadruples of unknown functions $\mathbf{U} = \{\{u_1, u_2\}, \{\vartheta_1, \vartheta_2\}\}$ within the framework of the *linearized theory of coupled thermoelasticity*.

Firstly, we introduce *classical* and *weak* formulations of several exemplar model problems as well as semidiscrete (in time) and complete discrete (in time and space variables) formulations of one exceptional problem. According to a special but mechanically real assumption, the original model problem can be split up in two independent and simplified models representing only stretching (two coupled 2^{nd} order equations) and bending (two coupled 2^{nd} and 4^{th} equations) effects of the beam or plate strip.

Then, for the sake of brevity, the attention has been focused only on the bending effects, which are more interesting cases from the mathematical point of view. For the exceptional model problem (due to impossibillity of decomposition), the Rothe method of discretisation in time is used for a-priori estimations of a semidiscrete solution set and their time derivatives. Approximate properties of the Rothe functions and their convergence to the weak solution of the problem, as well as the continuous dependence of this solution on the given data, are shown. Finally, approximation of Rothe's vector functions in space variable by FEM is introduced, and the convergence of the complete discretised solution has been proved.

Next, we analyse a class of model boundary conditions splitting previously defined, still coupled, thermoelastic bending effect problem into two mutually independent problems: heat transfer (one 2^{nd} order equation) and elasticity (one 4^{th} order equation) problem can be solved as uncoupled ones and gradually. Solvability of the weak formulations of the model problems for a given class of classical and non-classical boundary conditions in the forms of variational inequalities has been proved. Semi-coercive cases are also introduced: conditions of decomposition and solvability has been given and discussed.

Finally, several domains of applications have been illustrated and discussed. Mathematical modelling has been frequently used in mechanical and civil engineering, especially in geomechanics and mining industry.