Vysoké učení technické v Brně
Fakulta strojního inženýrství

Mgr. Miroslav Kureš, Dr.

NĚKTERÉ SOUVISLOSTI VARIAČNÍHO POČTU A DIFERENCIÁLNÍ GEOMETRIE Z HLEDISKA APLIKACÍ

SOME RELATIONS BETWEEN VARIATIONAL CALCULUS AND DIFFERENTIAL GEOMETRY FROM THE APPLICATIONS POINT OF VIEW

Zkrácená verze habilitační práce

VUTIUM

Brno 2003

Klíčová slova. Variační počet, diferencovatelné variety, jety, bandly rychlostí.

Key Words. Variational calculus, differentiable manifolds, jets, bundles of velocities.

Místo uložení práce. Oddělení pro vědu a výzkum Fakulty strojního inženýrství Vysokého učení technického v Brně.

ISBN 80-214-2313-7
ISSN 1213-418X

Obsah

Představení autora habilitační práce

Předkladatel habilitační práce **Mgr. Miroslav Kureš, Dr.** se narodil v roce 1965 v Ústí nad Labem. V roce 1988 ukončil vysokoškolské studium oboru Matematická analýza na Přírodovědecké fakultě Univerzity Jana Evangelisty Purkyně v Brně, předložil diplomovou práci Posloupnosti a kombinatorické struktury. V letech 1991–1995 dále absolvoval doktorské studium oboru Geometrie u Prof. RNDr. Ivana Koláře, DrSc. na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně, v jehož rámci zpracoval doktorskou disertační práci Connections on Cotangent Bundles.

V letech 1990–1992 pracoval autor práce jako výzkumný a vývojový pracovník v sektoru civilního letectví, a to na Výzkumném ústavu dopravním v Žilině (pracoviště Brno) a u České správy letišť Praha. Od roku 1992 pracuje jako vysokoškolský pedagog na Ústavu matematiky Fakulty strojního inženýrství Vysokého učení technického v Brně.

Miroslav Kureš se ve své vědecké práci zaměřuje na diferenciální geometrii, její aplikace, variační počet a metody komutativní algebry. Podílel a podílí se mj. na řešení těchto projektů: grant GAČR 201/93/2125 Fibrované prostory a geometrické operátory, grant GAČR 201/96/0079 Geometrie fibrovaných prostorů, grant GAČR 201/99/0296 Diferenciální geometrie vyššího řádu, grant GAČR 201/02/0225 Prodlužování geometrických struktur. V letech 1999–2000 byl hlavním řešitelem grantu GAČR 201/99/P065 Prostory rychlostí vyššího řádu. Spolupracuje s brněnskou skupinou diferenciálních geometrů a s několika zahraničními pracovišti (Krakov, Murcía, Lublin). Původní vědecké publikace publikuje ve významných matematických časopisech (Czech. Math. Journal, Irish Math. Soc. Bull., Contemp. Math., Rend. del Circ. Matem. di Palermo, Public. Math., Arch. of Mech. a další).

Pedagogická činnost je soustředěna zejména na výuku přemětů Matematika III a Matematika IV pro obor strojní inženýrství a na výuku variačního počtu a aplikačních vývojových systémů pro obor matematické inženýrství; dále pak na vedení diplomových prací magisterského studia. Předkladatel práce je předsedou celostátní odborné hodnotící komise Středoškolské odborné činnosti pro obor Matematika a matematická informatika.

Miroslav Kureš je ženatý; s rodinou žije ve Šlapanicích u Brna. S manželkou Miroslavou má tři dcery: Bernadetu, Annu a Tamaru.

Úvod

Prvním záměrem předložené práce je dokumentovat roli variačního počtu a diferenciální geometrie ve fyzikálních a fyzikálně-technických úlohách. Výběr výstupů těchto matematických disciplín je samozřejmě do značné míry subjektivní. Uvádíme zde:

A. Newtonovy pohybové rovnice pro částice v potenciálním silovém poli (Příklad 1.1.1)
B. Rovnice geodetik (Příklad 1.1.2)
C. Maxwellovy rovnice elektromagnetického pole (Příklad 1.2.1)
D. Einsteinovy rovnice gravitačního pole (Příklad 1.2.2)
E. Singulární lagrangiány vyššího řádu kvantové teorie (Příklad 1.3.1)
F. Lagrangiány vyššího řádu Podolského formalismu teorie elektromagnetického pole (Příklad 1.3.2)
G. Trubicové plochy, jejichž řídícími křivkami jsou uzly (aplikace v biochemii, chemii a statistické mechanice) (Příklad 1.4.1)
H. Problém tří těles, orbity (Odstavec 2.1)
I. Hydrodynamické vlny (Odstavec 2.2)
J. Konfigurace pružné tyče (Příklad 4.1.1.)
K. Schrödingerova konexe (konexe vyššího řádu) (Článek [**63**])

Řešení těchto a celé řady obdobných úloh je v zásadě založeno na variačním počtu, matematické disciplíně, která se zabývá vyšetřováním extrémů funkcionálů, zejména těch, které představují popis nějaké geometrické či fyzikální situace. (Přesněji řečeno jde o nalezení funkce vytvářející spolu s nezávisle proměnnou a svými derivacemi integrand určitého integrálu, a sice takové, aby tento integrál nabýval své minimální nebo maximální hodnoty.) Zřejmý je ovšem i geometrický charakter úloh: extrém funkcionálu je realizován křivkami či plochami. Tyto objekty studuje diferenciální geometrie, a to za užití metod matematické analýzy. Moderní diferenciální geometrie pak vychází z obecného pojmu variety (zahrnujícího klasické křivky i plochy) a prominentní roli v ní hrají jety a jetové bandly nad varietami. Ty jsou pak velmi vhodným základem pro elegantní formalismus variačního počtu na zakřivených prostorech.

Práce se rovněž pokouší postihnout podstatu vztahu variačního počtu a diferenciální geometrie, a to z pohledu současného stavu teorie. Od třetí kapitoly se proto podrobně zabývá moderními strukturami diferenciální geometrie souvisejícími s variačním počtem. Původním vědeckým příspěvkům autora je pak věnována kapitola pátá, sestavená z článků převážně již publikovaných. Podrobněji se o struktuře a zdrojích jednotlivých kapitol zmiňují poznámky uvedené vždy na jejich závěr.

Pokud jde o stručné zhodnocení stavu problematiky z matematického hlediska a přínosu autora k teorii, lze konstatovat následující skutečnosti:

1. Geometrické objekty jako vektorová a tenzorová pole, formy, metriky, konexe, dotykové elementy, apod., jsou v moderním pojetí uvažovány jako řezy fibrovaných bandlů. Teorie jetů rozpracovaná Ehresmannem v 50. letech minulého století se ukázala být nejen efektivním aparátem v řešení problémů teorie parciálních diferenciálních rovnic, variačního počtu, teorie singularit, mechanice vyššího řádu a dalších disciplín, ale hraje mimořádně významnou roli v teorii přirozených bandlů a operátorů, která, zhruba řečeno, umožňuje klasifikaci geometrických objektů.

2. Široce uznávanou základní prací o geometrickém přístupu k variačnímu počtu, zejména k hamiltonovskému formalismu, je více než šedesátistránkový článek Goldschmidta a Sternberga [**30**] z roku 1973. Pokud jde o variační problémy vyššího řádu, jsou Goldschmidtovy a Sternbergovy výsledky (dle názoru a vědomostí autora) dále rozpracovány v obecném případě nejdůsledněji Kolářem (např. [**41**], [**42**], [**49**], [**51**]), Kolářem a Horákem ([**34**]) a Krupkou (např. [**57**], [**58**]). Jde tedy o brněnský (brněnsko-opavský) významný příspěvek ke geometrii vyššího řádu a variačním problémům; přímo či nepřímo se na něm podíleli a podílejí dále např. Doupovec, Janyška, Krupková, Slovák, Tomáš, Vondra.

3. Problematika variačního počtu motivovaná především mechanikou je studována na řadě dalších světových pracovišť. Uveďme alespoň jména Ferraris, Francaviglia, Garcia, Muñoz, Saunders, Sniatycki, Trautman, Tulczyjew. Zajímavou, speciálnější, avšak přehlednou a pro aplikace v řadě případů postačující alternativou k výše uvedenému obecnému přístupu je přístup de Leóna a Rodriguese (např. [**10**], [**11**]), který studuje formalismus variačního počtu na bandlech rychlostí vyššího řádu.

4. Autor se ve článcích zařazených do této práce snaží navázat jak na výsledky přístupu *2.*, tak na některé výsledky přístupu *3.* Detailněji se zařazení autorových prací do kontextu aktuálního výzkumu věnuje čtvrtá kapitola práce.

1. Variační počet a diferenciální geometrie

1.1. Jednorozměrné variační úlohy

Uvažujme reálnou přímku $\mathbb{R}$ se souřadnicí x a reálnou vektorovou funkci $(y^1(x), \ldots, y^n(x))$, kterou budeme zkráceně zapisovat $y^\sigma(x)$. Předpokládáme, že $y^\sigma(x)$ je spojitě diferencovatelná pro $x \in \langle a, b \rangle$.

Uvažujme dále funkcionál závislý na křivkách vyjádřitelných v explicitním tvaru v $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\mathcal{I} = \int_a^b L(x, y^\sigma, y^{\sigma\prime}) dx,$$

a hledejme mezi nimi křivku $\mathfrak{c}$ procházející pevnými body $A = [a, \alpha^\sigma]$, $B = [b, \beta^\sigma]$ a realizující minimum tohoto funkcionálu. L je přitom daná reálná funkce $2n + 1$ proměnných s parciálními derivacemi dostatečného řádu (v klasickém pojetí se předpokládá existence parciálních derivací nejméně do řádu 4, srv. [**27**]). Platí:

Eulerova věta I. *Jestliže funkcionál* $\mathcal{I} = \int_a^b L(x, y^\sigma, y^{\sigma\prime}) dx$ *nabývá mezi všemi spojitě diferencovatelnými křivkami procházejícími body* $A = [a, \alpha^\sigma], B = [b, \beta^\sigma]$ *minima pro nějakou křivku* $\mathfrak{c}\colon y^\sigma = y^\sigma(x)$*, pak je podél křivky* $\mathfrak{c}$ *splněno* n *obyčejných diferenciálních rovnic 2.řádu*

$$\frac{\partial L}{\partial y^\sigma} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y^{\sigma\prime}}\right) = 0$$

s okrajovými podmínkami $y(a) = \alpha^\sigma$, $y(b) = \beta^\sigma$.

Připomeneme základní terminologii. Funkcionál $\mathcal{I}$ se nazývá *akce.* Rovnice $\frac{\partial L}{\partial y^\sigma} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial L}{\partial y^{\sigma\prime}}) = 0$ se nazývají *Eulerovy rovnice* (též *Eulerovy-Lagrangeovy rovnice*). Řešení Eulerových rovnic jsou křivky nazývané *stacionární křivky* (též *extremály* nebo *kritické křivky*) funkcionálu $\mathcal{I}$. Funkce $L(x, y^\sigma, y^{\sigma\prime})$ se nazývá *lagrangián.* Dále, *energií* rozumíme funkci $E = E(x, y^\sigma, y^{\sigma\prime}) = y^{\sigma\prime}\frac{\partial L}{\partial y^{\sigma\prime}} - L$, *impulsem* rozumíme 1-formu $p_\sigma = \frac{\partial L}{\partial y^{\sigma\prime}}$ a *silou* rozumíme 1-formu $f_\sigma = \frac{\partial L}{\partial y^\sigma}$. Eulerovy rovnice můžeme psát nyní ve tvaru

$$p'_\sigma = f_\sigma.$$

Lagrangián je nejednoznačný v tom smyslu, že dva různé lagrangiány L, $\bar{L}$ lišící se o totální derivaci nějaké funkce $f(x, y^\sigma)$, tzn. $\bar{L} = L + \frac{df(x,y^\sigma)}{dx}$, vedou ke stejné Eulerově rovnici. V důsledku toho jsou nejednoznačné energie a impuls, kde $\bar{E} = E - \frac{\partial f(x,y^\sigma)}{\partial x}$, $\bar{p}_\rho = p_\rho + \frac{\partial f(x,y^\sigma)}{\partial y^\rho}$.

V případě regulárního lagrangiánu, tzn. splňujícího $\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial y^{1\prime}\partial y^{1\prime}} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial y^{1\prime}\partial y^{n\prime}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^{n\prime}\partial y^{1\prime}} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial y^{n\prime}\partial y^{n\prime}} \end{vmatrix} \neq 0$ je možno pomocí Legendrovy transformace přejít k hamiltonovskému formalismu. Energii E lze totiž pak vyjádřit jako funkci proměnných x, y^σ, p_σ, kterou značíme $H = H(x, y^\sigma, p_\sigma)$ a nazýváme *hamiltonián.* Eulerovy rovnice lze potom ztransformovat na soustavu $2n$ obyčejných diferenciálních rovnic 1.řádu

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial y^\sigma} &= -\frac{\partial p_\sigma}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial p_\sigma} &= \frac{\partial y^\sigma}{\partial x}, \end{aligned}$$

nazývanou *kanonické rovnice* (též *Hamiltonovy rovnice*).

Příklad 1.1.1. Newtonovy pohybové rovnice. Pro lagrangián $L = \frac{m}{2}\sum_\sigma (y^{\sigma\prime})^2 - U(y^\sigma)$ je $f_\sigma = -\frac{\partial U}{\partial y^\sigma}$ a $p_\sigma = my^{\sigma\prime}$. Obdržíme Eulerovy rovnice

$$p'_\sigma = f_\sigma$$

ve tvaru

$$my^{\sigma\prime\prime} = -\frac{\partial U}{\partial y^\sigma},$$

což jsou Newtonovy pohybové rovnice [1] pro částice hmotnosti m v potenciálním silovém poli $f = -\operatorname{grad} U$, známé z klasické mechaniky; n bývá obvykle rovno 3. Čárka značí derivování podle x, které hraje roli času. (Ve fyzikálních textech se častěji píše tečka místo čárky a t místo x.)

Příklad 1.1.2. Geodetiky. Hledání geodetik je na rozdíl od předchozího příkladu čistě geometrickou záležitostí nevyžadující žádné fyzikální veličiny. [2] x zde hraje roli parametru v parametrickém vyjádření křivek. Předpokládáme $\sigma, \rho, \tau, \upsilon = 1, \dots, n$ a uvažujeme funkce $g_{\sigma\rho}(y^\tau)$ takové, že matice $(g_{\sigma\rho})$ je pozitivně definitivní (tyto funkce určují tzv. *riemannovskou metriku* g, viz dále 1.5). Označme $g^{\sigma\rho}$ funkce náležející matici inverzní k $(g_{\sigma\rho})$. Pro lagrangián $L = \frac{1}{2} g_{\sigma\rho} y^{\sigma\prime} y^{\rho\prime}$ je $f_\tau = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial y^\tau} y^{\sigma\prime} y^{\rho\prime}$ a $p_\sigma = g_{\sigma\rho} y^{\rho\prime}$. Eulerovy rovnice

$$p'_\tau = f_\tau$$

máme ve tvaru

$$y^{\rho\prime\prime} g_{\rho\tau} + y^{\rho\prime}\frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial y^\sigma} y^{\sigma\prime} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial y^\tau} y^{\sigma\prime} y^{\rho\prime}.$$

Protože ale $g^{\tau\upsilon} g_{\rho\tau} = \delta^\upsilon_\rho$ (Kroneckerovo delta), dostáváme

$$y^{\upsilon\prime\prime} + g^{\tau\upsilon}\left(\frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial y^\sigma} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial y^\tau}\right) y^{\sigma\prime} y^{\rho\prime} = 0$$

Rozepsáním

$$g^{\tau\upsilon}\frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial y^\sigma} y^{\sigma\prime} y^{\rho\prime} = \frac{1}{2} y^{\sigma\prime} y^{\rho\prime} g^{\tau\upsilon}\left(\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial y^\rho} + \frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial y^\sigma}\right)$$

a dosazením pravé strany pak dostáváme

$$y^{\upsilon\prime\prime} + \nabla^\upsilon_{\sigma\rho} y^{\sigma\prime} y^{\rho\prime} = 0,$$

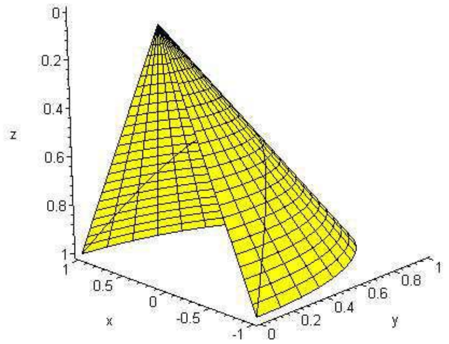
kde

$$\nabla^\upsilon_{\sigma\rho} = \frac{1}{2} g^{\tau\upsilon}\left(\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial y^\rho} + \frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial y^\sigma} - \frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial y^\tau}\right).$$

$\nabla^\upsilon_{\sigma\rho}$ jsou funkce určující tzv. *Levi-Civitovu konexi* odpovídající metrice g. Poslední rovnice je *rovnice geodetik* známá z diferenciální geometrie a současně, jak jsme ukázali, Eulerova rovnice pro stacionární křivky funkcionálu $\mathcal{I}$.

[1] Newtonovy pohybové rovnice představují speciální případ Hamiltonova principu nejmenší akce. Ten je pak precizací Maupertuisova výroku z roku 1744, že každý děj v přírodě probíhá tak, že určitá veličina, nazývaná akcí, je minimální.

[2] Poznamenejme, že ve většině klasických učebnic se vyskytují pouze odvození geodetik na rovině, sféře a kruhovém válci; tyto příklady jsou v podstatě triviální. Analyticky lze totiž vyřešit rovnice geodetik pouze v řídkých případech. Zajímavějším příkladem jsou geodetiky na kuželové ploše, viz [**68**].



Obr.1.1.Geodetika na kuželu

Řada příkladů je dále uvedena v autorově skriptu [**68**]. Tam je možno nalézt i klasickou úlohu o brachistochroně, považovanou za nejstarší úlohu variačního počtu. Poprvé ji vyřešil Bernoulli v roce 1696 a tento rok bývá proto označován za rok vzniku variačního počtu.

1.2. Vícerozměrné variační úlohy

Uvažujme m-rozměrný euklidovský prostor $\mathbb{R}^m$ se souřadnicemi $x^1, \ldots, x^m$ a reálnou vektorovou funkci $(y^1(x^1, \ldots, x^m), \ldots, y^n(x^1, \ldots, x^m))$, kterou budeme zkráceně zapisovat $y^\sigma(x^i)$. Předpokládáme, že $y^\sigma(x)$ je spojitě diferencovatelná pro $x \in D$, kde D je jednoduše souvislá oblast s kladně orientovanou hranicí δ. Předpokládáme dále, že hodnoty funkce y jsou na hranici δ předepsány a hledáme minimum tohoto funkcionálu. Navíc opět pro jednoduchost předpokládáme, že uvažované nadplochy jsou vyjádřitelné v explicitním tvaru. (Termín nadplochy zde užíváme volně. V případě $n = 1$ jde o skutečné nadplochy v $\mathbb{R}^{m+1}$.) Platí:

Eulerova věta II. *Jestliže funkcionál* $\mathcal{I} = \int \cdots \int_D L(x^i, y^\sigma, \frac{\partial y^\sigma}{\partial x^i}) dx^1 \ldots dx^m$ *nabývá mezi všemi spojitě diferencovatelnými nadplochami s pevnou hodnotou na* δ *minima pro nějakou nadplochu* $\mathfrak{C}$: $y^\sigma = y^\sigma(x^i)$, *pak je podél nadplochy* $\mathfrak{C}$ *splněno* n *parciálních diferenciálních rovnic 2. řádu*

$$\frac{\partial L}{\partial y^\sigma} - \frac{d}{dx^1}\left(\frac{\partial L}{\partial y^{\sigma\prime}_{x^1}}\right) - \frac{d}{dx^2}\left(\frac{\partial L}{\partial y^{\sigma\prime}_{x^2}}\right) - \cdots - \frac{d}{dx^m}\left(\frac{\partial L}{\partial y^{\sigma\prime}_{x^m}}\right) = 0$$

při současném splnění uvedené okrajové podmínky.

Příklad 1.2.1. Maxwellovy rovnice elektromagnetického pole. Rovnice elektromagnetického pole jsou Eulerovy rovnice pro funkcionál $\mathcal{I} = \mathcal{I}_f + \mathcal{I}_m + \mathcal{I}_{mf}$, který nyní popíšeme. $\mathcal{I}_m$ je ta část akce, která závisí pouze na částicích. Je roven $-\sum mc \int_a^b dl$, kde m je hmotnost částice, c rychlost světla, součet se bere přes všechny částice pohybující se v poli a integrál $\int_a^b dl$ je podél křivky v $\mathbb{R}^4$ spojující počáteční a konečné polohy a časy částice, l je délka oblouku. $\mathcal{I}_f$ je ta část akce, která závisí pouze na vlastnostech pole. Vlastnosti pole jsou charakterizovány vektorovým polem, jehož komponenty A_i, $i = 0, \ldots, 3$, závisí na čase a poloze. Označme ϕ jeho časovou složku A_0 a A vektorové pole tvořené prostorovými složkami A_1, A_2, A_3. *Napětí elektrického pole* E je definováno $E = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} - \operatorname{grad}\phi$. *Napětí magnetického* *pole* H je definováno $H = \operatorname{rot} A$. Pak $\mathcal{I}_f = a\int 2(E^2 - H^2)d^4x$, kde H^2 a E^2 jsou skalární kvadráty H a E, a je nějaká konstanta a integrál se bere přes všechny prostorové souřadnice a přes časovou souřadnici x^0 mezi dvěma danými pevnými body. Konečně $\mathcal{I}_{mf}$ představuje tu část akce, která popisuje interakci částic a pole. $\mathcal{I}_{mf} = -\sum \frac{e}{c}\int A_k dx^k$, kde e je parametr charakterizující vzájemné působení pole a částice a součet se bere přes všechny částice pohybující se v poli. Označíme-li ρ funkci *hustoty náboje* a j *vektor toku*, $j^k = \rho\frac{dx^k}{dt}$, Eulerovy rovnice funkcionálu $\mathcal{I}$ dávají [3] druhou dvojici Maxwellových rovnic elektromagnetického pole

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} H &= \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}j \\ \operatorname{div} E &= 4\pi\rho, \end{aligned}$$

zatímco první dvojici

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E &= -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} \\ \operatorname{div} H &= 0 \end{aligned}$$

lze odvodit snadno z definic E a H.

Příklad 1.2.2. Einsteinovy rovnice gravitačního pole. Označme opět x^0 časovou a x^1, x^2, x^3 prostorové souřadnice, předpokládejme, že je zadána riemannovská metrika g a že ∇ je jí odpovídající Levi-Civitova konexe. Rovnice gravitačního pole obdržíme jako Eulerovy rovnice pro funkcionál $\mathcal{I} = \int R d\Omega$, kde R je skalární křivost definovaná

$$R = g^{\sigma\rho}R_{\sigma\rho},$$

kde $g^{\sigma\rho}$ jsou složky metriky a $R_{\sigma\rho}$ složky tzv. Ricciho tenzorového pole, o němž pojednáme v 1.5, $d\Omega = \sqrt{-g}d^4x$ je standardní objemová forma, integrál se bere přes všechny prostorové souřadnice a přes časovou souřadnici x^0 mezi dvěma danými pevnými body. [4]

Poznamenejme ještě, že významným geometrickým příkladem vícerozměrných variačních úloh jsou minimální plochy, o nichž pojednáme podrobněji v 2.2.

1.3. Variační úlohy vyššího řádu

Ve stejné situaci jako v 1.2 nyní předpokládáme, že reálná vektorová funkce $y^\sigma(x^i)$ má pro $x \in D$ spojité derivace až do řádu r. Uvažujeme tedy funkcionál

$$\mathcal{I} = \int\cdots\int_D L(x^i, y^\sigma, \frac{\partial y^\sigma}{\partial x^i}, \dots \frac{\partial^r y^\sigma}{\partial x^{i_1}\dots\partial x^{i_r}})dx^1\dots dx^m$$

a hledáme nadplochy realizující jeho minimum. Hodnoty funkce a derivací až do řádu $r-1$ jsou na hranici δ jsou pevně předepsané. Platí:

Eulerova věta III. *Jestliže funkcionál* $\mathcal{I} = \int\cdots\int_D L(x^i, y^\sigma, \frac{\partial y^\sigma}{\partial x^i}, \dots \frac{\partial^r y^\sigma}{\partial x^{i_1}\dots\partial x^{i_r}})$ $dx^1\dots dx^m$ *nabývá mezi všemi spojitě diferencovatelnými nadplochami s pevnou hodnotou na* δ *a s pevnou hodnotou derivací až do řádu* $r-1$ *na* δ *minima pro*

[3] poněkud zdlouhavá technická úprava je podrobně např. v [**20**]

[4] Další úpravy funkcionálu a Eulerových rovnic jsou již v přímé vazbě na obecnou teorii relativity, proto zde od nich upouštíme.

nějakou nadplochu $\mathfrak{C}$: $y^\sigma = y^\sigma(x^i)$, pak je podél nadplochy $\mathfrak{C}$ splněno n parciálních diferenciálních rovnic řádu $2r$

$$\frac{\partial L}{\partial y^\sigma} - \frac{d}{dx^1}(\frac{\partial L}{\partial y^{\sigma\prime}_{x^1}}) - \frac{d}{dx^2}(\frac{\partial L}{\partial y^{\sigma\prime}_{x^2}}) - \cdots - \frac{d}{dx^m}(\frac{\partial L}{\partial y^{\sigma\prime}_{x^m}}) +$$
$$\frac{d^2}{dx^1dx^1}(\frac{\partial L}{\partial y^{\sigma\prime\prime}_{x^1x^1}}) + \frac{d^2}{dx^1dx^2}(\frac{\partial L}{\partial y^{\sigma\prime\prime}_{x^1x^2}}) + \cdots + \frac{d^2}{dx^mdx^m}(\frac{\partial L}{\partial y^{\sigma\prime\prime}_{x^mx^m}}) +$$
$$\cdots +$$
$$(-1)^r\frac{d^r}{dx^1\ldots dx^1}(\frac{\partial L}{\partial y^{\sigma(r)}_{x^1\ldots x^1}}) + \cdots + (-1)^r\frac{d^r}{dx^m\ldots dx^m}(\frac{\partial L}{\partial y^{\sigma(r)}_{x^m\ldots x^m}}) = 0$$

při současném splnění okrajových podmínek.

Příklad 1.3.1. Kvantová teorie a singulární lagrangiány. Lagrangiány vyššího řádu se vyskytují např. v kvantové teorii. V případě singulárních lagrangiánů hraje významnou roli Diracova teorie; v souvislosti s Diracovou domněnkou o kalibrační invarianci hamiltonovské mechaniky se v [**74**] právě v souvislosti s kvantovou teorií studuje lagrangián

$$L = \sum_{s=1}^{N}((y^1)^{(s)}(y^3)^{(s)} - (y^2)^{(s-1)}(y^3)^{(s)}) + y^1y^3.$$

Příklad 1.3.2. Podolského formalismus. V teorii elektromagnetického pole vychází tzv. Podolského formalismus, viz [**11**], z lagrangiánu druhého řádu

$$L(x^i, y^i_j, \frac{\partial y^i_j}{\partial x^k}, \frac{\partial^2 y^i_j}{\partial x^k \partial x^l}),$$

$i, j, k, l = 0, 1, 2, 3$ (tzn. vlastně $\sigma = 1, \ldots, 16$).

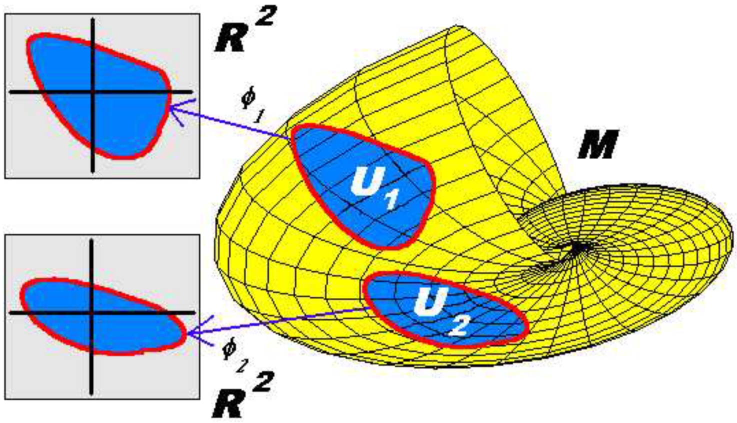
1.4. Hladké variety

Doposud jsme sledovali zobecňování teorie vzhledem k počtu nezávisle proměnných vektorové funkce a vzhledem k řádu derivací této funkce. Z geometrického hlediska i z hlediska aplikací je významná další expanze teorie na prostory, které se lokálně jeví jako zakřivené, globální charakter však představuje novou kvalitu; nazývají se variety. Pojem variety představuje ve své podstatě zobecnění procesu kartografizace zemského povrchu, který poprvé matematicky popsal Gauss. Zemský povrch, tedy dvojrozměrnou sféru (která je příkladem variety), lze vhodně zobrazit mapami uspořádanými do atlasu, avšak zobrazit ji věrně jako celek na jedinou mapu nelze. Níže uvedená definice variety sleduje tuto ideu a představuje významné zobecnění křivek a ploch studovaných v klasické diferenciální geometrii.

Vezměme libovolnou množinu M. *(Hladkým) atlasem A* na M rozumíme množinu dvojic (U_ι, ϕ_ι), $\iota \in I$ (I je nějaká indexová množina) splňující:

(i) U_ι je podmnožinou M a $\cup_\iota U_\iota = M$
(ii) $\phi_\iota \colon U_\iota \to \mathbb{R}^m$ je bijekcí mezi U_ι a otevřenou množinou $\phi_\iota(U_\iota)$ v $\mathbb{R}^m$
(iii) Zobrazení $\phi_\kappa\phi_\iota^{-1} \colon \phi_\iota(U_\iota \cap U_\kappa) \mapsto \phi_\kappa(U_\iota \cap U_\kappa)$ je hladkým izomorfismem pro každou dvojici indexů ι, κ.

Topologie na M se zavede tak, aby U_ι byly otevřené. Dvojice (U_ι, ϕ_ι) se nazývají *mapy* nebo *souřadnicové systémy.* Mapa (U, ϕ) je *kompatibilní* s atlasem A, je-li $A \cup (U, \phi)$ opět atlasem na M. Množina M spolu s atlasem obsahujícím všechny s ním kompatibilní mapy se nazývá *m-rozměrná hladká varieta*, číslo m se nazývá *dimenze* variety M. Pro $(U, \phi) \in A$ a $p \in U$ je mapa dána m funkcemi $\phi^1, \ldots, \phi^m$, častěji zapisovanými $x^1(p), \ldots, x^m(p)$ nebo jen x^i $(i = 1, \ldots, m)$, které se nazývají *lokální souřadnice*.



Obr.1.2. Mapy variety

Třebaže formálně to není nutné, obvykle se a priori předpokládá, že M je Hausdorffův parakompaktní topologický prostor a dimenze M je konstantní a konečná. Takto budeme chápat rovněž variety v tomto textu. Hladkost všech struktur, tzn. diferencovatelnost třídy C^∞, je jen jistým komfortem pro budování teorie, neboť stačí vždy diferencovatelnost třídy C^p pro nějaké $p \in \mathbb{N}$.

Nechť M je varieta, x^i nějaké lokální souřadnice na M a $x_0 \in M$ bod. Uvažujme diferencovatelné funkce v x_0; jejich diferenciály v x_0 zapíšeme v lokálních souřadnicích

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(0) dx^i.$$

Tyto diferenciály vytvářejí reálný vektorový prostor, který značíme $T^*_{x_0}M$; $dx^1, \ldots, dx^m$ je jeho báze. Prvky $T^*_{x_0}M$ se nazývají *kovektory v* x_0 (též *kovariantní vektory*). Duální vektorový prostor k $T^*_{x_0}M$ označíme $T_{x_0}M$ a prvky $T_{x_0}M$ se nazývají *vektory s počátkem v* x_0 (nebo *kontravariantní vektory*). Uvažujme sjednocení

$$T^*M := \bigcup_{x \in M} T^*_x M.$$

Na T^*M je přirozeně definována topologie a struktura hladké variety: ke každému lokálnímu souřadnicovému systému x^i na M můžeme přiřadit indukovaný lokální souřadnicový systém na T^*M, když za souřadnice prvku $r \in T^*M$ vezmeme souřadnice x^i a složky p_i lineární formy vzhledem k lokálnímu souřadnicovému systému. T^*M se nazývá *kotečný bandl* variety M. Analogicky obdržíme *tečný bandl* variety M

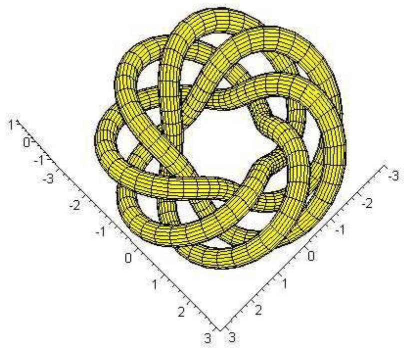
$$TM := \bigcup_{x \in M} T_x M,$$

kde indukované souřadnice značíme obvykle y^i.

Obecněji, *fibrovanou varietou* rozumíme trojici (Y, π, M) (obvykle zapisovanou $\pi\colon Y \to M$ nebo jen $Y \to M$ či Y, je-li π, resp. M z kontextu zřejmé), kde Y a M jsou hladké variety a $\pi\colon Y \to M$ surjektivní submerze. (Zobrazení $f\colon M \to \bar{M}$ je *submerze*, jestliže pro všechna $x \in M$ je hodnost $T_x f\colon T_x M \to T_{f(x)}\bar{M}$ rovna $\dim \bar{M}$.) *Řezem* fibrované variety rozumíme hladké zobrazení $\gamma\colon M \to Y$ splňující

$\pi \circ \gamma = \mathrm{id}_M$. Množinu všech řezů fibrované variety $\pi\colon Y \to M$ značíme $C^\infty Y$. Dále, pro $x \in M$ je množina $\pi^{-1}(x)$ podvarietou Y a nazýváme ji *fibr* nad x. *Morfismem fibrovaných variet* pak rozumíme takové hladké zobrazení mezi dvěma fibrovanými varietami, které zobrazí fibry na fibry. Tečný a kotečný bandl jsou příklady fibrovaných variet ($TM = Y$, resp. $T^*M = Y$).

Příklad 1.4.1. Ideální uzly. Zhruba řečeno, uzly jsou uzavřené prostorové křivky, které nelze deformovat na kružnici. Mezi trubicovými plochami s konstantním poloměrem, jejichž osy představují právě uzly nějakého pevného typu, lze hledat takovou, která má při daném objemu vnitřku jí vymezeného nejmenší možný povrch. Těmto plochám se říká *ideální uzly.* Ideální uzly představují netriviální příklad dvourozměrných variet s globálními vlastnostmi velmi odlišnými od $\mathbb{R}^2$. Úloha nalezení ideálních uzlů je formulována variačně, je však mimořádně náročná a její analytické řešení dosud známo není, viz např. [**38**]. Uzly popisují řadu reálných biologických a chemických struktur: mj. molekulové řetězce DNA a fullereny; dále představují modely ve statistické mechanice, apod.



Obr.1.3. Příklad variety — trubicová plocha, jejíž osou je složitý uzel.

1.5. Tenzorová pole na varietách

Dalším příkladem fibrovaných variet jsou bandly

$$\bigotimes^{q} T^*M \otimes \bigotimes^{p} TM.$$

(V případě symetrického, resp. antisymetrického tenzorového součinu píšeme $\bigodot$, resp. $\bigwedge$, místo $\bigotimes$.) Řezy těchto bandlů jsou (p,q)*-tenzorová pole*; $(0,0)$-tenzorová pole jsou funkce, $(1,0)$-tenzorová pole jsou *vektorová pole* a $(0,1)$-tenzorová pole jsou *1-formy.* (Rozlišujeme tedy terminologicky tenzorové pole a tenzor, resp. vektorové pole a vektor, resp. 1-formu a kovektor.) Množinu všech vektorových polí na M budeme značit $\mathfrak{X}_M$. $(0,q)$-tenzorová pole můžeme chápat jako q-lineární zobrazení z $\mathfrak{X}_M \times \cdots \times \mathfrak{X}_M$ do $\mathbb{R}$; podobně, $(1,q)$-tenzorová pole můžeme chápat jako q-lineární zobrazení z $\mathfrak{X}_M \times \cdots \times \mathfrak{X}_M$ do $\mathfrak{X}_M$, viz [**40**].

$(1,1)$-tenzorové pole se často nazývá *afinor*; jak bylo uvedeno, lze ho chápat jako lineární zobrazení z $\mathfrak{X}_M$ do $\mathfrak{X}_M$ (případně v každém bodě $x \in M$ jako lineární zobrazení z T_xM do T_xM)

$(0,2)$-tenzorové pole g, které pro všechna $X, Y \in \mathfrak{X}_M$ splňuje

(i) $g(X,X) \geq 0$, přičemž $g(X,X) = 0$ právě, když $X = 0$
(ii) $g(X,Y) = g(Y,X)$,

se nazývá *riemannovská metrika* na M; v lokálních souřadnicích se složkami $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$.

Zobrazení $\nabla \colon \mathfrak{X}_M \times \mathfrak{X}_M \to \mathfrak{X}_M$ s vlastnostmi

(i) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
(ii) $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$
(iii) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
(iv) $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$

(pro všechna $X, Y, Z \in \mathfrak{X}_M$ a všechny hladké funkce f na M; píšeme zde $\nabla_X Y$ místo $\nabla(X,Y)$) se nazývá *klasická lineární konexe* na M, v lokálních souřadnicích ∇ určíme specifikací $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} = \nabla^i_{jk}(x) \frac{\partial}{\partial x^k}$, tzn. zadáním funkcí $\nabla^i_{jk}(x)$, které se nazývají *Christoffelovy funkce*. Protože ∇ není vzhledem k funkcím homogenní (ve své druhé složce, viz (ii)[5]), nejde o $(1,2)$-tenzorové pole. Máme-li ovšem dvě klasické lineární konexe ∇_1, ∇_2 na M, jejich rozdílové zobrazení $\nabla_{12} \colon \mathfrak{X}_M \times \mathfrak{X}_M \to \mathfrak{X}_M$, ${\nabla_{12}}_X Y = {\nabla_1}_X Y - {\nabla_2}_X Y$ je $(1,2)$-tenzorovým polem, dokonce takto lze obdržet libovolné tenzorové pole tohoto typu.

Připomeňme, že pro dvě vektorová pole $X, Y \in \mathfrak{X}_M$ se souřadnicemi $X^i(x)$, resp. $Y^i(x)$, je definovaná jejich *(Lieova) závorka* $[X,Y]$ jako vektorové pole na M se souřadnicemi $X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}$. Zobecněním závorky vektorových polí je tzv. *Frölicherova-Nijenhuisova závorka*, zobrazující antisymetrické $(1,q_1)$-tenzorové pole U a antisymetrické $(1,q_2)$-tenzorové pole V na antisymetrické $(1,q_1+q_2)$-tenzorové pole $[U,V]$, podrobněji viz [**53**].

$(1,2)$-tenzorové pole $\nabla \colon \mathfrak{X}_M \times \mathfrak{X}_M \to \mathfrak{X}_M$ definované

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

(pro všechna $X, Y \in \mathfrak{X}_M$, kde ∇ je lineární konexe na M) se nazývá *torze lineární konexe* ∇ na M. Lokální souřadnice torze jsou

$$T^i_{jk} = \nabla^i_{jk} - \nabla^i_{kj}.$$

$(1,3)$-tenzorové pole $R \colon \mathfrak{X}_M \times \mathfrak{X}_M \times \mathfrak{X}_M \to \mathfrak{X}_M$ definované

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

(pro všechna $X, Y, Z \in \mathfrak{X}_M$, kde ∇ je lineární konexe na M; píšeme $R(X,Y)Z$ místo $R(X,Y,Z)$) se nazývá *křivost lineární konexe* ∇ na M. Lokální souřadnice křivosti jsou

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \nabla^i_{kl}}{\partial x^j} - \frac{\partial \nabla^i_{jl}}{\partial x^k} + \nabla^i_{jm} \nabla^m_{kl} - \nabla^i_{km} \nabla^m_{jl}.$$

Dále, $(0,2)$-tenzorové pole se složkami $R_{kl} = R^i_{ikl}$ představuje *Ricciho tenzorové pole* zmíněné v 1.2.

Zabývejme se nyní vektorovými poli. Řekneme, že křivka $\gamma \colon I \to M$ ($I \subset \mathbb{R}$ otevřený interval, $I \ni 0$) je *integrální křivkou* vektorového pole $X \in \mathfrak{X}_M$ s *počáteční podmínkou* $x_0 \in M$, jestliže

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= X(\gamma(t)) \quad \forall t \in I \ , \\ \gamma(0) &= x_0. \end{aligned}$$

[5]tzv. Leibnizovo pravidlo

Dále řekneme, že $Y \in \mathfrak{X}_{TM}$ je *semisprej* (též *vektorové pole 2. řádu* nebo *diferenciální rovnice 2. řádu*), jestliže pro každou jeho integrální křivku β platí

$$(\pi\beta)' = \beta.$$

V lokálních souřadnicích to znamená následující. Předpokládejme, že x^i, y^i jsou lokální souřadnice na TM a označme u^i, v^i indukované souřadnice na TTM. Souřadnice vektorového pole $Y \in \mathfrak{X}_{TM}$ obecně jsou

$$\begin{aligned} u^i &= U^i(x^j, y^j) \\ v^i &= V^i(x^j, y^j), \end{aligned}$$

v případě, že Y je semisprej, pak je $U^i(x^j, y^j) = y^i$. Je-li $Y \in \mathfrak{X}_{TM}$ semisprej a $\gamma\colon I \to M$ křivka, řekneme, že γ je *geodetikou vzhledem k* Y, pokud $\gamma'\colon I \to TM$ je integrální křivkou vektorového pole Y.

Řekneme, že semisprej je *homogenní stupně* m, jestliže platí

$$V^i(x^j, ay^j) = a^m V^i(x^j, y^j) \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

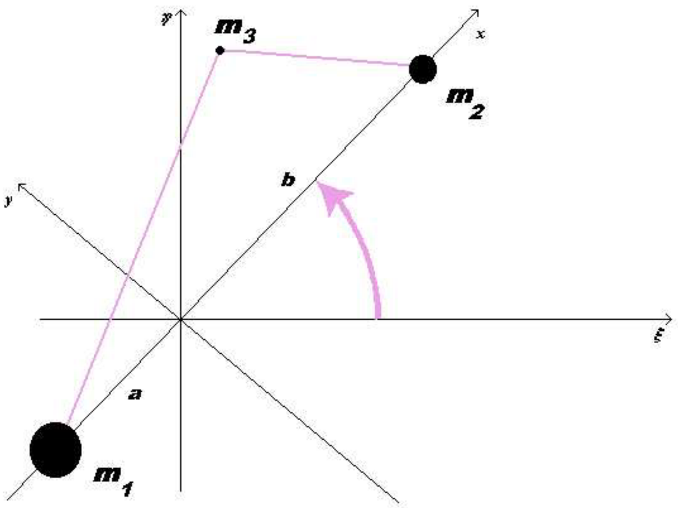
(Někdy se předpokládá platnost pouze pro $a \neq 0$, což vede k tomu, že je nutno dále pracovat na bandlu TM s vyloučeným nulovým řezem.) Kvadraticky homogenní semisprej (tj. semisprej, který je homogenní stupně 2), nazýváme *sprej.* K tomuto pojmu lze dospět i takto. Označme $C \in \mathfrak{X}_{TM}$ tzv. *Liouvilleovo vektorové pole*, jehož souřadnicové vyjádření má tvar $U^i(x^j, y^j) = 0, V^i(x^j, y^j) = y^i$. *Odchylkou* semispreje $Y \in \mathfrak{X}_{TM}$ rozumíme vektorové pole $Y^* \in \mathfrak{X}_{TM}$ definované $Y^* = [C, Y] - Y$. Sprejem pak je Y právě tehdy, je-li jeho odchylkou Y^* nulové vektorové pole.

2. Ukázky aktuální problematiky aplikací

2.1. Problém tří těles

Problém tří těles hraje velmi významnou roli v moderní analytické dynamice, nebeské mechanice a prostorové dynamice. Iniciační úlohou nebeské mechaniky a prostorové dynamiky je studium problému dvou těles, který je v podstatě vyřešen z hlediska matematického, astronomického i inženýrského, viz [**85**]. Zvýšení počtu participujících těles ze dvou na tři je ovšem kritický krok. Problém tří těles zůstává dodnes nevyřešen a lze konstatovat, že chování takového dynamického systému neumíme obecně popsat.

Omezený problém tří těles[6] můžeme zformulovat takto: dvě tělesa rotují kolem společného těžiště po kruhových drahách pod vlivem vzájemné přitažlivé síly a třetí těleso (přitahováno oběma tělesy, avšak neovlivňující jejich pohyb) se pohybuje v rovině rotace těchto dvou těles. Cílem je popsat pohyb třetího tělesa, tzn. nalézt řešení kanonických rovnic variační úlohy čili určit *orbity* třetího tělesa.



Obr.2.1. Problém tří těles

Označíme-li κ Newtonovu gravitační konstantu, n úhlovou rychlost rotujících těles, a, resp. b vzdálenost druhého, resp. prvního tělesa od počátku souřadnic a m_1, resp. m_2 hmotnost prvního, resp. druhého tělesa, pak v rotujícím souřadném systému o souřadnicích x, y mají pohybové rovnice třetího tělesa tvar soustavy dvou obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu (derivování podle času t)

$$\begin{aligned} x'' - 2ny' - n^2x &= -\kappa\Big(\frac{m_1(x-b)}{((x-b)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{m_2(x+a)}{((x-a)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\Big) \\ y'' + 2nx' - n^2y &= -\kappa\Big(\frac{m_1 y}{((x-b)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{m_2 y}{((x-a)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\Big) \end{aligned}$$

s počátečními podmínkami $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $x'(0) = x'_0$, $y'(0) = y'_0$. Nalezení neznámých funkcí $x(t)$, $y(t)$ je obtížné. Hledáme ovšem orbity třetího tělesa, tzn. chceme řešit kanonické rovnice; jsme ale v situaci neznámého hamiltoniánu $H(t, x, y,$

[6] přesněji: rovinný kruhový omezený problém tří těles

p, q), který musíme zkonstruovat tak, aby zohledňoval uvedenou soustavu diferenciálních rovnic (p, q jsou souřadnice impulsu sdružené s x, y).

V klasické Hamiltonově-Jacobiho integrační teorii se hamiltonián vezme tak, aby vyhovoval předpokladům

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial p} = 1, \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial q} = 1, \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = 0.$$

Úlohu hledání řešení kanonických rovnic lze převést na hledání úplného integrálu Hamiltonovy-Jacobiho rovnice, což je parciální diferenciální rovnice prvního řádu. Analytické řešení Hamiltonovy-Jacobiho rovnice ovšem v uvedeném problému neumíme nalézt, protože rovnice je neseparovatelná.

V roce 1995 publikoval Michael E. Hough, [**36**], novou integrační teorii umožňující nalézt orbity třetího tělesa jiným způsobem. Tato teorie je velmi přehledně prezentována v práci Pavla Dostála, [**13**], v níž je shrnuto celé matematické pozadí problému a Houghův článek, z matematického hlediska poněkud lakonický, je nově interpretován. Podstatný je geometrický přístup k problému integrace kanonických rovnic. Nejdříve je hamiltonián vybrán tak, aby vyhovoval novým předpokladům

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial p} = 0, \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial q} = 0, \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} = 0.$$

Následně je dokázáno, že řešení získané soustavy parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu je určeno dvěma integrálními plochami v souřadnicích (t, x, y). Orbitu lze tedy nalézt v prostoru (t, x, y) jako křivku představující průnik těchto dvou ploch.

V [**13**] pak je závěrem uvedena aplikace nové teorie na klasický Keplerův problém.

2.2. Minimální plochy v hydrodynamice

Řadou praktických problémů je motivován je i současný rozvoj teorie minimálních ploch. Vyjděme z klasického výsledku, jímž je rovnice *minimální plochy*, tzn. ohraničené plochy zadané explicitně jako funkce dvou proměnných $z = z(x, y)$, která má mezi všemi spojitě diferencovatelnými funkcemi, jejichž hodnoty na hranici jednoduše souvislé oblasti D jsou pevně předepsané, minimální plošný obsah. Rovnice má tvar

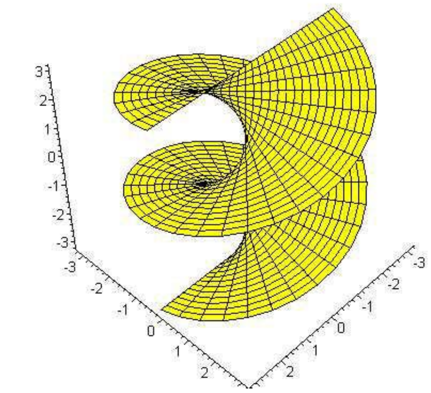
$$(1 + z_x'^2) z_{yy}'' + (1 + z_y'^2) z_{xx}'' - 2 z_x' z_y' z_{xy}'' = 0$$

Tuto rovnici splňuje kromě roviny např. helikoid [7], katenoid [8] a Scherkova plocha [9].

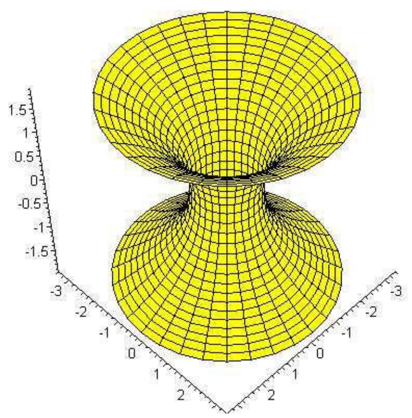
[7] helikoid je jediná netriviální minimální přímková plocha; lze ji vytvořit rovnoměrným otáčením přímky, která se současně rovnoměrně pohybuje ve směru kolmém k ose otáčení

[8] katenoid je jediná rotační minimální plocha, vzniká rotací řetězovky

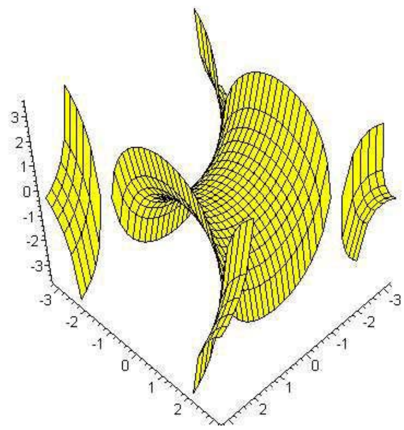
[9] Scherkova plocha je jediná netriviální plocha, jejíž explicitní vyjádření $z = f(x, y)$ lze rozložit do tvaru součtu $f(x, y) = g(x) + h(y)$



Obr.2.2. Helikoid



Obr.2.3. Katenoid



Obr.2.4. Scherkova plocha

Jako minimální plocha se v praxi realizuje např. mýdlová blána natažená na drátové kontuře. V klasické diferenciální geometrii se minimální plocha definuje jako plocha s nulovou střední křivostí, tzn.

$$H = \frac{1}{2}\frac{GL - 2MF + EN}{EG - F^2} = 0,$$

kde E, F, G, resp. L, M, N jsou koeficienty první, resp. druhé diferenciální formy plochy, viz např. [**35**]. Tato definice je širší; platí totiž, že plochy s nulovou střední křivostí, které lze vyjádřit explicitně ve tvaru $z = z(x, y)$, splňují výše uvedenou parciální rovnici. Z pohledu fyziky, odděluje-li hladká plocha dvě prostředí v ustáleném stavu a značí-li p_1, resp. p_2, tlaky v těchto prostředích, je střední křivost této plochy konstantní a je rovna $H = h(p_1 - p_2)$, kde h je koeficient povrchového napětí (Poissonův teorém). Proto se za minimální plochy někdy považují i plochy s konstantní (tedy nejen nulovou) střední křivostí. O minimálních plochách pojednává řada monografií, uveďme např. [**26**].

Důležitou vlastností minimálních ploch je jejich *stabilita*. Z fyzikálního hlediska jsou stabilní plochy, jejichž tvar není ovlivněn malou změnou vnějších vlivů. Matematicky o stabilitě minimální plochy ve tvaru funkce splňující rovnici minimální plochy rozhodneme na základě zjištění, zda funkce skutečně realizuje lokální minimum funkcionálu plošného obsahu, či nikoliv. K tomu je obecně třeba technicky náročné vyšetřování druhé variace. Různými přístupy k minimálním plochám, a to z hlediska experimentu, diferenciální geometrie i variačního počtu, stejně jako jejich stabilitou se podrobně zabývá práce [**92**] Zdeňka Vlka. Skutečnost, že na téže kontuře mohou být realizovány různé typy minimálních ploch, některé stabilní, některé nestabilní, je vyjádřena mj. pozoruhodným výsledkem Tužilina a Fomenka, kteří zkoumali vlastnosti minimálních ploch realizovaných na tzv. Douglasově kontuře. Odvodili větu, že graf plošného obsahu takových minimálních ploch v závislosti na vzdálenostech horní, resp. dolní dvojice kružnic Douglasovy kontury má tvar vlaštovčího ocasu, tedy jedné z ploch známých z teorie singularit, podrobněji viz [**92**].

V hydrodynamice se studují plochy nespojitostí, které se dělí na tečné nespojitosti a normálové nespojitosti. Tečné nespojitosti jsou dle teorie nestabilní, viz např. [**73**]. Plochy tečných nespojitostí jsou charakteristickými plochami potenciálové rovnice dvourozměrného stacionárního proudění

$$(c^2 - \Phi_x'^2)\Phi_{xx}'' + (c^2 - \Phi_y'^2)\Phi_{yy}'' - 2\Phi_x'\Phi_y'\Phi_{xy}'' = 0,$$

kde c je rychlost zvuku a Φ potenciál rychlosti. Pozorování ovšem ukázala persistenci (tedy stabilitu) vln představujících právě plochy tečných nespojitostí: tento jev vysvětluje R.M. Kiehn ve svých v minulém desetiletí publikovaných pracích (např. [**39**]) tím, že z množiny ploch tečných nespojitostí lze vybrat takové plochy, které splňují rovnici minimální plochy. Přestože odpovídající teoretické zdůvodnění je zatím ve stadiu zrodu, lze již nyní doložit podstatnou roli variačního počtu i diferenciální geometrie pro studium uvedených problémů.

3. Moderní geometrické struktury související s variačním počtem

3.1. Jety a jetové prostory

Nechť M, $\bar{M}$ jsou variety. Řekneme, že dvě zobrazení $f, g\colon M \to \bar{M}$ *určují týž r-jet* v $x \in M$, jestliže pro každou křivku $\gamma\colon \mathbb{R} \to M$ splňující $\gamma(0) = x$ mají křivky $f \circ \gamma$ and $g \circ \gamma$ styk r-tého řádu v nule. Píšeme pak $j^r_x f = j^r_x g$ a třídu ekvivalence nazýváme *r-jet* z M do $\bar{M}$. Množinu všech r-jetů z M do $\bar{M}$ značíme $J^r(M, \bar{M})$. Je-li *počátkem* r-jetu $x \in M$ a *koncem* téhož r-jetu $\bar{x} = f(x) \in \bar{M}$, pak $\alpha\colon = j^r_x f \mapsto x$ and $\beta\colon = j^r_x f \mapsto \bar{x}$ jsou projekcemi fibrovaných variet $\alpha\colon J^r(M, \bar{M}) \to M$, $\beta\colon J^r(M, \bar{M}) \to \bar{M}$. Dále, $J^r_x(M, \bar{M})$, respektive $J^r(M, \bar{M})_{\bar{x}}$ značí množinu všech r-jetů z M do $\bar{M}$ s počátkem $x \in M$, respektive s koncem $\bar{x} \in \bar{M}$ a píšeme $J^r_x(M, \bar{M})_{\bar{x}} = J^r_x(M, \bar{M}) \cap J^r(M, \bar{M})_{\bar{x}}$. Protože skládání zobrazení zachovává styk r-tého řádu, definujeme skládání r-jetů jako r-jet složeného zobrazení.

Fibrovanou varietu $T^r_k M = J^r_0(\mathbb{R}^k, M)$ nazýváme *bandl k-rozměrných rychlostí r-tého řádu* na M. Bandl $T^r M = T^r_1 M$ jednorozměrných rychlostí r-tého řádu je rovněž nazýván *tečný bandl r-tého řádu* na M, neboť $T^1_1 M$ není nic jiného než tečný bandl TM, viz 1.4.

Analogicky, fibrovanou varietu $T^{r*}_k M = J^r(M, \mathbb{R}^k)_0$ nazýváme *bandl k-rozměrných korychlostí r-tého řádu* na M, bandl $T^{r*} M = T^{r*}_1 M$ jednorozměrných rychlostí r-tého řádu je nazýván *kotečný bandl r-tého řádu* na M a $T^{1*}_1 M$ je pak právě kotečný bandl $T^* M$, viz 1.4.

Uvažujme nyní fibrovanou varietu $\pi\colon Y \to M$. Množinu $J^r Y$ všech r-jetů řezů Y nazýváme *r-té jetové prodloužení Y*. $J^r Y \subset J^r(M, Y)$ je uzavřená podvarieta, která hraje významnou roli jak v teorii konexí, tak ve variačním počtu. Fibrovanou varietu, jejíž každý fibr má strukturu reálného n-rozměrného vektorového prostoru, nazýváme *vektorový bandl.* Je-li $\pi\colon E \to M$ vektorový bandl, pak i jeho r-té jetové prodloužení $J^r E \to M$ je vektorový bandl.

3.2. Konexe

Klasická lineární konexe ∇ na varietě M čili lineární konexe ∇ na tečném bandlu TM definuje paralelní přenos vektoru z jednoho bodu do druhého podél nějaké křivky na varietě. Zhruba řečeno, zadáním konexe tedy určíme, co rozumíme přímým směrem na nějakém zakřiveném prostoru. (Jak bylo uvedeno v 1.1, alternativou je také zadání riemannovské metriky, která pak indukuje konexi.)

Obecný pojem konexe je definován takto. Pro libovolnou fibrovanou varietu $\pi\colon Y \to M$ uvažujme její první jetové prodloužení $J^1 Y$. *(Obecnou) konexí* Γ pak rozumíme libovolný řez $\Gamma\colon Y \to J^1 Y$. Uveďme příslušná souřadnicová vyjádření. Jsou-li x^i, resp. y^σ, lokální souřadnice na M, resp. fibrové souřadnice na Y, má konexe Γ souřadnicový tvar

$$y^\sigma_i = \Gamma^\sigma_i(x^j, y^\rho),$$

kde y^σ_i jsou indukované fibrové souřadnice na $J^1 Y$. S Γ ovšem koresponduje tzv. *horizontální liftování* $\Gamma_h\colon Y \times_M TM \to TY$ vektorových polí na M na vektorová pole na Y, které má souřadnicový tvar

$$dy^\sigma = \Gamma^\sigma_i(x^j, y^\rho) dx^i.$$

Pak $\mathrm{im}(\Gamma_h)$ představuje v každém bodě Y podprostor tečného (vektorového) prostoru v tomto bodě, který nazýváme *horizontální podprostor (vzhledem ke* Γ*)*, sjednocením horizontálních podprostorů je pak tzv. *horizontální bandl (vzhledem ke* Γ*)*.

Je-li $E \to M$ vektorový bandl, řez $\Gamma\colon E \to J^1E$, který je lineární na fibrech, nazýváme *lineární konexe* a pro $E = TM$ obdržíme klasický pojem (Pro tento případ dáváme přednost symbolu ∇ před Γ.) Mezi klasickými lineárními konexemi pak zaujímají důležité postavení *symetrické* konexe, tzn. ty, pro které

$$\nabla^i_{jk} = \nabla^i_{kj}.$$

Symetrické konexe lze názorně charakterizovat touto vlastností: vezměme pevně bod $x_0 \in M$ a uvažujme dva nezávislé infinitesimální vektory $u = \overrightarrow{x_0x_1}$, $v = \overrightarrow{x_0x_2}$. Paralelním přenosem u do x_2 a v do x_1 splynou koncové body těchto vektorů, tzn. obdržíme infinitesimální rovnoběžník. Dále je pak zřejmé, že konexe je symetrická, právě když se její torze anuluje. Dodejme, že nulová křivost znamená, že paralelní přenos závisí jen na koncovém bodu.

Řekneme, že křivka $\gamma\colon I \to M$ je *geodetikou vzhledem k symetrické konexi* ∇, jestliže

$$\gamma''\colon I \to TTM$$

je křivkou ležící v horizontálním podprostoru TTM. Křivka $\gamma\colon I \to M$ pak je geodetikou vzhledem k ∇ právě tehdy, když je podél ní splněno

$$y^{i\prime\prime} + \nabla^i_{jk} y^{j\prime} y^{k\prime} = 0.$$

Dále platí:

Věta (Ambrose, Palais, Singer, 1960, [3]). *Mezi spreji a symetrickými konexemi je vzájemně jednoznačná korespondence; geodetiky vzhledem ke konexi odpovídají geodetikám vzhledem příslušnému spreji.*

Tento výsledek byl v následujících letech dále zobecněn. Zobecnění vycházejí ze speciální definice konexe: budeme podle autora definice hovořit o Grifonově konexi. Je-li F přirozený bandl, *Grifonovou semikonexí* na fibrované varietě $FM = Y \to M$ rozumíme $(1,1)$-tenzorové pole $\widehat{\Gamma}$ splňující

$$\begin{aligned} J_A\widehat{\Gamma} &= J_A \\ \widehat{\Gamma}J_B &= -J_B \end{aligned}$$

pro nějaké přirozené afinory J_A, J_B na Y. [10]

Řekneme, že Grifonova semikonexe $\widehat{\Gamma}$ je *Grifonovou konexí*, jestliže $(1,1)$-tenzorové pole $\widehat{\gamma} = \frac{1}{2}(\mathrm{id} + \widehat{\Gamma})$ odpovídá horizontálnímu liftování $\Gamma_h\colon Y \times_M TM \to TY$ nějaké obecné konexe Γ ve výše uvedeném smyslu. Není tedy obecně zřejmé, zda některá Grifonova semikonexe na $Y \to M$ je Grifonovou konexí, jinými slovy, zda na $Y \to M$ Grifonova konexe existuje. Na bandlu $TM \to M$ máme přirozený afinor $J\colon TTM \to TTM$, jehož souřadnicové vyjádření je $J\colon (dx^y, dy^i) \mapsto (0, dx^i)$. Vezmeme-li $J_A = J_B = J$, obdržíme Grifonovu konexi na $TM \to M$. Grifonova konexe existuje i na T^rM, zde již ale $J_A \neq J_B$.

[10] Neuvádíme zde definici přirozenosti, zhruba řečeno, jde nám o geometrické objekty a geometrické konstrukce (ve smyslu nezávislosti na souřadnicích) — problematice přirozenosti je věnována především základní monografie [**53**] a dále celá řada časopiseckých článků.

Antisymetrické $(1,q)$-tenzorové pole [11] U na TM, $q \geq 1$, nazveme *semibázové*, jestliže

(i) pro všechna vektorová pole $\xi_1, \ldots, \xi_q$ na TM je $U(\xi_1, \ldots, \xi_q)$ je vertikální vektorové pole na TM

(ii) jestliže ξ_1 je vertikální vektorové pole na TM, pak $U(\xi_1, \ldots, \xi_q) = 0$. [12]

Je-li U semibázové antisymetrické $(1,q)$-tenzorové pole, nazveme $U^0 = \mathrm{i}_X U$ jeho potenciál, přičemž X značí libovolný semisprej na TM. *Tenzí* konexe Γ rozumíme antisymetrické $(1,1)$-tenzorové pole $H = [C, \Gamma_h]$ (Frölicherova-Nijenhuisova závorka), kde C je Liouvilleovo vektorové pole.

Slabou torzí konexe Γ rozumíme $(1,2)$-tenzorové pole $t = [\Gamma_h, J]$. (*Obecnou torzí* dle [**55**] pak rozumíme každé $(1,2)$-tenzorové pole $[\Gamma_h, A]$, kde A je nějaký přirozený afinor.) *Silnou torzí* konexe Γ rozumíme $(1,1)$-tenzorové pole $T = H + t^0$. (Ve všech případech jde o antisymetrická tenzorová pole.)

Pro bandl TM máme následující výsledek.

Věta (Grifone, 1972, [31]). *Každá (Grifonova) konexe* Γ *na* TM *s tenzí* H *jednoznačně indukuje semisprej* X *tak, že*

$$X^* = H^0.$$

Obráceně, ke každému semispreji X *a každému semibázovému antisymetrickému* $(1,1)$*-tenzorovému poli* T*, které splňují*

$$X^* + T^0 = 0,$$

lze jednoznačně přiřadit konexi Γ *tak, aby indukovala* X *a aby* T *byla její silná torze.*

Dále, bez podrobnější specifikace některých pojmů (typ konexe, semispreje, atd. - možno nalézt v [**7**]) uvádíme zobecnění Grifonovy věty pro bandl T^rM.

Věta (de Andrés, de León, Rodrigues, 1989, [7]). *Každá (Grifonova) konexe* Γ *na* T^rM *řádu* r *a typu* s, $1 \leq s \leq r$, *s tenzí* H *jednoznačně indukuje semisprej* X *téhož typu tak, že*

$$X^* = H^0.$$

Obráceně, ke každému semispreji X *typu 1 a každému semibázovému antisymetrickému* $(1,1)$*-tenzorovému poli* T *typu 1, které splňují*

$$X^* + T^0 = 0,$$

lze jednoznačně přiřadit konexi Γ *řádu* r *a typu 1 tak, aby indukovala* X *a aby* T *byla její silná torze.*

3.3. Lagrangiány na bandlu rychlostí

Pojem lagrangiánu na varietách bývá zaváděn různým způsobem. Začněme lagrangiány prvního řádu. Lagrangiánem na varietě M rozumíme funkci $L\colon TM \to \mathbb{R}$, resp. k-rozměrným lagrangiánem na varietě M rozumíme funkci $L\colon T^1_kM \to \mathbb{R}$. Tato nejjednodušší definice nám umožňuje snadné zavedení lagrangiánu, ovšem pouze takového, který nezávisí explicitně na parametru $t \in \mathbb{R}$ (čas), resp. na parametrech $t^1, \ldots, t^k \in \mathbb{R}^k$ (připomeňme, že $T^1_kM = J^1_0(\mathbb{R}^k, M)$). Tyto lagrangiány se ovšem v aplikacích často vyskytují, takže uvedená definice je v řadě případů použitelná. Pro lagrangiány závislé na t, resp. na $t^1, \ldots, t^k$, je nutno definovat lagrangián jako funkci $L\colon \mathbb{R} \times TM \to \mathbb{R}$, resp. $L\colon \mathbb{R}^k \times T^1_kM \to \mathbb{R}$. Zobecnění pro libovolný řád je

[11] nebo: vektorovou q-formu

[12] totéž pak nastává, je-li vertikální ξ_s, $1 \leq s \leq q$

pak zcela přirozené; k-rozměrným lagrangiánem r-tého řádu na varietě M rozumíme funkci $L\colon T^r_k M \to \mathbb{R}$, případně funkci $L\colon \mathbb{R}^k \times T^r_k M \to \mathbb{R}$.

Naposled uvedený případ byl nejobecnější, shrneme-li, *lagrangiánem na bandlu rychlostí* nadále rozumíme funkci

$$L\colon \mathbb{R}^k \times T^r_k M \to \mathbb{R}.$$

Variační úlohu v nejjednodušším případě jednorozměrného lagrangiánu prvního řádu na varietě M zformulujeme nyní takto: vezmeme jednoparametrickou soustavu křivek $x^i(t,\tau)$ na M, $t \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}$, takovou, že $x^i(t,0) = x^i(t)$, $x^i(a,\tau) = \alpha$, $x^i(b,\tau) = \beta$. Označíme-li

$$\mathcal{I} = \int_a^b L(x^i(t,\tau), \frac{\partial x^i(t,\tau)}{\partial t})dt,$$

pak variační úlohu představuje rovnice

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\tau}|_{\tau=0} = 0.$$

Označíme $\xi^i(t) = \frac{\partial x^i(t,0)}{\partial \tau}$, máme

$$\int_a^b (\frac{\partial L(x^j, \dot{x}^j)}{\partial x^i}\xi^i(t) + \frac{\partial L(x^j, \dot{x}^j)}{\partial \dot{x}^i}\dot{\xi}^i(t))dt = 0.$$

Výraz $\frac{\partial L(x^j,\dot{x}^j)}{\partial x^i}\xi^i(t) + \frac{\partial L(x^j,\dot{x}^j)}{\partial \dot{x}^i}\dot{\xi}^i(t)$ nazýváme *infinitezimální variace L vzhledem ke ξ* a značíme $\delta_\xi L$. Standardními úpravami snadno obdržíme Eulerovy rovnice ve známém tvaru. Zobecnění na obecný případ je přímé.

3.4. Lagrangiány na jetovém prodloužení fibrované variety

Protože platí $\mathbb{R}^k \times T^r_k M = J^r(\mathbb{R}^k, M)$, nabízí se zobecnit pojem lagrangiánu tak, že místo $J^r(\mathbb{R}^k, M)$ vezmeme r-té jetové prodloužení $J^r Y$ libovolné fibrované variety $Y \to M$ (pozor, v označení se změnila role M, bázová varieta M nyní představuje zobecnění parametrického prostoru $\mathbb{R}^k$, místo křivek, ploch, atd. budeme tudíž vyšetřovat řezy $s\colon M \to Y$).

Pro případ prvního řádu je tedy lagrangiánem funkce $L\colon J^1Y \to \mathbb{R}$. Je-li $\dim M = m$, horizontální m-formu na J^1Y

$$L(x^i, y^\sigma, y^\sigma_i)dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$$

(zkráceně Ldx) nazveme *horizontální lagrangeovská forma.* Horizontální lagrangeovskou formu lze také nahlížet jako morfismus

$$\lambda\colon J^1Y \to \bigwedge^m T^*M,$$

nad id_M, který nazýváme *lagrangeovský morfismus.*

Obecně, *lagrangiánem na jetovém prodloužení fibrované variety* rozumíme funkci

$$L\colon J^rY \to \mathbb{R}$$

a

$$\lambda\colon J^rY \to \bigwedge^m T^*M$$

pak je *lagrangeovský morfismus řádu r.*

Uvažujme nyní lagrangeovský morfismus $\lambda\colon J^1Y \to \bigwedge^m T^*M$ se souřadnicovým vyjádřením $L(x^i, y^\sigma, y^\sigma_i)dx$ a označme VJ^1Y vertikální podprostor TJ^1Y. Lokální souřadnice VJ^1Y označme $(x^i, y^\sigma, y_i^\sigma, dy^\sigma, dy_i^\sigma)$. *Vertikální diferenciál* lagrangeovského morfismu λ je morfismus

$$\delta\lambda \colon VJ^1Y \to \bigwedge^m T^*M$$

se souřadnicovým vyjádřením

$$(\frac{\partial L}{\partial y^\sigma} dy^\sigma + \frac{\partial L}{\partial y_i^\sigma} dy_i^\sigma) dx.$$

Dále, VJ^1Y lze identifikovat s J^1VY. Označme $(x^i, y^\sigma, z^\sigma)$ lokální souřadnice VY a $(x^i, y^\sigma, z^\sigma, Y_i^\sigma, Z_i^\sigma)$ lokální souřadnice J^1VY. Identifikace

$$\kappa \colon J^1VY \to VJ^1Y$$

má souřadnicové vyjádření

$$\begin{aligned} y_i^\sigma &= Y_i^\sigma \\ dy^\sigma &= z^\sigma \\ dy_i^\sigma &= Z_i^\sigma \end{aligned}$$

Jak vertikální diferenciál, tak κ lze zavést zcela geometricky, bez souřadnic.

Uvažujme nějakou kompaktní $(m-1)$-rozměrnou podvarietu $N \subset M$ s hladkou hranicí a vezměme nyní jednoparametrickou soustavu řezů $s_\tau \colon M \to Y$, $\tau \in \mathbb{R}$ takovou, že $y^\sigma(x^i, 0) = y^\sigma(x^i)$ (y^σ souřadnice řezu!), přičemž hodnoty řezů na hranici N jsou pevně předepsané. Pro

$$\mathcal{I} \ = \int_N L(x^i, y^\sigma(x^i, \tau), \frac{\partial y^\sigma(x^i, \tau)}{\partial x^j}) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$$

je variačního úlohou hledání stacionárního (kritického) řezu a je pak opět třeba řešit rovnici

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\tau}|_{\tau=0} = 0.$$

Infinitezimální variací řezu $s \colon M \to Y$ nazveme řez $\eta \colon M \to VY$ takový, že $\pi \circ \eta = s$, kde π je projekce $\pi \colon VY \to Y$.

Protože $\delta\lambda$ můžeme chápat jako řez $\delta\lambda \colon J^1Y \to V^*J^1Y \otimes \bigwedge^m T^*M$, máme $\delta\lambda \circ j^1s \colon M \to V^*J^1Y \otimes \bigwedge^m T^*M$ a $\kappa \circ j^1\eta \colon M \to V^*J^1Y$. Přímým výpočtem je nyní možno dokázat následující tvrzení geometricky interpretující infinitezimální variaci lagrangeovského morfismu λ.

Věta (Goldschmidt, Sternberg, 1973, [30]). *Vyčíslení*

$$\langle \delta\lambda \circ j^1s, \kappa \circ j^1\eta \rangle \colon M \to \bigwedge^m T^*M$$

představuje souřadnicové vyjádření

$$(\frac{\partial L(x^i, y^\sigma, y_i^\sigma)}{\partial y^\rho} \eta^\rho(x^j) + \frac{\partial L(x^i, y^\sigma, y_i^\sigma)}{\partial y_j^\rho} \eta_j^\rho(x^k)) dx$$

infinitezimální variace $\delta_\eta \lambda$ *lagrangeovského morfismu* λ *vzhledem k* η.

3.5. Diferenciální operátory a lagrangiány vyššího řádu

Jsou-li $Y \to M$, $Z \to M$ fibrované variety, *diferenciálním operátorem* rozumíme zobrazení $\mathbf{D}\colon C^\infty Y \to C^\infty Z$, pro které existuje $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a homomorfismus fibrovaných variet $\mathbf{D}^r\colon J^r Y \to J^r Z$ nad id_M takový, že pro každý řez $\gamma \in C^\infty Y$ platí

$$\mathbf{D}(\gamma) = \mathbf{D}^r \circ j^r \gamma.$$

Nejmenší r, pro něž existuje takové $\mathbf{D}^r$, nazveme *řád diferenciálního operátoru* $\mathbf{D}$.

Uvažujme morfismus nad id_M

$$f\colon J^r Y \to \bigwedge^k T^* M.$$

Jeho *formální vnější diferenciál*

$$Df\colon J^{r+1} Y \to \bigwedge^{k+1} T^* M$$

definujeme souřadnicově pro $f = f_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ předpisem

$$\begin{aligned} Df &= (D_i f_{i_1 \dots i_k}) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= \Big(\frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^i} + \frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial y^\sigma} y^\sigma_i + \dots + \frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial y^\sigma_{j_1 \dots j_r}} y^\sigma_{j_1 \dots j_r i}\Big) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \end{aligned}$$

Jedná se o diferenciální operátor prvního řádu.

Uvažujme nyní morfismus nad id_M

$$K\colon J^1 Y \to V^* Y \otimes \bigwedge^{m-1} T^* M.$$

Pro vertikální vektorové pole $\eta\colon Y \to VY$ definujeme vertikální vektorové pole $\mathcal{J}\eta\colon J^1 Y \to V J^1 Y$ jako $\mathcal{J}\eta\colon = \kappa \circ J^1 \eta$. Pak platí:

Věta (Kolář, 1981, [46]). *Pro každý lagrangeovský morfismus* $\lambda\colon J^1 Y \to \bigwedge^m T^* M$ *existuje jediný morfismus* $K\colon J^1 Y \to V^* Y \otimes \bigwedge^{m-1} T^* M$ *nad* id_M *a jediný morfismus* $E\colon J^2 Y \to V^* Y \otimes \bigwedge^m T^* M$ *nad* id_M *takové, že pro každé vektorové pole* $\eta\colon Y \to VY$ *platí*

$$\langle \delta\lambda, \mathcal{J}\eta \rangle = D(\langle K, \eta \rangle) + \langle E, \eta \rangle.$$

E nazýváme *Eulerův morfismus* a $E = 0$ jsou pak rovnice pro stacionární řez. Věta má svůj obecný tvar i pro lagrangeovské morfismy vyššího řádu ($\mathcal{J}^r \eta\colon J^r Y \to V J^r Y$ obdržíme iterací konstrukce $\mathcal{J} = \mathcal{J}^1$ a aplikací vložení $J^r Y \to \underbrace{J^1 \dots J^1}_{r\text{–krát}} Y$.):

Věta (Horák, Kolář, 1982, [34]). *Pro každý lagrangeovský morfismus* $\lambda\colon J^r Y \to \bigwedge^m T^* M$ *existuje globálně definovaný (obecně ne jediný) morfismus* $K\colon J^{2r-1} Y \to V^* J^{r-1} Y \otimes \bigwedge^{m-1} T^* M$ *nad* id_M *a jediný morfismus* $E\colon J^{2r} Y \to V^* Y \otimes \bigwedge^m T^* M$ *nad* id_M *takové, že pro každé vektorové pole* $\eta\colon Y \to VY$ *platí*

$$\langle \delta\lambda, \mathcal{J}^r \eta \rangle = D(\langle K, \mathcal{J}^{r-1} \eta \rangle) + \langle E, \eta \rangle.$$

Poznamenejme ještě, že značně speciálnější je užití tzv. Tulczyjewova diferenciálního operátoru prosazované de Leónem a jeho skupinou. Pro případ tečného bandlu vyššího řádu $T^r M = T^r_1 M$ se souřadnicemi x^i, $y^{i,1}$, $\dots$, $y^{i,r}$ ($y^{i,q} =$

$\frac{1}{q!}\frac{d^q}{dt^q}(x^i \circ \sigma)|_{t=0}, \sigma\colon \mathbb{R} \to M)$ *Tulczyjewův diferenciální operátor* $d_T\colon C^\infty(T^rM,\mathbb{R}) \to C^\infty(T^{r+1}M,\mathbb{R})$ přiřadí funkci f na T^rM funkci d_Tf na $T^{r+1}M$:

$$d_Tf\colon = \frac{\partial f}{\partial x^i}y^{i,1} + \frac{\partial f}{\partial y^{i,1}}y^{i,2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y^{i,r}}y^{i,r+1}.$$

Tulczyjewův diferenciální operátor lze rozšířit na formy a použít pro formalismus variačního počtu na tečných bandlech vyššího řádu.

3.6. Legendrova transformace

Legendrova transformace představuje přechod od lagrangeovského formalismu k hamiltonovskému. Jedním z problémů současného výzkumu v diferenciální geometrii je konstrukce zobecněné Poincarého-Cartanovy formy Ω_L k danému lagrangiánu L tak, aby variační úlohy obou formalismů byly ekvivalentní, tzn. aby došlo ke ztotožnění lagrangeovských stacionárních řezů s hamiltonovskými. Z důvodu nejednoznačnosti Poincarého-Cartanovy formy je v současnosti několik přístupů k zobecnění Legendrovy transformace. V tomto odstavci uvedeme některé výsledky; protože by však jejich přesná formulace vyžadovala zavedení řady technicky náročných pojmů, omezíme se na přehlednou formu jejich prezentace.

3.6.1. Hamiltonův formalismus na fibrovaných varietách Následující věta je formulací tzv. základní věty Hamiltonova formalismu v geometrické teorii úloh variačního počtu pro řád $r = 1$.

Věta (Goldschmidt, Sternberg, 1973, [30]). *K regulárnímu lagrangiánu L existuje jediná globálně definovaná m-forma Ω_L na J^1Y taková, že variační úloha generovaná funkcionálem závisejícím na L je ekvivalentní variační úloze generované funkcionálem závisejícím na Ω_L. Souřadnicový tvar Ω_L je*

$$\Omega_L = Ldx + (-1)^{i+1}\frac{\partial L}{\partial y^\sigma_i}dy^\sigma \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^m - \frac{\partial L}{\partial y^\sigma_i}y^\sigma_i dx.$$

Dále, hamiltonián H je roven $H = \frac{\partial L}{\partial y^\sigma_i} - L$ a momenty $p^i_\sigma = \frac{\partial L}{\partial y^\sigma_i}$. V Kolářově práci [**49**] je pak mj. odvozen tvar Legendrovy transformace jako morfismu $\mathcal{L}\colon J^1Y \to V * Y \otimes TX \otimes \bigwedge^k T^*M$.

Dále, Horák a Kolář zformulovali ve své práci [**34**] rovněž modifikaci své výše uvedené věty pro případ, kdy K je tzv. Poincarého-Cartanův morfismus. Ten je dán jednoznačně pouze v případech

(i) $r = 1, 2,\ m \in \mathbb{N}$
(ii) $m = 1,\ r \in \mathbb{N}$.

Pro $q < r$ vezmeme na $TJ^{q+1}Y$ tzv. *strukturní formu* $\psi_q\colon TJ^{q+1}Y \to VJ^qY$ a definujeme pak pro každý morfismus $A\colon J^rY \to V^*J^qY \otimes \bigwedge^k T^*M$ $(k+1)$-formu $\psi_q \barwedge A$ na J^rY jako kombinaci kontrakce a alternace, v souřadnicích

$$(a_{\sigma i_1\dots i_k}Dy^\sigma + \cdots + a^{j_1\dots j_q}_{\sigma i_1\dots i_k}Dy^\sigma_{j_1\dots j_q}) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Poincarého-Cartanovu formu pak definujeme vztahem

$$\Omega_L = L + \psi_{r-1} \barwedge K,$$

kde L je horizontální lagrangeovská forma a K je Poincarého-Cartanův morfismus asociovaný s λ. Cenným výsledkem [**34**] je zejména to, že pro takto definovanou Poincarého-Cartanovu formu lze v jistém smyslu zobecnit základní větu Hamiltonova formalismu.

3.6.2. Případ bandlů rychlostí vyššího řádu Pro $Y = \mathbb{R} \times T^r M$ máme momenty

$$p_i^{q+1} = \sum_{s=0}^{r-q-1} (-1)^s d_T^s \frac{\partial L}{\partial q_{q+s+1}^i}, \quad 0 \leq q \leq r-1$$

a Poincarého-Cartanovu formu

$$\Omega_L = \sum_{q=0}^{r-1} (-1)^q \frac{1}{(q+1)!} d_T^i (d_{\bar{J}_{q+1} L}) + L dt,$$

kde d_T^i je iterovaný Tulczyjewův diferenciální operátor. Momenty a Poincarého-Cartanovu formu lze dále takto zobecnit pro případ $Y = \mathbb{R}^k \times T_k^r M$, od čehož zde již upouštíme.

3.6.3. Poznámka o Hamiltonově-Jacobiho rovnici Je známo, že nejobecnější informaci o řešení variačního problému dává Hamiltonova-Jacobiho rovnice. V případě $m = 1$ a $r = 1$ jde o jednu parciální diferenciální rovnici prvního řádu. Kromě vyjímečných případů ovšem nelze nalézt její obecné řešení, obvykle však stačí nalezení tzv. úplného integrálu, tzn. řešení, v němž je počet libovolných konstant roven dimenzi fibru. I nalezení úplného integrálu je však problematické; podle Levi-Civitovy věty ([**4**]) lze sice zjistit, zda v určitých lokálních souřadnicích je rovnice separovatelná, neexistuje ale systematický postup, podle něhož by bylo možno vhodné lokální souřadnice zvolit.

Geometrický přístup k řešení Hamiltonovy-Jacobiho rovnice je pro problémy prvního řádu uveden opět již v práci Goldschmidta a Sternberga [**30**]. Práce studující tentýž problém pro vyšší řád jsou zatím ojedinělé, viz např. Niuův článek [**81**].

4. Vybrané směry současného výzkumu

4.1. Přirozené afinory a obecné torze

Jak již bylo uvedeno v 1.5, afinorem A na varietě M rozumíme $(1,1)$-tenzorové pole, které můžeme chápat jako lineární morfismus $A\colon TM \to TM$ nad id_M. *Přirozený afinor* na přirozeném bandlu F nad m-rozměrnými varietami pak je soustava afinorů $A_M\colon TFM \to TFM$ splňujících pro každou m-rozměrnou varietu M

$$TFf \circ A_M = A_N \circ TFf$$

pro všechny lokální difeomorfismy $f\colon M \to N$.

Nechť A, B jsou dvě $(1,1)$-tenzorová pole na M. Frölicherova-Nijenhuisova závorka $[A,B]$ je v tomto případě definována

$$\begin{aligned}[A,B](X,Y) \quad = \quad & [AX,BY]+[BX,AY]+AB[X,Y]+BA[X,Y]- \\ & A[X,BY]-A[BX,Y]-B[X,AY]-B[AX,Y],\end{aligned}$$

kde X, Y jsou vektorová pole na M. Frölicherova-Nijenhuisova závorka pak představuje $(1,2)$-tenzorové pole na M s vlastností

$$[A,B](X,Y) = -[A,B](Y,X).$$

Souřadnicový tvar je

$$([A,B](X,Y))^i = (a^l_j \partial_l b^i_k + b^l_j \partial_l a^i_k - a^i_l \partial_j b^l_k - b^i_l \partial_j a^l_k) X^j \wedge Y^k,$$

kde a^i_j, resp. b^i_j, jsou souřadnice A, resp. B. Identický afinor $1_{FM} = \mathrm{id}_{TFM}$ stejně jako jeho násobky dává

$$[A, k1_{FM}] = [k1_{FM}, B] = 0$$

pro libovolná A, B, pročež v dalším konstantní násobky identického afinoru nebereme v potaz.

Frölicherovu-Nijenhuisovu závorku $[\Gamma_h, A]$, kde Γ_h je horizontální liftování odpovídající nějaké obecné konexi Γ a A je přirozený afinor, nazýváme *obecná torze* konexe Γ (typu A).

Uvažujme nyní libovolnou fibrovanou varietu $Y \to M$, afinor $\varphi\colon Y \to TY \otimes T^*Y$ a obecnou konexi Γ on Y. Souřadnicový tvar Γ_h je

$$\delta^i_j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j + \Gamma^\sigma_i \frac{\partial}{\partial y^\sigma} \otimes dx^i.$$

Řez $\varphi\colon Y \to TY \otimes T^*Y$ má souřadnicové vyjádření

$$\varphi^i_j(x,y)\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j + \varphi^i_\sigma(x,y)\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dy^\sigma + \varphi^\sigma_i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^\sigma} \otimes dx^i + \varphi^\sigma_\rho(x,y)\frac{\partial}{\partial y^\sigma} \otimes dy^\rho.$$

Potom Frölicherovu-Nijenhuisovu závorka $[\Gamma_h, \varphi]$ lze počítat podle následujícího souřadnicového vzorce, uvedeného v [**62**].

$$(\Gamma_i^\sigma \frac{\partial \varphi_j^k}{\partial y^\sigma} - \varphi_\sigma^k \frac{\partial \Gamma_j^\sigma}{\partial x^i}) \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes dx^i \wedge dx^j +$$
$$(\frac{\partial \varphi_i^k}{\partial y^\sigma} + \Gamma_i^\rho \frac{\partial \varphi_\sigma^k}{\partial y^\rho} + \varphi_\rho^k \frac{\partial \Gamma_i^\rho}{\partial y^\sigma}) \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes dx^i \wedge dy^\sigma +$$
$$(\frac{\partial \varphi_j^\sigma}{\partial x^i} + \varphi_i^k \frac{\partial \Gamma_j^\sigma}{\partial x^k} - \Gamma_k^\sigma \frac{\partial \varphi_j^k}{\partial x^i} + \Gamma_i^\rho \frac{\partial \varphi_j^\sigma}{\partial y^\rho} + \varphi_i^\rho \frac{\partial \Gamma_j^\sigma}{\partial y^\rho} - \varphi_\rho^\sigma \frac{\partial \Gamma_j^\rho}{\partial x^i}) \frac{\partial}{\partial y^\sigma} \otimes dx^i \wedge dx^j +$$
$$(\frac{\partial \varphi_\rho^\sigma}{\partial x^i} - \varphi_\rho^j \frac{\partial \Gamma_i^\sigma}{\partial x^j} - \Gamma_j^\sigma \frac{\partial \varphi_\rho^j}{\partial x^i} + \Gamma_j^\sigma \frac{\partial \varphi_i^j}{\partial y^\rho} + \Gamma_i^\tau \frac{\partial \varphi_\rho^\sigma}{\partial y^\tau} - \varphi_\rho^\tau \frac{\partial \Gamma_i^\sigma}{\partial y^\tau} + \varphi_\tau^\sigma \frac{\partial \Gamma_i^\tau}{\partial y^\rho}) \frac{\partial}{\partial y^\sigma} \otimes dx^i \wedge dy^\rho.$$

Pokud jde o klasifikaci všech torzí, předpokladem je existující klasifikace všech přirozených afinorů na daném bandlu. Jak bylo uvedeno, obecné torze zahrnují tzv. slabou torzi, která pak indukuje silnou torzi; obě hrají významnou roli ve vztahu k semisprejům. Geometrická interpretace některých dalších obecných torzí už může být komplikovaná.

Autor se uvedenou problematikou zabýval ve článcích

(i) [**67**] (torze konexí na T^rM, r-lineární konexe, vztah k hlavním konexím na bandlu reperů vyššího řádu P^rM, srovnání s Yuenovou torzí)
(ii) [**66**] (torze na TTM, asociace semispreje ke konexi, diskuse Grifonovy konexe, slabá a silná torze)
(iii) [**61**] (klasifikace přirozených afinorů na T_k^rM, $\tilde{T}_k^rM$, P^rM)
(iv) [**62**] (torze na TT^*M)
(v) [**70**] (klasifikace přirozených afinorů na K^AM)

4.2. Zobecněné jety

V analytické mechanice hrají významnou roli kromě klasických (tzv. holonomních) jetů i jety neholonomní a semiholonomní. Pro $r = 1$, definujeme množinu neholonomních 1-jetů $\tilde{J}^1(M,N) \colon = J^1(M,N)$. Indukcí definici rozšíříme pro libovolné r. Nechť $\alpha \colon \tilde{J}^{r-1}(M,N) \to M$ značí projekci na počátek a $\beta \colon \tilde{J}^{r-1}(M,N) \to N$ projekci na konec neholonomních $(r-1)$-jetů. Pak řekneme, že X je *neholonomní* r-*jet* s počátkem v $x \in M$ a koncem v $\bar{x} \in N$, jestliže existuje řez $\sigma \colon M \to \tilde{J}^{r-1}(M,N)$ takový, že $X = j_x^1\sigma$ a $\beta(\sigma(x)) = \bar{x}$. $J^r(M,\bar{M}) \subset \tilde{J}^r(M,\bar{M})$ pak je přirozené vložení.

Každé $X \in \tilde{J}^r(M,\bar{M})$ indukuje zobrazení $\mu X \colon (\underbrace{T\dots T}_{r\text{–krát}} M)_x \to (\underbrace{T\dots T}_{r\text{–krát}} N)_{\bar{x}}$ takto. Pro $r = 1$ a $X = j_x^1 f$ je μX definováno jako T_xf. Indukcí, nechť $X = j_x^1\sigma$ pro nějaký α-řez $\sigma \colon M \to \tilde{J}^{r-1}(M,N)$. Pak $\sigma(u) \in J_u^{r-1}(M,N)$, $\mu(\sigma(u)) \colon (\underbrace{T\dots T}_{r\,-\,1\text{–krát}} M)_u \to (\underbrace{T\dots T}_{r\,-\,1\text{–krát}} N)_{\beta(\sigma(u))}$ a položíme $\mu X = T_x\mu(\sigma(u))$. Zobrazení $\mu X \colon (\underbrace{T\dots T}_{r\text{–krát}} M)_x \to (\underbrace{T\dots T}_{r\text{–krát}} N)_{\bar{x}}$ je morfismem vektorových bandlů vzhledem ke všem strukturám vektorových bandlů $\underbrace{T\dots T}_{r\text{–krát}} \to \underbrace{T\dots T}_{r\,-\,1\text{–krát}}$. Ovšem μX nepředstavuje zcela obecný morfismus vektorových bandlů uvedeného typu.

Označme projekce iterovaného tečného bandlu $\underbrace{T\dots T}_{r\text{–krát}} M$ následovně. Pro každé s, $0 < s \le r$, nechť $\pi^s \colon \underbrace{T\dots T}_{s\text{–krát}} M \to M$ značí kanonickou projekci na bázi. Dále označme $\pi^s_b \colon = \pi^s_{\underbrace{T\dots T}_{b\text{–krát}} M} \colon \tilde{T}^s(\underbrace{T\dots T}_{b\text{–krát}} M) \to \underbrace{T\dots T}_{b\text{–krát}} M$ projekci, v níž $\underbrace{T\dots T}_{b\text{–krát}} M$ je bázovým prostorem, ${}_a\pi^s \colon = \underbrace{T\dots T}_{a\text{–krát}} \pi^s \colon \underbrace{T\dots T}_{a\text{–krát}}(\underbrace{T\dots T}_{s\text{–krát}} M) \to \underbrace{T\dots T}_{a\text{–krát}} M$ indukovanou projekci vzniklou následnou aplikací funktoru $\underbrace{T\dots T}_{a\text{–krát}}$, a konečně ${}_a\pi^s_b \colon =$ $\underbrace{T\dots T}_{a\text{–krát}} \pi^s_{\underbrace{T\dots T}_{b\text{–krát}} M}$ nechť značí obecný případ zahrnující oba předchozí. Je-li a nebo b rovno nule, nepíšeme je.

Podbandly $\tilde{J}^r(M, \bar{M})$ můžeme nyní obdržet tak, že definitoricky zavedeme rovnost mezi některými projekcemi $\underbrace{T\dots T}_{r\text{–krát}} M$. Prvek $Z \in \tilde{J}^r(M, \bar{M})$ nazveme *semiholonomní* jet, jestliže pro všechna $q = 1, \dots, r$ je splněno

$$\pi^1_{r-1}(\mu Z) = {}_{q-1}\pi^1_{r-q}(\mu Z)$$

Bandl semiholonomních jetů z M do N označíme $\bar{J}^r(M, \bar{M})$. Dále, pro každé $\omega = 1, \dots, r$, prvek $Z \in \tilde{J}^r(M, \bar{M})$ nazveme *ω-holonomní* jet, jestliže pro všechna $q = \omega, \dots, r$ je splněno

$${}_{\omega-1}\pi^1_{r-\omega}(\mu Z) = {}_{q-1}\pi^1_{r-q}(\mu Z)$$

Bandl ω-holonomních jetů z M do N budeme značit $\stackrel{\omega}{\to} J^r(M, N)$ a platí $\stackrel{1}{\to} J^r(M, N) = \bar{J}^r(M, \bar{M})$, $\stackrel{r}{\to} J^r(M, N) = \tilde{J}^r(M, \bar{M})$.

Nakonec zaveďme pojem obecnější než neholonomní jety, a sice tzv. kvazijety. Nechť $x \in M$, $\bar{x} \in N$. Zobrazení $\phi \colon (\underbrace{T\dots T}_{r\text{–krát}} M)_x \to (\underbrace{T\dots T}_{r\text{–krát}} N)_{\bar{x}}$ se nazývá *kvazijet* řádu r s počátkem x a cílem $\bar{x}$, je-li morfismem vektorových bandlů vzhledem ke všem strukturám vektorových bandlů ${}_a\pi^1_b \colon (\underbrace{T\dots T}_{r\text{–krát}} M)_x \to (\underbrace{T\dots T}_{r-1\text{–krát}} M)_x$ a ${}_a\pi^1_b \colon (\underbrace{T\dots T}_{r\text{–krát}} N)_{\bar{x}} \to (\underbrace{T\dots T}_{r-1\text{–krát}} N)_{\bar{x}}$, $a + b = r - 1$. Množinu všech kvazijetů značíme $QJ^r_x(M, \bar{M})_{\bar{x}}$ a $QJ^r(M, \bar{M})$ pak představuje množinu všech kvazijetů z M do N, $QJ^r(M, \bar{M}) \to M \times N$ je fibrovanou varietou.

Podobně jako v případě funktoru J^r, r-jety (neholonomní, resp. semiholonomní, resp. ω-holonomní, resp. kvazijety) řezů fibrované variety $Y \to M$ Y tvoří příslušné r-té prodloužení Y (značené $\tilde{J}^r Y$, resp. $\bar{J}^r Y$, resp. $\stackrel{\omega}{\to} J^r Y$, resp. $QJ^r Y$).

Jak již bylo zmíněno, studium uvedených struktur je motivováno fyzikálními problémy. Autor k tématu přispěl ve článcích

(i) [**61**] (bandl neholonomních rychlostí $\tilde{T}^r_k M$, afinory)
(ii) [**65**] (simplexová struktura bandlů neholonomních a semiholonomních rychlostí)
(iii) [**63**] (konexe vyššího řádu a kvazikonexe jako řezy $Y \to QJ^r Y$)
(iv) [**69**] (popis Weilových algeber bandlů neholonomních a semiholonomních rychlostí)

4.3. Weilovy algebry v diferenciální geometrii

Weilova algebra A je lokální komutativní $\mathbb{R}$-algebra s jedničkou, jejíž nilpotentní ideál $\mathfrak{n}$ je konečněrozměrný vektorový prostor a $A/\mathfrak{n} = \mathbb{R}$. *Řád* $\operatorname{ord}(A)$ Weilovy algebry A je nejmenší přirozené číslo r splňující $\mathfrak{n}^{r+1} = 0$. Dále, přirozené číslo $\mathrm{w}(A) = \dim(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2)$ se nazývá *šířka* A. Weilovu algebru můžeme nahlížet jako konečněrozměrnou faktorovou $\mathbb{R}$-algebru algebry $\mathbb{R}[t^1,\dots,t^k]$ reálných polynomů v neurčitých $t^1,\dots,t^k$, kde $k = \mathrm{w}(A)$; tzn. Weilovu algebru A lze zapisovat ve tvaru

$$\mathbb{R}[t^1,\dots,t^k]/\mathfrak{i}$$

kde $\mathfrak{m}^{r+1} \subset \mathfrak{i} \subset \mathfrak{m}^2$ pro nějaké r, přičemž $\mathfrak{m} = \langle t^1,\dots,t^k\rangle$ je maximální ideál $\mathbb{R}[t^1,\dots,t^k]$, tzn. $\mathrm{ord}(A) = r$. $\mathfrak{i}$ pak je tzv. *adekvátní ideál* pro A v $\mathbb{R}[t^1,\dots,t^k]$ a má konečnou množinu generátorů, neboť $\mathbb{R}[t^1,\dots,t^k]$ je noetherovská algebra. Základním příkladem Weilovy algebry je algebra

$$\mathbb{D}^r_k\colon = \mathbb{R}[t^1,\dots,t^k]/\mathfrak{m}^{r+1}.$$

V [**2**] je dokázáno, že libovolná Weilova algebra A může být vyjádřena jako faktorová algebra $\mathbb{D}^r_k$ a že existuje (obecně ne jediný) epimorfismus $\pi_A\colon \mathbb{D}^r_k \to A$.

Je-li M varieta, $\dim M = m$, $m \geq k+1$, řekneme ([**45**]), že dvě zobrazení $g, h\colon \mathbb{R}^k \to M$ *určují týž A-jet* $j^A g = j^A h$, jestliže pro každou hladkou funkci $\phi\colon M \to \mathbb{R}$ je splněno

$$\pi_A(j^r_0(\phi \circ g)) = \pi_A(j^r_0(\phi \circ h)).$$

Prostor $T^A M$ všech A-jetů na M se nazývá *Weilův bandl* a T^A *Weilův funktor*. Pro výše uvedenou Weilovu algebru $\mathbb{D}^r_k$ se $T^{\mathbb{D}^r_k} M$ identifikuje s $J^r_0(\mathbb{R}^k, M) = T^r_k M$ a Weilovy bandly proto představují elegantní zobecnění bandlů rychlostí.

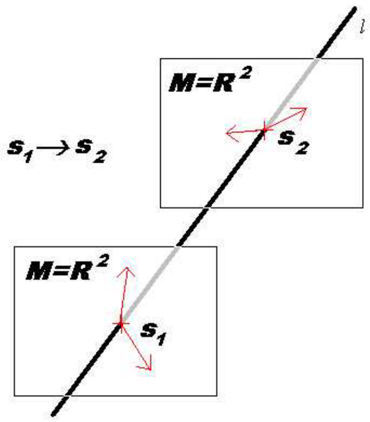
Zásadní význam Weilových bandlů je dán níže uvedenou větou. Nechť $F\colon \mathcal{M}f \to \mathcal{FM}$ je bandlový funktor z kategorie $\mathcal{M}f$ variet do kategorie $\mathcal{FM}$ fibrovaných variet. Jsou-li M_1, M_2 dvě variety, označíme standardní projekci na i-tý faktor $p_i\colon M_1 \times M_2 \to M_i$, kde $i = 1, 2$. Řekneme, že F *zachovává součin*, jestliže zobrazení

$$(F(p_1), F(p_2))\colon F(M_1 \times M_2) \to F(M_1) \times F(M_2)$$

je difeomorfismem pro libovolné M_1, M_2. Platí:

Věta (Kainz, Michor, 1987, [37], Eck, 1986, [21], Luciano, 1988 [76]). *Zachovává-li $F\colon \mathcal{M}f \to \mathcal{FM}$ součin, pak F je Weilův funktor.*

Příklad 4.1.1. Bandl TTM v mechanice. Bandl TTM představuje Weilův bandl, ovšem nejde o bandl rychlostí $T^r_k M$. V monografii Abrahama and Marsdena, [**1**], je uveden Tulczyjewův příklad interpretace tohoto bandlu v mechanice. Rovnovážnou konfigurací pružné tyče v euklidovském prostoru, v němž nepůsobí žádné vnější síly, je přímka l. Malá vychýlení indukovaná vnějšími silami jsou reprezentována body v rovině M kolmé na přímku l. Vzdálenost měřenou podél l od nějakého bodu označme s. Vyberme nyní řez tyče odpovídající intervalu $[s_1, s_2]$ a předpokládejme, že vnější síly a kroutivé síly působí na koncové body řezu. Konfigurační varietou řezu pak je součin $TM \times TM$ se souřadnicemi $(x^i, y^i, \bar{x}^i, \bar{y}^i)$, $i = 1, 2$. V limitě $s_2 \to s_1$ je potom konfigurační varietou bandl TTM se souřadnicemi (x^i, y^i, X^i, Y^i).



Obr.4.1. Konfigurace pružné tzče

Pro Weilovy bandly lze provádět klasifikaci přirozených geometrických objektů a operátorů v zásadě algebraickými technikami. Je ovšem často třeba řešit problémy, jež v zásadě spadají do komutativní algebry. Autor se touto problematikou zabýval ve článcích

(i) [**69**] (popis Weilových algeber funktorů neholonomních, semiholonomních a ω-holonomních rychlostí)
(ii) [**70**] (automorfismy Weilových algeber, homogenní Weilovy algebry, podalgebra pevných prvků)
(iii) [**71**] (zmenšovatelné Weilovy algebry, podalgebra pevných prvků)

4.4. Dotykové elementy

Teorie dotyku rovněž představuje z hlediska aplikací velmi důležitou partii diferenciální geometrie. Nejdříve zavedeme klasické bandly dotykových elementů. Řekneme, že dvě k-rozměrné podvariety N, $\bar{N}$ dané m-rozměrné variety M ($m \geq k+1$) mají *dotyk r-tého řádu* v $x \in N, \bar{N}$, jestliže pro nějaké jejich parametrizace g, h platí

$$j_0^r g = j_0^r h.$$

Třída ekvivalence k-rozměrných podvariet M se pak nazývá *dotykový element*. Dotykové elementy pak tvoří *bandl dotykových elementů*, který značíme $K_k^r M$.

Uvažujme nyní Weilův bandl $T^A M$. Řekneme, že $j^A g$ je *regulární*, má-li $g\colon \mathbb{R}^k \to M$ hodnost k v 0. Otevřený podbandl regulárních A-jetů značíme $\operatorname{reg} T^A M$. (g můžeme chápat jako parametrizaci k-rozměrné podvariety variety M.) Pak *Weilovým dotykovým elementem* na M určeným $X \in \operatorname{reg} T^A M$ rozumíme třídu ekvivalence $\operatorname{Aut} A_M(X) := \{\phi(X); \phi \in \operatorname{Aut} A\}$. Množinu všech Weilových dotykových elementů (typu A) na M značíme $K^A M$. $K^A M$ je bandlem zobecňujícím $K_k^r M$, který budeme nazývat *bandl Weilových dotykových elementů*.

Poznamenejme ještě, že prostor všech k-rozměrných podprostorů vektorového prostoru V bývá nazýván *Grassmannova varieta* nebo *grassmannián*. Je-li $V = T_x M$, pak grassmannián představuje právě $(K_k^1 M)_x$ a proto se

$$K_k^1 M = \bigcup_{x \in M} (K_k^1 M)_x$$

nazývá též *bandl k-rozměrných grassmanniánů*. Odtud je též $K^r_k M$ nazýván *bandl k-rozměrných grassmanniánů r-tého řádu.* $K^A M$ tedy představuje i obecný model těchto struktur.

Teorie dotyku má jisté pokračování i v numerické matematice (dotykové elementy programu ANSYS). Autor se dotykovými elementy zabýval ve článcích

(i) [**70**] (lifty vektorových polí na $K^A M$, přirozené afinory a rigidita funktoru K^A)

(ii) [**71**] (lifty 1-forem na $K^A M$, geometrická charakterizace některých Weilových dotykových elementů)

Závěr

Práce si klade za cíl být uceleným úvodem do problematiky vztahu moderní diferenciální geometrie a variačního počtu z hlediska aktuálního stavu teorie a akcentovat aplikace ve fyzikálních a technických úlohách. Dále je rovněž prezentací vybraných původních výsledků autora.

Text první kapitoly je hutným úvodem do problematiky variačního počtu, autor se především snaží příliš neopakovat to, co je již uvedeno v jeho skriptu [**68**], zároveň ale respektuje jeho symboliku tak, aby bylo možno chápat kapitolu i jako modernější a náročnější pokračování výkladu. Při zpracování uvedených ilustračních příkladů se autor opíral především o [**20**], příklady lagrangiánů vyššího řádu jsou uvedeny v [**74**], resp. v [**11**]. Odstavce 1.4 a 1.5 jsou do jisté míry založeny na definicích z [**72**], [**53**] a [**12**]. Druhá kapitola je stručnou prezentací diplomových prací studentů Fakulty strojního inženýrství Vysokého učení technického v Brně Pavla Dostála [**13**] a Zdeňka Vlka [**92**]; autor byl v obou případech vedoucím diplomové práce. Pro hlubší studium problematiky je třeba se seznámit přímo s uvedenými díly. Kapitola třetí sleduje rozvoj moderního geometrického přístupu k variačnímu počtu. Komentujeme zde dva přístupy; první je budování variačního počtu pro libovolnou fibrovanou varietu a je reprezentován především pracemi [**30**], [**49**], [**46**], [**34**]. Druhý přístup vychází z prací [**3**], [**31**], [**7**] a je omezen na bandly rychlostí $T^r_k M$, resp. $\mathbb{R}^k \times T^r_k M$. Ve čtvrté kapitole jsou uvedeny vybrané původní výsledky autora [6] a přehled pojmů a dalších výsledků s nimi bezprostředně souvisejících. Definice obecné torze byla poprvé uvedena v článku Koláře a Modugna [**55**]. Významnými výsledky v teorii obecných torzí jsou také práce Doupovce a Kurka, [**19**], [**18**], [**16**]. Konexe vyššího řádu jsou studovány např. v práci Koláře a Cabrasové, [**5**], kvazijety zavedl Pradines v [**83**] pro druhý řád, pro libovolný řád teorii kvazijetů rozpracoval Dekrét, [**8**]. Definici A-jetu v uvedené formě uvedl Kolář v [**45**], dotykové elementy jsou studovány např. v Guggenheimerově práci [**32**], z novějších výsledků připomeňme alespoň článek [**54**] Koláře a Mikulského. Nové výsledky dokázané autorem habilitační práce a do této práce zařazené byly publikovány jako články [**66**], [**61**], [**63**], [**69**], [**70**] a [**71**].

Souhrnně můžeme konstatovat, že studovaná problematika se týká vyšetřování struktur diferenciální geometrie souvisejících s variačním počtem, vzniká na objednávku fyzikálních a technických věd a dokladuje jejich těsné sepětí s moderní matematikou.

[6] původní výsledky autora jsou uvedeny detailně přímo v plné verzi habilitační práce v samostatné páté kapitole, která tvoří její nejrozsáhlejší část; ve zkrácené verzi je tato kapitola potlačena (z důvodu rozsáhlého a náročného matematického aparátu); na nové výsledky jsou uvedeny odkazy

Literatura

1. Abraham, R., Marsden, J.E. *Foundations of Mechanics*, Benjamin / Cummings, New York, 1978
2. Alonso, R.J. *Jet manifolds associated to a Weil bundle*, Arch. Math. (Brno) , 36, 2000, 195–199
3. Ambrose, W., Palais, R.S., Singer, I.M. *Sprays*, Anais. Acad. Brasileria Ciencia, 32, 1960, 163–178
4. Benenti, S. *Separation of variable in the geodesic Hamilton-Jacobi equation*, in: Symplectic Geometry and Mathematical Physics, Progress in Mathematics 99, Birkhäuser, 1991, 1–24
5. Cabras, A., Kolář, I. *Second order connections on some functional bundles*, Arch. Math. (Brno), 35, 1999, 347–365
6. de Andrés, L.C., de León, M., Rodrigues, P.R. *Connections on tangent bundles of higher order*, Demonstr. Math. XXII, 3, 1989, 189–216
7. de Andrés, L.C., de León, M., Rodrigues, P.R. *Connections on tangent bundles of higher order associated to regular Lagrangians*, Geom. Dedic., 39, 1991, 17–28
8. Dekrét, A. *On quasi-jets*, Časopis pro pěstování matematiky , 111, 1986, 345–352
9. de León, M. *Connections and f–structures on T^2M*, Kodai Math. J., 4 , 1981, 189–216
10. de León, M., Rodrigues, P.R. *Hamiltonian structures and Lagrangian fiels theories on jet bundles*, Bol. Acad. Galega de Ciencias, 7, 1988, 69–81
11. de León, M., Rodrigues, P.R. *n^k almost-tangent structures and the Hamiltonization of higher-order field theories*, J. Math. Phys., 30, 1989, 1351–1353
12. del Riego, L. *1-homogeneous Sprays in Finsler Manifolds*, Cont. Math., 288, 2001, 411–414
13. Dostál, P. *Geometrie integračních teorií variačního počtu*, Diplomová práce, Ústav matematiky FSI VUT v Brně, 2001
14. Doupovec, M. *Diferenciální geometrie a tenzorový počet*, Skriptum VUT v Brně, PC-DIR Real Brno, 1999
15. Doupovec, M. *Natural transformations between TTT^*M and TT^*TM*, Czech. Math. J., 43, 1993, 599–613
16. Doupovec, M. *Torsions of connections on time-dependent Weil bundles*, Coll. Math., to appear
17. Doupovec, M., Kolář, I. *Natural affinors on time-dependent Weil bundles*, Arch. Math. (Brno), 27, 1991, 205–209
18. Doupovec, M., Kurek, J. *Torsions of connections on higher order cotangent bundles*, Czechoslovak Math. J., to appear
19. Doupovec, M., Kurek, J. *Torsions of connections on higher order tangent bundles*, Annales UMCS Lublin, 55, 2001, 15–22
20. Dubrovin, B.A., Novikov, S.P., Fomenko, A.T. *Sovremennaja geometrija: Metody i priloženija*, Nauka, Moskva, 1986
21. Eck, D.J. *Product-preserving functors on smooth manifolds*, J. Pure Appl. Algebra, 42, 1986, 133–140
22. Ehresmann, C. *Extension du calcul des jets aux jets non-holonomes*, C.R.A.S. , 239, 1954, 1763–1764
23. Ehresmann C. *Introduction á la théorie des structures infinitésimales et des pseudo-groupes de Lie*, in: Colloque du C.N.R.S., Strasbourg, 1953, 97–110
24. Ehresmann, C. *Les prolongements d'un espace fibré différentiable*, C.R.A.S., 240, 1955, 1755–1757
25. Ehresmann, C. *Sur les connexions d'ordre supériour*, Atti V° Cong. Un. Mat. Italiana, Pavia – Torino, 1956, 326–328
26. Fomenko, A.T., Dao, T.T. *Minimal surfaces and the Plateu's problem*, Nauka, Moskva, 1987
27. Fox, C. *An Introduction to the Calculus of Variations*, Oxford University Press, 1950
28. Gancarzewicz J., Mikulski W.M., Pogoda Z. *Lifts of some tensor fields and connections to product preserving functors*, Nagoya Math. J., 135, 1994, 1–41
29. Gancarzewicz, J., Mikulski, W., Pogoda, Z., *Natural bundles and natural liftings. Prolongation of geometric structures*, in: Proc. Conf. on Diff. Geom. and Its Appl., Opava 1992, Silesian University Opava, 281–320, 1993
30. Goldschmidt, H., Sternberg, S. *The Hamilton-Cartan formalism in the calculus of variations*, Ann. Inst. Fourier, 23,1, 1973, 203–267
31. Grifone, J. *Structure presque-tangente et connexions, I.,* Ann. Inst. Fourier, 22,1, 1972, 287–334

32. Guggenheimer, H., *Contact elements, contact correspondences and contact invariants*, Ann. Mat. Pura Appl., IV. Ser., 120, 229–261, 1979
33. Guil-Asenssio, F., Saorín, M., *The group of automorphisms of a commutative algebra*, Math. Z. , 219, 31–48, 1995
34. Horák, M., Kolář, I. *On the higher order Poincaré-Cartan forms*, Czechoslovak Math. J., 33 (108), 1983, 467–475
35. Hostinský, B. *Diferenciální geometrie křivek a ploch*, JČMF, 1950
36. Hough, M.E. *Integral surfaces with space-time coordinates, in the gravitational field of rotating system*, Celest. Mech. and Astron. , 61, 1995, 263–287
37. Kainz, G., Michor, P.W. *Natural transformations in differential geometry*, Czechoslovak Math. J., 37, 1987, 584–607
38. Katritch, V., Bednar, J., Michoud, D., Scharein, R.G., Dubochet, J., Stasiak, A. *Geometry and physics of knots*, Nature, 384, 1996, 142–145
39. Kiehn, R.M. *Hydrodynamical wakes and minimal surfaces with fractal boundaries*, in: Mixing in Geophysical Flows, CIMNE Barcelona, 1995 , 52–64
40. Kobayashi, S., Nomizu, K. *Foundations of Differential Geometry, Vol. I.*, J. Wiley Interscience, 1963
41. Kolář, I. *A geometrical version of the higher order Hamilton formalism in fibred manifolds*, Jour. of Geom. and Physics, 1, 1984, 127–137
42. Kolář, I. *Affine differential operators and the Hamilton formalism*, Knižn. odb. a věd. spis ˚ u VUT v Brně, B-56, 1975, 17–21
43. Kolář, I. *Affine structure on Weil bundles*, Nagoya Math. J., 158, 2000 , 99–106
44. Kolář, I. *Bundle functors of the jet type*, in: Differential Geometry and Applications (Proc. Sat. Confer. of ICM, 1998),, Brno, 1999, 231–237
45. Kolář, I. *Jet-like approach to Weil bundles*, Seminar text, Masaryk University, Brno 2001
46. Kolář, I. *Lie derivatives and higher order Lagrangians*, in: Proceedings of the Conference in Diff. Geom. and Its Appl., Prague , 1981, 117–123
47. Kolář, I. *Natural operators related with the variational calculus*, in: Proceedings of the Conference in Diff. Geom. and Its Appl. , Opava, 1993, 461–472
48. Kolář, I. *On some operations with connections*, Math. Nachrichten, 69, 1975, 297–306
49. Kolář, I. *On the Hamilton formalism in fibered manifolds*, Scripta Fac. Sci. Nat. Brunensis, Physica 3-4, 5, 1975, 249–254
50. Kolář, I. *On the natural operators on vector fields*, Ann. Glob. Anal. Geom., 6, 1988, 109–117
51. Kolář, I. *Some geometric aspects of the higher order variational calculus*, in: Proceedings of the Conference in Diff. Geom. and Its Appl., Nové Město na Moravě, 1983
52. Kolář, I. *Some higher order operations with connections*, Czech. Math. J., 24 (99), 1974, 311–330
53. Kolář, I., Michor, P.W., Slovák, J. *Natural Operations in Differential Geometry*, Springer Verlag , 1993
54. Kolář, I., Mikulski, W.M. *Contact elements on fibered manifolds*, Czech. Math. J., to appear
55. Kolář, I., Modugno, M. *Torsions of connections on some natural bundles*, Diff. Geom. and its Appl., 2, 1992, 1–16
56. Krupka, D. *A geometric theory of ordinary first order variational problems in fibered manifolds, I. Critical Sections*, J. Math. Anal. Appl., 49, 1975, 180–206
57. Krupka, D. *Lepagean forms in higher order variational theory*, in: Proc. of the IUTAM-ISIMM Symposium on Modern Development in Analytical Mechanics, Torino, 1982, 197–238
58. Krupka, D. *Some geometric aspects of variational problems in fibred manifolds*, Folia Sci. Nat. Univ. Purkynianae Brunensis Physica, 14 , 1973, 1–65
59. Krupka, D., Janyška, J. *Lectures on differential invariants*, UJEP Brno , 1990
60. Kurek, J. *Natural affinors on higher order cotangent bundle*, Arch. Math., 28, 1992, 175–180
61. Kureš, M. *Affinors and connections in higher order geometry*, in: Differential Geometry and Applications, Proc. Sat. Confer. of ICM, 1998, Brno, 1999, 239–246
62. Kureš, M. *Connections and torsions on TT^*M*, Annales UMCS Lublin, 55 , 2001, 89–101
63. Kureš, M. *Generalizations of jets and reflections in the theory of connections*, Publicat. Math. Debrecen, 59, 2001, 339–352
64. Kureš, M. *Natural lifts of classical linear connections to the cotangent bundle*, Supplem. ai Rendic. del Circ. Matem. di Palermo , 63, 2000,, 131–140

65. Kureš, M. *On the simplicial structure of some Weil bundles*, Supplem. ai Rendic. del Circ. Matem. di Palermo, 63, 2000, 131–140
66. Kureš, M. *Some properties of connections on iterated tangent bundles*, Arch. Mech. Warszawa, 50, 1998, 459–466
67. Kureš, M. *Torsions of connections on tangent bundles of higher order*, Supplem. ai Rendic. del Circ. Matem. di Palermo, 54, 1998, 65–73
68. Kureš, M. *Variační počet*, Skriptum VUT v Brně, PC-DIR Real Brno, 2000
69. Kureš, M. *Weil algebras of generalized higher order velocities bundles*, Cont. Math., 288, 2001, 358–362
70. Kureš, M., Mikulski, W.M. *Natural operators lifting vector fields to bundles of Weil contact elements*, Czech. Math. J., to appear
71. Kureš, M., Mikulski, W.M. *Natural operators lifting 1-forms to bundles of Weil contact elements*, Irish Math. Soc. Bull., 49, 2002, 23–41
72. Lang, S. *Fundamentals of Differential Geometry*, Springer Verlag, 1999
73. Landau, L.D., Lifšic, E.M. *Gidrodinamika*, Nauka, Moskva, 1986
74. Li, Z.P., Li, R.J. *Generalized canonical Noether theorem and Poincaré-Cartan integral invariant for a system high-order Lagrangian and an application*, Commun. Theor. Phys. (Beijing, China), 36, 2001, 157–162
75. Libermann, P. *Parallélismes*, J. Diff. Geom., 8, 1973, 511–539
76. Luciano, O.O. *Categories of multiplicative functors and Weil's infinitely near points*, Nagoya Math. J., 109, 1988, 69–89
77. Mikulski, W.M. *Natural differential operators between some natural bundles*, Math. Bohemica, 118(2), 1993, 153-161
78. Mikulski, W. *The natural operators lifting 1-forms to the bundles of A-velocities*, Mh. Math., 119, 63–77, 1995
79. Morimoto A. *Prolongations of connections to bundles of infinitely near points*, J. Diff. Geom., 11, 1976, 479–498
80. Muñoz, J., Rodrigues, J., Muriel, F.J. *Weil bundles and jet spaces*, Czech. Math. J., 50, 2000, 721–748
81. Niu, S.-W. *Higher order variational calculus*, Tensor, N.S., 57, 1996, 109–118
82. Oproiu, V., Papaghiuc, N. *On the differential geometry of the Legendre transforamtion*, Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 57, 1987, 35–49
83. Pradines, J. *Representation des jets non-holonomes per des morphismes vectoriels doubles soudés*, C.R.A.S., 278, 1974, 1557–1560
84. Pradines, J., Wouafo Kamga, J. *Composition et décomposition irréducible des objects géométriques d'ordres supérieurs*, C.R.A.S., 280, 1975, 125–128
85. Szebehely, V.G., Mark, H. *Adventures in Celestial Mechanics*, John Wiley & Sons, Inc., 1997
86. Szebehely, V.G. *Theory of Orbits*, Academic Press, New York, 1967
87. Tomáš, J. *On quasijet bundles*, Rend. del Circ. Mat. di Palermo, Serie II, Suppl., 63, 2000, 187–196
88. Virsik, G. *A generalized point of view to higher order connections on fibre bundles*, Czech. Math. J., 19 (94), 1969, 110–142
89. Virsik, G. *Higher order connections: Introduction and survey*, Seminar text, Budapest, 1997
90. Virsik, G. *On the holonomity of higher order connections*, Cahiers Top. Géom. Diff., 12 (94), 1971, 197–212
91. Virsik, G. *Total connections in Lie grupoids*, Arch. Math. (Brno), 31, 1995, 183–200
92. Vlk, Z. *Minimální plochy*, Diplomová práce, —stav matematiky FSI VUT v Brně, 2001
93. Weil, A. *Théorie des points sur les variétés différentiables*, in: Topologie et Géométrie Différentielle, Colloque du C.N.R.S., Strasbourg, 1953, 97–110
94. White, J.E. *The Method of Iterated Tangents with Applications in Local Riemannian Geometry*, Pitman, London, 1982
95. Zariski, O., Samuel, P. *Commutative algebra, Vol. II*, D. Van Nostrand Company, 1960

Abstrakt. Řada úloh technické praxe je založena na teoretických výsledcích variačního počtu a má jasný geometrický charakter. Habilitační práce studuje některé souvislosti diferenciální geometrie a variačního počtu právě s přihlédnutím k aplikacím. Variační počet na varietách vychází z teorie jetů a jetových prostorů.

Abstract. A number of problems of technical realizations is based on the theoretical results of the calculus of variations and has a clear geometrical character. Some relations between differential geometry and the calculus of variations with respect to applications are studied in the dissertation. Variational calculus on manifolds follows up the theory of jets and jet bundles.