

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta strojního inženýrství

Doc. RNDr. Michal Kotoul, DrSc.

**METODA SPOJITĚ ROZLOŽENÝCH DISLOKACÍ
V LOMOVÉ MECHANICE KŘEHKÝCH
HETEROGENNÍCH MATERIÁLŮ**

**THE DISTRIBUTED DISLOCATION TECHNIQUE
IN FRACTURE MECHANICS OF BRITTLE
HETEROGENEOUS SOLIDS**

TEZE PŘEDNÁŠKY
K PROFESORSKÉMU JMENOVACÍMU ŘÍZENÍ



BRNO 2002

KLÍČOVÁ SLOVA

metoda spojitě rozložených dislokací, lomová mechanika, trhliny

KEY WORDS

distributed dislocation technique, fracture mechanics, crack problems

Obsah

| | | |
|---|---|----|
| 1 | Úvod | 5 |
| 2 | Metoda spojitě rozložených dislokací pro popis trhliny | 7 |
| 3 | Metody řešení singulárních integrálních rovnic s Cauchyho jádrem.... | 13 |
| 4 | Trhliny v anisotropních prostředích | 16 |
| 5 | Ilustrace metody v některých úlohách lomové mechaniky částicových kompozitů | 17 |
| 6 | Zhodnocení a perspektivy dalšího vývoje..... | 26 |
| 7 | Literatura | 27 |
| 8 | Poděkování | 28 |
| 9 | English summary | 28 |

Michal Kotoul se narodil 9. 8. 1954 v Brně. V letech 1973-1978 studoval na Přírodovědné fakultě Univerzity J.E. Purkyně v Brně, obor odborná fyzika. V letech 1979-1981 absolvoval studijní pobyt v Ústavu fyzikální metalurgie ČSAV (v současné době Ústav fyziky materiálů AVČR Brno). V roce 1980 obhájil rigorózní práci *Interakce napěťových vln s trhlinou* a získal titul doktora přírodních věd v oboru fyziky pevných látek. V roce 1981 zahájil interní aspiranturu v oboru fyzikální metalurgie a mezní stavy materiálů v Ústavu fyzikální metalurgie ČSAV. V postgraduálním studiu se věnoval studiu problémů týkajících se zejména dynamického zatěžování těles, šíření vln napětí a jejich vlivu na porušování materiálů. Disertační práci *Dynamické mechanické a lomové vlastnosti kovových materiálů* obhájil v roce 1984 a v roce 1985 obdržel vědeckou hodnost kandidáta technických věd.

Svou odbornou činnost zahájil po obhájení disertační práce v oblasti dynamiky lomu a mechaniky poškození konstrukčních materiálů při intenzivním rázovém zatěžování. Nejdříve pracoval jako výzkumný pracovník a později jako samostatný výzkumný pracovník. Byl spoluřešitelem řady úkolů dřívějšího SPZV. V roce 1984 obdržel Plaketu presidia ČSAV za nejlepší práci v soutěži mladých vědeckých pracovníků 1984. Ve své vědecké práci se soustředil na aplikaci mechaniky poškození v oblasti intenzivního dynamického zatěžování. Druhou oblastí výzkumu se stalo modelování vzniku akustické emise při iniciaci lomu. Ještě v době svého působení v Ústavu fyziky materiálů navázal kontakty s Katedrou mechaniky těles FS VUT (dnes Ústav mechaniky těles FSI VUT), kde jako externista začal vést cvičení v předmětech Kinematika a Dynamika.

V roce 1990 nastoupil na základě konkursu na Katedru mechaniky těles FS VUT, kde pracoval nejprve jako asistent. V roce 1993 obhájil habilitační práci na téma *Lokální modely porušení konstrukčních materiálů* a byl jmenován docentem pro obor mechanika na FS VUT. Od roku 1993 do současnosti pracuje jako docent v Ústavu mechaniky těles FSI VUT. V roce 1993 získal stipendium od the Royal Society of London pro roční stáž na University of Wales, Swansea, kde prováděl výzkum v oblasti mikromechaniky a porušení polymerních kompozitů. V roce 2001 obhájil doktorskou disertační práci na téma *Modely ligamentované zóny trhliny a mikromechanika částicových kompozitů* a obdržel vědeckou hodnost doktora technických věd.

V současné době se jeho vědecko-výzkumná činnost zaměřuje na lomovou mechaniku, mechaniku poškození a mikromechaniku heterogenních materiálů a kompozitů. Spolupracuje s Ústavem fyziky materiálů AV ČR. Byl a je řešitelem grantových projektů GAČR 101/99/0829 a 101/02/0683 a spolupracoval či spolupracuje na dalších dvou projektech Grantové agentury ČR. Kromě práce na zmiňovaných grantových projektech se účastní také řešení na matematickém modelování vláknových kompozitů v rámci VVZ č.1 FSI VUT. Výsledky své vědecké práce publikoval v 77 původních článcích v odborných časopisech, sbornících symposií, konferencí a seminářů. Je členem České společnosti pro mechaniku a členem Českého komitétu pro teorii strojů a mechanismů AVČR.

Jeho pedagogická činnost je spjata s FSI VUT. Během své dvanáctileté pedagogické činnosti připravil a zavedl 3 nové předměty z oblasti aplikované mechaniky. Je garantem předmětů Teoretická mechanika, Mechanika kontinua I a Mechanika kontinua II. V současné době připravuje v doktorském studiu předmět Lomová mechanika. V Ústavu mechaniky těles FSI VUT se věnuje vědecké přípravě doktorandů. Vedl nebo vede 3 doktorandy. Jeden z jeho doktorandů úspěšně ukončil studia v roce 2001, další má nejlepší předpoklady ukončit studium v příštím roce. Je členem komisí pro obhajoby disertačních prací na FSI VUT a FS VŠB-TU Ostrava.

1 Úvod

Základním úkolem lomové mechaniky je popsat podmínky stability a šíření trhlin. Poznání zákonitostí chování trhlin poskytuje nejen podklady pro zajištění bezpečného a spolehlivého provozu těles a konstrukcí s trhlínami, s jejichž existencí je třeba v technické praxi objektivně počítat, ale zároveň také přispívá k vývoji nových materiálů.

Je známo, že trhlina představuje velmi účinný koncentrátor napětí. Je-li popisována v rámci mechaniky kontinua jako zářez nulové tloušťky, patří do třídy tzv. singulárních okrajových úloh, tj. úloh se singulárními body. Existence těchto bodů obvykle souvisí s některou idealizací výchozího fyzikálního problému (lineární model materiálu, malé deformace, nespojitost okrajových podmínek ap.) V singulárním bodě diverguje řešení (resp. jeho derivace od jistého řádu) k nekonečnu.

Samotný lomový proces je neobyčejně složitý jev, který probíhá v malé oblasti před čelem trhliny, v tzv. procesní zóně podrobené vysokým gradientům napětí. V procesní zóně dochází k mikroseparacím materiálu za účasti koncentrace poruch účastnících se předchozí nepružné deformace, což ve svém důsledku znemožňuje použití mechaniky kontinua uvnitř procesní zóny. Zdánlivým paradoxem je pak skutečnost, že za jistých předpokladů lze hodnotit stabilitu a kinetiku trhlin v rámci mechaniky kontinua pomocí jediného parametru. Zmíněné předpoklady vymezují platnost koncepce lomové mechaniky.

Procesní zóna není zdaleka jedinou oblastí disipace energie při růstu trhliny. Existují další disipativní oblasti (které již lze popisovat v rámci mechaniky kontinua) - např. v kovových materiálech je to plastická zóna obklopující procesní zónu, ve zpevněných keramikách zóna, ve které probíhá fázová transformace vynucená působícím napětím nebo v kompozitech částí okolí líců trhliny, které jsou přemostěny vlákny či částicemi druhé fáze a kde je energie disipována v procesech porušování těchto můstků a v třecích procesech při vytahování vláken nebo částic z okolní matrice. Platnost lomové mechaniky vyžaduje splnění principu tzv. autonomie procesní zóny. Jde o to, že kritický stav procesní zóny, který rozhoduje o pokračování lomového procesu, musí být závislý pouze na lokálních podmínkách v okolí procesní zóny. Jinými slovy, lomový proces na čele trhliny v tělesech s různou geometrií okrajových podmínek, ale zhotovených ze stejného materiálu a při shodných ostatních vnějších podmínkách - teploty, rychlosti deformace ap., bude probíhat stejným způsobem, budou-li lokální pole napětí a deformace vně procesní zóny stejná. Jestliže princip autonomie platí i pro plastickou zónu obklopující procesní zónu, tedy pro celou disipativní oblast na čele trhliny, mluvíme o podmínkách malé plastické zóny (small scale yielding). Velikost a tvar plastické zóny je pak závislý na lokálním elastickém poli v okolí čela trhliny, které lze matematicky popsat pomocí Williamsova (1957) asymptotického rozvoje

$$\sigma_{ij}(r, \theta) \approx \frac{k}{\sqrt{r}} f_{ij}(\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^{\frac{n}{2}} g_{ij}^{(n)}(\theta), \quad r \rightarrow 0 \quad (1)$$

kde r, θ jsou polární souřadnice s počátkem ve vrcholu trhliny, σ_{ij} jsou složky tenzoru napětí, k, A_n jsou konstanty a f_{ij}, g_{ij} jsou bezrozměrné funkce polární souřadnice θ . Výsadní postavení v asymptotickém rozvoji (1) má vedoucí singulární člen. Necht' ε je zvolené malé číslo. Oblast v okolí čela trhliny $r \leq r_s$, kde

$$\left| \frac{\sigma_{ij}(r, \theta) - \frac{k}{\sqrt{r}} f_{ij}(\theta)}{\frac{k}{\sqrt{r}} f_{ij}(\theta)} \right| \leq \varepsilon, \quad (2)$$

se nazývá oblastí dominance singulárního členu. Zjevně velikost této oblasti (při pevném ε) závisí na tom, zdali první konstatní člen nekonečné sumy v rovnici (1) (koeficient A_0) bude nulový nebo různý od nuly. V každém případě je však velikost oblasti dominance singulárního členu smluvní veličinou. V praxi zpravidla požadujeme, aby odchylka celkového

napětí a napětí od singulárního členu nepřevyšovala jednotky procent. V oblasti $r \leq r_s$ je elastické pole charakterizováno jediným parametrem k (platí pro jednoduchý mód zatěžování, při kombinovaném zatěžování jsou zapotřebí parametry 3, viz dále), který se musí stanovit na základě řešení úlohy pružnosti pro konkrétní zatížené těleso s trhlinou. Až na faktor $\sqrt{2\pi}$ je parametr k shodný s tzv. součinitelem intenzity napětí K , který je jednou z nejdůležitějších a v současné době i nejpoužívanějších mechanických veličin popisujících stav napjatosti v tělese s trhlinou. Jde o parametr, který zahrnuje jak velikost a způsob vnějšího zatížení, tak i základní kvalitativní a kvantitativní charakteristiky geometrie tělesa s trhlinou. V izotropních tělesech je možné singulární pole rozložit na tři vzájemně nezávislé složky podle charakteru rozevření trhliny, které vyvolávají. Rozevírání trhliny je řízeno velikostí rozhodující složky tenzoru napětí před čelem trhliny (tj. pro $\theta = 0$). Těmito složkami jsou σ_{yy} (pro tzv. otevírací mód I), σ_{xy} (pro rovinný smykový mód II) a σ_{yz} (pro antirovinný smykový mód III). Pomocí uvedených složek tenzoru napětí jsou pro tři základní módy porušování definovány součinitele intenzity napětí vztahy

$$\begin{aligned} K_I &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{yy}(r, 0), \\ K_{II} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{xy}(r, 0), \\ K_{III} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{yz}(r, 0). \end{aligned} \quad (3)$$

Singulární složky napětí odpovídající jednotlivým módům rozevření trhliny pak jsou

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(I)} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(I)}(\theta), \quad \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(II)} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(II)}(\theta), \quad \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(III)} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(III)}(\theta) \quad (4)$$

a pro kombinovaný způsob namáhání plyne z principu superpozice

$$\sigma_{ij}^{(\text{vysl})} = \sigma_{ij}^{(I)} + \sigma_{ij}^{(II)} + \sigma_{ij}^{(III)}. \quad (5)$$

Významný případ nastává, když velikost plastické zóny je značně menší než oblast dominance singulárního členu v rozvoji (1). Zřejmě potom je kritický stav procesní a plastické zóny jednoznačně určen kritickou hodnotou součinitele intenzity napětí K_C (přesněji, kritickou hodnotou některé funkce $f(K_I, K_{II}, K_{III})$). Tato hodnota je materiálovou konstantou nezávislou na geometrii a zatížení tělesa. Hodnocení stability a kinetiky trhlin pomocí součinitele intenzity napětí tvoří základ jednoparametrové lineární lomové mechaniky. V řadě případů je však koeficient A_0 nenulový (s výjimkou módu II, kdy je A_0 identicky rovno nule) a pro hodnocení kritického stavu disipativní oblasti na čele trhliny je nutné použít 2 parametry - součinitel intenzity napětí K a koeficient A_0 . Taková koncepce tvoří základ dvouparametrové lineární lomové mechaniky.

Existuje řada vynikajících monografií a učebnic usilujících o souhrnný výklad lomové mechaniky, které vznikaly souběžně s vývojem lomové mechaniky od počátku šedesátých let minulého století. Mezi nejvýznamnější patří práce následujících autorů uvedené v chronologickém pořadí: Yokobori (1965), sedmisvazkové dílo editované Liebowitzem (1968-1972), Hahn (1976), Čerepanov (1979), Knott (1979), Broek (1982), Hellan (1984), Kanninen a Popelar (1985), Freund (1990), Lawn (1993), Anderson (1995) a Broberg (1999). Cílem mé přednášky je pojednat jen o malém úseku lineární lomové mechaniky, který se týká speciálních výpočetních technik vhodných pro řešení problémů relativně krátkých trhlin, které se šíří v blízkosti rozličných koncentrátorů napětí. Tyto koncentrátoři, kterými mohou být další trhliny, otvory, či materiálové nehomogenity, vyvolávají strmé gradienty napětí. Je proto praktické idealizovat geometrii problému do tvaru, pro který můžeme získat přesné řešení. Takový postup kontrastuje např. s metodou konečných prvků, kde se snažíme modelovat geometrii přesně, ale následující řešení získáváme aproximativně při nesrovnatelně

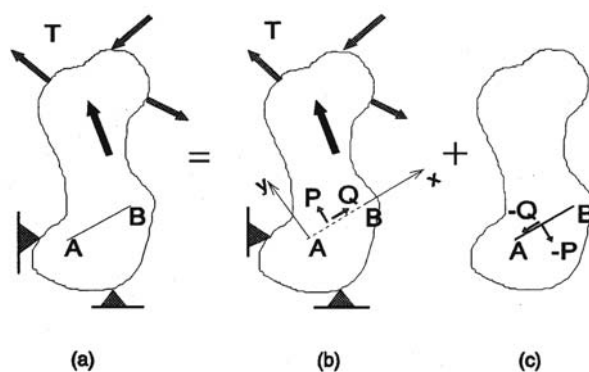
vyšších výpočetních nákladech. Technika řešení je známa pod názvem metoda spojitě rozložených dislokací a vychází z pionýrských prací Eshelbyho (1957), které později rozvinuli ve svých pracích Erdogan, Keer, Mura a mnoho dalších.

2 Metoda spojitě rozložených dislokací pro popis trhliny

Základní idea metody spočívá ve využití superpozice napětového pole v tělese bez trhliny a pole, které generuje předem neznámé rozložení "nosičů soustředěné deformace", při splnění podmínky, že líce trhliny budou volné povrchy. Řešení pro pole napětí vyvolané nosičem soustředěné deformace musí automaticky splňovat všechny ostatní okrajové podmínky. Metoda je vhodná pro modelování trhlín jak v rovinných úlohách tak v úlohách prostorových. Nosičem soustředěné deformace je dislokace, která bude podrobněji popsána dále.

Všimneme si nejprve principu superpozice z hlediska stanovení součinitele intenzity napětí. Bueckner (1958) ukázal, že součinitel intenzity napětí K_I pro trhlínu v tělese, které je podrobno vnějšímu zatížení, je stejný jako součinitel intenzity napětí K_I vypočtený pro případ identického tělesa s trhlínou, které je zatíženo pouze na lících trhliny vnitřním tlakem o velikosti normálového napětí, jaké vzniká v zatíženém neporušeném tělese na ploše totožné s polohou líců trhliny v porušeném tělese. Analogická tvrzení platí pro součinitele intenzity napětí v módech II a III a souborně se označují jako Buecknerův princip.

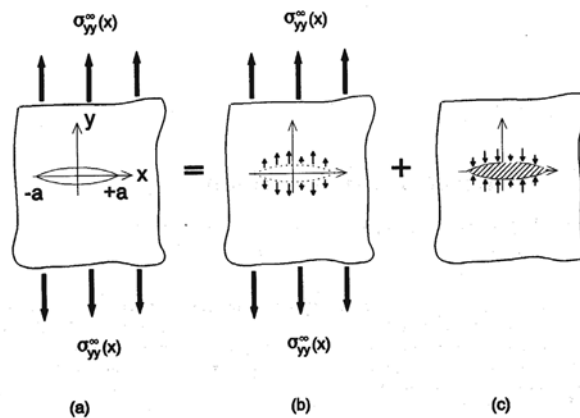
Buecknerův princip je ilustrován na obr. 1. Problém, který se má řešit, je zobrazen na obr. 1(a). Těleso obecného tvaru je podrobno objemovým a povrchovým silám a obsahuje trhlínu AB. Nejprve se stanoví pole napětí pro těleso bez trhliny, viz. obr. 1(b) a určí se složky vektoru napětí $P(x)$ a $Q(x)$. Posléze se řeší problém na obr. 1(c), kde je znázorněno totéž těleso podrobené zatížení $-P(x)$, $-Q(x)$ podél líců trhliny. Součet obou řešení dává řešení původního problému na obr. 1(a) a tudíž součinitel intenzity napětí spojený s řešením úlohy 1(c) je současně součinitelem intenzity napětí pro původní problém 1(a).



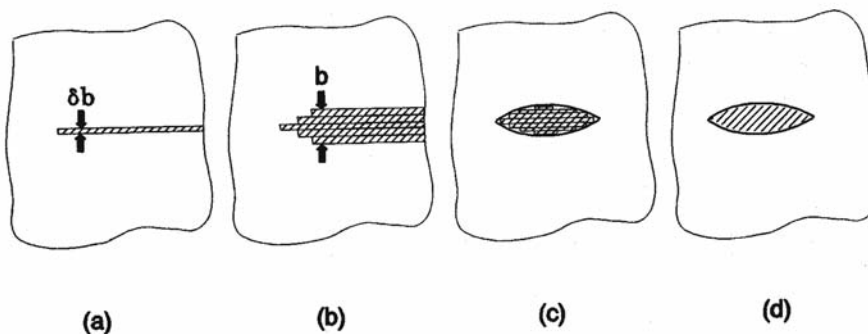
Obr. 1: Ilustrace Buecknerova principu superpozice.

Princip metody spojitě rozložených dislokací je nejjednodušší objasnit na rovinném problému průchozí trhliny rozevírané tahovým polem napětí $\sigma_{yy}^{\infty}(x)$, viz obr. 2(a). Z Buecknerova principu plyne, že řešení tohoto problému lze získat superpozicí úloh na obr. 2(b) a 2(c), tedy superpozicí napětí v neporušené rovině, obr. 2(b), a tzv. korekčních napětí, viz obr. 2(c), které vznikají v důsledku aplikace opačně orientovaných napětí (vzhledem k těm, které působí ve stejných místech v úloze 2(b)) podél líců trhliny. Postup pro stanovení korekčních napětí znázorňuje obr. 2(c): v místech trhliny vedeme tenký zářez; obě strany zářezu oddálíme vložením nadbytečného materiálu. Vnitřek reálné trhliny je pochopitelně prázdný, vložený materiál je pouze matematický nástroj, který slouží k stanovení korekčních napětí a současně simuluje rozevření reálné trhliny. Představme si vložený materiál jako kombinaci nekonečně tenkých vrstev-nosičů soustředěné deformace. První vrstva začíná v jednom vrcholu trhliny

a pokračuje až do nekonečna nebo k vzdálenému okraji, viz. obr. 3(a); obr. 3(b) zobrazuje více vložených vrstev; následným vyjímáním vrstev ve vhodných místech dostaneme konfiguraci zobrazenou na obr. 3(c) resp. na obr. 3(d). Každá vrstva vloženého materiálu generuje určité napětí. Matematické řešení pro toto napětí, které vyhovuje okrajovým podmínkám výchozí úlohy, můžeme použít jako Greenovu funkci (fundamentální řešení) pro výchozí úlohu - napětové pole vyvolané všemi vrstvami získáme jednoduše součtem nebo integrací řešení pro jednotlivé vrstvy.



Obr. 2: Aplikace Buecknerova principu pro rovinný problém průchozí trhliny v nekonečném prostředí: (a) výchozí problém, (b) napětí v prostředí bez trhliny, (c) separace líců trhliny vložením nadbytečného materiálu.



Obr. 3: Ilustrace vloženého materiálu mezi líce trhliny pomocí vkládání a vyjímání tenkých vrstev.

Vrstva vloženého materiálu je vlastně analogií dobře známé hranové dislokace z fyziky pevných látek. I když vrstva vloženého materiálu se v řadě rysů shoduje s hranovou dislokací vznikající jako defekt krystalové mříže (např. vložení nadbytečné vrstvy atomů do ideální krystalové struktury), fyzikálně žádné mřížkové poruchy nevznikají - jedná se jen a pouze jen o matematický nástroj, který umožňuje zavést self-konzistentní stav napětí v tělese (tj. odpovídající vložené soustředěné deformaci a okrajovým podmínkám).

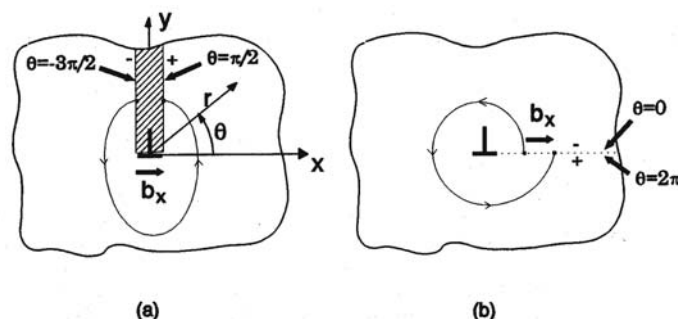
Jednou z výhod uvedené techniky je možnost explicitně určit stav napětí způsobeného dislokací pro celou řadu geometrických uspořádání: v nekonečné rovině, v polorovině a pásu, v blízkosti kruhové inkluze ap. a také rozmístit libovolný počet dislokací uvnitř oblasti při současném splnění všech okrajových podmínek. Úloha se pak redukuje na výpočet takového rozložení dislokací, které generuje podél líců trhliny napětí co do velikosti stejná, ale opačně orientovaná než ta, která vznikají v důsledku vnějšího zatížení.

Obr. 3 ukazuje, že nekonečně tenká vrstva materiálu-hranová dislokace vnáší do tělesa relativní posuv mezi body, které bezprostředně sousedí s vrstvou, přičemž tento posuv je podél vrstvy konstantní. Podobně jako u hranové dislokace v krystalové mříži se tento relativní posuv nazývá Burgersovým vektorem. Podstatné je, že stav napětí vyvolaný přítomností dislokace závisí pouze na Burgersově vektoru \vec{b} a nezávisí na orientaci zářezu, do kterého je vložen (resp. vyjmut) materiál. Obr. 4 znázorňuje dva způsoby vytvoření hranové dislokace s Burgersovým vektorem s nenulovou složkou b_x . V prvním případě provedeme řez podél osy y , vložíme tenkou vrstvu materiálu o tloušťce b_x a spojíme s okolím. Ve druhém případě provedeme řez podél osy x , posuneme materiál nad řezem o b_x ve směru osy x a opět materiál spojíme podél osy x . V obou případech vzniká stejný stav napjatosti. Obr. 4 také ilustruje znaménkovou konvenci pro volbu znaménka b_x . Pozorovatel, který se pohybuje podél řezu ve směru od jádra dislokace, rozlišuje kladnou (+) stranu po pravé ruce a zápornou (-) po levé ruce. Pohybuje-li se po křivce obklopující jádro ve směru od záporné strany řezu ke kladné straně, pozoruje po ukončení oběhu nespojitost posunutí ve směru x , $u(+)-u(-)=b_x$.

Pole napětí a posunutí pro nekonečné prostředí s dislokací se výhodně sestavuje pomocí Airyho funkce napětí U . Uvedeme pouze složky tenzoru napětí působící v bodě (x, y) , jestliže dislokace je umístěna v počátku a její Burgersův vektor má obě složky nenulové $\vec{b} \equiv (b_x, b_y)$:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{2G}{\pi(\kappa+1)} \left\{ b_x \left[-\frac{y}{r^4} (3x^2 + y^2) \right] + b_y \left[\frac{x}{r^4} (x^2 - y^2) \right] \right\}, \\ \sigma_{yy} &= \frac{2G}{\pi(\kappa+1)} \left\{ b_x \left[\frac{y}{r^4} (x^2 - y^2) \right] + b_y \left[\frac{x}{r^4} (x^2 + 3y^2) \right] \right\}, \\ \sigma_{xy} &= \frac{2G}{\pi(\kappa+1)} \left\{ b_x \left[\frac{y}{r^4} (x^2 - y^2) \right] + b_y \left[\frac{x}{r^4} (x^2 - y^2) \right] \right\},\end{aligned}\quad (6)$$

kde G je modul pružnosti ve smyku, $\kappa = 4 - 3\nu$ pro rovinnou deformaci ($\kappa = \frac{1+\nu}{1-\nu}$ pro rovinnou napjatost), ν je Poissonova konstanta.



Obr. 4: Vytvoření hranové dislokace (a) pomocí vložené vrstvy materiálu, (b) smykovým posunutím.

Poznámka. Při řešení rovinných úloh se často používá analýza komplexní proměnné. Airyho funkci napětí $U = U(x, y)$ lze totiž vyjádřit pomocí dvou holomorfních funkcí φ a ψ komplexní proměnné $z = x + iy$

$$U(x, y) = \operatorname{Re} \left[\bar{z}\varphi(z) + \int_{z_0}^z \psi(z') dz' \right], \quad (7)$$

kde φ a ψ jsou tzv. Muschelišviliho (1953a) komplexní potenciály. Složky tenzoru napětí a vektoru posunutí lze vyjádřit pomocí Muschelišviliho (1953a) rovnic (8)–(10) prostřednictvím Muschelišviliho komplexních potenciálů

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4 \operatorname{Re} \varphi'(z), \quad (8)$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2 [\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] , \quad (9)$$

$$2G(u_x + iu_y) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} , \quad (10)$$

kde symbolem ' a '' se rozumí první a druhá derivace funkce podle z a \bar{z} , z ap. označuje operaci komplexního sdružení. Pro vektor výsledné síly $F^V = (F_x^V, F_y^V)$ (v komplexním popisu se zapisuje jako $F^V = F_x^V + iF_y^V$), která působí na oblouku L s koncovými body A a B a s vektorem jednotkové normály $n = n_x + in_y$, platí

$$F_x^V + iF_y^V = \int_L [(\sigma_{xx}n_x + \sigma_{yx}n_y) + i(\sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y)] dt = -i \left[\varphi + z\overline{\varphi'} + \overline{\psi} \right]_A^B , \quad (11)$$

V případě dislokace se Muschelišviliho komplexní potenciály φ a ψ hledají ve tvaru

$$\varphi = A \ln z, \quad \psi = B \ln z, \quad (12)$$

kde komplexní konstanty $A = A_1 + iA_2$ a $B = B_1 + iB_2$ se získají pomocí rovnic (8)- (11) z podmínek: i) výsledná síla F^V přenášená podél uzavřené křivky, která obklopuje jádro dislokace, je rovna nule

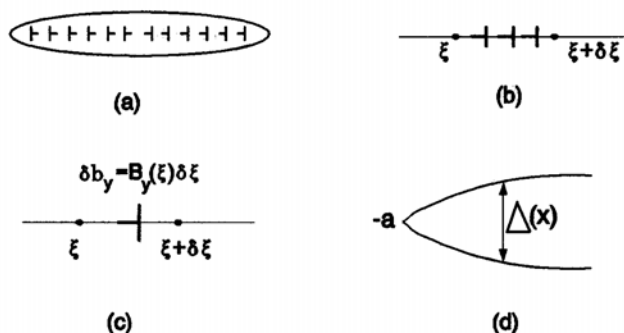
$$[F_x^V + iF_y^V] = 0, \quad (13)$$

ii) výsledný vektor posunutí podél téže křivky musí být roven Burgersovu vektoru $b = b_x + ib_y$

$$2G[u_x + iu_y] = [\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}] = 2Gb, \quad (14)$$

iii) pro bod jdoucí k nekonečnu musí složky tenzoru napětí konvergovat k nule. Hranaté závorky v rovnicích (13) a (14) označují změnu veličiny uvnitř závorek podél libovolné smyčky obklopující jádro dislokace. □

Obr. 5(a) znázorňuje rovinný model trhliny vytvořené pomocí distribuce dislokací v intervalu $-a < x < a$. Jedná se obdobu obr. 3. Abychom odvodili výraz pro napětí σ_{ij}^{dis} generované těmito dislokacemi, sledujme nejprve nekonečně krátký úsek trhliny mezi body ξ a $\xi + \delta\xi$, viz obr. 5(b).



Obr. 5: Model trhliny pomocí distribuce dislokací: (a) řada dislokací, (b) dislokace na nekonečně malém intervalu, (c) dislokační hustota, (d) rozevření trhliny.

Je výhodné uvažovat spojitě rozdělení dislokací na tomto intervalu jako jedinou izolovanou dislokaci s nekonečně malým Burgersovým vektorem $\delta b_y \equiv B_y(\xi) \delta\xi$, kde $B_y(\xi)$ je dislokační hustota v bodě ξ , viz obr. 5(c). Napětí vyvolané jedinou dislokací σ_{ij}^{1dis} je dáno rovnicemi (6). Speciálně, normálové napětí vznikající podél intervalu $-a < x < a$ od dislokace s Burgersovým vektorem δb_y situované v místě ξ obdržíme z rovnice (6)₂, položíme-li $b_x = 0$, $y = 0$ a nahradíme-li proměnnou x výrazem $x - \xi$.

Napětí $\sigma_{yy}^{dis}(x, 0)$ generované spojitým rozdělením dislokací v intervalu $-a < x < a$ získáme superpozicí

$$\sigma_{yy}^{dis}(x, 0) = \frac{2G}{\pi(\kappa + 1)} \int_{-a}^a \frac{B_y(\xi)}{x - \xi} d\xi, \quad (15)$$

kde dislokační hustota $B_y(\xi)$ je

$$B_y(\xi) = \frac{db_y(\xi)}{d\xi}. \quad (16)$$

Poznamenejme, že $\sigma_{xy}^{dis}(x, 0)$ je identicky rovno nule. Je zřejmé, že musí existovat těsný vztah mezi velikostí mezery mezi lícemi trhliny (rozevření trhliny) $\Delta(x)$ a dislokační hustotou v daném bodě. Pro nalezení tohoto vztahu sledujme obr. 5(d). V krajním bodě trhliny je $\Delta(-a)$ identicky rovno nule. Vkládání dislokací se záporným Burgersovým vektorem $-b_y$ podél $x > -a$ zvětšuje rozevření trhliny, takže

$$\Delta(x) = - \int_{-a}^x B_y(\xi) d\xi, \quad (17)$$

nebo

$$B_y(x) = - \frac{d\Delta(x)}{dx}. \quad (18)$$

Vzhledem k tomu, že podle lineární lomové mechaniky se rozevření trhliny blízko jejich vrcholů mění parabolicky - např. pro otevírací mód I platí

$$\Delta(x) = u_y(r, \theta = \pi) - u_y(r, \theta = -\pi) = \frac{\kappa + 1}{G} K_1 \sqrt{\frac{r}{2\pi}} = \frac{\kappa + 1}{G} K_1 \sqrt{\frac{a - |x|}{2\pi}}, \quad (19)$$

vykazuje dislokační hustota ve vrcholech trhliny singulární chování typu $B_y \sim 1/\sqrt{a - |x|}$.

Uvažujme nyní, že nekonečné prostředí s trhlinou je v nekonečnu zatíženo tahovým napětím $\sigma_{yy}^\infty(x)$. Z Buecknerova principu víme, že pro výsledné normálové a smykové napětí $N(x)$ a $S(x)$ působící v místě trhliny můžeme psát

$$N(x) \equiv \sigma_{yy}(x, 0) = \sigma_{yy}^\infty(x, 0) + \sigma_{yy}^{dis}(x, 0) = 0, \quad |x| < a, \quad (20)$$

$$S(x) \equiv \sigma_{xy}(x, 0) = \sigma_{xy}^\infty(x, 0) + \sigma_{xy}^{dis}(x, 0) \equiv 0, \quad |x| < a. \quad (21)$$

Z podmínky (20) tak nakonec dostáváme

$$-\frac{\kappa + 1}{2G} \sigma_{yy}^\infty(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{B_y(\xi)}{x - \xi} d\xi, \quad (22)$$

což je integrální singulární rovnice prvního druhu s Cauchyho jádrem pro neznámou dislokační hustotu $B_y(\xi)$, přičemž integrál v této rovnici je nutné brát ve smyslu hlavní hodnoty. Z matematických důvodů je výhodné normalizovat rovnici na interval $\langle -1, 1 \rangle$. Pro obecný případ intervalu $\langle a, b \rangle$ se toho dosáhne pomocí substitucí

$$2\xi = (b - a)s + (b + a), \quad (23)$$

$$2x = (b - a)t + (b + a).$$

Rovnice (22) pak nabude tvar

$$F(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{B_y(s)}{t - s} ds, \quad |t| < 1, \quad (24)$$

kde

$$F(t) = -\frac{\kappa + 1}{2G} \sigma_{yy}^{\infty}(t).$$

Pravá strana rovnice (24) je Hilbertova transformace funkce $B_y(s)$. Řešení této integrální rovnice je možné odvodit na základě Muschelišviliho teorie (Muschelišvili 1953b). Zde pouze připomeneme, že na základě rovnic (18) a (19) musí $B_y(s)$ vykazovat v okolí konců intervalu chování $B_y(s) \sim 1/\sqrt{1 \pm s}$, kde s je vzdálenost od konců intervalu. To umožňuje hledat $B_y(s)$ ve tvaru součinu fundamentálního řešení $w(s)$ a neznámé ohraničené funkce $\phi_y(s)$:

$$B_y(s) = w(s) \phi(s), \quad w(s) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}. \quad (25)$$

Řešení rovnice (24) je potom dáno ve tvaru

$$B_y(t) = -\frac{w(t)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{F(s)}{w(s)(t-s)} ds + Cw(t), \quad (26)$$

kde C je libovolná konstanta, která se určí z podmínky $\Delta(-a) = \Delta(a) = 0$ a rovnice (17) -tzv. podmínka konzistence

$$\int_{-a}^a B_y(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 B_y(s) ds = 0. \quad (27)$$

Součinitel intenzity napětí K_I lze nyní stanovit s pomocí rovnic (18) a (19), ze kterých především vyplývá vztah

$$\frac{d\Delta(r)}{dr} = \frac{\kappa + 1}{2G} K_I \sqrt{\frac{1}{2\pi r}}. \quad (28)$$

Limitním přechodem $r \rightarrow 0$ získáme pro součinitel intenzity napětí na koncích trhliny ± 1 vzorec

$$\begin{aligned} K_I(\pm 1) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2G\sqrt{2\pi r}}{\kappa + 1} \frac{d\Delta(r)}{dr} = \pm \lim_{t \rightarrow \pm 1 \mp} \frac{2G\sqrt{2\pi a(1 \mp t)}}{\kappa + 1} B_y(t) = \\ &= \pm \lim_{t \rightarrow \pm 1 \mp} \frac{2G\sqrt{2\pi a(1 \mp t)}}{\kappa + 1} \frac{\phi_y(t)}{\sqrt{1-t^2}} = \pm \sqrt{\pi a} \frac{2G}{\kappa + 1} \phi_y(\pm 1). \end{aligned} \quad (29)$$

V případě složitějších oblastí již neobdržíme jednoduchou integrální rovnici typu (24). Nemůžeme totiž použít jednoduché vztahy pro složky napětí podle (6), které byly odvozeny pro dislokaci v nekonečném prostředí. Navíc, trhliny v řadě kompozitních materiálů bývají přemostěny zpevňujícími vlákny nebo částicemi a líce trhliny už nemůžeme pokládat za volné povrchy. Je-li možné účinek těchto diskretních můstků nahradit jistým efektivním normálovým $N(x)$ a smykovým napětím $S(x)$ působícím podél líců trhliny, jsme nakonec postaveni před řešení soustavy integrálních singulárních rovnic

$$\begin{aligned} N(t) &= \frac{\kappa + 1}{2G} \tilde{\sigma}_{yy}(t) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{B_y(s)}{t-s} ds + \int_{-1}^1 [K_{yx}(t;s) B_x(s) + K_{yy}(t;s) B_y(s)] ds, \\ S(t) &= \frac{\kappa + 1}{2G} \tilde{\sigma}_{xy}(t) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{B_x(s)}{t-s} ds + \int_{-1}^1 [K_{xx}(t;s) B_x(s) + K_{xy}(t;s) B_y(s)] ds, \end{aligned} \quad (30)$$

kde $K_{ij}(t;s)$ jsou regulární jádra a $\tilde{\sigma}_{yy}(t)$, $\tilde{\sigma}_{xy}(t)$ označují napětí, která působí v dané oblasti neobsahující trhlínu v místech, kde chceme trhlínu zavést. Konkrétní tvar regulárních jader vyplývá z řešení pro napětí v okolí dislokace libovolně umístěné ve vyšetřované nezátížené oblasti. Obr. 6 uvádí některé typické oblasti, pro které jsou tato řešení známa.

| | | |
|---|---|--|
| <p>Nekonečná rovina s inkluzí</p> <p>Dundurs a Mura (1964)</p> | <p>Nekonečná rovina s inkluzí</p> <p>Dundurs a Sendeckij (1965)</p> | <p>Nekonečná rovina se 2 inkluzemi</p> <p>Fukuzaki a Shioya (1986)</p> |
| <p>Nekonečná rovina s inkluzí</p> <p>Stangi a Lizzio (1983)</p> | <p>Nekonečná rovina s inkluzí</p> <p>Warren (1983)</p> | <p>Nekonečná rovina se 2 inkluzemi</p> <p>Fukuzaki a Shioya (1987)</p> |
| <p>Nekonečná vrstva</p> <p>Weeks, Dundurs a Stippes (1968)</p> | <p>Nekonečná vrstva</p> <p>Lee a Dundurs (1973)</p> | <p>Vícevrstvý kompozit</p> <p>Erdogan a Gupta (1971)</p> |
| <p>Nekonečná úhlová oblast</p> <p>Hecker a Romanov (1992)</p> | <p>Okolí vrcholu trhliny</p> <p>Lakshmanan a Li (1988)</p> | <p>Třífázový kompozit</p> <p>Luo a Chen (1991)</p> |
| <p>Čtvrtrovina</p> <p>Keer, Lee, Mura (1983)</p> | <p>Pevně spojené čtvrtroviny</p> <p>Kelby, Hills, Nowell (1994)</p> | <p>Mezikruží</p> <p>Worden a Keer (1991)</p> |

Obr. 6: Známa řešení pro napětí v okolí hranové dislokace.

3 Metody řešení singulárních integrálních rovnic s Cauchyho jádrem

Pravděpodobně nejvíce rozšířenou metodou numerického řešení je Gauss-Čebyševova kvadratura vypracovaná v pracích Erdogana a Gupty (1972) a Erdogana, Gupty a Cooka (1973).

Nejprve uvedme, že neznámá dislokační hustota nemusí být vždy singulární na obou koncích intervalu. Jako příklad lze uvést okrajovou trhlinu, kde dislokační hustota je singulární pouze na konci intervalu, který odpovídá vrcholu trhliny. V místě ústí trhliny na okraji tělesa je dislokační hustota ohraničenou funkcí. Podle charakteru chování dislokační hustoty na koncích integračního intervalu je nutné volit typ váhové funkce $w(s)$. Tabulka 2 shrnuje základní typy váhové funkce a současně uvádí výběr integračních bodů a tzv. uzlů kolokace. Pro každý případ pak hledáme dislokační hustotu ve tvaru $B(s) = w(s)\phi(s)$, kde $\phi(s)$ je ohraničená funkce. Uzly kolokace souvisí s kolokační metodou pro řešení rovnic $Au = f$ v oblasti Ω , kde A je lineární diferenciální nebo integrální operátor. Kolokační metoda spočívá v tom, že přibližné řešení hledáme ve tvaru

$$u_N(P) = \sum_{j=1}^N a_j \varphi_j(P), \quad (31)$$

kde φ_j , $j = 1..N$ jsou pro libovolné N lineárně nezávislé a splňují na hranici oblasti všechny okrajové podmínky. Abychom určili koeficienty a_j , zadáme v Ω N bodů $P_{1N}, P_{2N}, \dots, P_{NN}$,

kteře se nazývají uzly kolokace a žádáme, aby rovnice $Au = f$ byla po záměně u_N za u v daných bodech splněna. Pro koeficienty dostaneme systém

$$\sum_{j=1}^N a_j A_{\varphi_j}(P_{kN}) = f(P_{kN}), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (32)$$

Při aplikaci Gauss-Čebyševovy numerické kvadratury k rovnici (24) obdržíme systém $N - n$ algebraických rovnic tvaru

$$F(t_k) = \sum_{i=1}^N W_i \frac{\phi(s_i)}{t_k - s_i}, \quad k = 1, \dots, N - n, \quad (33)$$

kde n závisí na kombinaci předpokládaného chování dislokační hustoty v koncových bodech a je uvedeno v tabulce 2; W_i jsou váhové funkce a pro příslušnou kvadraturní formuli jsou rovněž uvedeny v tabulce 2. s_i jsou integrační body a t_k jsou body kolokace. Při řešení praktických problémů zpravidla vystačíme s $N \leq 30$.

| | | |
|------------------------|------------|------------|
| $-1/2 \setminus + 1/2$ | singulární | ohraničená |
| singulární | I | II |
| ohraničená | III | IV |

Tabulka 1: Čtyři typy chování dislokační hustoty v koncových bodech.

| Typ | $w(s)$ | s_i | t_k | n | W_i |
|-----|--------------------------------|--|--|-----|-------------------------|
| I | $(1 - s^2)^{-1/2}$ | $\cos\left(\pi \frac{2i-1}{2N}\right)$ | $\cos\left(\pi \frac{k}{N}\right)$ | 1 | $\frac{1}{N}$ |
| II | $(1 - s)^{1/2} (1 + s)^{-1/2}$ | $\cos\left(\pi \frac{2i}{2N+1}\right)$ | $\cos\left(\pi \frac{2k-1}{2N+1}\right)$ | 0 | $\frac{2(1-s_i)}{2N+1}$ |
| III | $(1 - s)^{-1/2} (1 + s)^{1/2}$ | $\cos\left(\pi \frac{2i-1}{2N+1}\right)$ | $\cos\left(\pi \frac{2k}{2N+1}\right)$ | 0 | $\frac{2(1+s_i)}{2N+1}$ |
| IV | $(1 - s^2)^{1/2}$ | $\cos\left(\pi \frac{i}{2N+1}\right)$ | $\cos\left(\pi \frac{2k-1}{2(N+1)}\right)$ | -1 | $\frac{(1-s_i^2)}{N+1}$ |

Tabulka 2: Gauss-Čebyševovy kvadraturní formule pro Cauchyho jádra integrační rovnice.

Metoda Gauss-Čebyševovy kvadratury má řadu modifikací; nebudou zde však uváděny a bude upřednostněn popis poněkud odlišné metody, která nachází velké uplatnění při řešení problémů přemostěných trhlin v kompozitních materiálech. Základní rozdíl je dán tím, že hledanou funkcí je přímo rozevření trhliny $\Delta(x)$. Koncepce této metody je založena na pojmu Hadamardovy (1952) konečné části hypersingulárního integrálu, viz také práci Erdogan a Kaya (1987). Podstata metody bude vysvětlena na jednoduchém typu singulární rovnice (22). Dosadme do pravé strany rovnice (22) pomocí vztahu (18) $B_y(\xi) = -\frac{d\Delta(\xi)}{d\xi}$ a integrujme per partes při současném využití podmínky $\Delta(-a) = \Delta(a) = 0$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{B_y(\xi)}{x - \xi} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\Delta(\xi)}{(x - \xi)^2} d\xi. \quad (34)$$

Integrál na pravé straně (34) obsahuje hypersingulární jádro a musí být interpretován speciálním způsobem, který zavedl Hadamard - totiž ve smyslu jeho konečné části, což je vyznačeno

symbolem \int_{-a}^a . Interpretaci hypersingulárního integrálu ukazuje následující příklad: uvažujme integrál J

$$J = \int_a^b \frac{f(t)}{(t-t_0)^2} dt, \quad (35)$$

kde funkce $f(t)$ a její derivace $f'(t)$ jsou dostatečně hladké v intervalu (a, b) . Přepíšme J do tvaru

$$J = \int_a^b \frac{f(t) - f(t_0) - (t-t_0)f'(t_0)}{(t-t_0)^2} dt + \\ + f(t_0) \left[-\frac{1}{b-t_0} + \frac{1}{a-t_0} \right] + f'(t_0) \left[\ln(-1) + \ln\left(\frac{b-t_0}{a-t_0}\right) \right], \quad (36)$$

kde $\ln(-1) = i\pi$. Protože pro dostatečně hladké funkce je integrál na pravé straně (36) ohraničený, je vidět, že integrál J má ve smyslu konečné části definovanou konečnou hodnotu. Při této interpretaci integrálu můžeme tedy řešit hypersingulární integrální rovnici pro rozevření trhliny Δ

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\Delta(\xi)}{(x-\xi)^2} d\xi + \frac{\kappa+1}{2G} \sigma_{yy}(x) = 0. \quad (37)$$

Řešení (37) lze najít jednoduchou Bubnov-Galerkinovou metodou. Rozevření trhliny rozvineme podle Čebyševových polynomů druhého druhu U_n

$$\Delta(\xi) = W\left(\frac{\xi}{a}\right) \sum_{n=0}^N \Delta_n U_n\left(\frac{\xi}{a}\right), \quad (38)$$

kde

$$U_n(s) = \frac{1}{\sin\theta} \sin[(n+1)\theta], \quad \theta = \arccos s, \quad |s| \leq 1$$

a $W\left(\frac{\xi}{a}\right)$ je váhová funkce. Čebyševovy polynomy druhého druhu $U_n(s)$ jsou ortogonální na intervalu $(-1, 1)$ s vahou $W(s) = \sqrt{1-s^2}$

$$\int_{-1}^1 W(s) U_n(s) U_m(s) ds = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{jestliže } n = m \\ 0 & \text{jestliže } n \neq m \end{cases}$$

U_n navíc mají následující vlastnost

$$\int_{-1}^1 \frac{W(s)}{(s-t)^2} U_n(s) ds = -\pi(n+1) U_n(t). \quad (39)$$

Dosadme nyní (38) do (37), vynásobme tuto rovnici výrazem $\frac{2}{\pi a} W\left(\frac{x}{a}\right) U_n\left(\frac{x}{a}\right)$ a integrujme od $-a$ do a . Dostaneme

$$\frac{\pi(n+1)}{a} \Delta_n = \frac{\kappa+1}{2G} \frac{2}{\pi a} \int_{-a}^a \sigma_{yy}(x) W\left(\frac{x}{a}\right) U_n\left(\frac{x}{a}\right) dx, \quad (40)$$

odkud dosazením do (38) přímo dostaneme rozevření trhliny $\Delta(x)$. Všimněme si, že derivace váhové funkce v rozvoji rozevření trhliny (38) odpovídá singulárnímu chování dislokační hustoty. V případě, že jádro hypersingulární integrální rovnice má také regulární část, hledáme přibližné řešení pro funkci $\Delta(x)$ ve tvaru rozvoje podle vhodných lineárně nezávislých funkcí a použijeme kolokační metodu. Uvedená metoda je výhodná hlavně v případech, když mostíci napětí je funkcí rozevření trhliny.

4 Trhliny v anisotropních prostředích

Studium trhlin v anisotropních prostředích je důležité pro pochopení zákonitostí stability a kinetiky trhlin v monokrystalech, dále mikrotrhlin, jejichž velikost je srovnatelná s velikostí zrna polykrystalických materiálů a trhlin v kompozitních materiálech, jejichž anisotropie je dána vlastní architekturou.

Uvažujme rovinný případ obecně anisotropního materiálu. Zobecněný Hookův zákon má tvar

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (41)$$

kde D_{ij} jsou koeficienty poddajnosti. Místo obvyklé biharmonické rovnice, kterou musí splňovat Airyho funkce U v izotropním prostředí, obdržíme z rovnice kompatibility a Hookova zákona (41) rovnici

$$D_{22}U_{,xxxx} - 2D_{26}U_{,xxxy} + (2D_{12} + D_{66})U_{,xxyy} - 2D_{16}U_{,xyyy} + D_{11}U_{,yyyy} = 0. \quad (42)$$

Obecné řešení rovnice (42) se hledá ve tvaru $f(X)$, kde $X = x + sy$. (42) se pak přepíše na

$$\left[D_{22} - 2D_{26}s + (2D_{12} + D_{66})s^2 - 2D_{16}s^3 + D_{11}s^4 \right] \frac{d^4 f}{dX^4} = 0, \quad (43)$$

což vyžaduje řešit charakteristickou rovnici

$$D_{22} - 2D_{26}s + (2D_{12} + D_{66})s^2 - 2D_{16}s^3 + D_{11}s^4 = 0. \quad (44)$$

Charakteristická rovnice nemá žádné reálné kořeny vzhledem k pozitivní definitnosti energie napjatosti. Protože koeficienty D_{ij} jsou reálné, existují obecně dvě dvojice komplexně sdružených kořenů rovnice (44). Označme kořeny jako s_1, s_2, s_3 a s_4 , kde s_3 a s_4 jsou komplexně sdružené s s_1 a s_2 . Podobně jako v případě izotropního prostředí je možné vyjádřit Airyho funkci pomocí dvou holomorfních funkcí. Definujme dvě komplexní čísla z_1 a z_2

$$z_i = x + s_i y, \quad \bar{z}_i = x + \bar{s}_i y, \quad (45)$$

kde $i = 1, 2$. Pokud $s_1 \neq s_2$, má Airyho funkce obecný tvar

$$U(x, y) = \operatorname{Re} \left[\int_{z_1^0}^{z_1} \psi_1(z_1') dz_1' + \int_{z_2^0}^{z_2} \psi_2(z_2') dz_2' \right], \quad (46)$$

kde $\psi_1(z_1)$ a $\psi_2(z_2)$ jsou holomorfní funkce. Jestliže $s_1 = s_2$, je řešení pro Airyho funkci

$$U(x, y) = \operatorname{Re} \left[\bar{z}_1 \varphi(z_1) + \int_{z_1^0}^{z_1} \psi(z_1') dz_1' \right], \quad (47)$$

kde $\varphi(z_1)$ a $\psi(z_1)$ jsou holomorfní funkce. V případě izotropního materiálu jsou kořeny charakteristické rovnice $\pm i$ a řešení pro Airyho funkci se redukuje na tvar (7). Tabulka 3 uvádí složky napětí, posunutí a výsledné síly na některém oblouku L vypočtené pomocí rovnic (47) a (41):

| veličina | výraz |
|---------------|---|
| σ_{xx} | $\text{Re} [s_1^2 \psi_1' + s_2^2 \psi_2']$ |
| σ_{yy} | $\text{Re} [\psi_1' + \psi_2']$ |
| σ_{xy} | $-\text{Re} [s_1 \psi_1' + s_2 \psi_2']$ |
| u_x | $\text{Re} [(D_{11}s_1^2 - D_{16}s_1 + D_{12}) \psi_1 + (D_{11}s_2^2 - D_{16}s_2 + D_{12}) \psi_2]$ |
| u_y | $\text{Re} [(D_{12}s_1^2 - D_{26}s_1 + D_{22}) \psi_1/s_1 + (D_{12}s_2^2 - D_{26}s_2 + D_{22}) \psi_2/s_2]$ |
| F_x^V | $\text{Re} [s_1 \psi_1 + s_2 \psi_2]$ |
| F_y^V | $-\text{Re} [\psi_1 + \psi_2]$ |

Tabulka 3: Výrazy pro napětí, posunutí a výslednou sílu v anisotropním materiálu vyjádřené pomocí komplexních Muschelišviliho potenciálů.

Podobně jako v isotropním prostředí se Muschelišviliho komplexní potenciály pro dislokaci v anisotropním materiálu hledají ve tvaru

$$\psi_1 = A_1 \ln z_1, \quad \psi_2 = A_2 \ln z_2, \quad (48)$$

přičemž komplexní konstanty A_1 a A_2 se vypočtou ze stejných podmínek, tj. $[F_x^V + iF_y^V] = 0$ a $[u_x + iu_y] = [b_x + ib_y]$, viz (13) a (14). Při využití výrazů v Tabulce 3 jsme nakonec postaveni před řešení soustavy

$$\begin{bmatrix} \text{Im}s_1 & \text{Re}s_1 & \text{Im}s_2 & \text{Re}s_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \text{Im}p_1 & \text{Re}p_1 & \text{Im}p_2 & \text{Re}p_2 \\ \text{Im}q_1 & \text{Re}q_1 & \text{Im}q_2 & \text{Re}q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Re}A_1 \\ \text{Im}A_1 \\ \text{Re}A_2 \\ \text{Im}A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_x/2\pi \\ b_y/2\pi \end{bmatrix}, \quad (49)$$

kde

$$p_i = D_{11}s_i^2 - D_{16}s_i + D_{12}, \quad q_i = \frac{D_{12}s_i^2 - D_{26}s_i + D_{22}}{s_i}, \quad \text{pro } i = 1, 2.$$

Řešení (49) označíme zkráceně jako $A_i(b) = \text{Re}A_i(b) + i\text{Im}A_i(b)$, kde $b = b_x + ib_y$.

Model rovinné trhliny v anisotropním prostředí vytvoříme stejně jako v isotropním prostředí spojitým rozložením dislokací podle obr. 5(a) a zavedením neznámé dislokační hustoty $B = B_x + iB_y$. Integrální rovnici pro dislokační hustotu odvodíme opět na základě superpozice napětových polí od jednotlivých dislokací a z Buecknerova principu. Jistou komplikaci přináší dobře známá skutečnost, že v anisotropních prostředích vznikají obecně smykové deformace i při jednoosém tahovém namáhání, viz (41). Obdobou integrální singulární rovnice (22) při jinak stejných podmínkách zatížení je v obecně anisotropním prostředí rovnice

$$-\sigma_{yy}^\infty(x) = \int_{-a}^a \frac{1}{x-\xi} \text{Re} \left\{ s_1^2 A_1 [B(\xi)] + s_2^2 A_2 [B(\xi)] \right\} d\xi, \quad (50)$$

doplněná podmínkou konzistence $\int_{-a}^a B(\xi) d\xi = 0$, viz (27).

5 Ilustrace metody v některých úlohách lomové mechaniky částicových kompozitů

První příklad (Kotoul a Profant, 2000) se týká analýzy interakce přemostěné hlavní trhliny s obecně orientovanou mikrotrhlinou v částicových kompozitech, které jsou tvořené křehkou maticí a tvárnými inkluzemi. Při šíření lomu postupuje čelo trhliny křehkou maticí a

obchází tvárné inkluze, které tak postupně vytvářejí za čelem trhliny izolované tvárné můstky schopné přenášet napětí a uzavírat trhlínu. Tento mechanismus vede ke zvyšování lomové houževnatosti kompozitu. Mimo to může v daných materiálech docházet k nukleaci mikrotrhlin v okolí vrcholu hlavní trhliny, čímž dochází k ovlivnění lomové houževnatosti v pozitivním i negativním smyslu. Aby bylo možné problém analyticky zvládnout, nahrazuje se soustava izolovaných můstků za čelem trhliny kontinuem s jistou efektivní mezí kluzu v rozsahu vzdálenosti l_p za čelem trhliny

$$\sigma_0 = \sigma_y (1 - f), \quad (51)$$

kde σ_y je mez kluzu můstků, f je objemový podíl inkluzí. Tato zóna se pak modeluje pomocí neznámého spojitého rozdělení hranových dislokací. Metoda umožňuje stanovit lokální součinitele intenzity napětí pro vrchol magistralní trhliny K_I^{loc} a K_{II}^{loc} a otevření trhliny na konci zóny tvárných můstků Δ pro obecnou polohu, orientaci a délku mikrotrhliny. Vypočtené hodnoty lokálních součinitelů intenzity napětí a rozevření na konci ligamentované zóny pak vystupují v kritériích pro iniciaci růstu hlavní trhliny.

Při formulaci problému se předpokládá, že délka mikrotrhliny, délka ligamentované zóny a vzdálenost mikrotrhliny od vrcholu hlavní trhliny jsou značně menší než délka hlavní trhliny. To umožňuje uvažovat hlavní trhlínu jako polonekonečnou a zanedbat interakci systému hlavní trhlina - mikrotrhlina s vnější hranicí tělesa. Koncepce polonekonečné trhliny dovoluje aproximovat nominální napěťové pole (tj. pole, které by existovalo v nepřítomnosti mikrotrhliny a ligamentované zóny) singulárním členem asymptotického rozvoje pole napětí v okolí vrcholu hlavní trhliny, ve kterém vystupuje tzv. nominální (aplikovaný) součinitel intenzity napětí K_I^N , resp. K_{II}^N . Nominální součinitele intenzity napětí slouží pak jako zatěžovací parametry a lze je nalézt na makroúrovni např. metodou konečných prvků.

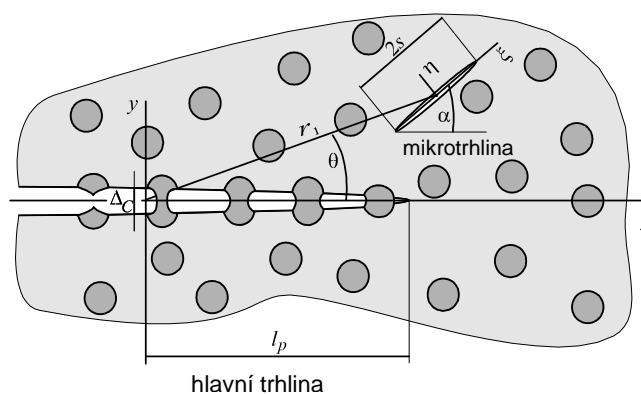
Nominální pole napětí je charakterizováno Muschelišviliho potenciály Φ^N a Ψ^N . V souřadném systému podle obr. 7 leží polonekonečná trhlina podél záporné osy x , potenciály Φ^N a Ψ^N se definují vztahy

$$\Phi^N(z) = \frac{K_I^N - iK_{II}^N}{2\sqrt{2\pi z}}, \quad \Psi^N(z) = \overline{\Phi^N(z)} - \Phi^N(z) - z\Phi^{N'}(z). \quad (52)$$

Pomocí (52), (8) a (9) se lehko ukáže, že nominální napětí podél $z = x$, $x > 0$ jsou

$$(\sigma_{yy} + i\sigma_{xy})^N = 2 \operatorname{Re}[\Phi(x)] + x\Phi^{N'}(x) + \Psi^N(x) = \frac{K_I^N + iK_{II}^N}{\sqrt{2\pi x}}. \quad (53)$$

Napěťové potenciály odpovídající bodové reprezentaci mikrotrhliny $\Phi_{MC}^{P\infty}$ a $\Psi_{MC}^{P\infty}$ lze získat pro velké hodnoty $\frac{|z|}{s}$ z prvního členu asymptotického rozvoje potenciálů trhliny zatížené v nekonečnu normálovým napětím $\sigma_{yy} = \sigma$ a smykovým napětím $\sigma_{xy} = \tau$



Obr. 7: Konfigurace obecně umístěné a orientované mikrotrhliny.

$$\Phi_{MC}^{P\infty}(z; z_1) = \frac{s^2 e^{2i\alpha} (\sigma - i\tau)}{4(z - z_1)^2}, \quad (54)$$

$$\Psi_{MC}^{P\infty}(z; z_1) = \frac{s^2 \sigma}{2(z - z_1)^2} + z_1 \frac{s^2 e^{2i\alpha} (\sigma - i\tau)}{2(z - z_1)^3}. \quad (55)$$

Fyzikálně představují veličiny σ a τ jisté "efektivní" pole napětí, do kterého je umístěna mikrotrhlina. Toto pole je superpozicí pole generovaného hlavní trhlinou, ligamentovanou zónou a interakčními efekty, které na efektivním poli závisejí. "Efektivní" pole je na počátku neznámé a najde se v průběhu řešení z podmínky self - konzistence (tj. tak, aby byla zajištěna rovnost mezi hodnotou efektivního pole a hodnotou výsledku superpozice jednotlivých příspěvků k efektivnímu poli, z nichž některé jsou na tomto poli závislé).

Ligamentovaná zóna je simulována prostřednictvím neznámého spojitého rozložení hranových dislokací s hustotou Burgersova vektoru $B(x)$. Komplexní potenciály pro spojitou distribuci hranových dislokací $\Phi_{MZ}(z)$, $\Psi_{MZ}(z)$ ležících podél osy x v intervalu $\langle 0; l_p \rangle$ jsou dány vztahy

$$\Phi_{MZ}(z) = i\lambda \int_0^{l_p} \frac{B(t) dt}{z - t}, \quad (56)$$

$$\Psi_{MZ}(z) = -i\lambda \int_0^{l_p} \frac{\overline{B(t)} dt}{z - t} + i\lambda \int_0^{l_p} \frac{tB(t) dt}{(z - t)^2}, \quad (57)$$

kde $\lambda = \frac{G}{4(1-\nu)\pi}$.

Mikrotrhlina a spojitě rozdělení dislokací vedou ke vzniku normálových a smykových napětí v místech líců hlavní trhliny. Aby líce trhliny zůstaly volné, je zapotřebí vytvořit zrcadlová pole napětí, která se vyruší v místech líců hlavní trhliny s výše uvedenými složkami normálových a smykových napětí. Pomocí komplexních potenciálů se zrcadlové pole rušící vliv mikrotrhliny vyjádří vztahy

$$\Phi_{MC}^{PI}(z; z_1) = M\Gamma(z; z_1) + \left(\frac{s^2 \sigma}{2} - \overline{M} \right) \Gamma(z; z_1) + \overline{M} (z_1 - z_1) \frac{\partial \Gamma(z; z_1)}{\partial z_1}, \quad (58)$$

$$\Psi_{MC}^{PI}(z; z_1) = \overline{\Phi_{MC}^{PI}(z; z_1)} - \Phi_{MC}^{PI}(z; z_1) - z \frac{\partial \Phi_{MC}^{PI}(z; z_1)}{\partial z}, \quad (59)$$

kde

$$\Gamma(z; z_1) = \frac{1}{4\sqrt{z}\sqrt{z_1}(\sqrt{z} + \sqrt{z_1})^2} \quad (60)$$

a $M = \frac{s^2 e^{i2\alpha} (\sigma - i\tau)}{4}$. Zrcadlové pole rušící vliv ligamentované zóny je

$$\Phi_{MZ}^{PI}(z) = -i\lambda \int_0^{l_p} \left[\frac{\overline{B(t)}}{z - t} + \frac{tB(t)}{(z - t)^2} \right] dt, \quad (61)$$

$$\Psi_{MZ}^{PI}(z) = \overline{\Phi_{MZ}^{PI}(z)} - \Phi_{MZ}^{PI}(z) - z \frac{\partial \Phi_{MZ}^{PI}(z)}{\partial z}. \quad (62)$$

Pro zahrnutí interakce mikrotrhlina-ligamentovaná zóna je nutné vypočítat napětí generované mikrotrhlinou podél ligamentované zóny a naopak, napětí generované ligamentovanou zónou v rovině mikrotrhliny. Napětí generované mikrotrhlinou podél ligamentované

zóny se vyjádří pomocí komplexních potenciálů

$$\begin{aligned} (\sigma_{yy}(x, 0) + i\sigma_{xy}(x, 0))_{x>0}^{MC/MZ} &= 2 \operatorname{Re} \left[\Phi_{MC}^{P\infty}(x; z_1) + \Phi_{MC}^{PI}(x; z_1) \right] + \\ &+ x \frac{\partial}{\partial x} \left[\Phi_{MC}^{P\infty}(x; z_1) + \Phi_{MC}^{PI}(x; z_1) \right] + \Psi_{MC}^{P\infty}(x; z_1) + \Psi_{MC}^{PI}(x; z_1). \end{aligned} \quad (63)$$

Analogicky, napětí generované ligamentovanou zónou podél mikrotrhliny je v souřadném systému (ξ, η) , viz obr. 2, dáno vztahy

$$\begin{aligned} (\sigma_{\eta\eta}(z_1) + i\sigma_{\xi\eta}(z_1))^{MZ/MC} &= 2 \operatorname{Re} \left[\Phi_{MZ}(z_1) + \Phi_{MZ}^{PI}(z_1) \right] + \\ &+ e^{i2\alpha} \left[z_1 \left(\Phi_{MZ}(z_1) + \Phi_{MZ}^{PI}(z_1) \right)' + \Psi_{MZ}(z_1) + \Psi_{MZ}^{PI}(z_1) \right]. \end{aligned} \quad (64)$$

Samotné spojité rozdělení dislokací indukuje podél ligamentované zóny nenulová napětí

$$\begin{aligned} (\sigma_{yy}(x, 0) + i\sigma_{xy}(x, 0))_{x>0}^{MZ} &= 2 \operatorname{Re} \left[\Phi_{MZ}(x) + \Phi_{MZ}^{PI}(x) \right] + \\ &+ x \left(\Phi_{MZ}(x) + \Phi_{MZ}^{PI}(x) \right)' + \Psi_{MZ}(x) + \Psi_{MZ}^{PI}(x). \end{aligned} \quad (65)$$

Neznámé efektivní pole napětí σ , τ a neznámá hustota Burgersova vektoru $B(x)$ se určí z podmínky rovnováhy podél ligamentované zóny a z podmínky self-konzistence v místě mikrotrhliny. Podmínka rovnováhy vyžaduje

$$(\sigma_{yy}(x, 0) + i\sigma_{xy}(x, 0))^N + (\sigma_{yy}(x, 0) + i\sigma_{xy}(x, 0))_{x>0}^{MC/MZ} + (\sigma_{yy}(x, 0) + i\sigma_{xy}(x, 0))_{x>0}^{MZ} - \sigma_0 = 0 \quad (66)$$

Dosazením z rovnic (53), (63) a (65) do rov. (66) a využitím odvozených vztahů pro komplexní potenciály obdržíme integrální rovnici pro hustotu Burgersova vektoru

$$\begin{aligned} i2\lambda \int_0^{l_p} \frac{\sqrt{t} B(t)}{x-t} dt &= \sigma_0 \sqrt{x} - \frac{K_I^N - iK_{II}^N}{\sqrt{2\pi}} - M \left[\frac{\sqrt{x}}{(x-z_1)^2} + 2\Gamma(x; z_1) \sqrt{x} \right] - \frac{s^2 \sigma}{2} \frac{\sqrt{x}}{(x-z_1)^2} - \\ &- \left(\frac{s^2 \sigma}{2} - \bar{M} \right) 2\Gamma(x; z_1) \sqrt{x} - \bar{M} \left[2(z_1 - z_1) \sqrt{x} \frac{\partial \Gamma(x; z_1)}{\partial z_1} + \frac{\sqrt{x}}{(x-z_1)^2} - 2\sqrt{x} \frac{x-z_1}{(x-z_1)^3} \right]. \end{aligned} \quad (67)$$

Její řešení se dá nalézt v uzavřeném tvaru a závisí parametricky na efektivním napětí σ , τ . Podobně závisí parametricky na σ , τ také komplexní potenciály $\Phi_{MZ}(z)$, $\Psi_{MZ}(z)$, $\Phi_{MZ}^{PI}(z)$ a $\Psi_{MZ}^{PI}(z)$ po dosazení za $B(x)$. Příslušné hodnoty σ a τ se vypočtou z podmínky self-konzistence, jejíž použití obchází obtíže vyvolané zpětnou vazbou spojenou s přerozdělením pole napětí mikrotrhlinou. Podmínka self-konzistence má tvar

$$(\sigma_{\eta\eta}(z_1) + i\sigma_{\xi\eta}(z_1))^N + (\sigma_{\eta\eta}(z_1) + i\sigma_{\xi\eta}(z_1))^{MC} + (\sigma_{\eta\eta}(z_1) + i\sigma_{\xi\eta}(z_1))^{MZ/MC} = \sigma + i\tau, \quad (68)$$

který ukazuje, že efektivní pole σ , τ vzniká složením nominálního pole napětí, viz první člen na levé straně rovnice (68), zrcadlového pole generovaného mikrotrhlinou, viz druhý člen a pole, které generuje ligamentovaná zóna. Zrcadlová napětí, vznikající v důsledku interakce mikrotrhliny a hlavní trhliny se vypočtou pomocí komplexních potenciálů (58) a (59) podle vzorce

$$(\sigma_{\eta\eta}(z_1) + i\sigma_{\xi\eta}(z_1))^{MC} = 2 \operatorname{Re} \left[\Phi_{MC}^{PI}(z_1) \right] + e^{i2\alpha} \left[z_1 \left(\Phi_{MC}^{PI}(z_1) \right)' + \Psi_{MC}^{PI}(z_1) \right]. \quad (69)$$

Zrcadlová napětí $(\sigma_{\eta\eta} + i\sigma_{\xi\eta})^{MC}$ a interakční napětí $(\sigma_{\eta\eta} + i\sigma_{\xi\eta})^{MZ/MC}$, viz (64), závisí na neznámých hodnotách efektivního pole σ , τ , které se tak stanoví z (68).

Rov. (68) lze přepsat na systém dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé σ, τ

$$\left[I - \left(\frac{s}{4r_1} \right)^2 A^{MC}(\theta, \alpha) - \frac{1}{\pi^2} A^{MZ/MC} \left(\frac{s}{l_p}, \frac{l_p}{r_1}, \theta, \alpha \right) \right] \begin{bmatrix} \sigma \\ \tau \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi r_1}} B^N(\theta, \alpha) + \frac{1}{\pi^2 \sqrt{2\pi r_1}} B^{MZ/MC} \left(\frac{s}{l_p}, \frac{l_p}{r_1}, \theta, \alpha \right) \right] \begin{bmatrix} K_{II}^N \\ K_{II}^N \end{bmatrix} + c^{MZ/MC} \left(\frac{s}{l_p}, \frac{l_p}{r_1}, \theta, \alpha \right) \sigma_0, \quad (70)$$

kde I označuje jednotkovou matici řádu 2×2 , matice A^{MC} může být odvozena ze zrcadlových napětí od mikrotrhliny, matice B^N pochází od nominálního pole napětí a matice $A^{MZ/MC}$ a $B^{MZ/MC}$ a 2-dimensionální vektor $c^{MZ/MC}$ se odvodí z výrazu pro napětí generovaného ligamentovanou zónou $(\sigma_{\eta\eta} + i\sigma_{\xi\eta})^{MZ/MC}$.

Máme-li vypočtenou hustotu Burgersova vektoru $B(x)$ a efektivní pole napětí σ, τ , můžeme stanovit napětí podél osy x , $x \geq l_p$, z rovnice

$$(\sigma_{yy} + \sigma_{xy})_{y=0} = 2\text{Re}\Phi_{MZ}(x) + x\Phi'_{MZ}(x) + \Psi_{MZ}(x) = 2i\lambda \int_0^{l_p} \frac{\overline{B(t)}}{t-x} dt, \quad (71)$$

kde nyní $B(x)$ je známé řešení integrální rovnice (67) se známými hodnotami parametrů σ, τ . Lokální součinitelé intenzity napětí se pak určí ze standardního vzorce

$$K_I^{loc} - iK_{II}^{loc} = \lim_{x \rightarrow l_p^+} \sqrt{2\pi(x-l_p)} 2\lambda\pi B(x; \sigma, \tau), \quad (72)$$

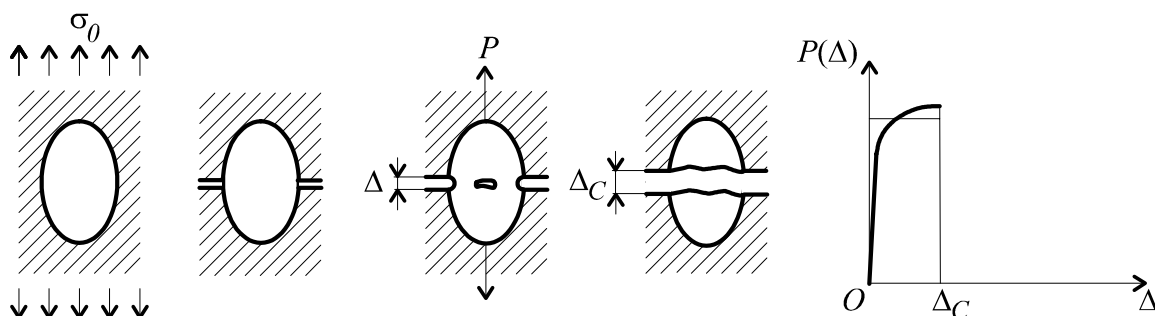
přičemž σ a τ se získají řešením (70).

Rozevření trhliny v bodě $z = 0$ se vypočte podle definice

$$[u_x + iu_y]_{x=0} = - \int_0^{l_p} B(t) dt = \frac{i\sqrt{l_p}}{2\pi^2\lambda} \sum_{k=1}^6 V_k \left(\frac{s}{l_p}, \frac{l_p}{r_1}, \theta, \alpha \right), \quad (73)$$

kde $V_k, k = 1..6$ jsou dvojnásobné singulární integrály a lze je nalézt v uzavřeném tvaru.

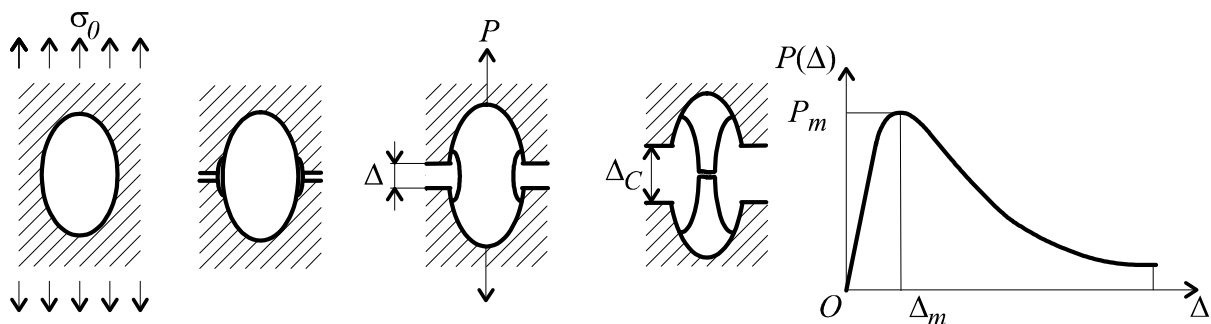
Druhý příklad (Kotoul a Urbiš, 2001) je věnován ukázce použití techniky rozložených dislokací pro případ, že napětí přenášené ligamentovanou zónou trhliny je nelineární funkcí rozevření trhliny. Současně se analyzuje vliv dekoheze rozhraní matrice/částice na výslednou lomovou houževnatost kompozitu.



Obr. 8: Model částice s vysokou pevností rozhraní částice/matrice a schematická závislost síly přenášené částicí na rozevření trhliny.

Obr. 8 např. ilustruje případ, kdy pevnost rozhraní částice/matrice je vysoká a nedochází k žádné dekohezi. Plastická deformace se pak lokalizuje jen v tenké vrstvě ležící v rovině trhliny a kritické rozevření trhliny Δ_C pro přetržení této vrstvy je nízké. Na druhou stranu

nízká pevnost rozhraní by vedla k celkové dekohezi částice a účinek přemostění trhliny by byl nevýznamný. Nedošlo by k žádnému zvýšení lomové houževnatosti kompozitu. Optimální situaci ilustruje obr. 9. Částečná dekoheze rozhraní umožní významné plastické deformace téměř v celém objemu částice a vznik krčku. Relativně nízká pevnost částice stačí k udržení rovnováhy se zbytkovou výslednou silou P na rozhraní částice/matrice. Obrázky 1 a 2 rovněž kvalitativně ukazují průběh přemostující síly P v závislosti na rozevření trhliny a pevnosti rozhraní.

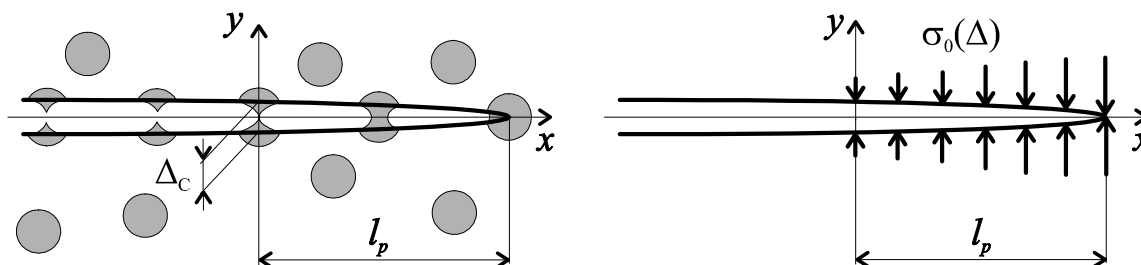


Obr. 9: Model částice s optimální pevností rozhraní částice/matrice a schematická závislost síly přenášené částicí na rozevření trhliny.

Pro zjednodušení matematického modelování uzavírajících sil nahradíme izolované můstky kontinuem s efektivním normálovým napětím σ_0 , které působí do specifikované vzdálenosti l_p za čelem trhliny určené délkou ligamentované zóny. Síla přenášená ligamenty podél trhliny je obecně funkcí polohy a rozevření trhliny. Efektivní normálové napětí σ_0 lze svázat se zbytkovou silou P přenášenou jedním plastickým můstkem následujícím postupem: označme pomocí R poloměr nedeformovaných částic a pomocí l střední mezičásticovou vzdálenost. Pak $\sigma_0 = P/l^2$, přičemž $R/l = (3f/(4\pi))^{1/3}$, kde f je objemový podíl částic. Takže

$$\sigma_0 = \frac{P}{R^2} \left(\frac{3f}{4\pi} \right)^{2/3} . \quad (74)$$

Předpokládejme, že délka trhliny je značně větší než charakteristická dimenze mikrostruktury (střední vzdálenost částic, velikost částic, apod.) a než délka ligamentované zóny a že interakce mezi hlavní trhlinou a ligamentovanou zónou není ovlivněna hranicemi tělesa. Podobně jako v předcházejícím příkladě je možné přijmout model polonekonečné trhliny zatížené v módu I nominálním (aplikovaným) součinitelem intenzity napětí K_I^N , který reprezentuje zatížení v nekonečnu. Úkolem je nalézt lokální součinitel intenzity napětí K_I^{loc} na čele ligamentované zóny trhliny a rozevření trhliny podél této zóny pro zadaný aplikovaný součinitel intenzity napětí K_I^N a sestavit vhodné kritérium stability trhliny.



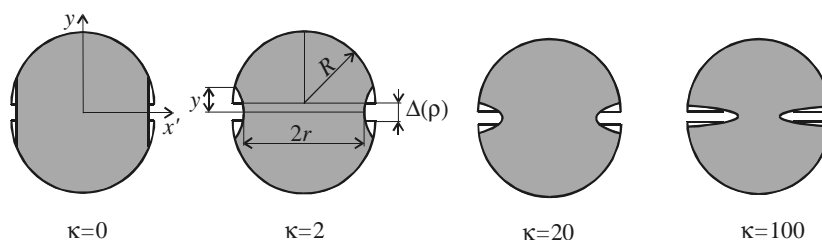
Obr. 10: Schéma geometrie trhliny a souřadnicový systém.

Při řešení okrajové úlohy se ligamentovaná zóna modeluje pomocí neznámé distribuce hranových dislokací a úloha se převede na hypersingulární integrální rovnici pro neznámé rozevření

trhliny způsobem popsaným v části 3. Ve sledovaném případě má hypersingulární integrální rovnice tvar

$$\int_{-1}^1 \frac{\Delta(\rho_0) d\rho_0}{(\rho_0 - \rho)^2} + \int_{-1}^1 \frac{\Delta(\rho_0)}{R} \frac{d\rho_0}{(\rho + 2 + \rho_0)^2} = -\frac{2(1 - \nu^2)}{ER} \left[\sqrt{2\pi} \sqrt{I_p} K_1^N - \pi(\rho + 1) I_p \sigma_0 \left(\frac{\Delta(\rho)}{R} \right) \right], \quad (75)$$

kde $\rho = 2\sqrt{x/I_p} - 1$ je transformovaná souřadnice bodů ligamentované zóny, E je Youngův modul pružnosti kompozitu a ν je Poissonovo číslo. Dále se zaměříme na odvození závislosti $\sigma_0(\Delta(\rho)/R)$. Sledujme obr. 11; původní sférická částice vytváří v průběhu deformace krček



Obr. 11: Tvar deformované částice pro různé hodnoty parametru rozhraní. $\kappa = 0$ slabé rozhraní, $\kappa = 2, 20$ středně pevné rozhraní a $\kappa = 100$ pevné rozhraní.

s parabolickým profilem. Označíme-li pomocí r poloměr nosného průřezu částice a pomocí y vertikální souřadnici průsečíku parabolického krčku s nedeformovanou sférickou částí inkluze, můžeme tyto veličiny svázat vztahem

$$\frac{r}{R} = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{R} - \frac{\Delta(\rho)}{2R} \right)^2 - \kappa \left(\frac{y}{R} \right)^2}, \quad (76)$$

kde parametr κ specifikuje křivost zvoleného parabolického profilu $\frac{x'}{R} = \kappa \left(\frac{y}{R} \right)^2 + \frac{r}{R}$. Z obr. 11 je vidět, že tento parametr determinuje rozsah dekoheze rozhraní částice/matrice. Je tedy v těsném vztahu s pevností tohoto rozhraní a lze jej užívat jako jeden z kompozitních parametrů. Další rovnice pro stanovení r , y a rozevření trhliny $\Delta(\rho)$ vyplývá z požadavku konstantního objemu během plastické deformace

$$2 = \left(1 - \frac{y}{R} + \frac{\Delta(\rho)}{2R} \right)^2 \left(2 + \frac{y}{R} - \frac{\Delta(\rho)}{2R} \right) + 3 \left[\frac{1}{5} \kappa^2 \left(\frac{y}{R} \right)^5 + \frac{2}{3} \kappa \frac{r}{R} \left(\frac{y}{R} \right)^3 + \frac{y}{R} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]. \quad (77)$$

Pro speciální případ $\kappa = 0$ je možné rovnice (76) a (77) řešit analyticky.

Uvažujme nyní pro jednoduchost ideální plastické částice s mezí kluzu σ_y . Síla P přenášená jednou částicí je $P = \pi r^2 \sigma_1$, kde σ_1 je střední osové napětí odhadnuté z Bridgmanova řešení:

$$\sigma_1 = \sigma_y \left(1 + \frac{R}{\kappa r} \right) \ln \left(1 + \frac{\kappa r}{R} \right), \quad (78)$$

kde $1/(2\kappa)$ je křivost krčku vytvořeného na částici vyjádřená v normalizovaných souřadnicích x/R a y/R , viz výše. Dosazením do rovnice (74) obdržíme pro efektivní normálové napětí σ_0

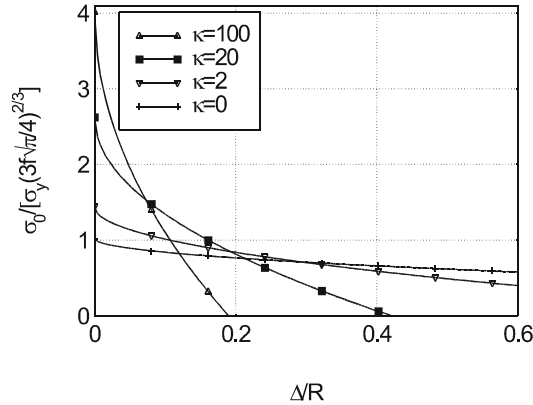
$$\sigma_0 = \sigma_y \left(\frac{3f\sqrt{\pi}}{4} \right)^{2/3} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \left(1 + \frac{R}{\kappa r} \right) \ln \left(1 + \frac{\kappa r}{R} \right). \quad (79)$$

Jestliže v rovnici (79) vyjádříme r/R jako funkci rozevření $\Delta(\rho)/R$, kterou získáme řešením rovnic (76) a (77), můžeme nakonec vyjádřit σ_0 jako funkci $\Delta(\rho)/R$. Tyto závislosti jsou

uvedeny na obr. 12 v normovaném tvaru $\sigma_0 / \left[\sigma_y (3f\sqrt{\pi}/4)^{3/2} \right]$ pro různá κ . Numericky vypočtené závislosti výborně fitují paraboly typu

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_y \left(\frac{3f\sqrt{\pi}}{4} \right)^{2/3}} = -c \sqrt{\frac{\Delta(\rho)}{R}} + d, \quad (80)$$

získané metodou nejmenších čtverců, kde pro $\kappa = 0$: $c = 0,570$, $d = 1,020$, $\kappa = 2$: $c = 1,34$, $d = 1,04$, $\kappa = 20$: $c = 4,04$, $d = 2,62$, a $\kappa = 100$: $c = 9,22$, $d = 4,02$. Tato proložení nejsou na obr. 12 zobrazena, protože v grafické podobě jsou prakticky nerozlišitelná od numerických hodnot.



Obr. 12: Závislost efektivního normovaného napětí $\sigma_0 / \left[\sigma_y (3f\sqrt{\pi}/4)^{3/2} \right]$ na normovaném rozevření Δ/R pro různé křivosti κ .

Dosadme aproximaci $\sigma_0 (\Delta(\rho)/R)$ z rov.(80) do rov. (75) a přepíšme ji formálně do tvaru

$$L_{-1}^1 \left[\frac{\Delta}{R} \right] (\rho) + \varepsilon \Lambda(\rho) \sqrt{\frac{\Delta(\rho)}{R}} = \Psi(\rho), \quad (81)$$

kde L_{-1}^1 je integrální operátor definovaný jako

$$L_{-1}^1 \left[\frac{\Delta}{R} \right] (\rho) = \int_{-1}^1 \frac{1}{(\rho' - \rho)^2} \frac{\Delta(\rho')}{R} d\rho' + \int_{-1}^1 \frac{1}{(\rho' + \rho + 2)^2} \frac{\Delta(\rho')}{R} d\rho', \quad (82)$$

$\Lambda(\rho)$ a $\Psi(\rho)$ jsou lineární funkce

$$\Lambda(\rho) = a(\rho + 1), \quad \Psi(\rho) = \varepsilon b(\rho + 1) - \omega, \quad (83)$$

kde $\omega = \frac{2(1-\nu^2)}{E} \sqrt{2\pi} \frac{\sqrt{l_p}}{R} K_I^N$ a ε je parametr definovaný vztahem

$$\varepsilon = \frac{2\pi(1-\nu^2)}{E} \sigma_y \left(\frac{3f\sqrt{\pi}}{4} \right)^{2/3} \frac{l_p}{R}, \quad (84)$$

který v širokém intervalu typických hodnot materiálových vlastností vyhovuje nerovnosti $\varepsilon < 1$. Pro $\varepsilon < 1$ je možné zavést asymptotický rozvoj $\Delta(\rho)/R$ podle ε

$$\frac{\Delta(\rho)}{R} \cong \sum_{p=0}^N \varepsilon^p \frac{\phi_p(\rho)}{R}, \quad \phi_p(\rho) = 0 \text{ pro } \rho = 1, \quad (85)$$

kde N je dostatečně velké kladné celé číslo. Dále je výhodné přepsat rov. (81) do tvaru

$$\varepsilon^2 \Lambda^2(\rho) \frac{\Delta(\rho)}{R} = \left\{ \Psi(\rho) - L_{-1}^1 \left[\frac{\Delta}{R} \right] (\rho) \right\}^2. \quad (86)$$

Dosažením rozvoje (85) do rov. (86) a přeuspořádáním členů získáme následující systém rekurzivních lineárních integrálních singulárních rovnic, které vyplývají z porovnání koeficientů u stejných mocnin parametru ε

$$\begin{aligned} L_{-1}^1 \left[\frac{\phi_0}{R} \right] (\rho) &= -\omega, \quad L_{-1}^1 \left[\frac{\phi_1}{R} \right] (\rho) = \rho + 1 + \Lambda(\rho) \sqrt{\omega} \frac{\phi_0}{R}, \quad L_{-1}^1 \left[\frac{\phi_2}{R} \right] (\rho) = \frac{\Lambda(\rho) \frac{\phi_1}{R}}{2\sqrt{\frac{\phi_0}{R}}}, \\ L_{-1}^1 \left[\frac{\phi_p}{R} \right] (\rho) &= \frac{1}{2\Lambda(\rho) \sqrt{\frac{\phi_0}{R}}} \left\{ \Lambda^2(\rho) \frac{\phi_{p-1}}{R} - \sum_{m=2}^{p-1} L_{-1}^1 \left[\frac{\phi_m}{R} \right] (\rho) L_{-1}^1 \left[\frac{\phi_{p+1-m}}{R} \right] (\rho) \right\}, \quad p = 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (87)$$

Řešení singulárních integrálních rovnic (87) se vyjádří podle třetí části ve tvaru $\phi_p(\rho) = F_p(\rho) w(\rho)$, kde F_p je neznámá ohraničená funkce a $w(\rho)$ je fundamentální (váhová) funkce determinovaná charakterem odpovídajícího okrajového problému. V daném případě je $w(\rho) = \sqrt{1-\rho}$. Neznámá funkce F_p se aproximuje konečnou řadou

$$F_p(\rho) \cong \sum_{j=0}^s a_{pj} \rho^j, \quad (88)$$

a koeficienty a_{pj} se určí kolokační metodou. Po vyřešení integrální rovnice (75) vyjádříme vztah pro lokální součinitel intenzity napětí K_I^{loc} podle standardního vzorce

$$K_I^{\text{loc}} = \frac{E}{4(1-\nu^2)} \lim_{\rho \rightarrow 1^-} \frac{2\sqrt{\pi}\Delta(\rho)}{\sqrt{2l_p(1-\rho)(\rho+3)}}. \quad (89)$$

Nakonec sestavíme lomová kritéria. Nutnou podmínkou pro postup čela trhliny v matici je obvyklé kritérium LLM, nyní vyjádřené pomocí K_I^{loc} :

$$K_I^{\text{loc}} = K_{IC}, \quad (90)$$

kde K_{IC} je lomová houževnatost matrice. Fyzikální vrchol trhliny se ale nachází ve vzdálenosti l_p za čelem trhliny v matici, tj. v místech, kde došlo i k přerušení můstků a trhlina za tímto bodem nepřenesla žádné tahové zatížení. Podmínka pro postup fyzikálního vrcholu trhliny tedy je

$$\Delta(x=0) = \Delta_C, \quad (91)$$

kde Δ_C je kritické rozevření trhliny, viz. obr. 10. Formální tvar obou podmínek je

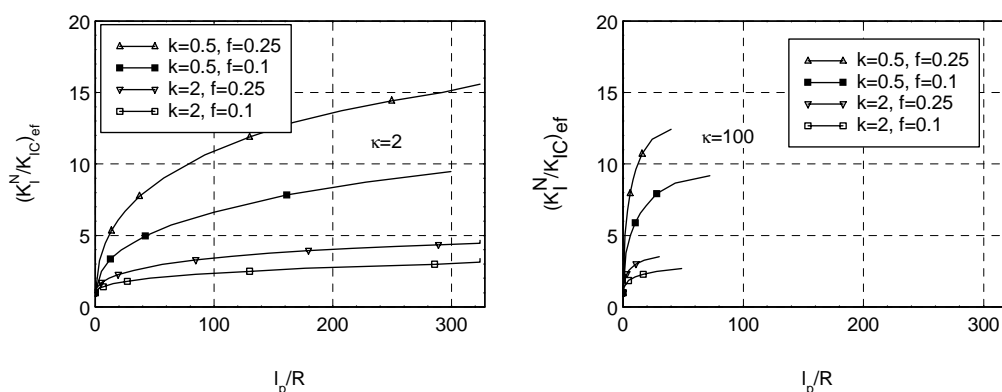
$$F_i \left(\frac{K_I^N}{K_{IC}}, \frac{l_p}{R}; k, \kappa, \frac{\sigma_y}{E}, \nu, \frac{\Delta_C}{R}, f \right) = 0 \quad i = 1, 2, \quad (92)$$

kde F_i jsou nelineární funkce proměnných $\frac{K_I^N}{K_{IC}}$ a $\frac{l_p}{R}$ a $k = \frac{K_{IC}}{2\sigma_y} \sqrt{\frac{\pi}{2R}}$, κ , $\frac{\sigma_y}{E}$, ν , $\frac{\Delta_C}{R}$ a f jsou parametry.

Kritické rozevření trhliny Δ_C je určeno mikromechanismem tvárného porušení částice. Při vysokém stupni geometrického stlačení částice je mikromechanismus tvárného porušení dán procesy nukleace, růstu a koalescence dutin a citlivě závisí na víceosém stavu napjatosti. Maximálního hydrostatického napětí σ_m je dosaženo ve středu částice a je přibližně

dáno vztahem $\sigma_m = \sigma_1 - 2/3\sigma_y$. Z literatury známý vztah pro lomovou deformaci ϵ_f danou podmínkou koalescence dutin ukazuje, že $\epsilon_f \sim \exp(-3\sigma_m/(2\sigma_y))$. ϵ_f tedy klesá s rostoucím κ a stejnou vlastnost vykazuje i Δ_C . Z uvedeného krátkého rozboru vyplývá, že otázka kritického rozevření trhliny v daných kompozitech představuje poměrně komplikovaný problém, jehož řešení vyžaduje numerické a experimentální studie deformované částice.

Rovnice (90) a (91) řešíme pro neznámé K_I^N/K_{IC} a l_p/R , přičemž řešení pro K_I^N/K_{IC} označíme symbolem $(K_I^N/K_{IC})_{ef}$. Tato veličina, kterou nazýváme normovanou efektivní lomovou houževnatostí kompozitu, popisuje účinek distribuce částic na zlepšení lomové houževnatosti matrice kompozitu. Na základě rovnic (90) a (91) lze nyní studovat vliv různých parametrů modelu na $(K_I^N/K_{IC})_{ef}$. Některé výsledky jsou ukázány na obr. 13, který demonstruje vliv různých parametrů na zvýšení lomové houževnatosti kompozitu.



Obr. 13: Numerické závislosti efektivní lomové houževnatosti kompozitu $(K_I^N/K_{IC})_{ef}$ na normalizované délce přemostěné zóny l_p/R pro $\sigma_y/E = 0,001$, $\nu = 0,2$ a několik hodnot kompozitních parametrů k, f , a κ .

6 Zhodnocení a perspektivy dalšího vývoje

Cílem přednášky bylo především vyložit podstatu metody, a proto se dotkla jen rovinných problémů lomové mechaniky v poměrně jednoduchých oblastech, viz. obr. 6. Rozšíření metody na konečné oblasti s obecnou hranicí nepředstavuje principiální problém - konečnou oblast nejprve doplníme na nekonečnou rovinu a podél křivky, představující hranici původního rovinného tělesa, rozmístíme dislokace s dopředu neznámou hustotou. Pro tyto dislokace můžeme používat již odvozená řešení pro oblasti na obr. 6. Podél hraniční křivky tak působí jednak zatížení původního konečného tělesa, jednak napětí od dislokací rozmístěných podél této křivky a také od dislokací modelujících trhlínu uvnitř oblastí. Způsobem vyloženým v druhé části nakonec sestavíme integrální rovnice pro dislokační hustoty podél hraniční křivky a podél trhliny a řešíme současně.

Také rozšíření metody na 3-dimenzionální úlohy nepředstavuje zásadní problém. Místo přímé dislokace užívané ve dvou dimenzích se zavede infinitezimální dislokační smyčka s Burgersovým vektorem, který v daném místě popisuje rozevření trhliny. Taková koncepce těsně souvisí s metodou vlastních deformací, která se používá v mechanice heterogenních prostředí. Úloha vede na řešení dvourozměrných hypersingulárních integrálních rovnic.

Mohlo by se namítnout, že v době výkonných počítačů a pokročilých systémů MKP, které mohou řešit lomově-mechanické problémy bez omezení na složitost geometrie tělesa, je používání metody spojitě rozložených dislokací diskutabilní. Je však třeba uvážit, že životnost většiny reálných konstrukcí s trhlínami je omezena únavou materiálu, která je silně ovlivněna koncentratory napětí. Při iniciaci relativně krátké trhliny v blízkosti defektu-koncentratoru napětí je okolní pole napětí téměř výlučně závislé na tomto defektu a na

charakteru vzdáleného vnějšího zatížení a vliv ostatních okrajů tělesa je nepodstatný. Totéž platí i po velkou část životnosti konstrukce, kdy trhliny zůstávají dostatečně krátké. Protože při únavovém růstu trhliny je rychlost jejího šíření úměrná typicky čtvrté mocnině součinitele intenzity napětí, je jeho přesná znalost nezbytná pro spolehlivou predikci životnosti. Strmé gradienty napětí v okolí defektu, ve kterém trhlina roste, vyžadují značné zjemnění sítě pro dosažení dostatečné přesnosti výpočtu součinitele intenzity napětí. Pro spolehlivou analýzu je zapotřebí také sledovat vývoj tvaru trhliny během růstu. K tomu je však zapotřebí průběžně provádět výpočet součinitele intenzity podél celého čela trhliny. Je zřejmé, že výpočetní čas pak extrémně rychle roste. V porovnání s tím je metoda rozložených dislokací mnohem více efektivní, protože blízké okrajové podmínky jsou automaticky splněny.

Také v oblasti modelování mikromechanismů porušování v heterogenních materiálech, jedná se především o přemostění líců trhliny materiálem druhé fáze a interakce trhliny s lokálními nehomogenitami, má uvedená metoda značné přednosti.

Závěrem je třeba uvést, že z hlediska dalšího vývoje se jeví jako velmi atraktivní hybridní přístup, založený na kombinaci metody konečných prvků a metody rozložených dislokací a to ve dvou směrech:

i) pomocí MKP propočítat stav napětí pro libovolnou geometrii tělesa a posléze na základě Buecknerova principu řešit dislokační technikou trhlinu, byť v druhé fázi výpočtu nebudou všechny okraje konstrukčního dílu zahrnuty,

ii) na makroúrovni řešit problém tělesa s trhlinou pomocí MKP a použít vypočtený součinitel intenzity napětí jako zatěžující parametr ve druhé části úlohy- na mikroúrovni, kde se modelují vlastní disipační mechanismy jako je např. přemostění trhliny v kompozitech, při využití metody rozložených dislokací. Přitom je třeba ověřovat, že oblast dominance singulárního pole na makroúrovni obklopuje oblast modelovaných mikromechanismů.

Druhý směr hybridního přístupu reprezentuje aplikaci tzv. víceúrovňového modelování v oblasti mechaniky materiálů, které se v poslední době začalo intenzivně rozvíjet.

7 Literatura

- Andersson, H., (1995). Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications. CRC Press, Boca Raton, An Arbor, London.
- Broberg, K.B., (1999). Cracks and Fracture. Academic Press, Cambridge.
- Broek, D., (1982). Elementary Engineering Fracture Mechanics. Martinus Nijhoff Publ., Hague.
- Bueckner, H.F., (1958). J. Appl. Mech. 80, 1225-1230.
- Čerepanov, G.P., (1979). Mechanics of Brittle Fracture. McGraw-Hill, New York.
- Erdogan, F. a Gupta, G.D., (1972). Q. Appl. Math. 30, 525-534.
- Erdogan, F., Gupta, G.D. a Cook, T.S., (1973). In Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems, Ed. G.C. Sih. Noordhoff, Leyden.
- Eshelby, J.D., (1957). Proc. Roy. Soc. (London) A241, 376-396.
- Freund, L.B., (1990). Dynamic Fracture Mechanics. Cambridge University Press, Cambridge.
- Hadamard, J., (1952). Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations. Dover, New York.
- Hahn, H.G., (1976). Bruchmechanik. B.G. Teubner, Stuttgart.
- Hellan, K., (1984). Introduction to Fracture Mechanics. McGraw-Hill, New York.
- Kanninen, M.F. a Popelar, C.H., (1985). Advanced Fracture Mechanics. Oxford University Press, Oxford.

- Knott, J.F., (1979). *Fundamentals of Fracture Mechanics*. Butterworth, London.
- Kotoul, M. a Profant, T., (2000). *Mech. Materials* 32, 203-234.
- Kotoul, M. a Urbiš, R., (2001). In *Proc. ICF10*, Eds. R.O. Ritchie, K. Ravi-Chandar a B.L. Karahaloo. Honolulu 2.12.-6.12. 2001.
- Kaya, A.C. a Erdogan, F., (1987). *Q. Appl. Math.* 45, 105-122.
- Lawn, B.R., (1993). *Fracture of Brittle Solids*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Liebowitz, H., editor, (1968-1972). *Fracture: An Advanced Treatise*. Vol. I-VII. Academic Press, New York.
- Muschelišvili, N.J., (1953a). *Some Basic Problems in the Mathematical Theory of Elasticity*. Noordhoff, Groningen.
- Muschelišvili, N.J., (1953b). *Singular Integral Equations*. Noordhoff, Groningen.
- Williams, M.L., (1957). *J. Appl. Mech.* 24., 109-113.
- Yokobori, T., (1965). *The Strength, Fracture and Fatigue of Materials*. Noordhoff, Groningen. (Přeloženo z japonského originálu (1955)).

8 Poděkování

Výsledky prezentované v této přednášce byly dosaženy při řešení grantových projektů GAČR (101/99/0829) a VVZ č. 1 FSI VUT.

9 English summary

The Distributed Dislocation Technique in Fracture Mechanics of Brittle Heterogeneous Solids

The lecture is concerned with the numerical solution of crack problems. The distributed dislocation technique is particularly appropriate when cracks are relatively short, and growing in the neighbourhood of some stress raising feature, causing a relatively steep stress gradient. It is therefore practicable to represent the geometry in an idealized way so that a precise solution may be obtained. This contrasts with, say, the finite element method in which the geometry is modelled exactly, but the subsequent solution is approximate and computationally more taxing.

The basic idea is to use the superposition of the stress field present in the unflawed body, together with an unknown distribution of "strain nuclei" (dislocations in the present interpretation), chosen so that the crack faces become traction-free. The solution used for the stress field for the nucleus is chosen so that other boundary conditions are satisfied. The technique is therefore efficient, and may be used to model the evolution of a developing crack in two or three dimensions. The technique is also very efficient in the analysis of bridged crack problems in composite materials and thus helps in understanding of mechanisms which increase the composite fracture toughness.

The application of the technique is illustrated on the analysis of the crack stability in brittle matrix composites reinforced by dispersion of ductile particles. Two examples are chosen:

- (i) study of combined influence of crack bridging and microcracking aiming to evaluate the resulting toughening effect and to reveal a possible synergism of both mechanisms,
- (ii) analysis of the impact of particle/matrix interface debonding on the bridging stress which turns to be a nonlinear function of crack opening displacement.

The first example illustrates the method's efficiency in the treatment of interaction effects. The second example demonstrates the application of the theory of strongly singular integral equations.