VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
Fakulta strojního inženýrství
Ústav matematiky

RNDr. Libor Žák

SHLUKOVÁNÍ VÁGNĚ DEFINOVANÝCH OBJEKTŮ

CLUSTERING OF VAGUELY DEFINED OBJECTS

ZKRÁCENÁ VERZE PHD THESIS

Obor: Matematické inženýrství

Školitel: Doc. RNDr. Zdeněk Karpíšek, CSc.

Oponenti: Doc. RNDr. Anna Kolesárová, CSc.
Prof. RNDr. PhDr. Zdeněk Půlpán, CSc.
Prof. Ing. František Babinec, CSc.

Datum obhajoby: 29. 3. 2002

KLÍČOVÁ SLOVA
fuzzy množiny, shlukování, fuzzy shlukování, fuzzy objekt

KEYWORDS
fuzzy sets, clustering, fuzzy clustering, fuzzy object, soft computing, data mining

Práce je uložena na Oddělení vědy a výzkumu Fakulty strojního inženýrství na Vysokém učení technickém v Brně.

ISBN 80-214-2119-3
ISSN 1213-4198

OBSAH

1 ÚVOD

V běžném životě i technické praxi se často setkáváme s problémem, jak roztřídit množinu objektů podle nějakých charakteristických rysů. Hlavní obtíží, na kterou narazíme, budeme-li chtít takovou situaci matematicky modelovat je mimo jiné nutnost klasifikovat zkoumané věci a jevy na základě jejich podobnosti. Protože posuzování vzájemných podobností bylo a je záležitostí diskutabilní, začaly se s rozvojem výpočetní techniky objevovat pokusy o matematické podchycení a vyhodnocení míry těchto podobností. Hledaly se vhodné metody číselného vyjádření vlastností, jimiž se zkoumané objekty vyznačovaly, metody kvantitativního vyjádření podobností takto zakódovaných objektů a konečně metody seskupování podobných objektů do „shluků“. Tak začaly pokusy s řadou metod, které dnes podle společného cíle zahrnujeme pod název **shluková analýza** nebo zkráceně **shlukování**.

V literatuře se objevuje takové množství shlukovacích metod, že je obtížné je nějak rozumně utřídit. Protože shluková analýza má sloužit jako prostředek k získání klasifikace, nabízí se možnost rozlišovat shlukovací metody nikoli podle použitých matematických prostředků, ale podle cílů, k nimž směřují. Takto rozlišujeme dvě základní skupiny metod shlukové analýzy, a to **hierarchické** a **nehierarchické** metody, z nichž první směřují k hierarchické klasifikaci, druhá k nehierarchické klasifikaci.

Další významnou etapou v rozvoji shlukové analýzy je uplatnění fuzzy množin ve shlukovacím procesu. Tyto metody nazýváme **fuzzy shlukovací metody** nebo zkráceně **fuzzy shlukování**. Nejznámější a nejpoužívanější je fuzzy shlukování definované J.C. Bezdekem.

Všechny výše zmíněné typy shlukování pracují s objekty, jejichž popis v sobě neobsahuje neurčitost, vágnost. Existují ale objekty, které nelze popsat jinak, než s určitou mírou vágnosti. Na tyto objekty nelze použít známé shlukovací metody. Ve své dizertační práci objekty s vágně vyjádřenou charakteristikou popisuji pomocí fuzzy množin (definuji je jako **fuzzy objekty**) a dále popisuji různé typy vyjádření podobnosti a metody shlukování těchto objektů.

Uvedené pojmy a metody jsou původním přínosem autora. Část získaných výsledků byla již publikována. Blíže o jednotlivých pojmech a metodách je pojednáváno v následujících kapitolách. Algoritmy a metody shlukování fuzzy objektů jsou naprogramovány v systému MATLAB pro PC.

Předložená dizertační práce je součástí řešení výzkumného záměru CEZ: J22/98:261100009 „Netradiční metody studia komplexních a neurčitých systémů“.

2 SOUČASNÝ STAV ŘEŠENÉ PROBLEMATIKY

Ve své dizertační práce vycházím především ze dvou oblastí matematiky. Jsou to fuzzy množiny a metody shlukování. Z teorie fuzzy množin využívám základní pojmy, nebudu se proto nich explicitně zmiňovat. Tyto pojmy jsou uvedeny např. v [7, 10, 11, 15, 22]. Vzhledem k tomu, že problematika shlukování a fuzzy shlukování je méně známá, uvedu v této kapitole základní pojmy a pojmy související s předmětem dizertační práce. Více o shlukování lze nalézt například v [1, 2, 6, 8, 9, 13, 16, 18, 21] a o fuzzy shlukování v [3, 4, 5, 12, 19].

2.1 ZÁKLADNÍ POJMY SHLUKOVÉ ANALÝZY

Cílem shlukování je, rozdělit danou množinu objektů do takových podmnožin, aby objekty patřící do téže podmnožiny měly k sobě „blíže“ než objekty z různých podmnožin.

Mějme n objektů, přičemž každý objekt je popsán pomocí m znaků: $\boldsymbol{O} = \{O_1,..., O_n\}$, h-tý objekt $O_h = (x_{h1},..., x_{hm})$, x_{hj} - j-tý znak objektu.

Pro shlukování je důležitý pojem „blízkosti“ dvou objektů. Tuto „blízkost“ lze měřit pomocí funkce **podobnosti podobnosti** Π: $\boldsymbol{O}\times\boldsymbol{O} \to \mathbf{R}_0^+$. Funkce podobnosti dvěma objektům přiřadí reálné nezáporné číslo $\Pi(O_h, O_s)$, pro které platí:

$$\Pi(O_h, O_s) \geq 0,$$
$$\Pi(O_h, O_s) = \Pi(O_s, O_h).$$

Ve shlukovacích metodách se místo podobnosti objektů používá pojem **nepodobnosti** objektů $\mathbf{d} : \boldsymbol{O}\times\boldsymbol{O} \to \mathbf{R}_0^+$, pro kterou platí:

$$\mathbf{d}(O_h, O_s) = 0 \Leftrightarrow O_h = O_s,$$
$$\mathbf{d}(O_h, O_s) \geq 0,$$
$$\mathbf{d}(O_h, O_s) = \mathbf{d}(O_s, O_h).$$

V reálných situacích se pro $\mathbf{d}$ volí různé metriky na $\mathbf{R}^m$.

Objekty se snažíme rozdělit do shluků. Pojem **shluk** není přesně definovaným pojmem. Jeho možnou definici lze vyjádřit pomocí nepodobnost objektů. **Shlukem** nazveme takovou podmnožinu A množiny objektů $\boldsymbol{O}$, pro niž platí:

$$\max_{O_i, O_j \in A} \mathbf{d}(O_i, O_j) < \min_{O_k \in A, O_l \notin A} \mathbf{d}(O_k, O_l).$$

Předpokládejme, že chceme objekty $\boldsymbol{O}$ rozdělit na c shluků, kde $1 < c < n$. Množinu shluků lze nazvat množinu $\mathbf{S} = \{S_1,..., S_c\} \subseteq \boldsymbol{P}(\boldsymbol{O})$, $S_i \subseteq \boldsymbol{O}$, pro niž platí:

$$\bigcup_{k=1}^{c} S_k = \boldsymbol{O}, \quad S_i \cap S_j = \emptyset \quad \text{pro } i \neq j \text{ a } \emptyset \subset S_i \subset \boldsymbol{O} \quad \forall i = 1,..., c.$$

Tyto vztahy lze zapsat v duálním vyjádření:
Zavedeme matici U = $(u_{ij})_{c,n}$, kde $u_{ij} = u_i(O_j) = 1$, jestliže $O_j \in S_i$
a $u_{ij} = u_i(O_j) = 0$, jestliže $O_j \notin S_i$.
Pak požadujeme, aby platilo

$$\sum_{i=1}^{c} u_{ij} = 1 \quad \text{a} \quad 0 < \sum_{j=1}^{n} u_{ij} < n.$$

Označme M_c množinu všech rozkladů množiny **S** na c shluků, které splňují uvedená pravidla. Tyto rozklady budeme nazývat ***c*-rozklady** množiny **S**.

$$M_c = \{U \in V_{cn},\ u_{ij} \in \{0,1\}\ \forall i,j;\ \sum_{i=1}^{c} u_{ij} = 1\ \forall j;\ 0 < \sum_{j=1}^{n} u_{ij} < n\ \forall i\},$$

kde V_{cn} je vektorový prostor dimenze cn.

Na základě nepodobnosti objektů **d** lze definovat **nepodobnost shluků D**: Mějme shluky A = $\{A_1,..., A_k\}$, $A_i = (a_{i1},..., a_{im})$ $\forall i = 1,..., k$, B = $\{B_1,..., B_t\}$, $B_j = (b_{j1},..., b_{jm})$ $\forall j = 1,..., t$. **D** musí splňovat tyto podmínky:

$$\mathbf{D}(A, A) = 0,$$
$$\mathbf{D}(A, B) \geq 0,$$
$$\mathbf{D}(A, B) = \mathbf{D}(B, A).$$

Nejznámější způsoby výpočtu nepodobnosti shluků jsou:

Metoda nejbližšího souseda: $\mathbf{D}(A, B) = \min_{A_i \in A,\, B_j \in B} \{\mathbf{d}(A_i, B_j)\}$.

Metoda nejvzdálenějšího souseda: $\mathbf{D}(A, B) = \max_{A_i \in A,\, B_j \in B} \{\mathbf{d}(A_i, B_j)\}$,
$\mathbf{D}(A, A) = 0$.

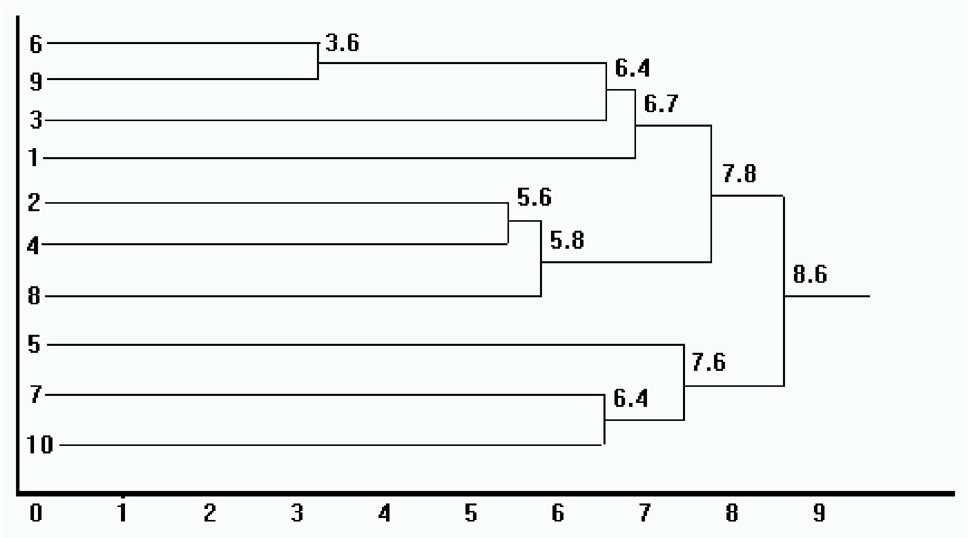
Centroidní metoda: $\mathbf{D}(A, B) = \mathbf{d}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$,
kde **a** je střed shluku A a **b** je střed shluku B.

Metoda průměrné nepodobnosti: $\mathbf{D}(A, B) = \dfrac{1}{kt} \sum_{(i,j)}^{k \cdot t} \mathbf{d}(A_i, B_j)$.

Na základě nepodobnosti objektů a nepodobnosti shluků se definují shlukovací metody. Tyto metody se dělí na dvě základní skupiny: **hierarchické** metody shlukování a **nehierarchické** metody shlukování.

Hierarchie na množině objektů $\boldsymbol{O}$ je množina $\mathbf{H} \subset \boldsymbol{P}(\boldsymbol{O})$, která splňuje:
1) $\boldsymbol{O} \in \mathbf{H}$,
2) $\{O_i\} \in \mathbf{H} \quad \forall O_i \in \boldsymbol{O}$,
3) jestliže $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, pak $A_i \subset A_j$ nebo $A_j \subset A_i \quad \forall A_i, A_j \in \mathbf{H}$.

Hierarchické shlukovací procedury přiřadí množině objektů $\boldsymbol{O}$ posloupnost jejich rozkladů $\Omega_0, \Omega_1,..., \Omega_{n-1}$ na shluky a zároveň přiřadí každému shluku A v každém rozkladu reálné nezáporné číslo $\boldsymbol{h}(A)$. Pokud platí: $A \subset B \Rightarrow \boldsymbol{h}(A) \leq \boldsymbol{h}(B)$, lze hierarchické shlukování zobrazit ve tvaru **podobnostního stromu**. Příklad podobnostního stromu je na obrázku 2.1.



Obr. 2.1.

U **nehierarchických** metod hledáme takový rozklad množiny $\boldsymbol{O}$ na c shluků $\mathbf{S}=\{S_1,..., S_c\}$, nad kterými by předem zvolený *funkcionál kvality rozkladu* nabýval extrémní hodnoty.

Jednou z nejčastěji používaných nehierarchických metod je optimalizační metoda definována funkcionálem $J_w : M_c \rightarrow \mathbf{R}_0^+$:

$$J_w(U) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{c} u_{ij}(D_{ij})^2 ,$$

kde $D_{ij} = \mathbf{D}(\{O_j\}, S_i)$ je nepodobnost shluku $\{O_j\}$ a shluku S_i .

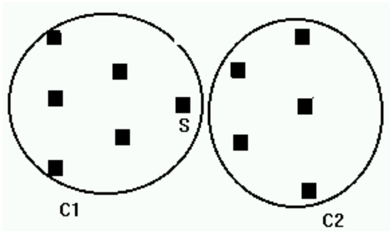
Ve většině případů se u nehierarchické metody nepodobnost shluků $\mathbf{D}$ určí pomocí centroidní metody. V tomto případě lze optimalizační metodu definovat ve tvaru: $J_w : M_c \times \mathbf{R}^{cm} \rightarrow \mathbf{R}_0^+$ vztahem:

$$J_w(U, v) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{c} u_{ij}(d_{ij})^2 ,$$

kde $d_{ij} = \mathbf{d}(O_j, v_i)$ je nepodobnost objektu O_j a těžiště v_i shluku S_i. Místo těžišť $v = (v_1,..., v_c)$ lze uvažovat symbolické reprezentanty shluků $\mathbf{S} = \{S_1,..., S_c\}$.

Iterační metodou hledáme minimum $\mathbf{J_w}(U, v)$ nad $M_c \times \mathbf{R}^{cm}$. Jednou z nejznámějších nehierarchických metod je metoda ISODATA [2].

Výsledkem shlukování je seznam, v němž je jasně určeno, zda daný objekt patří do daného shluku či nikoli. Tyto metody rozdělí objekty do přesně definovaných shluků. Nevýhoda se projeví například u dat ve tvaru na obrázku 2.2, kde se střed S musí zařadit buď do shluku C1 anebo do shluku C2. Tuto nevýhodu klasického shlukování lze odstranit pomocí fuzzy shlukování.



Obr. 2.2

2.2 FUZZY SHLUKOVÁNÍ

Fuzzy shlukování bylo zavedeno J. C. Bezdekem [5], který místo příslušnosti prvku do shluku ve tvaru $u_{ij} = u_i(O_j) \in \{0,1\}$ zavedl příslušnost ve tvaru $u_{ij} = u_i(O_j) \in \langle 0,1 \rangle$ a místo c-rozkladu $U \in M_c$ zavedl pojem **fuzzy-*c*-rozklad**.

Definujeme matici $U = (u_{ij})_{c,n}$, kde $u_{ij} = u_i(O_j) \in \langle 0,1 \rangle$, u_{ij} je příslušnost objektu O_j do shluku S_i. Pak požadujeme, aby platilo:

$$\sum_{i=1}^{c} u_{ij} = 1 \quad \text{a} \quad 0 < \sum_{j=1}^{n} u_{ij} < n \; .$$

Označme M_{fc} množinu všech fuzzy-c-rozkladů, které splňují uvedená pravidla.

$$M_{fc} = \{ U \in V_{cn},\ u_{ij} \in \langle 0,1 \rangle\ \forall i,j;\ \sum_{i=1}^{c} u_{ij} = 1\ \forall j;\ 0 < \sum_{j=1}^{n} u_{ij} < n\ \forall i \},$$

kde V_{cn} je vektorový prostor dimenze cn. Platí: $M_c \subset M_{fc}$.

Definujeme funkci $J_q : M_{fc} \times \mathbf{R}^{cm} \to \mathbf{R}^{+}$ vztahem: $J_q(U,v) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{c} u_{ij}^{q} (d_{ij})^2$, kde d_{ij} je centroidní metoda pro nepodobnost shluku $\{O_j\}$ a shluku S_i ($d_{ij} = \mathbf{d}(O_j, v_i) = \langle O_j - v_i, O_j - v_i \rangle$, kde $v = (v_1,..., v_c)$ a $v_i = (v_{i1}, v_{i2},..., v_{im})$ je těžiště shluku S_i) a q je váhový exponent: $q \in (1, \infty)$.

Iterační metodou hledáme minimum $J_q(U, v)$ nad $M_{fc} \times \mathbf{R}^{cm}$. Algoritmus výpočtu minima $J_q(U, v)$ lze najít např. v [5].

Parametr $q \in (1, \infty)$ udává, jak moc má být výsledné řešení „fuzzy“. Pokud $q \to^{+} 1$, pak fuzzy-c-rozdělení $U \in M_{fc}$ přechází na c-rozdělení $U \in M_c$, t.j. stává se méně „fuzzy“ a $J_q(U,v) \to J_w(U,v)$. Pokud $q \to \infty$, pak řešení $U \in M_{fc}$ se stává více „fuzzy“: $U \to (1/c)_{nc}$, $v_i \to \sum_{k=1}^{n} O_k \Big/ n$ $\forall$i a $J_q \to 0$. Neexistuje žádný teoretický základ, jak vhodně zvolit parametr q. Obvykle se volí $q = 2$.

3 CÍL DIZERTAČNÍ PRÁCE

3.1 NEDOSTATEČNOST KLASICKÉHO SHLUKOVÁNÍ

Objekty, které shlukujeme pomocí klasického shlukování, jsou popsány pomocí znaků. Znaky objektů mohou nabývat tří základních typů:

i) **kvantitativní**: hodnota znaku vyjadřuje množství. Nejčastěji je znak tohoto typu popsán číslem patřícím do spočetné či nespočetné množiny U_j. Často $U_j = \mathbf{R}$ pro každé $j = 1,\ldots, m$ a objekty lze zobrazit jako body v prostoru $\mathbf{R}^m$.

ii) **kvalitativní:** hodnota znaku je vybrána z konečné množiny možných stavů X_j. Hodnoty těchto znaků mohou být i disjunktní intervaly.

iii) **binární**: hodnota znaku je vybrána z dvouprvkové množiny, kde jeden prvek znamená, že objekt nemá požadovanou vlastnost a druhý znamená, že danou vlastnost má. Nejčastěji se tato dvouprvková množina definuje ve tvaru $\{0, 1\}$.

Popis objektu může obsahovat i kombinaci typů znaků **i)**, **ii)**, **iii)**.

Výše uvedené typy znaků objektu předpokládají, že pro daný objekt je třeba vybrat jednu konkrétní hodnotu. Pokud vybranému znaku zvoleného objektu přiřadíme hodnotu, pak daný objekt ve vybraném znaku již nemůže nabývat další hodnoty. Znaky objektu a tím i zvolený objekt jsou přesně definovány a nad těmito objekty je definováno shlukování. Takové objekty budeme nazývat **klasické objekty** a shlukování nad nimi **shlukování klasických objektů** nebo **klasické shlukování**.

V praxi se často vyskytují objekty, které nelze popsat výše uvedenými typy znaků. Takový objekt obsahuje znak, jehož hodnoty nelze přesně definovat (tj. existuje znak objektu, který může současně obsahovat více hodnot a nebo pro daný znak existuje „neurčitost", „vágnost" ve vyjádření hodnot tohoto znaku). Pak klasické shlukování nelze aplikovat přímo na takové typy objektů. V klasickém shlukování se tento případ řeší tím, že dané „vágní" hodnotě znaku přiřadíme hodnotu, která nejlépe vystihuje daný znak objektu. Vybere se tzv. „hlavní hodnota". Tím, že z celé „vágní" hodnoty vyberme pouze tuto „hlavní hodnotu", nebo ze všech možných hodnot vybereme pouze jednu hodnotu, ztrácíme informaci, která je obsažena ve „vágnosti" a která může mít na výsledek shlukování vliv.

3.2 ZOBECNĚNÍ TYPŮ ZNAKŮ OBJEKTŮ

Bylo by vhodné zavést takové typy znaků objektů a shlukování nad těmito objekty, které by bralo zřetel i na tuto „vágnost". Je tedy užitečné „vágnost" použít při popisu hodnot znaku a tím ji zapojit do shlukovacího procesu. Existuje více možností, jak „vágnost" popsat. Protože člověk dokáže třídit i objekty, popis jejichž znaků je „vágní", je vhodné vybrat takový popis „vágnosti" hodnot znaků, který se nejvíce přibližuje lidskému uvažování. Jak se již ukázalo v podobných oblastech, kde se snažíme nahradit lidský vliv na řešení problémů, je vhodné tuto "vágnost" popsat pomocí **fuzzy množin**. Takto definované hodnoty znaků objektů, kromě popisu vágnosti, zobecní hodnoty znaků klasických objektů.

3.3 CÍL DIZERTAČNÍ PRÁCE

Cílem dizertační práce je zavést vhodnou definici vágně popsaných objektů pomocí fuzzy množin, definování podobnosti a nepodobnosti těchto objektů a následně rozšíření základních typů shlukování na tyto objekty.

Objekty popsané fuzzy množinami budu nazývat **fuzzy objekty**. Tyto fuzzy objekty mohou být popsány také pomocí jazykových hodnot předem definovaných jazykových proměnných. Ke shlukování se využívá zobecnění standardních shlukovacích metod, kde se místo podobnosti (nepodobnosti) objektů zavádí pojem **fuzzy podobnosti (fuzzy nepodobnosti)** fuzzy objektů a s využitím tohoto pojmu je definováno shlukování nad fuzzy objekty. Hlavní část práce je věnována různým způsobům definice fuzzy nepodobnosti a vlastnostem s ní spojeným. Fuzzy nepodobnost v dizertační práci definuji různými způsoby: s využitím principu rozšíření na nepodobnost klasických objektů, s využitím fuzzy regulátoru, s jehož pomocí definuji fuzzy podobnost fuzzy objektů, s využitím postupu při výběru položky ve fuzzy databázi a zobecněním fuzzy shlukování pro fuzzy objekty.

Mou snahou je, aby se proces shlukování nad „vágnímí“ objekty co nejvíce přiblížil shlukování chápanému intuitivně.

4 ZVOLENÉ METODY ZPRACOVÁNÍ

4.1 FUZZY OBJEKTY

Definice 4.1

Nechť U_j, j=1,..., m jsou univerza, které jsou lineárními prostory a nechť $fx_j = (U_j, \mu^x{}_j)$, j=1,..., m jsou **normální** a **konvexní** fuzzy množiny nad univerzem U_j s hodnotami funkce příslušnosti patřícími do svazu $L=(\langle 0, 1\rangle, \min, \max, 0, 1)$. Pak m-tici $fO = (fx_1,..., fx_m)$ budeme nazývat **fuzzy objektem** nad univerzy $U_1,..., U_m$. Fuzzy množinu $fx_j = (U_j, \mu^x{}_j)$ budeme nazývat j-tým znakem fuzzy objektu fO. Množinu všech fuzzy objektů nad univerzy $U_1, U_2,..., U_m$ označíme $\boldsymbol{FO}(U_1, U_2,..., U_m)$.

Speciálním případem je fuzzy objekt, jehož každý znak je jazykovou hodnotou předem definované jazykové proměnné: Nechť je definováno m jazykových proměnných $\boldsymbol{Z}_j = (Z_j, \boldsymbol{T}(Z_j), U_j, G_j, M_j)$. Pak definujeme fuzzy objekt $fO = (fX_1,..., fX_m)$, kde fX_j je jazyková hodnota jazykové proměnné $\boldsymbol{Z}_j$ ($fX_j \in \boldsymbol{T}(Z_j)$), pro kterou platí $M_j(fX_j) = fx_j$ a fx_j je **normální** a **konvexní** fuzzy množiny pro j=1,...,m a pokládáme $M(fO) = (M_1(fX_1), M_2(fX_2),..., M_m(fX_m)) = (fx_1, fx_2,..., fx_m)$.

Množinu n fuzzy objektů označíme $\boldsymbol{fO} = (fO_1, fO_2,\ldots, fO_n)$, kde h-tý fuzzy objekt je definován $fO_h = (fx_{h1},..., fx_{hm})$, k-tý znak h-tého fuzzy objektu:
$fx_{hk} = (U_k, \mu^x{}_{hk})$, $\mu^x{}_{hk} : U_k \rightarrow \langle 0, 1\rangle$ $h = 1,\ldots,n$, $k = 1,\ldots,m$ je normální a konvexní fuzzy množina.

Takto definované fuzzy objekty budeme shlukovat. U shlukovacích metod se využívá porovnání nepodobností objektů a hledá se nejmenší nepodobnost. Protože nepodobnost fuzzy objektů bude ve tvaru fuzzy množiny, je potřeba pro fuzzy množiny definovat uspořádání. Nechť $A=(U, \mu_A)$, $B=(U, \mu_B)$ jsou fuzzy množiny. Pak definujeme: $A \vee B = (U, \mu_{A\vee B})$,

$$\mu_{A\vee B}(z) = \sup_{z=\max\{a,b\}} \{\min\{ \mu_A(a), \mu_B(b)\}\}$$

a položíme $A \leq B \Leftrightarrow A \vee B = B$ a dále položíme $A < B \Leftrightarrow A \leq B$ a $A \neq B$. Pokud $A \vee B \neq B$ a zároveň $A \vee B \neq A$, fuzzy množiny A, B se nazývají **neporovnatelné** .

Ve shlukování je důležitý pojem podobnosti a nepodobnosti objektů **d**. Pro fuzzy objekty $fO_h = (fx_{h1},..., fx_{hm})$ a $fO_s= (fx_{s1},..., fx_{sm})$ zavedeme pojmy **fuzzy podobnost** a **fuzzy nepodobnost** fuzzy objektů.

Definice 4.2

Nechť $fO_h=(fx_{h1}, fx_{h2},..., fx_{hm})$ a $fO_s=(fx_{s1}, fx_{s2},..., fx_{sm})$ jsou fuzzy objekty. Pak zobrazení **f**Π: $\boldsymbol{FO}(U_1,U_2,...,U_m)\times\boldsymbol{FO}(U_1,U_2,...,U_m) \rightarrow \boldsymbol{F}(\mathbf{R})$, které splňuje:

$$\mathbf{f}\Pi(fO_h, fO_s) \geq \mathbf{0},$$

$$\mathbf{f}\Pi(fO_h, fO_s) = \mathbf{f}\Pi(fO_s, fO_h),$$

kde $\mathbf{0}=\{(0, 1)\}$ se uvažuje jako jednoprvková fuzzy množina obsahující prvek 0 se stupněm příslušnosti 1 a $\leq$ je částečné uspořádání na množině fuzzy množin $\boldsymbol{F}(\mathbf{R})$, nazveme **fuzzy podobnost** fuzzy objektů. $\mathbf{f\Pi}(fO_h, fO_s) = (\mathbf{R}, \mu^{\mathrm{f\Pi}}_{h,s})$ je fuzzy množina nad univerzem $\mathbf{R}$.

Pokud jsou fuzzy objekty fO_h, fO_s definované pomocí jazykových hodnot, pak definujeme $\mathbf{f\Pi}(fO_h, fO_s) = \mathbf{f\Pi}(\mathrm{M}(fO_h), \mathrm{M}(fO_s)) = (\mathbf{R}, \mu^{\mathrm{f\Pi}}_{h,s})$.

Definice 4.3

Nechť $fO_h = (fx_{h1},..., fx_{hm})$ a $fO_s= (fx_{s1},..., fx_{sm})$ jsou fuzzy objekty. Pak zobrazení $\mathbf{fd}$: $\boldsymbol{FO}(\mathrm{U}_1,\mathrm{U}_2,...,\mathrm{U}_m)\times\boldsymbol{FO}(\mathrm{U}_1,\mathrm{U}_2,...,\mathrm{U}_m) \to \boldsymbol{F}(\mathbf{R})$, které splňuje:

$$\mathbf{0} \subseteq \mathbf{fd}(fO_h, fO_h),$$
$$\mathbf{fd}(fO_h, fO_s) \geq \mathbf{0},$$
$$\mathbf{fd}(fO_h, fO_s) = \mathbf{fd}(fO_s, fO_h),$$

kde $\mathbf{0}=\{(0, 1)\}$ a $\leq$ je částečné uspořádání na množině fuzzy množin $\boldsymbol{F}(\mathbf{R})$, nazveme **fuzzy nepodobnost fuzzy objektů**. $\mathbf{fd}(fO_h, fO_s) = (\mathbf{R}, \mu^{\mathrm{fd}}_{h,s})$ je fuzzy množina nad univerzem $\mathbf{R}$.

Pokud jsou fuzzy objekty fO_h, fO_s definované pomocí jazykových hodnot, pak definujeme $\mathbf{fd}(fO_h, fO_s) = \mathbf{fd}(\mathrm{M}(fO_h), \mathrm{M}(fO_s)) = (\mathbf{R}, \mu^{\mathrm{fd}}_{h,s})$.

Pro fuzzy objekty lze klást i jiné požadavky na fuzzy nepodobnost. Jedná se hlavně o modifikaci prvního požadavku: $\mathbf{0} \subseteq \mathbf{fd}(fO_h, fO_h)$. Tento požadavek lze zeslabit: $\mu^{\mathrm{fd}}_{h,h}(0) \geq \mu^{\mathrm{fd}}_{h,h}(x)\ \ \forall x\in\mathbf{R}$, což je ekvivalentní s $\mu^{\mathrm{fd}}_{h,s}(0) = \mathrm{Hgt}(\mathbf{fd}(fO_h, fO_s))$. Že se jedná o nepodobnost, lze také vyjádřit ve tvaru: $\mathbf{fd}(fO_h, fO_h) \leq \mathbf{fd}(fO_h, fO_s)$ nebo ve slabším požadavku: $\mathbf{fd}(fO_h, fO_h)\leq\mathbf{fd}(fO_h, fO_s)$ nebo $\mathbf{fd}(fO_s, fO_s)\leq\mathbf{fd}(fO_h, fO_s)$.

4.2 SHLUKY FUZZY OBJEKTŮ

Mějme n fuzzy objektů $\boldsymbol{fO}=\{fO_1,..., fO_n\}$, h-tý objekt $fO_h=(fx_{h1},..., fx_{hm})$, kde fx_{hj} je normální a konvexní fuzzy množina: $fx_{hj} = (\mathrm{U}_j, \mu^{x}_{hj})$ pro všechna $h = 1,..., n$ a $j = 1,..., m$. Fuzzy nepodobnost objektů fO_h a fO_s označíme $\mathbf{fd}(fO_h, fO_s) = (\mathbf{R}, \mu^{\mathrm{fd}}_{h,s})$. Takto definované fuzzy objekty se snažíme rozdělit do **shluků**.

Definice 4.4

Shlukem fuzzy objektů nazveme takovou podmnožinu A množiny fuzzy objektů $\boldsymbol{fO}$, pro niž platí: $\max\limits_{fO_i,\, fO_j\in A} \mathbf{fd}(fO_i, fO_j) < \min\limits_{fO_k\in A,\, fO_l\notin A} \mathbf{fd}(fO_k, fO_l)$

Předpokládejme, že chceme fuzzy objekty $\boldsymbol{fO}$ rozdělit na c shluků, kde $1<c<n$. Množinu shluků fuzzy objektů označíme $\mathbf{S} = \{S_1,..., S_c\} \subseteq \boldsymbol{P}(\boldsymbol{fO})$, $S_i \subseteq \boldsymbol{fO}$, a požadujeme : $\bigcup\limits_{k=1}^{c} S_k = \boldsymbol{fO}$, $S_i \cap S_j = \varnothing$ pro $i \neq j$ a $\varnothing \subset S_i \subset \boldsymbol{fO}\ \ \forall i = 1,..., c$.

Tyto vlastnosti lze opět vyjádřit ve tvaru:
Zavedeme matici $U = (u_{ij})_{c,n}$, kde $u_{ij} = u_i(fO_j) = 1$, jestliže $fO_j \in S_i$
a $u_{ij} = u_i(fO_j) = 0$, jestliže $fO_j \notin S_i$.
Pak požadujeme, aby platilo

$$\sum_{i=1}^{c} u_{ij} = 1 \quad \text{a} \quad 0 < \sum_{j=1}^{n} u_{ij} < n .$$

Označme M_c množinu všech c-rozkladů, které splňují uvedená pravidla.

$$M_c = \{U \in V_{cn},\ u_{ij} \in \{0,1\}\ \forall i,j;\ \sum_{i=1}^{c} u_{ij} = 1\ \forall j;\ 0 < \sum_{j=1}^{n} u_{ij} < n\ \forall i\ \},$$

kde V_{cn} je vektorový prostor dimenze cn.

Na základě nepodobnosti objektů **fd** lze opět definovat **fuzzy nepodobnost shluků fD**

Definice 4.5

Mějme shluky fuzzy objektů fA = $\{fA_1, fA_2,..., fA_k\}$, fB = $\{fB_1, fB_2,..., fB_t\}$, kde $fA_i \in \boldsymbol{fO}\ \forall i = 1,..., k$ a $fB_j \in \boldsymbol{fO}\ \ \forall j = 1,..., t$. **fD** musí splňovat tyto podmínky :

$$\mathbf{0} \subseteq \mathbf{fD}(\text{fA, fA}),$$
$$\mathbf{fD}(\text{fA, fB}) \geq \mathbf{0},$$
$$\mathbf{fD}(\text{fA, fB}) = \mathbf{fD}(\text{fB, fA}),$$

kde $\mathbf{0}=\{(0, 1)\}$ a $\leq$ je částečné uspořádání na množině fuzzy množin $\boldsymbol{F}(\mathbf{R})$.

Definice 4.6

Nechť $fO_1,..., fO_k$, kde $fO_i = (fx_{i1},..., fx_{im})$, $fx_{ij} = (U_j, \mu^x_{ij})$ jsou fuzzy objekty. Pak **těžištěm fuzzy objektů** $fO_1, fO_2,..., fO_k$ rozumíme objekt $fT = (ft_1, ft_2,..., ft_m)$, kde $ft_j = (U_j, \mu^t_j)$, $\mu^t_j(z) = \sup_{z=\frac{x_1+x_2+...+x_k}{k}} \{\min\{ \mu^x_{1j}(x_1), \mu^x_{2j}(x_2),..., \mu^x_{kj}(x_k)\}\}$.

Věta 4.7

Nechť $U_1,U_2,...,U_m$ jsou lineární prostory a nechť $fO_1,..., fO_k$, kde $fO_i = (fx_{i1},..., fx_{im})$, $fx_{ij} = (U_j, \mu^x_{ij})$, jsou fuzzy objekty, $\alpha \in (0, 1\rangle$ a $h(x_1,\ldots, x_k)=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i$. Pak těžištěm fuzzy objektů $fO_1,..., fO_k$ je fuzzy objekt ($fT \in \boldsymbol{FO}(U_1,...,U_m)$) a platí $fT=(ft_1,..., ft_m)$, kde $(ft_j)_\alpha = h((fx_{1j})_\alpha,..., (fx_{kj})_\alpha)$. Pokud jsou navíc $(fx_{ij})_\alpha$ uzavřené intervaly $\forall i =1,...,k$, pak $(ft_j)_\alpha$ je uzavřený interval a $(ft_j)_\alpha = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\ (fx_{ij})_\alpha$.

S využitím fuzzy nepodobnosti **fd** lze definovat nepodobnost shluků fA, fB, obsahujících fuzzy objekty, podobně jak se definuje **D** pomocí nepodobnosti **d**:

Metoda nejbližšího souseda: $\mathbf{fD}(\mathrm{fA}, \mathrm{fB}) = \min\limits_{A_i \in A,\, B_j \in B} \{\mathbf{fd}(fA_i, fB_j)\}$.

Metoda nejvzdálenějšího souseda: $\mathbf{fD}(\mathrm{fA}, \mathrm{fB}) = \max\limits_{A_i \in A,\, B_j \in B} \{\mathbf{fd}(fA_i, fB_j)\}$ a

$\mathbf{fD}(\mathrm{fA}, \mathrm{fA}) = \mathbf{0}$.

Centroidní metoda: $\mathbf{fD}(\mathrm{fA}, \mathrm{fB}) = \mathbf{fd}(\mathrm{f}\mathbf{a}, \mathrm{f}\mathbf{b})$,

kde f**a** je těžiště fuzzy objektů shluku fA a f**b** je těžiště fuzzy objektů shluku fB.

Metoda průměrné nepodobnosti: $\mathbf{fD}(\mathrm{fA}, \mathrm{fB}) = \dfrac{1}{kt} \sum\limits_{(i,j)}^{k \cdot t} \mathbf{fd}(fA_i, fB_j)$.

4.3 FUZZY HIERARCHICKÉ SHLUKOVÁNÍ

Pomocí rozšíření operací nutných pro hierarchické shlukování lze definovat hierarchickou metodu pro fuzzy objekty. Místo nepodobnosti shluků použijeme fuzzy nepodobnost, porovnání reálných čísel nahradíme porovnáním fuzzy množin. Postup hierarchické metody přitom zůstává zachován.

Definice 4.8

Hierarchie na množině fuzzy objektů $\boldsymbol{fO}$ je množina $\mathbf{H} \subset \boldsymbol{P}(\boldsymbol{fO})$, která splňuje:

1) $\boldsymbol{fO} \in \mathbf{H}$,

2) $\{fO_i\} \in \mathbf{H} \;\; \forall fO_i \in \boldsymbol{fO}$,

3) jestliže $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, pak $A_i \subset A_j$ nebo $A_j \subset A_i$ $\forall A_i, A_j \in \mathbf{H}$.

Fuzzy hierarchická aglomerativní shlukovací procedura přiřadí množině fuzzy objektů $\boldsymbol{fO}$ posloupnost jejich rozkladů $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_{n-1}$ na shluky a zároveň přiřadí každému shluku A v každém rozkladu fuzzy množinu $\boldsymbol{h}(A) = (\mathbf{R}^+_0, \mu^A)$ takto:

1) První krok procedury tvoří rozklad Ω_0 množiny $\boldsymbol{fO}$ na její jednotlivé fuzzy objekty, které považujeme za jednoprvkové shluky $A_{0,j} = \{fO_j\}$. Tedy $\Omega_0 = \{A_{0,1}, A_{0,2}, \ldots, A_{0,n}\}$ a každému jednoprvkovému shluku $A_{0,j}$ se přiřadí fuzzy množina $\boldsymbol{h}(A_{0,j}) = (\mathbf{R}^+_0, \mu^A_0) = \{(0,1)\}$.

2) V i-tém kroku procedury ($0 < i \leq n-2$) je $\Omega_i = \{A_{i,1}, A_{i,2}, \ldots, A_{i,n-i}\}$. Na základě nepodobnosti shluků **fD** vybereme jedinou dvojici shluků $(A_{i,u}, A_{i,v})$, pro niž je hodnota koeficientu nepodobnosti **fD** minimální. Nechť $\mathbf{fD}(A_{i,u}, A_{i,v}) = (\mathbf{R}^+_0, \mu^A_{i+1})$. Následující rozklad $\Omega_{i+1} = \{A_{i+1,1}, A_{i+1,2}, \ldots, A_{i+1,n-i-1}\}$ získáme tak, že všechny shluky s výjimkou shluků $A_{i,u}$ a $A_{i,v}$ přecházejí z i-tého do $(i+1)$-ního rozkladu nezměněny a se sjednocením $A_{i,u} \cup A_{i,v} = A_{i+1,l}$ tvoří shluky $(i+1)$-ního rozkladu. Přitom definujeme $\boldsymbol{h}(A_{i+1,l}) = (\mathbf{R}^+_0, \mu^A_{i+1})$.

3) V posledním kroku procedury jsou všechny shluky sjednoceny v jediný shluk a pro rozklad Ω_{n-1} platí: $\Omega_{n-1} = \{A_{n-1,1}\} = \boldsymbol{fO}$, přičemž $\boldsymbol{h}(A_{n-1,1}) = (\mathbf{R}^+_0, \mu^A_{n-1})$.

Fuzzy množiny $(\mathbf{R}^+_0, \mu^A_0), (\mathbf{R}^+_0, \mu^A_1), \ldots, (\mathbf{R}^+_0, \mu^A_{n-1})$ definují shlukovací hladiny příslušející rozkladům $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_{n-1}$.

4.4 FUZZY NEHIERARCHICKÉ SHLUKOVÁNÍ

U **nehierarchických** metod zobecníme zvolený *funkcionál kvality rozkladu* a metodu rozkladu pro fuzzy objekty. Tento *funkcionál* budeme uvažovat ve tvaru, v jakém je definován pro optimalizační metodu: $J_w : M_c \rightarrow \mathbf{R}^+$ a také v jeho speciálním tvaru: J_w: $M_c \times \mathbf{R}^{cm} \rightarrow \mathbf{R}^+$, kdy D_{ij}=$\mathbf{D}(\{O_j\}, S_i)$ je centroidní metoda pro nepodobnost shluků.

Definice 4.9

Nechť $\boldsymbol{fO}$ jsou fuzzy objekty. Definujeme **funkcionál** nehierarchické shlukovací metody pro fuzzy objekty fJ_w: $M_c \rightarrow \boldsymbol{F}(\mathbf{R})$ vztahem:

$$fJ_w(U)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{c} u_{ij}(fD_{ij})^2 ,$$

kde fD_{ij}= $\mathbf{fD}(\{fO_j\}, S_i)$ je fuzzy nepodobnost shluku $\{fO_j\}$ a shluku S_i

Pokud za **fD** zvolíme centroidní metodu, dostaneme následující tvar:
Označme $fv = (fv_1,..., fv_c)$, kde fv_j je fuzzy těžiště shluku S_j : $fv_j =(fv_{j1}, fv_{j2},\dots, fv_{jm})$, $fv_{jk} = (U_k, \mu^v_{jk})$. Pak definujme zobrazení fJ_w: $M_c \times (\boldsymbol{FO}(U_1,U_2,...,U_m))^c \rightarrow \boldsymbol{F}(\mathbf{R})$ vztahem: $fJ_w(U, fv) =\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{c} u_{ij}(fd_{ij})^2$, a fd_{ij} = $\mathbf{fd}(fO_j, fv_i)$ je fuzzy nepodobnost fuzzy objektu fO_j a fuzzy těžiště fv_i shluku S_i.

Iterační metodou hledáme minimum $\mathbf{fJ_w}(U,v)$ nad $M_c\times(\boldsymbol{FO}(U_1,U_2,...,U_m))^c$.

Algoritmus fuzzy nehierarchické metody:

1) V počátečním kroku určíme číslo c (počet shluků). Zvolíme počáteční rozklad množiny fuzzy objektů $\boldsymbol{fO}$ na c shluků $\Omega_0 = \{S_{0,1},..., S_{0,c}\}$ a vypočítáme ke každému shluku $S_{0,i}$ jeho fuzzy těžiště fv^0_i, označíme $fv^0 = (fv^0_1,..., fv^0_c)$.

2) Nechť v k-tém kroku máme rozklad množiny objektů $\boldsymbol{fO}$ na c shluků: $\Omega_k = \{S_{k1},..., S_{k,c}\}$ a $fv^k = (fv^k_1,..., fv^k_c)$. Pak následující rozklad množiny objektů $\boldsymbol{fO}$ na c shluků: $\Omega_{k+1} =\{S_{k+1,1},..., S_{k+1,c}\}$ vytvoříme tak, aby pro každý fuzzy objekt $fO_i\in\boldsymbol{fO}$ platilo: $fO_i \in S_{k+1,h} \Leftrightarrow \mathbf{fd}(fO_i, fv^k_h) = \min_{j=1,2,...,c} \{\mathbf{fd}(fO_i, fv^k_j)\}\ \forall i = 1, 2,...,n$.

Pak pro každý shluk $S_{k+1,j}$ vypočteme jeho fuzzy těžiště fv^{k+1}_j.

3) Porovnáme rozklady Ω_k a Ω_{k+1}. Nastane jedna ze dvou situací:

a) Existuje taková podmnožina $S_{k,h}$ rozkladu Ω_k pro niž platí: $S_{k,h} \neq S_{k+1,j}$ pro $j = 1, 2,..., c$. Pak přejdeme ke kroku 2.

b) Neexistuje taková podmnožina $S_{k,h}$ rozkladu Ω_k pro niž platí: $S_{k,h} \neq S_{k+1,j}$ pro $j = 1, 2,..., c$. Pak rozklady Ω_k a Ω_{k+1} jsou tvořeny týmiž podmnožinami a ukončíme shlukovací proces. Rozklad: $\Omega_k = \{S_{k,1},..., S_{k,c}\}$ je výsledným rozkladem a podmnožiny $S_{k,1},..., S_{k,c}$ jsou výslednými shluky.

5 HLAVNÍ VÝSLEDKY PRÁCE

Abychom mohli provést fuzzy shlukování, je potřeba definovat fuzzy nepodobnost fuzzy objektů. Nabízejí se následující možnosti:
a) pomocí fuzzy regulátoru definujeme fuzzy podobnostní regulátor a jeho pomocí určíme podobnost fuzzy objektů
b) pomocí principu rozšíření zobecníme nepodobnost klasických objektů na fuzzy objekty.
c) pomocí vztahů pro výběr položek ve fuzzy databázi, kde položku ve fuzzy databázi a dotaz považujeme za fuzzy objekty.

Dále se pokusíme pomocí principu rozšíření zobecnit fuzzy shlukování definované Bezdekem [5] pro fuzzy objekty.

5.1 DEFINICE NEPODOBNOSTI FUZZY OBJEKTŮ POMOCÍ FUZZY REGULÁTORU

Fuzzy regulátor určující podobnost fuzzy objektů budeme nazývat **fuzzy podobnostní regulátor**.

Definice 5.1

Fuzzy podobnostní regulátor je regulátorem typu P: u = R(e) následujícího tvaru:
Vektor vstupních proměnných definujeme ve tvaru:($\boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{Z}_2, \ldots, \boldsymbol{Z}_m, \boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{Z}_2, \ldots, \boldsymbol{Z}_m$), kde $\boldsymbol{Z}_j = (\mathrm{Z}_j, \boldsymbol{T}(\mathrm{Z}_j), \mathrm{U}_j, \mathrm{G}_j, \mathrm{M}_j), j=1,\ldots,m.$
Výstupní proměnnou definujeme ve tvaru: $\boldsymbol{V} = (\mathrm{V}, \boldsymbol{T}(\mathrm{V}), \mathrm{U}, \mathrm{G}, \mathrm{M})$, kde $\boldsymbol{T}(\mathrm{V}) = \{v_1, v_2\}$, v_1-**nepodobné**, v_2-**podobné**, $\mathrm{M}(v_1)=V_1=(\mathrm{U}, \mu_{V1})$, $\mathrm{M}(v_2)=V_2=(\mathrm{U}, \mu_{V2})$ a nechť pro tyto dvě jazykové hodnoty platí: $V_1 < V_2$.
Pro tento fuzzy regulátor zavádíme pravidla typů (**a**) a (**b**).
Pravidla typu (**a**):
$\Re_k^{a}$ = jestliže z_{hj} je $Z_{U_j,k}$ a z_{sj} je $Z_{U_j,k}$ pak $\mathrm{v} = v_2$, $\forall Z_{U_j,k} \in \boldsymbol{T}(\mathrm{Z}_j)$, $\forall j \in 1,\ldots,m$;

kde z_{hj}, $z_{sj} \in \mathrm{U}_j$ a $\mathrm{v} \in \mathrm{U}$. Počet pravidel typu (**a**) je $\mathrm{Pa} = \sum_{j=1}^{m} \left| T(Z_j) \right|$.

Pravidla typu (**b**):
$\Re_{k'}^{b}$ = jestliže z_{hj} je $Z'_{U_j,k'}$ a z_{sj} je $Z''_{U_j,k'}$ pak $\mathrm{v} = v_1$, $\forall Z'_{U_j,k'}, Z''_{U_j,k'} \in \boldsymbol{T}(\mathrm{Z}_j)$, $Z'_{U_j,k'} \neq Z''_{U_j,k'}$ $\forall j \in 1,\ldots,m$, kde z_{hj}, $z_{sj} \in \mathrm{U}_j$ a $\mathrm{v} \in \mathrm{U}$. Počet pravidel typu (**b**): $\mathrm{Pb} = \sum_{j=1}^{m} \left(\left| T(Z_j) \right| \cdot \left| T(Z_j) - 1 \right| \right)$.

Fuzzy podobnostní regulátor uvažujeme jako výrok: $\Re = \Re_1^{a}$ jinak,..., jinak $\Re_{Pa}^{a}$ jinak $\Re_1^{b}$ jinak,..., jinak $\Re_{Pb}^{b}$.

Takto definovaný **fuzzy podobnostní regulátor** označíme FPR.

Nechť $fO_h = (fx_{h1},..., fx_{hm})$, $fO_s = (fx_{s1},..., fx_{sm})$ jsou fuzzy objekty, které chceme porovnávat. Vstup do regulátoru bude dvojice fuzzy objektů: $(fO_h, fO_s) = (fx_{h1},..., fx_{hm}, fx_{s1},..., fx_{sm})$ a nechť $\mathrm{FPR}(fO_h, fO_s)$ je reakce fuzzy podobnostního regulátoru (FPR) na tento vstup. $\mathrm{FPR}(fO_h, fO_s)$ je fuzzy množina nad univerzem U.

Definice 5.2

Nechť $U \subseteq \mathbf{R}^+_0$. Pak definujme fuzzy podobnost fuzzy objektů vztahem:

$$\mathbf{f\Pi}(fO_h, fO_s) = \mathrm{FPR}(fO_h, fO_s).$$

Věta 5.3

$\mathbf{f\Pi}(fO_h, fO_s)$ splňuje podmínky pro fuzzy podobnost.

Nyní se pokusíme definovat fuzzy nepodobnost. Pro definici nepodobnosti předpokládáme $U = \langle 0, 1\rangle$, V_1, V_2 jsou konvexní fuzzy množiny splňující: $V_1 < V_2$, $\mu_{V1}(0)=1$ a $\mu_{V2}(1)=1$. $\mathrm{FPR}(fO_h, fO_s)$ je fuzzy množina nad univerzem $\langle 0, 1\rangle$: $\mathrm{FPR}(fO_h, fO_s) = (\langle 0, 1\rangle, \mu^{\mathrm{FPR}}_{h,s})$. Fuzzy nepodobnost pomocí fuzzy regulátoru lze definovat různými způsoby.

Definice 5.4

Definujme **fuzzy nepodobnost** fuzzy objektů fO_h, fO_s ve tvaru:

$$\mathbf{fd}(fO_h, fO_s) = \mathbf{1} - \mathrm{FPR}(fO_h, fO_s),$$

kde $\mathbf{1} = \{(1,1)\}$ je jednoprvková fuzzy množina obsahující prvek 1 s příslušností 1.

Věta 5.5

Nepodobnost fuzzy objektů $\mathbf{fd}(fO_h, fO_s) = \mathbf{1} - \mathrm{FPR}(fO_h, fO_s)$ splňuje pravidla pro fuzzy nepodobnost ve tvaru:

a) $\mu^{\mathrm{fd}}_{h,h}(0) = \mathrm{Hgt}(\mathbf{fd}(fO_h, fO_h))$,

b) $\mathbf{fd}(fO_h, fO_s) \geq \mathbf{0}$,

c) $\mathbf{fd}(fO_h, fO_s) = \mathbf{fd}(fO_s, fO_h)$,

kde $\mathbf{0}=\{(0, 1)\}$, $\mathbf{1}=\{(1, 1)\}$ a $\leq$ je částečné uspořádání na $\boldsymbol{F}(\mathbf{R})$.

Definice 5.6

Nechť pro výstupní jazykové hodnoty v_1, v_2 (kromě $U = \langle 0, 1\rangle$, V_1, V_2 jsou konvexní fuzzy množiny splňující: $V_1 < V_2$, $\mu_{V1}(0) = 1$ a $\mu_{V2}(1) = 1$.) navíc platí $\mu_{V1}(0.5) = 0$ a $\mu_{V2}(0.5) = 0$. Pak lze definovat **fuzzy nepodobnost** fuzzy objektů způsobem $\mathbf{fd}(fO_h, fO_s) = \mathrm{com}(\mathrm{FPR}(fO_h, fO_s))$, kde com(A) znamená doplněk fuzzy množiny.

Věta 5.7

Nepodobnost fuzzy objektů $\mathbf{fd}(fO_h, fO_s) = \mathrm{com}(\mathrm{FPR}(fO_h, fO_s))$ splňuje pravidla pro fuzzy nepodobnost ve tvaru:

a) $\mathbf{fd}(fO_h, fO_h) \leq \mathbf{fd}(fO_h, fO_s)$ nebo $\mathbf{fd}(fO_s, fO_s) \leq \mathbf{fd}(fO_h, fO_s)$,

b) $\mathbf{fd}(fO_h, fO_s) \geq \mathbf{0}$,
c) $\mathbf{fd}(fO_h, fO_s) = \mathbf{fd}(fO_s, fO_h)$,
kde $\mathbf{0}=\{(0, 1)\}$ a $\leq$ je částečné uspořádání na množině $\boldsymbol{F}(\mathbf{R})$.

Poznámka

Nechť pro v_1 a v_2 a pro $x\in U=\langle 0, 1\rangle$ platí $\mu_{V1}(x) = \mu_{V2}(1-x)$. $\mathrm{FPR}(fO_h, fO_s)$ lze vyjádřit ve tvaru: $\mathrm{FPR}(fO_h, fO_s) = (\mathbf{V}^{hs}{}_a \cap V_2)\cup(\mathbf{V}^{hs}{}_b \cap V_1)$, kde $(\mathbf{V}^{hs}{}_a \cap V_2)$ je fuzzy množina nad univerzem U, která popisuje vliv pravidel typu **(a)** na vstup (fO_h, fO_s) a $(\mathbf{V}^{hs}{}_b \cap \cap V_1)$ popisuje vliv pravidel typu **(b)**. Nechť $\mathrm{Hgt}(\mathbf{V}^{hs}{}_a) = V^{hs}{}_a$ a $\mathrm{Hgt}(\mathbf{V}^{hs}{}_b) = V^{hs}{}_b$. Z definice $\mathbf{f\Pi}(fO_h, fO_s) = \mathrm{FPR}(fO_h, fO_s)$ lze říci, že dva fuzzy objekty jsou **podobné**, pokud $V^{hs}{}_a > V^{hs}{}_b$ a **nepodobné**, pokud $V^{hs}{}_a \leq V^{hs}{}_b$. Tedy o přiřazení nebo nepřiřazení objektů do téhož shluku lze rozhodnout již na základě ***porovnání pouze těchto dvou objektů*** a nepotřebuji jejich podobnost (nepodobnost) porovnávat s podobností (nepodobností) jiných dvojic objektů. Protože $\mathrm{defuz}(\mathbf{f\Pi}(fO_h, fO_s))\in\langle 0, 1\rangle$, je přirozené definovat, že dva fuzzy objekty jsou podobné, pokud $\mathrm{defuz}(\mathbf{f\Pi}(fO_h, fO_s))\in(0.5, 1\rangle$ a nepodobné, pokud $\mathrm{defuz}(\mathbf{f\Pi}(fO_h, fO_s))\in \langle 0, 0.5\rangle$.

Podobným způsobem lze tento vztah definovat i pro nepodobnost: fuzzy objekty jsou podobné, pokud $\mathrm{defuz}(\mathbf{fd}(fO_h, fO_s))\in\langle 0, 0.5)$ a nepodobné, pokud $\mathrm{defuz}(\mathbf{fd}(fO_h, fO_s))\in\langle 0.5, 1\rangle$. Tedy pomocí této podobnosti (nepodobnosti) lze definovat „počáteční“ uspořádaní do shluků a tím i určit počet shluků.

Algoritmus

Nechť fO je množina objektů a nechť $U=\langle 0, 1\rangle$ a pro v_1 a v_2 na U platí $\mu_{V1}(x) = \mu_{V2}(1-x)$. Nechť nepodobnost fuzzy objektů je definována číslem $\mathrm{defuzz}(\mathrm{fd}(fO_h, fO_s))$, kde defuzz je libovolná defuzikační metoda

1) Zvolíme typ nepodobnosti shluku $\{fA\}$ a shluku $S = (fA_1,..., fA_k)$.
2) Vybereme libovolný objekt z množiny ***fO*** jako základ prvního shluku.
3) Vybereme další objekt z množiny ***fO*** a porovnáme ho se shlukem (shluky). Pokud je nepodobnost (ve tvaru $\mathrm{defuz}(\mathbf{fd}(fO_h, fO_s))$ z předcházející poznámky) menší než 0.5 pro nějaký shluk, objekt přiřadíme do shluku, se kterým má nejmenší nepodobnost. Pokud je tato nepodobnost vybraného objektu větší rovno než 0.5 pro všechny shluky, pak tento objekt položíme jako základ nového shluku.
4) Je ***fO*** prázdná množina ? ano $\rightarrow$ konec
ne $\rightarrow$ krok **3)**

Toto shlukování má nevýhodu v tom, že tvar a počet shluků závisí na typu nepodobnosti objektu a shluku. Pro některé typy nepodobnosti bude také záležet na pořadí výběru z množiny ***fO***. Proto je vhodné toto shlukování brát jako počáteční rozklad množiny ***fO*** na shluky a tento rozklad považovat za základ pro další typ shlukování.

5.2 DEFINICE NEPODOBNOSTI FUZZY OBJEKTŮ POMOCÍ PRINCIPU ROZŠÍŘENÍ

Definice 5.8

Nechť fO_h, fO_s jsou fuzzy objekty ($fO_h = (fx_{h1},..., fx_{hm})$ $fO_s=(fx_{s1},..., fx_{sm})$, kde $fx_{hj} = (U_j, \mu^x_{hj})$ a $fx_{sj} = (U_j, \mu^x_{sj})$ jsou normální konvexní fuzzy množiny). Pak definujeme fuzzy nepodobnost **fd**: $\boldsymbol{FO}(U_1,...,U_m)\times\boldsymbol{FO}(U_1,...,U_m) \to \boldsymbol{F}(\mathbf{R})$ fuzzy objektů fO_h, fO_s vztahem: $\mathbf{fd}(fO_h, fO_s) = (\mathbf{R}, \mu^{\mathrm{fd}}_{h,s})$,

$$\mu^{\mathrm{fd}}_{h,s}(z) = \sup_{z=d(O_h,O_s)} \{\min\{\mu^x_{h1}(x_{h1}),..., \mu^x_{hm}(x_{hm}), \mu^x_{s1}(x_{s1}),..., \mu^x_{sm}(x_{sm})\}\},$$

$$= 0 \quad \text{jinak},$$

kde $d(O_h, O_s)$ je nepodobnost klasických objektů $O_h=(x_{h1},...,x_{hm})$, $O_s=(x_{s1},...,x_{sm})$.

Věta 5.9

Nechť **d** je nepodobnost klasických objektů. Pak **fd** definovaná výše splňuje podmínky nepodobnosti fuzzy objektů ve tvaru:

a) $\mathbf{0} \subseteq \mathbf{fd}(fO_h, fO_h)$,

b) $\mathbf{fd}(fO_h, fO_s) \geq \mathbf{0}$,

c) $\mathbf{fd}(fO_h, fO_s) = \mathbf{fd}(fO_s, fO_h)$,

kde $\mathbf{0}=\{(0, 1)\}$ a $\leq$ je částečné uspořádání na množině fuzzy množin $\boldsymbol{F}(\mathbf{R})$.

Věta 5.10

Nechť nepodobnost **d**: $(U_1\times...\times U_m)\times(U_1\times...\times U_m)\to\mathbf{R}$ je spojité zobrazení, $\alpha\in(0, 1\rangle$, fO_h, fO_s jsou fuzzy objekty. Pak $(\mathbf{fd}(fO_h, fO_s))_\alpha = \mathbf{d}((fO_h)_\alpha, (fO_s)_\alpha) = \{z;\ z = \mathbf{d}(x, y), x\in (fO_h)_\alpha, y\in (fO_s)_\alpha\}$.

Věta 5.11

Nechť $O_h = (x_{h1},..., x_{hm})$, $O_s = (x_{s1},..., x_{sm})$ jsou klasické objekty. Pak $\mathbf{fd}(O_h, O_s) = \{(\mathbf{d}(O_h, O_s),1)\}$.

Z věty 5.11 je zřejmé, že nahradíme-li fuzzy objekty klasickými objekty, fuzzy nepodobnost **fd** přejde v nepodobnost **d**.

Věta 5.12

Nechť **d** je spojitá funkce a fO_h, fO_s jsou fuzzy objekty. Pak $\mathbf{fd}(fO_h, fO_s)$ je normální fuzzy množina nad univerzem **R**. Pokud navíc platí $(fx_{hj})_\alpha=\langle a_{j1}, a_{j2}\rangle$, $(fx_{sj})_\alpha=\langle b_{j1}, b_{j2}\rangle$ $\forall\alpha\in(0, 1\rangle$, kde $a_{j1}, a_{j2}, b_{j1}, b_{j2}\in \mathbf{R}$, pak $\mathbf{fd}(fO_h, fO_s)$ je konvexní fuzzy množina.

5.3 DEFINICE NEPODOBNOSTI FUZZY OBJEKTŮ S VYUŽITÍM VYHLEDÁVÁNÍ POLOŽEK VE FUZZY DATABÁZI

Při vyhledávání ve fuzzy databázi lze považovat jak položky této databáze tak i dotaz (na základě kterého se vybírá z fuzzy databáze) za fuzzy objekty. Při prohledávání fuzzy databáze porovnáváme dotaz s položkami a vybíráme takové položky, jejichž „shoda“ s dotazem je co největší. Tuto shodu lze definovat různým způsobem.

Shodu dotazu D=(d_1,..., d_m) a položky databáze P=(p_1,..., p_m) označme S(P, D). S(P, D) lze například definovat ve tvaru: S(P, D) = $\min\limits_{i=1,\dots,m} (V_i\, w_i)$, kde V_i je výsledek z porovnání i-tého znaku dotazu D a položky P například: $V_i = \mathrm{Hgt}(d_i \cap p_i)$ nebo $V_i = \mathrm{Vol}(d_i \cap p_i)/\mathrm{Vol}(d_i)$ (Vol ≡ obsah plochy) a $w_i \in \langle 0, 1\rangle$ je váha znaku i.

Definice 5.13

Definujme fuzzy podobnost fuzzy objektů na základě fuzzy databáze ve tvaru: **f**Π(P, D)=S(P,D).

Věta 5.14

fΠ definované ve tvaru **f**Π(P,D) = S(P,D) splňuje podmínky podobnosti.

Definice 5.15

Nechť P, D jsou fuzzy objekty. Pak definujeme nepodobnost fuzzy objektů P a D ve tvaru **fd**(P, D) = 1−S(P, D).

Věta 5.16

Nepodobnost fuzzy objektů **fd**(P, D) = 1−S(P, D), splňuje podmínky nepodobnosti fuzzy objektů ve tvaru:

1) **fd**(P, P) = 0,
2) **fd**(P, D) ≥ 0,
3) **fd**(P, D) = **fd**(D, P).

5.4 PŘÍKLAD SHLUKOVÁNÍ FUZZY OBJEKTŮ

Uvedeme příklad demonstrující shlukování fuzzy objektů. Zvolme n = 10, m = 2. Nechť fuzzy objekty jsou ve tvaru: $fO = (C_x, C_y, S_x^1, S_x^2, S_y^1, S_y^2)$, kde každá složka objektu má funkci příslušnosti ve tvaru :

$\mu^x{}_1(x) = e^{\frac{-(x-C_x)^2}{2S_x^1}}$ pro $x \le C_x$ a $\mu^x{}_1(x) = e^{\frac{-(x-C_x)^2}{2S_x^2}}$ pro $x > C_x$,

$\mu^x{}_2(y) = e^{\frac{-(y-C_y)^2}{2S_y^1}}$ pro $y \le C_y$ a $\mu^x{}_2(y) = e^{\frac{-(y-C_y)^2}{2S_y^2}}$ pro $y > C_y$,

kde

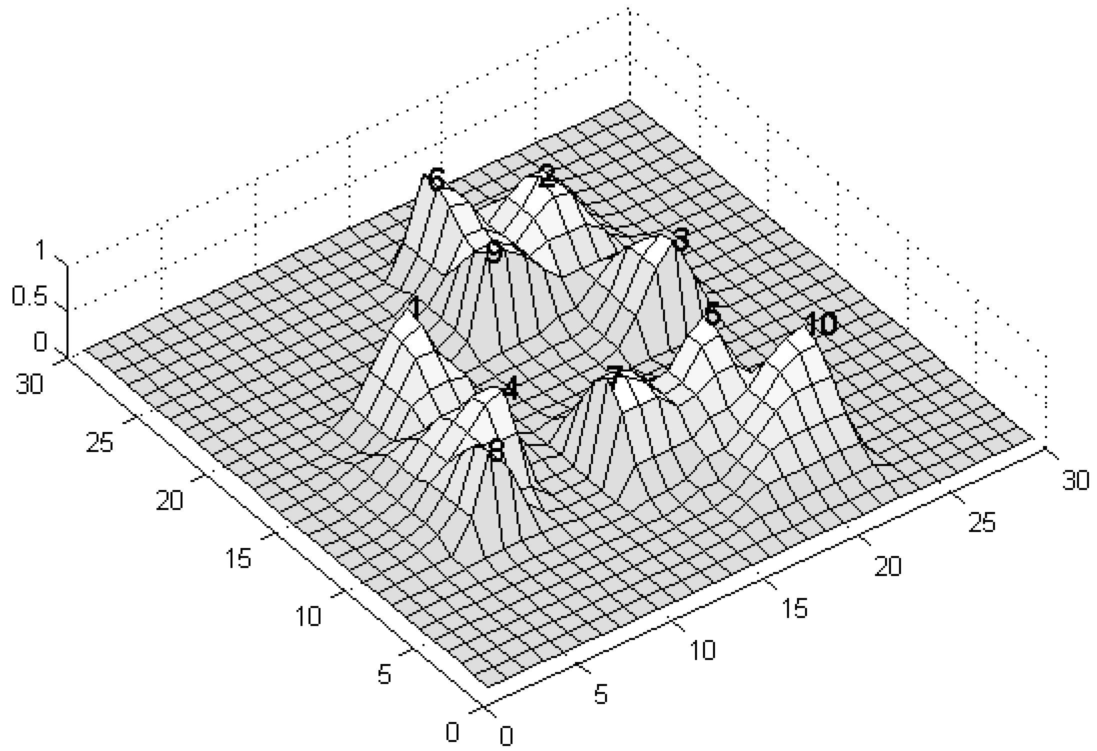
fO_1 = (10, 19, 1.7, 0.9, 2.9, 0.3), fO_2 = (20, 23, 1.3, 1.7, 2.1, 1.8),
fO_3 = (22, 16, 1.4, 0.9, 0.2, 2.7), fO_4 = (10, 12, 2.5, 0.3, 1.1, 2.1),
fO_5 = (20, 11, 1.9, 0.9, 2.4, 0.4), fO_6 = (16, 25, 0.7, 1.8, 2.4, 0.3),
fO_7 = (14, 10, 0.1, 2.7, 1.3, 1.7), fO_8 = (7, 9, 0.7, 1.2, 0.4, 2.5),
fO_9 = (15, 6, 0.5, 2.8, 0.3, 2.1), fO_{10} = (23, 8, 2.9, 0.3, 2.3, 0.5).

Např. fO_3=(fx_{31}, fx_{32}), kde

$fx_{31} = (\mathbf{R}, \mu^x{}_{31})$, $\mu^x{}_{31}(x)= e^{\frac{-(x-22)^2}{2(1.4)}}$ pro $x \le 22$ a $\mu^x{}_{31}(x)= e^{\frac{-(x-22)^2}{2(0.9)}}$ pro $x > 22$

$fx_{32} = (\mathbf{R}, \mu^x{}_{32})$, $\mu^x{}_{32}(y)= e^{\frac{-(y-16)^2}{2(0.2)}}$ pro $y \le 16$ a $\mu^x{}_{32}(y)= e^{\frac{-(y-16)^2}{2(2.7)}}$ pro $y > 16$

Pro názornější zobrazení fuzzy objektů budeme fuzzy objekt fO_j j=1,…10 uvažovat ne jako dvě fuzzy množiny nad univerzem **R**, ale jako fuzzy množinu nad univerzem **R**×**R** ve tvaru $fO_j = (\mathbf{R}\times\mathbf{R}, \min\{\mu^x{}_{j1}(x), \mu^x{}_{j2}(y)\})$. Pak lze fuzzy objekty zobrazit v prostoru $\mathbf{R}^3$ (obrázek 5.1.).



Obr. 5.1

Tyto fuzzy objekty budeme shlukovat fuzzy nehierarchickou metodou pro $\mathrm{fJ_w(U,v)} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{c} u_{ij}(d_{ij})^2$, kde $d_{ij} = \mathbf{fd}_{\mathrm{E}}(fO_j,\ fv_i)$ je nepodobnost fuzzy objektů definovaná pomocí principu rozšíření na Euklidovu metriku, fv_i je fuzzy těžiště shluku S_i.

Zvolme $c = 3$ a počáteční shluky $S_1 = \{fO_1, fO_2, fO_3, fO_4, fO_5\}$, $S_2 = \{fO_6, fO_7, fO_8\}$, $S_3 = \{ fO_9, fO_{10}\}$. Po 6-ti iteracích dostaneme výsledné shluky $S_1 = \{fO_2, fO_3, fO_6, fO_9\}$, $S_2 = \{fO_5, fO_7, fO_{10}\}$, $S_3=\{fO_1, fO_4, fO_8\}$.

Pokud uvažujeme pouze jádra fuzzy množin popisující znaky objektů (tj. nebereme v úvahu „vágnost" fuzzy objektů), dostaneme klasické objekty se znaky: $O_1 = (10, 19)$, $O_2 = (20, 23)$, $O_3 = (22, 16)$, $O_4 = (10, 12)$, $O_5 = (20, 11)$, $O_6 = (16, 25)$, $O_7 = (14, 10)$, $O_8 = (7, 9)$, $O_9 = (15, 20)$, $O_{10} = (23, 8)$.

A pokud tyto objekty shlukujeme nehierarchickou shlukovací metodou pro klasické objekty se stejnými parametry, dostaneme pro c=3 shluky ve tvaru $S_1 = \{O_1, O_2, O_6, O_9\}$, $S_2=\{O_3, O_5, O_{10}\}$, $S_3 = \{ O_4, O_7, O_8\}$. Při porovnání těchto výsledků s obrázkem lze tvrdit, že shluky vytvořené pomocí fuzzy objektů lépe vystihují strukturu zobrazených objektů.

5.5 ROZŠÍŘENÍ FUZZY SHLUKOVÁNÍ PRO FUZZY OBJEKTY

Fuzzy shlukování definované J.C.Bezdekem se nyní pokusíme rozšířit i pro fuzzy objekty a současně zobecníme příslušnost objektu do shluku.

Definice 5.17

Mějme n fuzzy objektů $\boldsymbol{fO}=\{fO_1, fO_2,..., fO_n\}$, j-tý objekt $fO_j=(fx_{j1},..., fx_{jm})$ kde $fx_{jk} = (\mathbf{R},\ \mu^x_{jj})$ je normální konvexní fuzzy množina pro všechna $j = 1,2,..., n$ a $k = 1,2,..., m$. Místo fuzzy-c-rozkladu $\mathrm{U} \in \mathrm{M_{fc}}$ (definované pro klasické objekty) definujeme pro **fuzzy objekty fuzzy *c*-rozklad** ve tvaru: $\mathrm{fU} = (fu_{ij})_{c,n}$, kde fu_{ij} je konvexní a normální fuzzy množina popisující příslušnost objektu fO_j do shluku S_i. $fu_{ij} = (\langle 0,1\rangle,\ \mu^{fu}_{ij})$ pro každé i=1,2,..., c, j=1,2,..., n.

Označme $\boldsymbol{FO}(\mathrm{M_{fc}})$ množinu všech **fuzzy-*c*-rozkladů fuzzy objektů**. Pak požadujeme, aby pro každé i=1,2,..., c, j=1,2,..., n platilo:

$$\mathbf{0} \le fu_{ij} \le \mathbf{1},$$

$$\mathbf{1} \subseteq \sum_{i=1}^{c} fu_{ij}\,,$$

$$\mathbf{0} < \sum_{j=1}^{n} fu_{ij} < \mathbf{n},$$

kde $\mathbf{0} = \{(0, 1)\}$, $\mathbf{1} = \{(1, 1)\}$, $\mathbf{n} = \{(n, 1)\}$ jsou jednoprvkové fuzzy množiny a ≤, < je uspořádání na množině fuzzy množin $\boldsymbol{F}(\mathbf{R})$.

Dále označme $(\boldsymbol{FO}(\mathbf{R}^m))^c$ množinu všech c-tic fv = ($\mathrm{fv}_1,\ldots,\mathrm{fv}_c$), kde $\mathrm{fv}_i = (fv_{i1}, fv_{i2},\ldots, fv_{im})$, $fv_{ik} = (\mathbf{R}, \mu^v_{ik})$ je normální a konvexní fuzzy množina. $(\boldsymbol{FO}(\mathbf{R}^m))^c$ uvažujeme jako množinu všech fuzzy těžiště shluků ($S_1,\ldots, S_c$).

Zvolme nepodobnost klasických objektů **d**, která je definována pomocí nějakého skalárního součinu a definujme funkci $\mathrm{fJ_q}$: $\boldsymbol{FO}(\mathrm{M_{fc}})\times(\boldsymbol{FO}(\mathbf{R}^m))^c \to \boldsymbol{F}(\mathbf{R})$ ve tvaru: $\mathrm{fJ_q(fU,fv)} = (\mathbf{R}, \mu^{\mathrm{fJ}})$,

$$\mu^{\mathrm{fJ}}(\mathrm{z}) = \sup_{z=J_q(U,v)} \min\{\mu^x_{jk}(x_{jk}), \mu^u_{ij}(u_{ij}), \mu^v_{ik}(v_{ik}), i=1,\ldots,c; j=1,\ldots,n; k=1,\ldots,m\},$$

kde $\mathrm{J_q(U,v)} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{c} u_{ij}^q (d_{ij})^2$, $\mathrm{U}\in\mathrm{M_{fc}}$, d_{ij} je nepodobnost objektu O_j a těžiště shluku S_i a q je váhový exponent $q\in(1,\infty)$.

Pomocí iteračního procesu z fuzzy shlukování hledáme minimum $\mathrm{fJ_q(fU,fv)}$ nad $\boldsymbol{FO}(\mathrm{M_{fc}})\times(\boldsymbol{FO}(\mathbf{R}^{cm}))^c$. Definujeme: $\mathrm{fU} = (\mathrm{f}u_{ij})$, $\mathrm{f}u_{ij} = (\langle 0,1\rangle, \mu^{fu}_{ij})$, kde pro $z > 0$ je

$$\mu^{fu}_{ij}(\mathrm{z}) = \sup_{z=g(O_1,O_2,\ldots,O_n,v_i)} \min\{\mu^x_{jk}(x_{jk}), \mu^v_{ik}(v_{ik}), i=1,\ldots,c; j=1,\ldots,n; k=1,\ldots,m\};$$

$$g(O_1, O_2,\ldots, O_n, v_i) = 1\Bigg/\left[\sum_{k=1}^{c}\left(\frac{d_{ij}}{d_{kj}}\right)^{2/(q-1)}\right],$$ kde $d_{ij} = \mathbf{d}(O_j, v_i) > 0$ a pro $z = 0$ je

$$\mu^{fu}_{ij}(0) = \sup_{\substack{O_1,O_2,\ldots,O_n,v_i\\ 0=d(O_j,v_i)}} \min\{\mu^x_{jk}(x_{jk}), \mu^v_{ik}(v_{ik}), i=1,\ldots,c; j=1,\ldots,n; k=1,\ldots,m\};$$

Dále definujme $\mathrm{fv} = (\mathrm{fv}_1,\ldots, \mathrm{fv}_c)$, $\mathrm{fv}_i = (fv_{i1},\ldots, fv_{im})$, $fv_{ik} = (\mathbf{R}, \mu^v_{ik})$, kde

$$\mu^v_{ik}(\mathrm{z}) = \sup_{z=h(x_{k1},x_{2k},\ldots,x_{nk},u_i)} \min\{\mu^x_{jk}(x_{jk}), \mu^u_{ij}(u_{ij}), j=1,\ldots,n\}\ i=1,\ldots,c;\ k=1,\ldots,m$$ a

$$h(x_{1k},\ldots, x_{nk}, u_i) = \sum_{j=1}^{n}(u_{ij})^q x_{jk} \Bigg/ \sum_{j=1}^{n}(u_{ij})^q,$$ u_i = i-tý řádek matice $\mathrm{U}\in\mathrm{M_{fc}}$.

Algoritmus

Označení: t-tá iterace: $\mathrm{fU}^t = (fu_{ij}^t)$, $fu_{ij}^t = (\langle 0,1\rangle, \mu^{fu\ t}_{ij})$.

1) Zvolíme c, $1< c < n$, fuzzy nepodobnost objektů **fd**, váhu $q\in(1,\infty)$, $\varepsilon > 0$ a počáteční rozdělení $\mathrm{fU}^0\in \boldsymbol{F}(\mathrm{M_{fc}})$. Položíme t=0.

2) Vypočteme fuzzy těžiště shluků: $\mathrm{fv}^{t+1} = (\mathrm{fv}_1^{t+1},\ldots, \mathrm{fv}_c^{t+1})$ podle výše uvedených vztahů.

3) Vypočteme fU^{t+1} podle výše uvedených vztahů.

4) Porovnáme fU^t a fU^{t+1}. Jestliže $|fU^{t+1} - fU^t| < \varepsilon \rightarrow$ konec, jinak $t = t+1 \rightarrow$ krok 2), kde $|fU^{t+1} - fU^t|$ představuje vzdálenost mezi maticemi $\in \boldsymbol{F}(M_{fc})$. Tuto vzdálenost lze například definovat vztahem

$$|fU^{t+1} - fU^t| = \max_{\substack{i=1,\dots,c\\ j=1,\dots,n}} \left| \mathrm{defuz}(fu_{ij}^{\,t+1}) - \mathrm{defuz}(fu_{ij}^{\,t}) \right|,$$

kde $fU^s = (fu_{ij}^{\,s})$ a $\mathrm{defuz}(fu_{ij}^{\,s})$ je defuzikační hodnota fuzzy množiny $fu_{ij}^{\,s} = (\langle 0,1\rangle, \mu^{fu}{}_{ij}^{\,s})$, $s=t, t+1$.

Algoritmus generuje posloupnost: $\{(fU^0, fv^0), (fU^1, fv^1), \dots, (fU^t, fv^t), \dots\}$

Věta 5.18

Nechť (fU^t, fv^t) splňuje podmínky pro fuzzy c-rozklad fuzzy objektů. Pak fU^{t+1} definované předcházejícím algoritmem také splňuje pravidla pro fuzzy c-rozklad fuzzy objektů:

a) $\mathbf{0} \leq fu_{ij}^{\,t+1} \leq \mathbf{1}$,

b) $\mathbf{1} \subseteq \sum_{i=1}^{c} fu_{ij}^{\,t+1}$,

c) $\mathbf{0} < \sum_{j=1}^{n} fu_{ij}^{\,t+1} < \mathbf{n}$,

kde $\mathbf{0}=\{(0, 1)\}$, $\mathbf{1}=\{(1, 1)\}$, $\mathbf{n}=\{(n, 1)\}$ jsou jednoprvkové fuzzy množiny a $<$, $\leq$ je částečné uspořádání na množině fuzzy množin $\boldsymbol{F}(\mathbf{R})$.

S využitím algoritmu fuzzy shlukování dostaneme rozklad fuzzy objektů do shluků, kde příslušnost fuzzy objektu do shluku bude popsána pomocí fuzzy množiny nad univerzem $\langle 0, 1\rangle$.

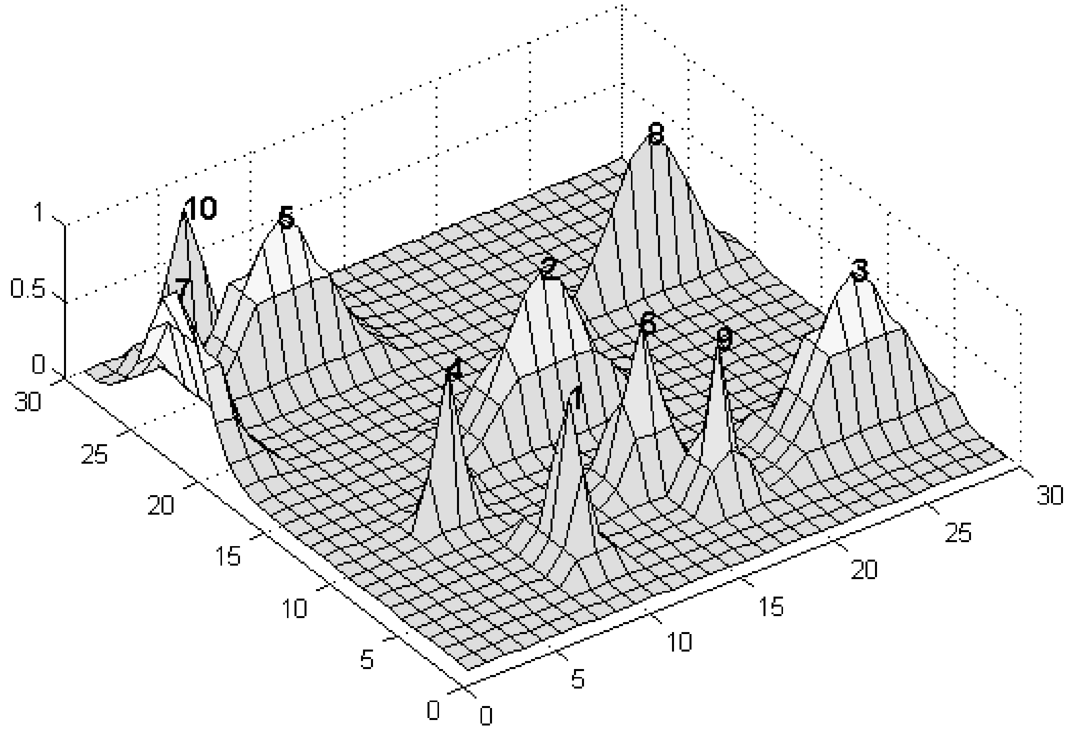
5.6 PŘÍKLAD FUZZY SHLUKOVÁNÍ PRO FUZZY OBJEKTY

Zvolme $n = 10$, $m = 2$. Nechť fuzzy objekty jsou ve tvaru $fO = (C_x, C_y, S_x, S_y)$ a každá složka objektu má funkci příslušnosti ve tvaru :

$$\mu^x{}_1(x) = e^{\frac{-(x-C_x)^2}{2S_x}}, \quad \mu^x{}_2(y) = e^{\frac{-(y-C_y)^2}{2S_y}}.$$

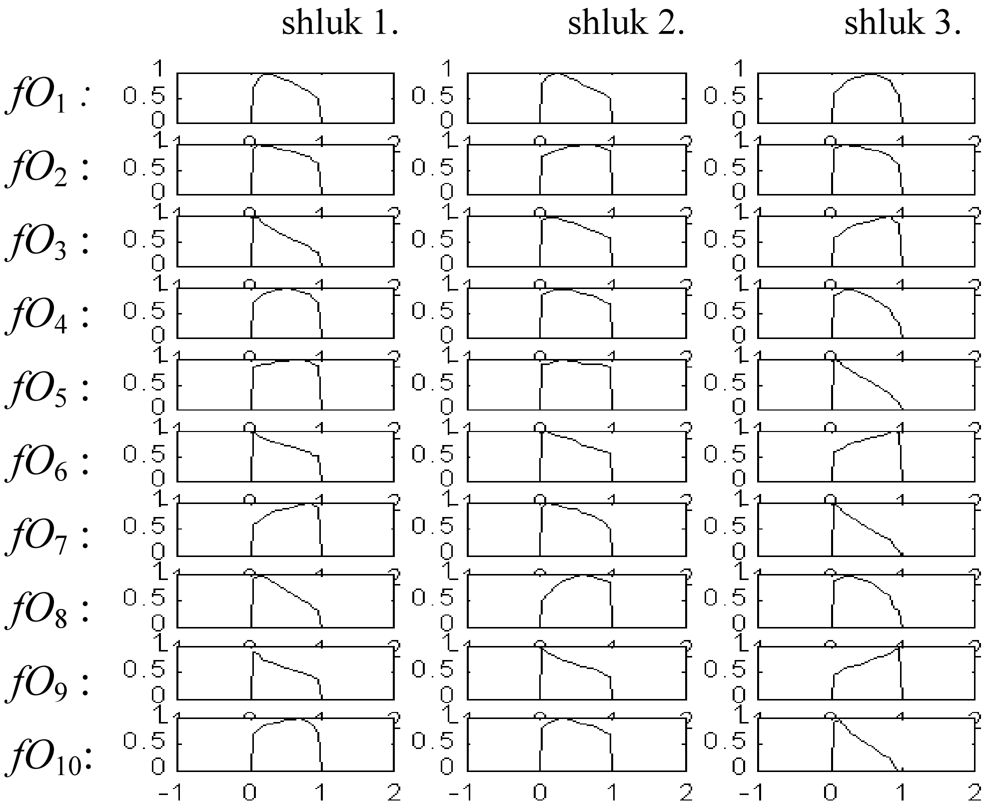
fO_1=(10, 6, 0.5, 1), fO_2=(15, 15, 2, 0.8), fO_3=(26, 7, 2, 1), fO_4=(7, 11, 0.7,0.4), fO_5=(8, 25, 2,1), fO_6=(16 ,9, 0.9, 0.7), fO_7=(1, 23, 1, 2), fO_8=(25, 21, 2, 0.4), fO_9=(18 ,6, 0.6, 0.7), fO_{10}=(5, 28, 1, 0.5).

Fuzzy objekty lze opět zobrazit v $\mathbf{R}^3$ (obrázek 5.2.).



Obr. 5.2

Po 3. iteračních krocích jsou příslušnosti fuzzy objektů do shluků ve tvaru (obr. 5.3).



Obr. 5.3

6 ZÁVĚR

Závěrem si dovoluji ještě jednou shrnout hlavní výsledky své práce. Pokusil jsem se rozšířit možnosti, které pro řešení problému třídění množin objektů poskytuje teorie fuzzy množin a teorie shlukování. Zavedením pojmu **fuzzy objekt** a rozšířením klasických shlukovacích metod se otvírá možnost pro zpracování dat z oblastí, v nichž je velmi obtížné, případně zcela nemožné, objekty kvantifikovat. Typickými představiteli takových vědních disciplin jsou například sociální nebo lékařské vědy, které ve velké míře pracují s intuitivně nebo subjektivně chápanými pojmy. Jinou oblastí, ve které se využití takto rozšířených shlukovacích metod jeví jako výhodné, můžu být i některé ryze technické oblasti. V nich by bylo možné zjednodušit případný obsáhlý a komplikovaný popis vágnějším popisem.

Na základě tvrzení a příkladů prezentovaných v mé práci, lze říci, že popis vágnosti pomocí fuzzy množin, definování fuzzy objektů a shlukování nad takto definovanými objekty, je jedním z možných řešení problémů z výše zmíněných oblastí.

Na tomto místě bych se rád zmínil o možnostech dalšího rozvoje. První z nich je změna nebo zobecnění popisu objektu, hlavně jeho „vágních“ hodnot. U objektů popsaných fuzzy množinami můžeme vypustit předpoklad konvexnosti a normálnosti těchto fuzzy množin, případně lze použít i jiný způsob popisu „vágnosti“ než pomocí fuzzy množin.. Druhou možností je jiný způsob definování podobnosti a nepodobnosti „vágních“ objektů, než jak je uvedeno v této práci. Jedná se například o využití defuzikace buď přímo na fuzzy objekty nebo na fuzzy nepodobnost.

Jinou možností zobecnění shlukování je učinit „vágnějším“ výsledný počet shluků, například ve tvaru fuzzy čísla. Tento přístup lépe modeluje reálnou situaci, kdy se člověk „intuitivně“ rozhodne, že výsledkem shlukování nebude jen jedno konkrétní rozdělení množiny objektů, ale připustí i jiné možnosti s různou váhou.

Další zajímavou cestou, jak zobecnit shlukovací metody, je zavedení parametru do shlukování, a tedy změna shluků na základě tohoto parametru, například v závislosti na čase. Jednalo by se o dynamické shlukování. Způsobů, jak zavést do shlukování parametr, je více, lze například učinit na parametru závislými hodnoty objektů nebo nepodobnost.

7 LITERATURA

[1] ANDERBERG, M. R. *Cluster Analysis for Applications*. Academic Press, New York 1973.

[2] BALL G. H., HALL, D. J. *ISODATA, A Novel Method of Data Analysis and Pattern Classification.* Menlo Park, Stanford Res. Ints. 1965.

[3] BANDEMER, H., NATHER, V. *Fuzzy Data Analysis.* Kluwer, Boston 1992.

[4] BEZDEK, J. C. *Fuzzy Mathematics in Pattern Classification*. *PhD Thesis*, Applied Math. Center, Cornell University, Ithaca 1973.

[5] BEZDEK, J. C. *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Alghorithms*. Plenium Press, New York 1981.

[6] DIDAY, E – SIMON, J.C. *Clustering Analysis.* In FU K. S. *Digital Pattern Recognition.* Springer-Verlag, New York 1980, pp. 47-92.

[7] DUBOIS, D.- PRADE, H. *Fuzzy Sets and Systems*. *Theory and Application.* Academic Press, New York 1980.

[8] FUKUNAGA, K. *Introduction to Statistical Pattern Recognition.* Academic Press, New York 1972.

[9] HARTIGAN, J. *Clustering Algorithms.* Wilwy, New York 1975.

[10] KAUFMANN, A. *Intruduction to the Theory of Fuzzy Subsets.* Academic Press, New York 1975.

[11] KLIR, G. J., YUAN B.: *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Theory and Applications*. Prentice Hall PTR, New Jersey 1995.

[12] LI, B. W. *Weighted and Graded Fuzzy Clustering.* In *Fuzzy Sets and Systems.* 36(1), 1990, pp 37-43.

[13] LUKASOVÁ, A.- ŠARMANOVÁ, J. *Metody shlukové analýzy*, SNTL, Praha 1985.

[14] MOORE, R. E. *Interval Analysis*. Prentice-Hall 1966.

[15] NOVÁK, V. *Fuzzy množiny a jejich aplikace*. SNTL, Praha 1986.

[16] PAO, Y. *Adaptive Pattern Pecognition and Neutral Networks.* Addison-Wesley, Reading, Mass 1989.

[17] ROBERTS, F. S. *Discrete Mathematical Models.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1972.

[18] SPÄTH, H. *Cluster Dissection and Analysis*. Ellis Horwood 1985.

[19] WANG, L. X., WANG, C., WU, G. Y. *Bi-criteria Fuzzy c-means Analysis.* In *Fuzzy sets and Systems.* 64(3), 1994, pp 311-319.

[20] WANG, Z., KLIR G. J. *Fuzzy Measure Theory.* Plenum Press, New York 1992.

[21] ZADEH, L. A. *Fuzzy Sets and Their Application to Pattern Classification and Cluster Analysis.* In Classification and Clustering . Academic Press, New York 1977

[22] ZIMMERMANN, H. J *Fuzzy Sets Theory and Its Applications*. Kluwer Academic Publishers, 1985.

8 CLUSTERING OF VAGUELY DEFINED OBJECTS

My thesis is concerned with the clustering of objects whose properties cannot be described by exact data. These can only be described by fuzzy sets or by linguistic values of previously defined linguistic variables. To cluster these objects we use a generalization of classic clustering methods in which instead fuzzy similarity (fuzzy dissimilarity) of objects, rather than similarity or dissimilarity, is used to define the clustering of fuzzy objects.

In the paper, terms from two fields of mathematics are employed: the theory of fuzzy sets with the notions of convex and normal fuzzy sets, partial ordering of fuzzy sets and extension principle and methods and algorithms of clustering.

Base Notions of Classical Clustering

Clustering methods are defined on the basis of dissimilarity of objects and dissimilarity of clusters. These methods are divided into two basic groups: **hierarchical clustering methods** and **non-hierarchical clustering methods**. More precissions follow below.

Let us have n objects, each object characterised by m parameters:

$\boldsymbol{O} = \{O_1,..., O_n\}$, h-th object $O_h = (x_{h1},..., x_{hm})$, where $x_{hj} \in \mathbf{R}$ for $h \in \{1,..., n\}$. It is possible to define basic matrix of data: $\boldsymbol{X} = (x_{ij})_{n,m}$, where $x_{ij} \in \mathbf{R}$ and h-th raw is equal to h-th object O_h. Objects can be displayed as points in space $\mathbf{R}^m$.

There is often used a **dissimilarity measure** of objects instead of a similarity in clustering methods. The dissimilarity of objects is indicated $\mathbf{d}$: $\boldsymbol{O} \times \boldsymbol{O} \rightarrow \mathbf{R}^+$ and it must satisfy:

$$\mathbf{d}(O_h, O_s) = 0 \Leftrightarrow O_h = O_s,$$

$$\mathbf{d}(O_h, O_s) \geq 0,$$

$$\mathbf{d}(O_h, O_s) = \mathbf{d}(O_s, O_h).$$

$\mathbf{d}$ is often equal to any metric on $\mathbf{R}^m$ in real situations.

We try to divide objects into clusters. We call **cluster** such subset A of set $\boldsymbol{O}$, that satisfies

$$\max_{O_i, O_j \in A} \mathbf{d}(O_i, O_j) < \min_{O_k \in A, O_l \notin A} \mathbf{d}(O_k, O_l)$$

Let us assume we want to divide set of objects $\boldsymbol{O}$ to c clusters, where $1 < c < n$. The set of clusters we indicate $\mathbf{S} = \{S_1,..., S_c\} \subseteq \boldsymbol{P}(\boldsymbol{O})$, $S_i \subseteq \boldsymbol{O}$ and satisfies:

$$\bigcup_{k=1}^{c} S_k = \boldsymbol{O},\ S_i \cap S_j = \emptyset \text{ for } i \neq j \text{ and } \emptyset \subset S_i \subset \boldsymbol{O}\ \forall \mathrm{i} = 1,..., c.$$

This can be written in dual representation, too:

Let us define matrix $\mathrm{U} = (u_{ij})_{c,n}$, where $u_{ij} = u_i(O_j) = 1$, if $O_j \in S_i$

and $u_{ij} = u_i(O_j) = 0$, if $O_j \notin S_i$.

Then we demand $\sum_{i=1}^{c} u_{ij} = 1$ and $0 < \sum_{j=1}^{n} u_{ij} < n$.

Let us indicate M_c the set of all *c*-analysis, satisfying following rules:

$$M_c = \{U \in V_{cn},\ u_{ij} \in \{0,1\}\ \forall i,j;\ \sum_{i=1}^{c} u_{ij} = 1\ \forall j;\ 0 < \sum_{j=1}^{n} u_{ij} < n\ \forall i\ \},$$

where V_{cn} is a vector space of dimension *cn*.

The **dissimilarity of clusters D** can be defined on the base of dissimilarity of objects **d**. Let us have clusters A=$\{A_1,..., A_k\}$, B=$\{B_1,..., B_t\}$, where $A_i \in \boldsymbol{O}\ \forall i=1,...,k$, and $B_j \in \boldsymbol{O}\ \forall j=1,..., t$. **D** must satisfy following conditions:

$$\mathbf{D}(A, A) = 0,$$
$$\mathbf{D}(A, B) \geq 0,$$
$$\mathbf{D}(A, B) = \mathbf{D}(B, A).$$

Most often used method to define the dissimilarity of clusters is the **nearest neighbour method**: $\mathbf{D}(A, B) = \min_{A_i \in A,\, B_j \in B} \{\mathbf{d}(A_i, B_j)\}$

Clustering methods are defined on the base of dissimilarity of objects and dissimilarity of clusters. Our attention trains upon non-hierarchical optimization method and its´ generalization fuzzy non-hierarchical optimization method defined by J. C. Bezdek [5]. For more details about the methods of clustering, see [1, 2, 6, 8, 9, 13, 16, 18, 21] and fuzzy clustering see [3, 4, 5, 12, 19].

The insufficiency of classical clustering

Objects clustered by of classical clustering methods are described by means of signs. Signs of objects can be of three fundamental types: quantitative, qualitative and binary. An object may also contain a combination of these types.

In practice, we often meet with objects that cannot be described by the above-mentioned types of signs. Such an object contains signs with values that cannot be defined precisely (i.e. there exists a sign of the object that may assume several values at the same time or, for a given sign, there exists "uncertainty" in representing the values of this sign). Then, the classical clustering cannot be applied directly to such types of objects. It is useful to include these objects in the clustering process, too. We use **fuzzy sets** to describe the "uncertainty". Objects defined this way are called **fuzzy objects**.

The aim of thesis

My aim is to set up a clustering algorithm that approximates human activities in the maximum possible way. This means that the clustering of objects is described by **fuzzy sets** - fuzzy objects. In this case, generalized standard clustering methods are used. Fuzzy similarity is introduced, rather than dissimilarity, and, using this notion, the clustering of the above fuzzy objects is defined.

Fuzzy objects

Definition of fuzzy objects

Let U_j, j=1,..., m be universal sets and let $fx_j = (U_j, \mu^x_j)$, j=1,..., m be **normal** and **convex** fuzzy sets over universal sets U_j. The values of the membership function μ^x_j are in the lattice $L=(\langle 0, 1\rangle, \min, \max, 0, 1)$. We call the m-tuple $fO = (fx_1, fx_2,..., fx_m)$ a **fuzzy object** over universal sets $U_1, U_2,..., U_m$ and we call $fx_j = (U_j, \mu^x_j)$ the j-th sign of fuzzy object fO. We denote the class of all fuzzy objects over universal sets $U_1, U_2,..., U_m$ by $\boldsymbol{FO}(U_1, U_2,..., U_m)$.

We shall denote the set of n fuzzy objects by: $\boldsymbol{fO} = (fO_1, fO_2, \ldots, fO_n)$ and the h-th fuzzy object is defined as: $fO_h = (fx_{h1}, fx_{h2}, \ldots, fx_{hm})$ where $fx_{hk} = (U_k, \mu^x_{hk})$ $h=1,\ldots,n$, $k=1,\ldots,m$ are **normal** and **convex** fuzzy sets**.**

Definition of the dissimilarity of fuzzy objects

Let $fO_h = (fx_{h1},..., fx_{hm})$ and $fO_s = (fx_{s1},..., fx_{sm})$ be fuzzy objects. We shall call the mapping **fd**: $\boldsymbol{FO}(U_1,U_2,...,U_m)\times\boldsymbol{FO}(U_1,U_2,...,U_m) \rightarrow \boldsymbol{F}(\mathbf{R})$ that satisfies

$$\mathbf{0} \subseteq \mathbf{fd}(fO_h, fO_h),$$
$$\mathbf{fd}(fO_h, fO_s) \geq \mathbf{0},$$
$$\mathbf{fd}(fO_h, fO_s) = \mathbf{fd}(fO_s, fO_h),$$

where $\mathbf{0}=\{(0, 1)\}$ and $\leq$ is a partial ordering on the set of fuzzy sets $\boldsymbol{F}(\mathbf{R})$ a **fuzzy dissimilarity** of the fuzzy objects. $\mathbf{fd}(fO_h, fO_s) = (\mathbf{R}, \mu^{\mathrm{fd}}_{h,s})$ is a fuzzy set over the universal set **R**.

Definition of the dissimilarity of clusters of fuzzy objects

Let us have clusters A = $\{A_1,..., A_k\}$, B = $\{B_1,..., B_t\}$, where A_i a B_j are fuzzy objects for i=1,..., k a j=1,..., t. **Fuzzy dissimilarity of clusters fD** must satisfy these conditions:

$$\mathbf{0} \subseteq \mathbf{fD}(A, A),$$
$$\mathbf{fD}(A, B) \geq \mathbf{0},$$
$$\mathbf{fD}(A, B) = \mathbf{fD}(B, A),$$

where $\mathbf{0}=\{(0, 1)\}$ and $\leq$ is a partial ordering on the set of fuzzy sets $\boldsymbol{F}(\mathbf{R})$.

There are more ways of defining the dissimilarity of fuzzy objects.

Definition of dissimilarity of fuzzy objects by fuzzy regulator

Using the fuzzy regulator we define the dissimilarity of fuzzy objects. We call this fuzzy regulator **fuzzy similarity regulator.** We mean regulator of type P: u = R(e), where the value of output depends only on value of input.

Let fO_h , fO_s be fuzzy objects. We define fuzzy similarity regulator in form:
Input variables are in form: $(\boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{Z}_2,..., \boldsymbol{Z}_m, \boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{Z}_2,..., \boldsymbol{Z}_m)$, where $\boldsymbol{Z}_j = (Z_j, \boldsymbol{T}(Z_j), U_j, G_j, M_j)$, j=1,...,m are inputs.

Output variable is in form: $\boldsymbol{V}$ = (V, $\boldsymbol{T}$(V), U, G, M), where $\boldsymbol{T}$(V) = $\{v_1, v_2\}$ v_1 is **dissimilar**, v_2-**similarity**, $V_1 = M(v_1)$, $V_2 = M(v_2)$ and these two linguistic values satisfy: $V_1 < V_2$, where < is partial ordering on the class of all fuzzy sets on V.
We define the rules of two types for such a fuzzy regulator.
$\Re_k^{a}$ = **if** z_{hj} **is** $Z_{U_j,k}$ **and** z_{sj}**is** $Z_{U_j,k}$ **then** $v = v_2$; $\forall Z_{U_j,k} \in \boldsymbol{T}(Z_j)$, $\forall j \in 1,...,m$;
where z_{hj}, $z_{sj} \in U_j$ and $v \in U$.
$\Re_{k'}^{b}$ = **if** z_{hj} **is** $Z'_{U_j,k'}$ **and** z_{sj} **is** $Z''_{U_j,k'}$**then** $v = v_1$; $\forall Z'_{U_j,k'}, Z''_{U_j,k'} \in \boldsymbol{T}(Z_j)$, $Z'_{U_j,k'} \neq Z''_{U_j,k'}$
$\forall j \in 1,...,m$, where z_{hj}, $z_{sj} \in U_j$ and $v \in U$.
Such defined regulator is called **fuzzy similarity regulator** and we sign it FPR. The input into regulator will be a couple of fuzzy objects: $(fO_h, fO_s) = (fx_{h1},..., fx_{hm}, fx_{s1},..., fx_{sm})$ and let FPR (fO_h, fO_s) be reaction FPR on input (fO_h, fO_s).

Definition
Let $U \subseteq \mathbf{R}^{+}_{0}$. Then let us define fuzzy dissimilarity of fuzzy objects in form:
$\mathbf{fd}(fO_h, fO_s) = \mathbf{1} - \mathrm{FPR}(fO_h, fO_s)$, where $\mathbf{1} = \{(1,1)\}$.

Theorem
The dissimilarity of fuzzy objects $\mathbf{fd}(fO_h, fO_s) = \mathbf{1} - \mathrm{FPR}(fO_h, fO_s)$ satisfies the rules for fuzzy dissimilarity in form:
1) $\mu^{fd}_{h,h}(0) = \mathrm{Hgt}(\mathbf{fd}(fO_h, fO_h))$,
2) $\mathbf{fd}(fO_h, fO_s) \geq \mathbf{0}$,
3) $\mathbf{fd}(fO_h, fO_s) = \mathbf{fd}(fO_s, fO_h)$,
where $\mathbf{0} = \{(0, 1)\}$ and $\leq$ is a partial ordering on the set of fuzzy sets $\boldsymbol{F}(\mathbf{R})$.

Definition of dissimilarity of fuzzy objects by extension principle

Definition
Let $fO_h = (fx_{h1},..., fx_{hm})$, $fO_s = (fx_{s1},..., fx_{sm})$ be fuzzy objects. Then we define the **fuzzy dissimilarity fd**: $\boldsymbol{FO}(U_1,U_2,...,U_m) \times \boldsymbol{FO}(U_1,U_2,...,U_m) \to \boldsymbol{F}(\mathbf{R})$ of fuzzy objects fO_h, fO_s by the relation: $\mathbf{fd}(fO_h, fO_s) = (\mathbf{R}, \mu^{fd}_{h,s})$ where

$$\mu^{fd}_{h,s}(z) = \sup_{z = d(O_h, O_s)} \{\min\{\mu^{x}_{h1}(x_{h1}),..., \mu^{x}_{hm}(x_{hm}), \mu^{x}_{s1}(x_{s1}),..., \mu^{x}_{sm}(x_{sm})\}\},$$
$$= 0 \quad \text{otherwise},$$

$\forall h,s = 1,2,..., n$ and $\mathbf{d}(O_h, O_s)$, $O_h = (x_{h1},..., x_{hm})$, $O_s = (x_{s1},..., x_{sm})$ is a dissimilarity of classical objects.

Theorem
Let **d** be dissimilarity of classical objects. Then **fd** satisfies conditions of dissimilarity of fuzzy objects in form:
1) $\mathbf{0} \subseteq \mathbf{fd}(fO_h, fO_h)$,

2) $\mathbf{fd}(fO_h, fO_s) \geq \mathbf{0}$,
3) $\mathbf{fd}(fO_h, fO_s) = \mathbf{fd}(fO_s, fO_h)$.

Definition of dissimilarity using the search of items in fuzzy database

Searching in fuzzy database, items of this database and demand can be considered fuzzy objects. Scanning fuzzy database we compare demand with items and select such of them, that matches demand as much as possible. This match can be defined different ways.

Let us indicate D=(d_1,..., d_m) the demand and P=(p_1,..., p_m) any item of database, S(P, D) the match of demand D and item P. Then S(P, D) can be defined for instance S(P, D) = $\min_{i=1,\dots,m} (V_i . w_i)$, where V_i is the result of comparing i-th sign of demand D and i-th sign of item P: $V_i(P, D) = \mathrm{Hgt}(d_i \cap p_i)$ and $w_i \in \langle 0, 1\rangle$ is the weight of sign i. S(P,D) means similarity of a demand and an item. Because the demand and the item are interpreted like fuzzy objects, S(P,D) defines the similarity of fuzzy objects. Then this way defined similarity can be considered the fuzzy similarity of fuzzy objects.

Definition

Let P, D be fuzzy objects. Then we define dissimilarity of fuzzy objects P and D in form: **fd**(P, D)=1−S(P, D).

Theorem

The dissimilarity of fuzzy objects **fd**(P, D) = 1 − S(P, D) satisfies conditions of dissimilarity of fuzzy objects in form:
1) **fd**(P, P) = 0,
2) **fd**(P, D) ≥ 0,
3) **fd**(P, D) = **fd**(D, P).

Clustering of fuzzy objects

With the dissimilarity of fuzzy objects and clusters defined, we can now proceed to methods that divide the set of fuzzy objects ***fO*** into clusters. For classical objects, there is a large number of such methods. For fuzzy objects, we shall focus on two major types: **hierarchical** and **non-hierarchical** methods. These types of methods are based on the dissimilarity of objects and dissimilarity of clusters. For fuzzy objects, the algorithm of these methods remains the same but we use fuzzy dissimilarity of fuzzy objects, rather than dissimilarity of objects, and fuzzy dissimilarity of clusters, rather than dissimilarity of clusters. In addition to this, in classical clustering methods, the dissimilarities are compared and, on the basis of this comparison, the least dissimilarities are selected. For fuzzy objects, the dissimilarities are fuzzy sets above the universal set $\mathbf{R}^{+}_{0}$ and thus we must use the comparison of fuzzy sets to compare dissimilarities. The result of clustering of fuzzy objects will be of a form similar to the clustering of classical objects where the membership in a cluster of a fuzzy objects is an element of the set {0, 1}.

Generalization of fuzzy clustering for fuzzy objects

Definition

Let us have n fuzzy objects $\boldsymbol{fO} = \{fO_1,..., fO_n\}$, h-th object $fO_h = (fx_{h1},..., fx_{hm})$, where $fx_{hk} = (\mathbf{R}, \mu^{x}_{h,j})$ is a normal and convex fuzzy set for all $h = 1,2,..., n$ and $k = 1,2,...,m$. Instead of matrix of fuzzy-c-partitions ($U\in M_{fc}$ for classical objects) we define matrix of **fuzzy *c*-partitions for fuzzy objects** in form: $fU = (fu_{ij})_{c,n}$, where fu_{ij} is a convex and normal fuzzy set describing the membership of object fO_j into cluster S_i. $fu_{ij} = (\langle 0,1\rangle, \mu^{fu}_{ij})$ $\forall i=1,2,...,c$, $j=1,2,..., n$. We indicate $\boldsymbol{FO}(M_{fc})$ set of all **fuzzy-*c*-partitions of fuzzy objects**. Then we require validity $\forall i=1,2,...,c$, $\forall j=1,2,..., n$:

$$\mathbf{0} \le fu_{ij} \le \mathbf{1},$$

$$\mathbf{1} \subseteq \sum_{i=1}^{c} fu_{ij}\,,$$

$$\mathbf{0} < \sum_{j=1}^{n} fu_{ij} < \mathbf{n},$$

where $\mathbf{0} = \{(0, 1)\}$, $\mathbf{1} = \{(1, 1)\}$, $\mathbf{n} = \{(n, 1)\}$ and $\le$, $<$ are comparisons of fuzzy sets.

Let us indicate $(\boldsymbol{FO}(\mathbf{R}^{m}))^{c}$ set of all c-tuples $fv = (fv_1,..., fv_c)$, $fv_i = (fv_{i1},..., fv_{im})$, $fv_{ik} = (R, \mu^{v}_{ik})$ is then fuzzy centroid of cluster S_i.
We define function fJ_q: $\boldsymbol{FO}(M_{fc}) \times (\boldsymbol{FO}(\mathbf{R}^{m}))^{c} \rightarrow \boldsymbol{F}(\mathbf{R})$ in form:
$fJ_q\,(fU,fv) = (\mathbf{R}, \mu^{fJ})$, where

$$\mu^{fJ}(z) = \sup_{z=J_q(U,v)} \min\,\{\mu^{x}_{jk}(x_{jk}),\ \mu^{u}_{ij}(u_{ij}),\ \mu^{v}_{ik}(v_{ik}),\ i=1,...,c;\, j=1,...,n;\ k=1,...,m\,\};$$

where $J_q(U,v) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{c} u_{ij}^{q}(d_{ij})^{2}$ and $U=(u_{ij})\in M_{fc}$, $d_{ij} = \mathbf{d}(O_i, v_j)$ is any inner product induced dissimilarity of object O_i and the centroid of clusters S_j ($d_{ij} = \mathbf{d}(O_i, v_j) = \langle O_j - v_i, O_j - v_i \rangle$) and q is the weight parameter: $q\in (1, \infty)$.

We seek the minimum $fJ_q(fU,fv)$ above $\boldsymbol{FO}(M_{fc})\times(\boldsymbol{FO}(\mathbf{R}^{m}))^{c}$. We search this minimum using iterative method.

Using the algorithm of fuzzy clustering, we get, an analysis of fuzzy objects into clusters, where the membership of fuzzy object into cluster will be described by means of fuzzy set above universal set $\langle 0,1\rangle$.

9 CURRICULUM VITAE

Osobní data

Jméno: Libor Žák
Datum narození: 4. června 1964
Adresa: 620 00 Malínská 5, Brno
Stav: ženatý

Vzdělání a kvalifikace

1988 Rigorózní zkouška (RNDr)
1983 - 1988 Studium matematiky na PřF UJEP v Brně
1979 - 1983 Střední průmyslová škola elektrotechnická, Brno
Jsem držitelem řidičského průkazu od roku 1982.

Praxe

1999 do dneška	Akademický pracovník - asistent ÚM FSI VUT Výuka matematiky, fuzzy množin a shlukové analýzy
1994 – 1999	Pedagogickovědecký pracovník ÚM FS VUT Výuka základních částí matematiky
1991 – 1994	Odborný pracovník ÚM FS VUT Správa počítačových učeben, tvorba programů pro výuku
1988 – 1991	Výzkumný pracovník VÚCHZ Brno Výzkum optimálního výběru z fuzzy seznamu Studium jazyka umělé inteligence: PROLOG

Zájmy a aktivity

Malé gumou poháněné modely letadel, paragliding.

10 PUBLIKACE

[1] ŽÁK, L. Popis výukových numerických programů. Sborník *Aplikovaný software 93*, České Budějovice, 1993, pp 177-182, ISBN 80-85645-106-8.
[2] ŽÁK, L. Fuzzy shlukování. Sborník *Fuzzy logika - od metodiky k aplikacím*, Hrubá Skála, 1998, pp 81-87, ISBN 80-238-4743-0.
[3] ŽÁK, L. Clustering of Fuzzy Objects 1. Sborník *Mendel 1999*, 5th International Conference on Soft Computing. Brno, 1999, pp 310–317, ISBN 80-214-1131-7.

[4] ŽÁK, L. Shlukování fuzzy objektů. Sborník *Fuzzy logika – fuzzy logika, neuronové sítě a expertní systémy*, Hrubá Skála, 1999, pp 51 – 58, ISBN 80-238-4743-0.
[5] ŽÁK, L. Clustering of Fuzzy Objects 2. Sborník *Mendel 2000*, 6th International Conference on Soft Computing. Brno, 2000, pp 303–308, ISBN 80-214-1609-2.
[6] ŽÁK, L. Fuzzy Objects and Fuzzy Clustering. Sborník 8th *Zittau Fuzzy Colloquium*, Zittau, 2000, pp 293 – 302, ISBN 3-00-006723-X.
[7] ŽÁK, L. Zobecnění fuzzy shlukováni pro fuzzy objekty. Sbornik, *Inteligentní systémy pro praxi*, Luhačovice, 2000, pp 59 - 68, ISBN 80-238-6140-9.
[8] ŽÁK, L. Shlukování fuzzy objektů. Sbornik, *Pedagogicko- vědecká konference* VUT FSI, Brno, 2000, pp 369-372, ISBN 80-214-1764-1.
[9] Muhammad Riaz Khan, Libor Žák and Čestmír Ondrůšek, Fuzzy Logic Based Short-Term Electric Load Forecasting, *ELEKTRO 2001*, 4th International Scientific Conference, Žilina, 2001, pp 19-25, ISBN 80-7100-836-2.
[10] ŽÁK, L. Vaguely Defined Objects and Fuzzy Clustering. Sborník *Mendel 2001*, 7th International Conference on Soft Computing. Brno, 2001,pp 311 – 318, ISBN 80-214-1894-X.
[11] Muhammad Riaz Khan, Libor Žák and Čestmír Ondrůšek, Implementation of Hybrid-Fuzzy Neural Network Approach for Short Term Hourly and Peak Load Forecasting Using Weather Parameters. Sborník *Mendel 2001*, 7th International Conference on Soft Comp. Brno, 2001, pp 282 – 287, ISBN 80-214-1894-X.
[12] ŽÁK, L., Muhammad Riaz Khan, Predpověď spotřeby elektrické energie s využitím fuzzy regulátoru. Acta Mechanica Slovaca 3/2001, pp 513-522, ISSN 1335-2393
[13] ŽÁK, L Generalization of Fuzzy Clustering for Vaguely Defined Objects, *9th Zittau Fuzzy Colloquium*, Zittau, 2001, pp 268-277, ISBN 3-9808089-0-4.
[14] Muhammad Riaz Khan, Libor Žák and Čestmír Ondrůšek, FUZZY-NEURAL NETWORK BASED SHORT-TERM SEASONAL AND AVERAGE LOAD FORECASTING, *4th International Conference on Prediction and Nonlinear Dynamics, Nostradamus Prediction Conference*, Zlín, 2001, Abstract - pp 13, ISBN 80-7318-030-8.
[15] ŽÁK, L, Some Methods of Clustering of Fuzzy Objects, *6th Online World Conference on Soft Computing in Industrial Applications on the Internet*, říjen 2001, http://kolmogorov.ipk.fhg.de/wsc6/sessions/index.php3, paper038.
[16] ŽÁK, L, Odhad vlivu počasí na odběr elektrické energie pomocí fuzzy regulátoru, Inteligentní systémy pro praxi, Luhačovice, 2001, pp 81-88, ISBN 80-238-7812-3.
[17] Muhammad Riaz Khan, Libor Žák and Čestmír Ondrůšek, FORECASTING WEEKLY ELECTRIC LOAD USING A HYBRID FUZZY-NEURAL NETWORK APPROACH, Inženýrská mechanika, 5/2001, pp 327-337, ISSN 1210-2717