



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

VÝPOČTOVÉ MODELOVÁNÍ IZOVOLUMICKÉ KONTRAKCE LEVÉ SRDEČNÍ KOMORY

COMPUTATIONAL MODELLING OF ISOVOLUMIC CONTRACTION OF LEFT VENTRICLE

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Matej Kubík

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Jiří Vaverka

BRNO 2023

Zadání diplomové práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	Bc. Matej Kubík
Studijní program:	Inženýrská mechanika a biomechanika
Studijní obor:	Biomechanika
Vedoucí práce:	Ing. Jiří Vaverka
Akademický rok:	2022/23

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Výpočtové modelování izovolumické kontrakce levé srdeční komory

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Kontrakci srdeční svaloviny je možné výpočtově modelovat prostřednictvím aktivního tenzoru napětí. Celkový tenzor napětí je potom součtem pasivního a aktivního tenzoru a zahrnuje tedy jak odezvu tkáně na deformaci, tak vliv kontrakce svalových vláken. V komerčních softwarech založených na MKP nejsou konstitutivní modely tohoto typu běžně k dispozici a je nutné je implementovat pomocí obecné uživatelské subrutiny. K tomu je nutné odvodit analytické vztahy pro tenzor napětí a tenzor tuhosti. Implementovaný konstitutivní model lze následně použít např. pro simulaci určité fáze pracovního cyklu levé srdeční komory.

Cíle diplomové práce:

1. Na základě volně dostupné reálné geometrie levé srdeční komory vytvořit konečnoprvkový model komory zohledňující proměnlivou orientaci svalových vláken ve stěně.
2. Odvodit vztahy potřebné pro implementaci zadaného aktivního konstitutivního modelu myokardu. Realizovat samotnou implementaci na základě vzorové subrutiny poskytnuté vedoucím práce.
3. Simulovat fázi izovolumické kontrakce komory za normálních podmínek. Diskutovat případné odlišnosti oproti klinicky naměřeným průběhům z literatury.

Seznam doporučené literatury:

HOLZAPFEL, Gerhard A. Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering. John Wiley & Sons Ltd, 2000. 470 s. ISBN 0-471-82319-8.

Ansys®, Release 2021 R2, Help System, Programmer's Reference, ANSYS, Inc.

AGGER, Peter et al. Changes in overall ventricular myocardial architecture in the setting of a porcine animal model of right ventricular dilation. Journal of Cardiovascular Magnetic Resonance. 2017, 19(93).

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2022/23

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jiří Hlinka, Ph.D.
děkan fakulty

ABSTRAKT

Táto diplomová práca sa zaoberá výpočtovým modelovaním izovolumickej kontrakcie ľavej srdcovej komory pomocou metódy konečných prvkov. Súčasťou práce je rešerš o anatómii a fyziológii srdca, kde je detailnejšie rozobraná štruktúra srdcovej svaloviny. Pasívna mechanická odozva modelu odzrkadľuje práve túto štruktúru. Do výpočtového modelu je zahrnutá pomocou zredukovaného hyperelastického modelu Holzapfela & Ogdena. Aktívne napätie svalových vlákien, ktoré je dôsledkom elektrickej stimulácie je do modelu zahrnuté tzv. prístupom aktívneho napätia. Hlavným cieľom práce je implementácia a odskúšanie tohto prístupu v programe ANSYS za pomoci podprogramu Usermat.

KLÚČOVÉ SLOVÁ

Izovolumická kontrakcia, ľavá srdcová komora, metóda konečných prvkov, Štruktúra srdcovej svaloviny, výpočtový model, prístup aktívneho napätia, podprogram Usermat.

ABSTRACT

This diploma thesis deals with computational modelling of isovolumic contraction of the left heart ventricle by using finite element method. Part of the thesis includes research on the anatomy and physiology of the heart, where the structure of the heart muscle is analyzed in more detail. The passive mechanical response of the model reflects this very structure. It is included in the computational model by using a reduced Holzapfel & Ogden hyperelastic model. The active tension of muscle fibers, which is a consequence of electrical stimulation, is included in the model by the so-called active stress approach. A main goal of thesis is the implementation and testing of this approach in ANSYS program with the help of subroutine Usermat.

KEYWORDS

Izovolumic contraction, left heart ventricle, finite element method, cardiac muscle structure, computational model, active stress approach, subroutine Usermat.

BIBLIOGRAFICKÁ CITÁCIA

KUBÍK, M *Výpočtové modelování izovolumické kontrakce levé srdeční komory*. Brno, 2023. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedúci diplomovej práce Jiří Vaverka.



ČESTNÉ PREHLÁSENIE

Prehlasuje, že táto diplomová práca je mojím pôvodným dielom, spracoval som ju samostatne pod vedením diplomovú prácu pána Ing. Jiřího Vaverku a s použitím informačných zdrojov uvedených v zozname.

V Brne dňa 25. května 2023

.....

Matej Kubík

POĎAKOVANIE

Rád by som sa touto formou poďakoval svojmu vedúcemu diplomovej práce, pánovi Ing. Jiřímu Vavrkovi za ochotu, priateľský prístup, znalosti a cenné rady, ktoré mi predal a za čas, ktorý mi počas riešenia tejto práce venoval. Ďalej by som sa rád poďakoval pani Veronike Dzetkuličovej, Ph.D. za ochotu a čas potrebný k objasneniu anatómie srdca. V neposlednom rade ďakujem svojej rodine a priateľom za podporu a motiváciu k štúdiu. Špeciálne poďakovanie patrí pani Mgr. Veronike Serdeľovej, vďaka ktorej boli posledné roky štúdia obzvlášť príjemné.

OBSAH

Úvod.....	10
1 Anatomia a fyziológia srdca.....	11
1.1 Vybrané charakteristiky anatómie a fyziológie srdca.....	11
1.1.1 Srdcové vrstvy	11
1.1.2 Srdcová funkcia	11
1.1.3 Stimulácia srdca.....	12
1.1.4 Srdcové chlopne	14
1.2 Srdcový cyklus.....	14
1.2.1 Plniaca fáza.....	15
1.2.2 Izovolumická kontrakcia	16
1.2.3 Ejekčná fáza.....	16
1.2.4 Fáza izovolumickej relaxácie	16
1.3 Štruktúra myokardu a jej vplyv na kontrakciu komôr	17
1.3.1 Uhol skrutkovice	17
1.3.2 Uhol vniknutia („ <i>intrusion angle</i> “)	17
1.3.3 Podrobný rozbor uhlu natočenia vlákien	18
1.3.4 Štruktúra a vlastnosti myokardu	20
2 Formulácia problémovej situácie	22
2.1 Problémová situácia	22
2.2 Problém.....	22
2.3 Ciele práce	22
3 Tvorba výpočtového modelu.....	23
3.1 Model geometrie a tvorba siete.....	23
3.2 Nastavenie orientácie vlákien	24
3.3 Modelovanie krvi v komore.....	26
4 Model materiálu.....	27
4.1 Pasívny tenzor napätia	27
4.1.1 Odvodenie Cauchyho tenzoru napätia a tenzoru elastických konštánt.....	28
4.1.2 Materiálové parametre modelu.....	31
4.2 Aktívny tenzor napätia.....	32
5 Implementácia konštitutívneho modelu	36
6 Výpočet fázy izovolumickej kontrakcie	43
6.1 Tlak v komore na konci fázy	43
6.2 Ďalšie závery výpočtov	45
Záver	50

ÚVOD

Výpočtové modelovanie je v súčasnosti často používaným nástrojom, ktorý dopĺňa klinické pozorovania a experimentálne štúdie pre lepšie pochopenie fyziologických procesov v ľudskom tele. Umožňuje usúdiť závažnosť funkčných porúch a predpovedať výsledky liečebných postupov. Táto práca sa zaoberá výpočtovým modelovaním konkrétnej fázy srdcového cyklu ľavej srdcovej komory. Táto fáza zahŕňa okrem elektrickej stimulácie svalových vlákien aj mechanickú odozvu srdcovej svaloviny na deformáciu. V práci bude prezentovaný matematický model pre popis mechanického správania srdcového svalstva rovnako, ako prístup aktívneho napätia („*active stress approach*“) pre popis stimulácie svalových vlákien. Práve implementácia a odskúšanie tohto prístupu je hlavným cieľom diplomovej práce.

V prvej kapitole sa nachádza základný opis anatómie a fyziológie srdca. Podrobnejšie bude rozobrané natočenie svalových vlákien s stene ľavej srdcovej komory. V kapitole 2 je rozobratá problémová situácia, problém, ktorou sa práca zaoberá a sú špecifikované ciele práce. Kapitola 3 sa zaoberá tvorbou výpočtového modelu, prácou so sieťou konečných prvkov a nastavením okrajových podmienok. Kapitola 4 obsahuje popis použitého konštitutívneho modelu, spolu s odvodením vzťahov potrebných k implementácii modelu do výpočtového programu. Základné informácie ohľadom užívateľského podprogramu Usermat sa nachádzajú v kapitole 5 spoločne s niektorými podstatnými krokmi pre implementáciu konštitutívneho modelu. V poslednej šiestej kapitole sú výsledky výpočtového modelovania izovolumickej kontrakcie ľavej srdcovej komory a sú porovnané s nameranými výsledkami z literatúry.

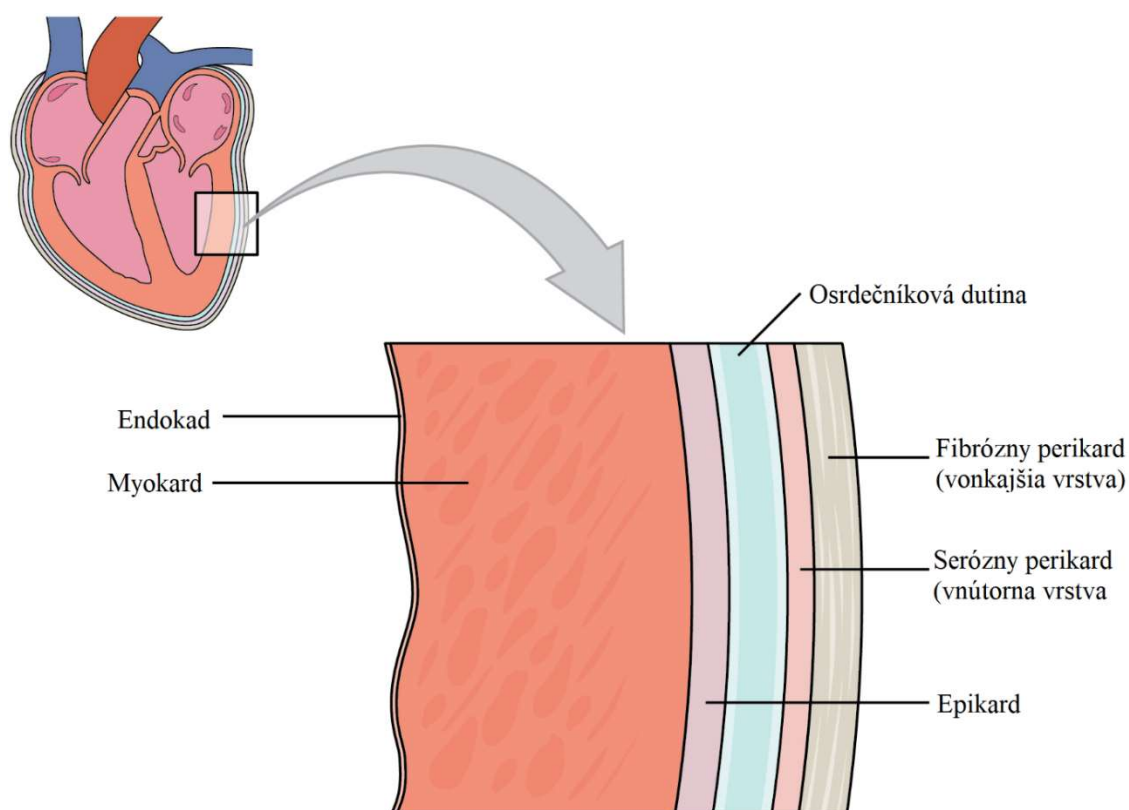
1 ANATÓMIA A FYZIOLOGIA SRDCA

1.1 VYBRANÉ CHARAKTERISTIKY ANATÓMIE A FYZIOLOGIE SRDCA

1.1.1 SRDCOVÉ VRSTVY

Pokiaľ nebude uvedené inak, informácie v tejto kapitole sú prevzaté z [1].

Anatomicky sa srdce nachádza za hrudnou kosťou, medzi pľúcami, v puzdre z väzivového tkaniva, tzv. **perikardu**. Na ňom môžeme pri bližšom pozorovaní rozlíšiť vonkajšiu vrstvu (fibrózny perikard) a vnútornú vrstvu (serózny perikard). Nasledujúca vrstva, **epikard**, už leží priamo na srdci. Medzi perikardom a epikardom je tzv. osrdečníková dutina – medzera vyplnená tekutinou, ktorá umožňuje pohyb srdca vnútri perikardu s minimálnym trením. Pod epikardom sa nachádzajú koronárne tepny uložené v ochranej vrstve tuku. Nasleduje tkanivo srdcového svalu - **myokard** a najvnútornejšia vrstva srdca, tzv. **endokard** vid' obr. 1.1.1.



Obr. 1.1.1: Schematický náčrt jednotlivých vrstiev srdečnej steny, prevzaté z [2] a upravené.

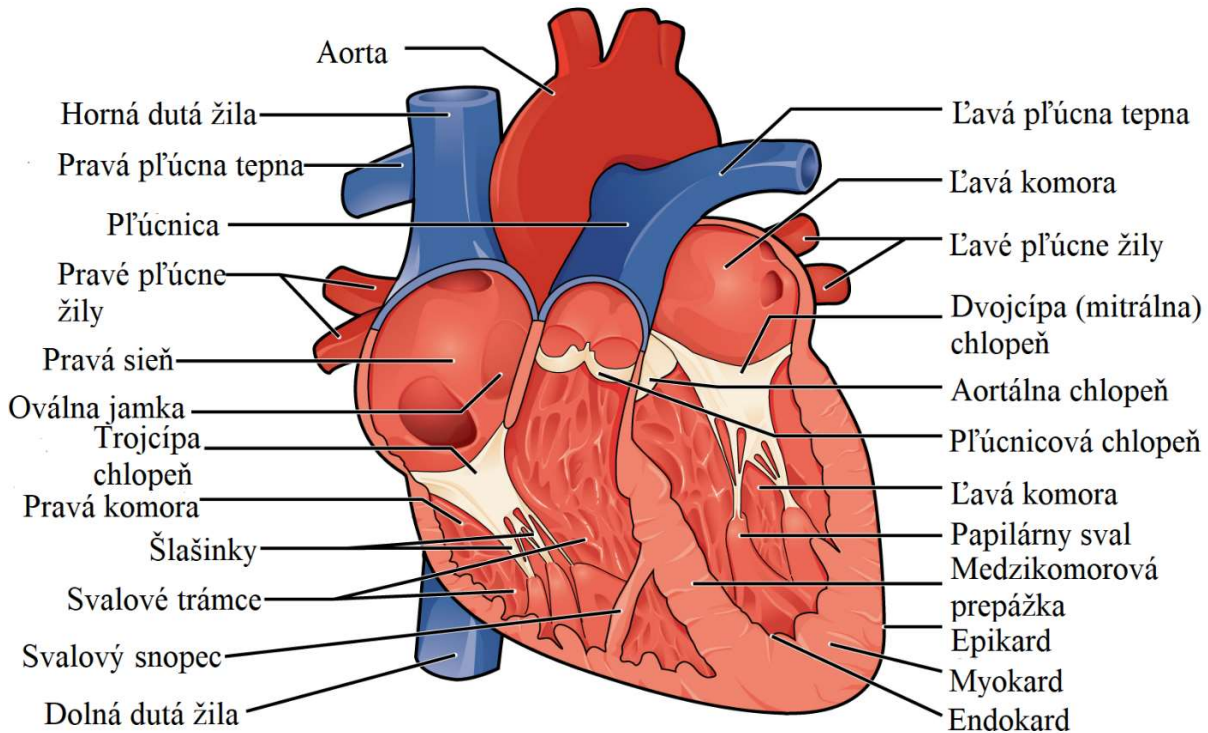
1.1.2 SRDCOVÁ FUNKCIA

Srdce sa skladá zo štyroch častí, ktoré sa striedavo sťahujú a uvoľňujú. Sú to: **ľavá sieň**, **ľavá komora**, **pravá sieň** a **pravá komora**. Na srdci môžeme tiež rozlíšiť dve polovice, ktoré fungujú ako vzájomne nezávislé pumpy:

- Do **pravej časti srdca** (niekedy hovorovo označovanej ako pravé srdce) vstupuje z tela dutou žilou odkysličená krv, ktorá následne vstupuje cez pľúcnu tepnu do pľúc.
- Do **ľavej časti srdca** (niekedy hovorovo označovanej ako ľavé srdce) vstupuje pľúcnou žilou okysličená krv z pľúc a aortou je pumpovaná do celého telového obehu.

Z pohľadu biologickej funkcie je teda srdce pumpou s dutinami, do ktorých vstupuje krv, ktorá je následne vháňaná do pľúc a do celého tela. Na obr. 1.1.2 vidíme prierez ľudským srdcom s vyznačenými komponentami.

V pokojovom stave srdce telového obehu vženie asi 5 litrov krvi za minútu, aby tak telo zásobilo kyslíkom a živinami. Pri záťaži môže byť tento objem 4-5x vyšší.

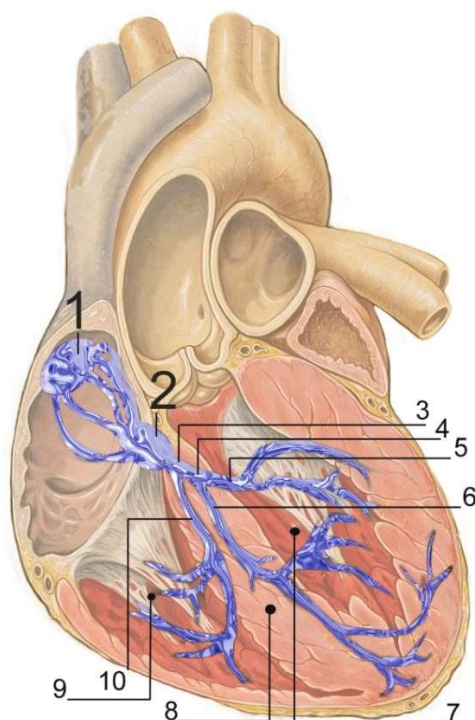


Obr. 1.1.2: Prierez ľudským srdcom – pohľad spredu, prevzaté z [4] a upravené.

1.1.3 STIMULÁCIA SRDCA

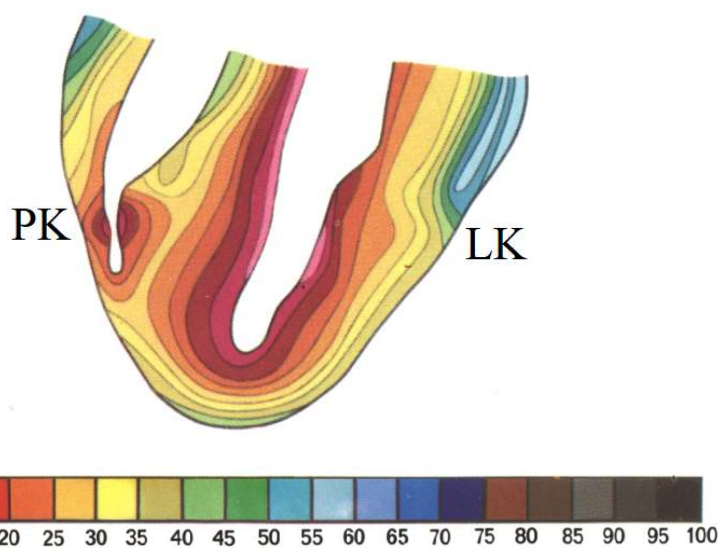
Obecne sa dá povedať, že sa srdce skladá z **prevodovej srdcovej sústavy** (sústava, ktorá zaisťuje stimuláciu a vedenie vzruchu) a samotného **srdcového svalu**. Aby srdce mohlo vháňať krv do tela, je nutné, aby dochádzalo ku koordinovaným sťahom buniek jednotlivých siení a komôr, ktoré sa musia v rámci každej z nich súčasne stiahnuť či uvoľniť. To je zaisťované prostredníctvom elektrických impulzov. Normálny srdcový sťah začína v pravej sieni, v špecializovaných bunkách tvoriacich tzv. **sinoatriálny uzol (SA uzol)**. K sinoatriálnemu uzlu tvoriacemu akési „centrálne hodiny“ sa pridáva ešte ďalšia súčasť stimulačnej sústavy, **atrioventrikulárny uzol (AV uzol)** ležiaci v sieňovom septe, v prechode ku komorám a ďalšie podriadené centrá.

Elektrické signály pravidelne generované v SA uzle sú označované ako **sínusový rytmus** a sú po srdci rozvedené sústavou vedenia vzruchu, ktorý je tiež tvorený špecializovanými bunkami. Najskôr sú k sťahu stimulované obe siene, potom sa vzruch šíri do AV uzlu a následne vedený vodivými vláknami ďalej prostredníctvom tzv. **Hisovho zväzku**, ktorý sa potom ďalej delí na dva menšie zväzky (**Tawarove ramienka** – pravé a ľavé). Jednotlivé vlákna týchto zväzkov (**Purkyňove vlákna**) potom vstupujú do svalov srdcových komôr. Šírenie vzruchu touto cestou a jeho presné načasovanie sú základnou podmienkou pre to, aby srdce pracovalo efektívne. Na obr. 1.1.3 je znázornená práve popísaná sústava.



Obr. 1.1.3: Elektricky vodivá srdcová sústava. Znáznorené sú: sinoatriálny uzol (1), atrioventrikulárny uzol (2), Hisov zväzok (3), ľavé Tawarove ramienko (4), ľavý zadný zväzok (5), ľavý predný zväzok (6), ľavá komora (7), komorové septum (8), pravá komora (9) a pravé Tawarove ramienko (10) [5].

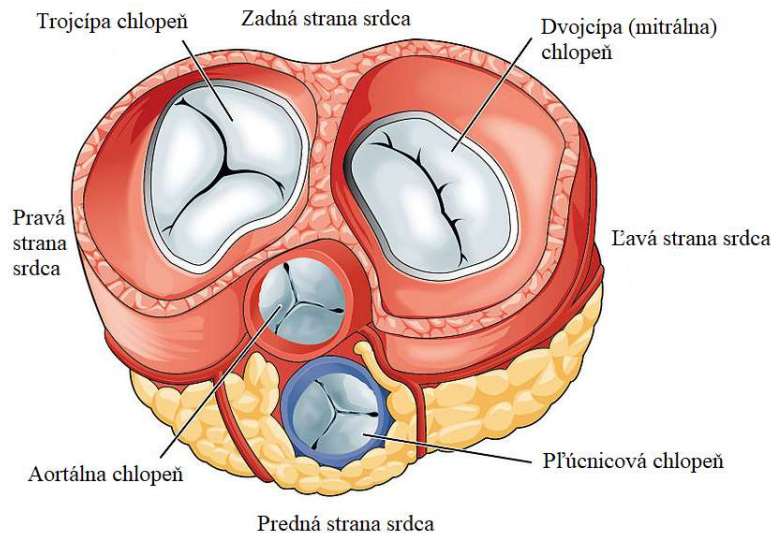
V článku [20] je ukázané, že Purkyňove vlákna privádzajú vzruch na vnútornú stenu myokardu ľavej komory (pri endokarde) a to na viacero miest súčasne. Tieto aktivované oblasti sa rapídne rozširujú prvých 5 až 10 ms a splývajú za 15 až 20 ms od okamihu privedenia stimulu. Tiež ukazujú, že aktivácia vnútornej steny myokardu je oveľa prudšia ako aktivácia smerom k vonkajšej stene (k epikardu) vid' obr. 1.1.4.



Obr. 1.1.4: Zobrazenie aktivácie srdcových komôr. PK – pravá komora, LK – ľavá komora. Farebná schéma zobrazuje čas aktivácie buniek myokardu. Každá farba predstavuje 5 ms a čas $t = 0$ s značí okamih privedenia vzruchu [20].

1.1.4 SRDCOVÉ CHLOPNE

V srdci môžeme nájsť štyri srdcové chlopne. Aortálnu chlopňu (medzi ľavou komorou a aortou), pľúcnicovú chlopňu (medzi pravou komorou a pľúcnou tepnou) a dve cípovité chlopne. Cípovité chlopne sú chlopne medzi srdcovými sieňami a srdcovými komorami. Sú to trojcípa chlopňa (chlopňa medzi pravou sieňou a pravou komorou) a mitrálna (dvojcípa) chlopňa (chlopňa medzi ľavou sieňou a ľavou komorou) [18] vid' obr. 1.1.5.

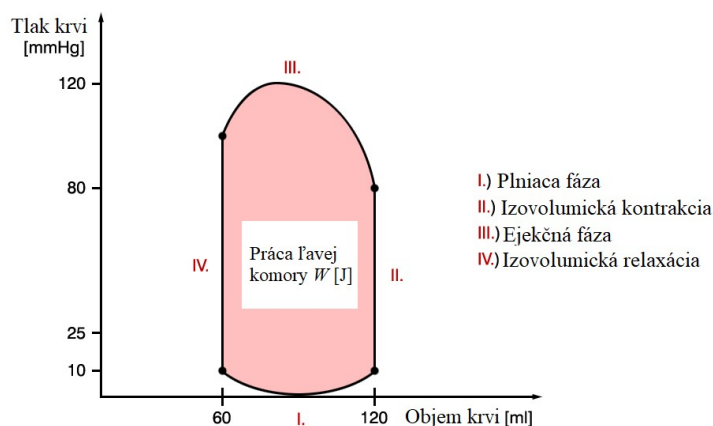


Obr. 1.1.5: Štyri srdcové chlopne – pohľad zhora [19].

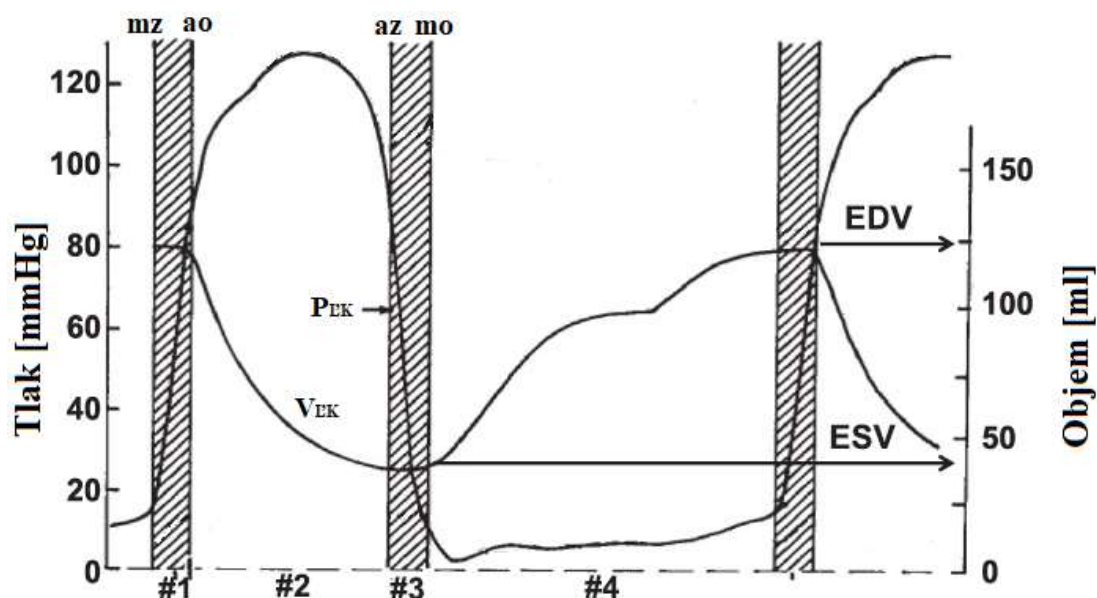
1.2 SRDCOVÝ CYKLUS

Na začiatku tejto podkapitoly je potrebné uviesť dva pojmy a to systola, teda sťah myokardu a diastola, teda uvoľnenie myokardu.

Jednotlivé fázy srdcového cyklu sú charakterizované tlakovými a objemovými zmenami v komorách. Na obr. 1.2.1 sú tieto fázy znázornené na pracovnom diagrame ľavej srdcovej komory. Na obr. 1.2.2 je znázornený časový priebeh tlaku a objemu v ľavej komore.



Obr. 1.2.1: Pracovný diagram ľavej srdcovej komory (za fyziologických podmienok) prevzaté z [6] a upravené.

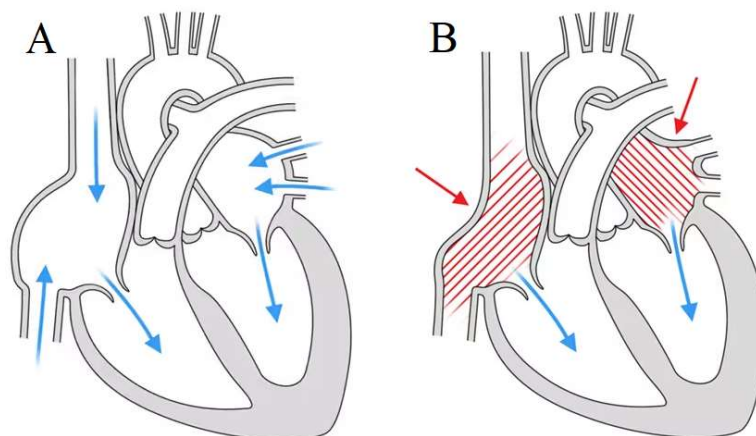


Obr. 1.2.2: Časový priebeh tlaku v ľavej komore (P_{LK}) a objemu ľavej komory (V_{LK}) počas srdcového cyklu. Na obr. sú znázornené fázy srdcového cyklu. #1 – fáza izovolumickej kontrakcie, fáza začína uzatvorením mitrálnej chlopne (mz) a končí otvorením aortálnej chlopne (ao). #2 – ejekčná fáza, táto fáza končí uzatvorením aortálnej chlopne (az). #3 – fáza izovolumickej relaxácie, táto fáza končí otvorením mitrálnej chlopne (mo). #4 – plniaca fáza. Na obr. sú tiež zobrazené hodnoty (end)diastolického objemu (EDV) a (end)systolického objemu (ESV). Prevzaté z [27] a upravené.

1.2.1 PLNIACA FÁZA

Táto fáza trvá asi 400 – 500 ms a zahrňuje systolu siení a neskoršiu diastolu komôr, kedy sa komory plnia krvou. Tlak v komorách sa takmer nemení, objem rastie (obr. 1.2.1 – oblasť I.). Krv je poháňaná vplyvom zotrvačnosti krvného prúdu a pozitívnym tlakom v sieňach. Nastávajú tri, po sebe idúce fázy [6]:

1. Fáza rýchleho plnenia komôr (nahromadená krv zo siení v krátkej dobe náhle prúdi do komôr).
2. Fáza pomalého plnenia komôr (krv zo žíl tečie cez siene a otvorené cípovité chlopne rovno do komôr). Tieto dve fázy sú znázornené na obr. 1.2.3 A.
3. Systola siení, je znázornená obr. 1.2.3 B.



Obr. 1.2.3: Fáza plnenia komôr (A) a systola siení (B) [17].

1.2.2 IZOVOLUMICKÁ KONTRAKCIA

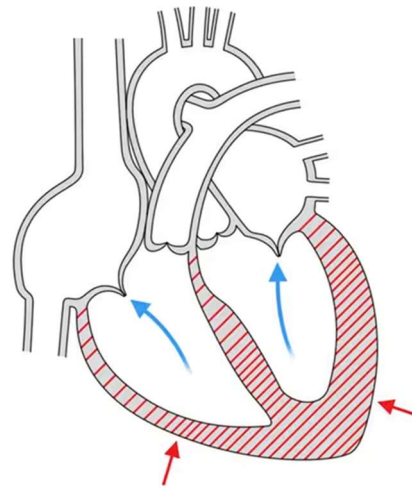
Objem komôr sa nemení, zvyšuje sa tlak v komorách (obr. 1.2.1 – oblasť II., obr. 1.2.2 – oblasť #1). Uzatvárajú sa cípovité chlopne. Tlak narastá vplyvom sťahu myokardu okolo nestlačiteľnej kvapaliny. Ide o prvú časť systoly komôr. Za normálnych pokojových podmienok táto fáza trvá asi 60 ms [6]. Táto fáza je znázornená na obr. 1.2.4.

1.2.3 EJEKČNÁ FÁZA

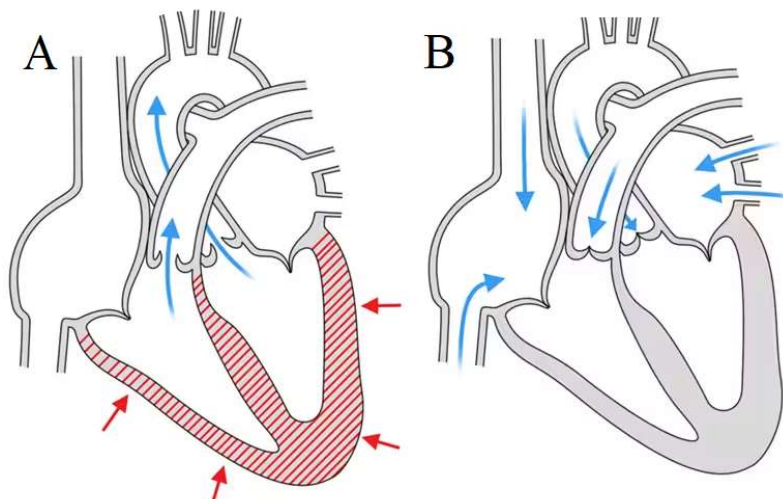
V určitom okamihu tlak krvi v ľavej srdcovej komore prevýši tlak krvi v aorte, čo vedie k otvoreniu aortálnej chlopne. Krv prúdi z komory do aorty (ejekčná fáza znázornená na obr. 1.2.5 A). Tlak krvi stále stúpa, ale čoskoro dosiahne maximum a začne klesať [17] (obr.1.2.1 – oblasť III, obr. 1.2.2 – oblasť #2). Táto fáza normálne trvá približne 200 ms [6].

1.2.4 FÁZA IZOVOLUMICKEJ RELAXÁCIE

V okamihu, keď tlak krvi v aorte prevýši tlak krvi v ľavej komore, aortálna chlopňa sa uzavrie a srdce sa začne uvoľňovať [17]. Tlak v komorách začína prudko klesať, bez toho, aby sa menil objem komôr (obr.1.2.1 – oblasť IV, obr. 1.2.2 – oblasť #3). Táto fáza trvá zhruba 50 ms a končí, keď tlak v komorách klesne pod tlak v sieňach (cípovité chlopne sa otvoria a nastáva ďalšia plniaca fáza). Táto fáza je znázornená na obr. 1.2.5 B [6].



Obr. 1.2.4: Fáza izovolumickej kontrakcie [17].

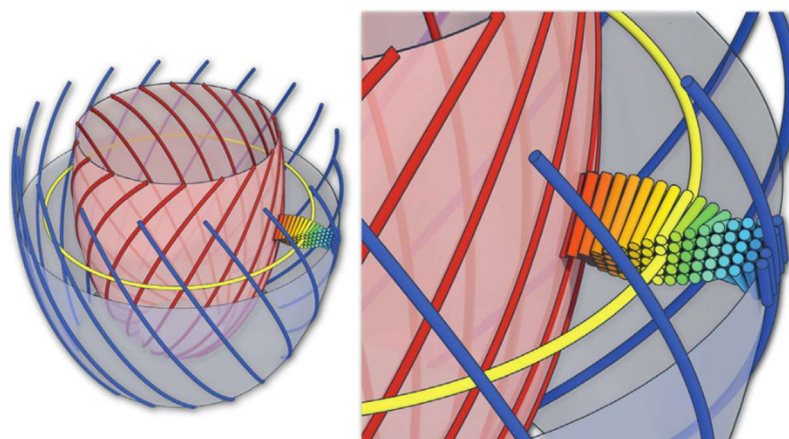


Obr. 1.2.5: Ejekčná fáza (A) a fáza izovolumickej relaxácie (B) [17].

1.3 ŠTRUKTÚRA MYOKARDU A JEJ VPLYV NA KONTRAKCIU KOMÔR

1.3.1 UHOL SKRUTKOVICE

Srdcová svalovina je pretkaná sieť myokardiálnych buniek uložených v matrici podporného fibrózneho tkaniva. Skupiny týchto buniek sú zlúčené do väčších zväzkov [7]. Primárne špirálové usporiadanie týchto buniek cez hrúbku steny ľavej komory (Obr. 1.3.1) je možné určiť pomocou uhla špirály, či skrutkovice (alebo „*helix angle*“ HA [7], [12]). Je to uhol medzi lokálnym obvodovým smerom a pozdĺžnou osou vlákna. Jeho hodnota je kladná, ak sa vlákna natáčajú podľa pravotočivej skrutkovice (na obr. 1.3.1 červená) a záporná, ak sa vlákna natáčajú podľa ľavotočivej skrutkovice (na obr. 1.3.1 modrá) [12].



Obr. 1.3.1: Schematické zobrazenie špirálovej štruktúry kardiomyocytov ľavej komory [12].

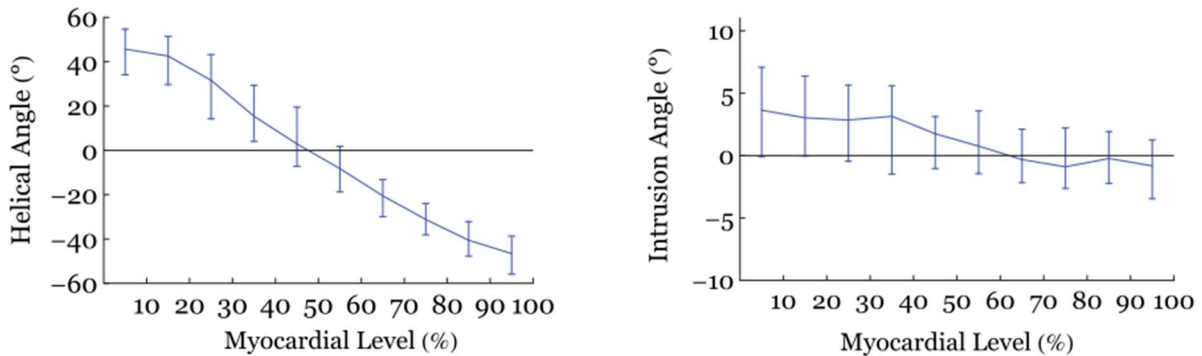
1.3.2 UHOL VNIKNUTIA („*INTRUSION ANGLE*“)

Zväzky jednotlivých vlákien sú samy usporiadané tak, že je možné rozoznať prevládajúce usporiadanie, ktoré je dotyčnicové k povrchom komory. Niektoré vlákna v stene myokardu sú však zarovnané tak, že sa odchyľujú od tohto dotyčnicového vzoru. Tieto vlákna prenikajú naprieč stenou. Smerový vektor týchto vlákien teda neleží v dotyčnicovej rovine k povrchom komory a uhol, ktorý tento vektor zvierá s dotyčnicovou rovinou sa označuje ako „*intrusion angle*“ [7].

Táto populácia prenikajúcich vlákien myokardu má merateľný vplyv na dynamiku komory. Čím strmší je uhol ich prieniku, tým účinnejšie tieto vlákna pôsobia proti systolickému zhrubnutiu steny komory [7].

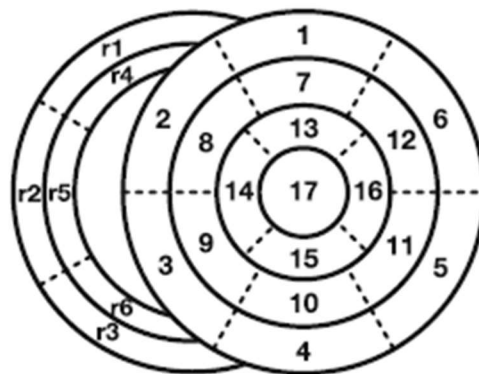
1.3.3 PODROBNÝ ROZBOR UHLU NATOČENIA VLÁKIEN

V článku od Agger, P. a kol. [13] sa zamerali na porovnanie orientácii kardiomyocytov v myokarde oboch komôr a boli schopní detailne ukázať architektúru myokardu v srdci prasat'a.



Obr. 1.3.2: Výsledky uhlu skrutkovice a uhlu vniknutia uvedené ako funkcie hrúbky myokardu v percentách. 0% je pri povrchu endokardu a 100% je pri povrchu epikardu. Výsledky sú zobrazené ako mediány s medzikvartilovými rozpätiami. Prevzaté z [13] a upravené.

V štúdiu boli rozdelené obidve komory na individuálne zóny (Obr. 1.3.3), pre ktoré budeme zobrazovať výsledky.

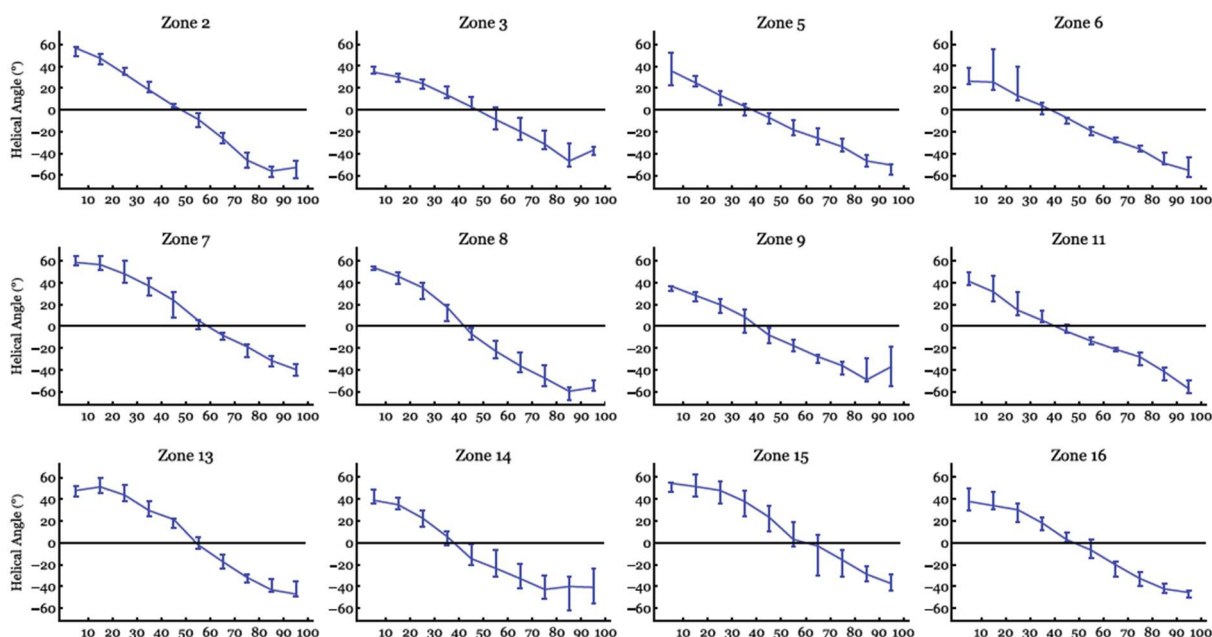


Obr. 1.3.3: Schematické znázornenie zón celého srdca. Zóny 1 – 17 predstavujú ľavú komoru a zóny r1 – r6 pravú komoru - pohľad zdola, zóna 1 je teda na prednej časti srdca [13].

Uhly skrutkovice a uhly vniknutia boli vyhodnocované pre jednotlivé zóny z obr. 1.3.3, vzhľadom na úroveň myokardu v 10%-ných intervaloch. Vynechané boli akurát zóny 1, 4, 10, 12 a 17. To sú oblasti úponu papilárnych svalov a oblasti, kde sa myokard pravej komory viaže na myokard ľavej komory. V týchto oblastiach je orientácia vlákien nepravidelná. Pre každú vzorku bol celkový stredný uhol vypočítaný a porovnaný medzi skupinami pomocou mediánu a medzikvartilového rozpätia [13].

Detailná analýza uhlov skrutkovice jednotlivých zón ľavej komory je na Obr. 1.3.4:

Helical angles in individual zones

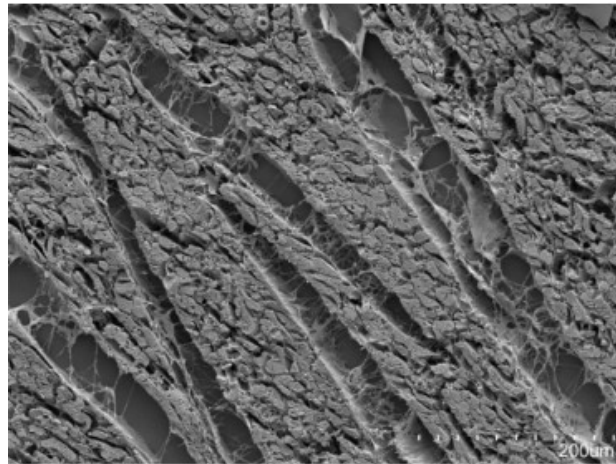


Obr. 1.3.4: Podrobná analýza na základe údajov z jednotlivých zón ľavej komory. Výsledky uhlov skrutkovice sú uvedené ako funkcie hrúbky myokardu v percentách. 0% je pri povrchu endokardu a 100% je pri povrchu epikardu [13].

V tejto práci budeme pri tvorbe modelu uvažovať iba uhol natočenia vlákien myokardu do skrutkovice, ako je zobrazené na obr. 1.3.1. A to od uhlu 60° na vnútornej stene komory (pri endokarde) do uhlu -60° na vonkajšej stene komory (pri epikarde), ako je ukázané vyššie v tejto kapitole. Na obr. 1.3.2 a obr. 1.3.4 je ukázané, že sa tento uhol mení približne v týchto hodnotách a takmer lineárne. Smery vlákien modelu sa teda nebudú prelínať cez seba, ale budú veľa seba v rovnobežných rovinách. Nakoľko sa uhol vniknutia („*intrusion angle*“) mení len málo a nepravidelne, vid' obr. 1.3.2 a jeho zahrnutie do výpočtového modelu by bolo príliš zložité.

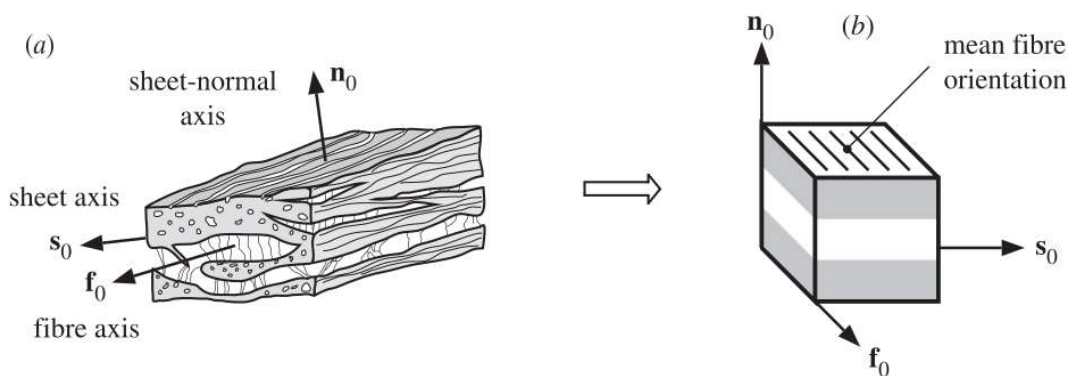
1.3.4 ŠTRUKTÚRA A VLASTNOSTI MYOKARDU

Z doposiaľ uvedených poznatkov v podkapitole 1.3 by mohlo viesť k záveru, že myokard svojou vnútornou štruktúrou pripomína kompozitný materiál s jednou osnovou (lokálne) rovnobežných vlákien a teda, že jeho mechanické vlastnosti sú transverzálne izotropné. Histologické štúdie (napríklad [8]) však ukazujú, že paralelné vlákna sú usporiadané do väčších celkov pripomínajúcich vrstvy (viď obr. 1.3.5)

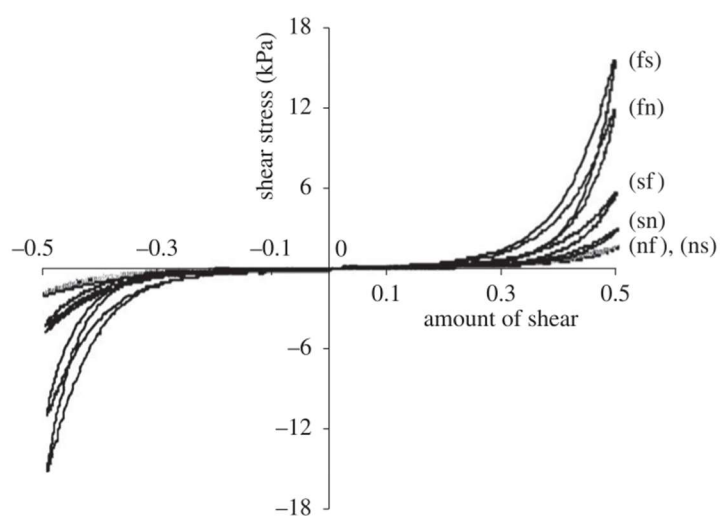


Obr. 1.3.5: Snímok zhotovený pod elektrónovým mikroskopom ukazujúci prierez stenou ľavej srdcovej komory vedený naprieč vláknami [8]. Je zjavné, že svalové vlákna sú združené do väčších vrstevnatých celkov (tzv. „sheets“), ktoré sú vzájomne prepojené.

Vrstevnaté štruktúry znázornené na obr. 1.3.5, v anglickej literatúre často označované slovom „sheets“ [8, 10], umožňujú v danom mieste myokardu rozlíšiť tri preferenčné (navzájom kolmé) materiálové smery. Tieto smery bývajú označované jednotkovými vektormi \underline{f} („fibre“), \underline{s} („sheet“) a \underline{n} („sheet-normal“), viď obr. 1.3.6 (a). V závislosti na kontexte bývajú niekedy symboly vektorov doplnené spodným indexom, ako je tomu aj na obr. 1.3.6 (a). Vrstevné usporiadanie vlákien udeľuje myokardu ortotropné mechanické vlastnosti. Tie boli prvýkrát detailne popísané v roku 2003 v článku od Dokosa a kol. [3], kde bola vykonaná séria šmykových skúšok na vzorkách myokardu prasat'a. Tieto skúšky preukázali ortotropnú odozvu myokardu (viď obr. 1.3.7). Pre potreby výpočtového modelovania (formuláciu konštitutívnych modelov) býva myokard reprezentovaný pomocou ortotropnej elementárnej kocky v súradnicovom systéme definovanom vektormi \underline{f} , \underline{s} a \underline{n} (znázornenej na obr. 1.3.6 (b)).



Obr. 1.3.6: (a) Schéma vrstevnatého usporiadania svalových vlákien s vyznačenými preferenčnými materiálovými smermi. (b) Ortotropný elementárny prvok reprezentujúci myokard [10].



Obr. 1.3.7: Odozvy reprezentatívneho vzorku myokardu prasaťa zaťažovaného jednoduchým šmykom v šiestich rôznych módoch [3]. Napríklad mód (fs) predstavuje deformáciu vzorky, pri ktorej je stena s normálovým vektorom \underline{f} (čelná stena na obr. 1.3.6 (b)) posúvaná v smere vektoru \underline{s} (Obdobne sú definované aj ostatné módy).

2 FORMULÁCIA PROBLÉMOVEJ SITUÁCIE

2.1 PROBLÉMOVÁ SITUÁCIA

Normálny proces elektrickej aktivácie, popísaný v podkapitole 1.1.3, môže narušiť veľké množstvo ochorení. Pre lepšie pochopenie dôsledkov týchto stavov sa v súčasnosti vytvárajú výpočtové modely, ktoré čo najpresnejšie napodobujú štruktúru ľudského srdca. Primárnym cieľom je preto vytvoriť funkčný realistický model myokardu ľavej srdcovej komory a simulovať v ňom izovolumickú fázu kontrakcie srdcového cyklu. Tento model vyžaduje mimo iné použiť konštitutívny model, ktorý by popísal tak ako pasívnu odozvu myokardu na vonkajšie zaťaženie, tak aj aktívne napätie generované v svalových bunkách myokardu spôsobené elektrickou stimuláciou. Kým pre modelovanie pasívnej odozvy sa používa niektorý z hyperelastických modelov, pre aktívnu odozvu bude použitý tzv. prístup aktívneho tenzoru napätia („*active stress approach*“ [9]). Celkový tenzor napätia je potom daný súčtom pasívneho a aktívneho tenzoru napätia. V komerčných softwaroch ako je napríklad ANSYS nie sú tieto konštitutívne modely bežne k dispozícii. Preto je potrebné ich implementovať pomocou obcej užívateľskej subrutiny (podprogramu) a k tomu je nutné odvodiť analytické vzťahy pre tenzory napätia a tuhosti. Prístup aktívneho tenzoru napätia doposiaľ nebol na Ústave mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky (ÚMTMB) použitý. Napäťová analýza realistického modelu ľavej srdcovej komory môže priniesť cenné výsledky, nakoľko napätie v srdcovej komore nie je možné merať v živom organizme.

2.2 PROBLÉM

Vytvoriť výpočtový model ľavej srdcovej komory pre fázu izovolumickej kontrakcie s použitím aktívneho tenzoru napätia. Výpočtový model zohľadňuje premenlivú orientáciu svalových vlákien v stene myokardu.

2.3 CIELE PRÁCE

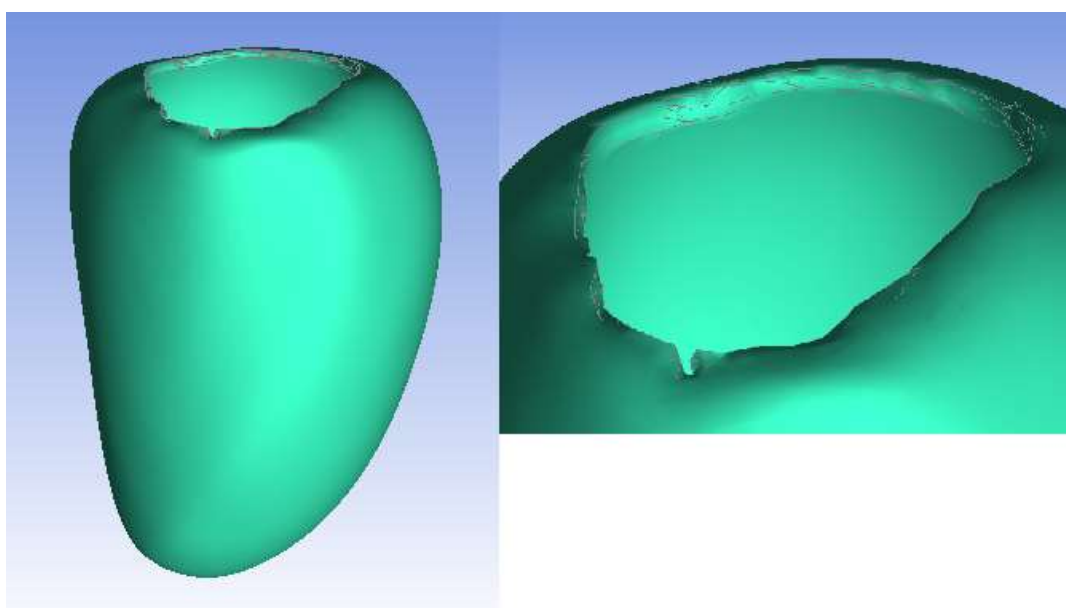
- Na základe voľne dostupnej reálnej geometrie ľavej srdcovej komory vytvoriť konečno prvkový model komory zohľadňujúci premennú orientáciu svalových vlákien v stene.
- Odvodiť vzťahy potrebné pre implementáciu zadaného aktívneho konštitutívneho modelu myokardu. Realizovať samotnú implementáciu na základe vzorovej subrutiny poskytnutej vedúcim práce.
- Simulovať fázu izovolumickej kontrakcie komory za normálnych podmienok. Diskutovať prípadné odlišnosti oproti klinicky nameraným priebehom z literatúry.

3 TVORBA VÝPOČTOVÉHO MODELU

K tvorbe výpočtového modelu bol v tejto práci použitý model geometrie ľavej komory, ktorý je súčasťou rozsiahlejšieho anatomického atlasu srdca, ktorý mimo iné zhrňuje aj ľavú komoru. Tento atlas je vytvorený doktorom Bai, W. a kol. a je voľne dostupný na internetovej stránke <<http://wp.doc.ic.ac.uk/wbai/data/>>.

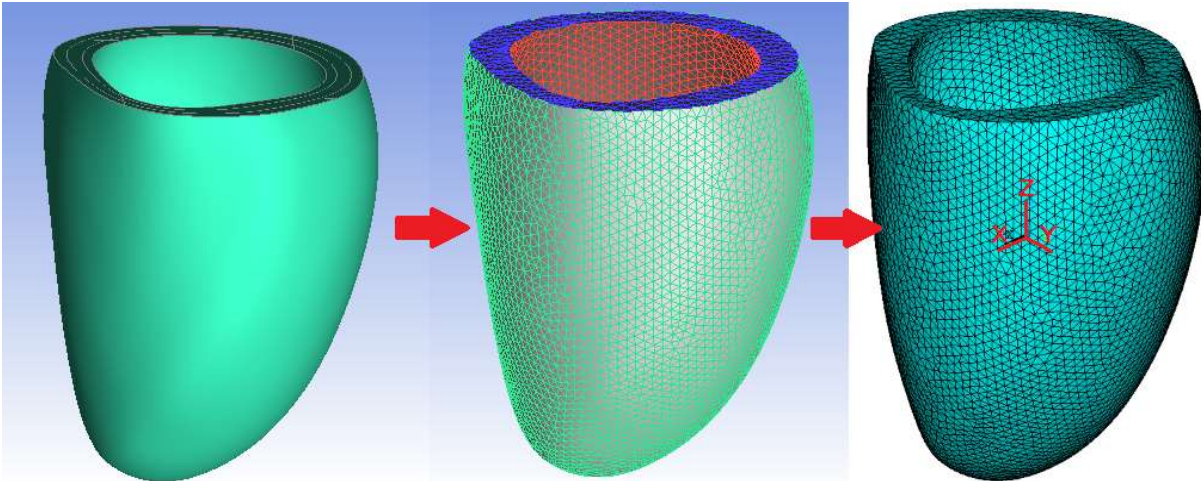
3.1 MODEL GEOMETRIE A TVORBA SIETE

Dvojkomorový srdcový atlas (z ktorého bola geometria ľavej komory prevzatá) bol vytvorený na základe snímok z 1093 zdravých ľudských srdiec, ktoré boli získané pomocou magnetickej rezonancie s vysokým rozlíšením. Z týchto dát bol následne vytvorený „*statistical shape model*“ reprezentujúci priemerné srdce zdravého dospelého jedinca. Postup snímania srdca, ako aj spôsob spracovania získaných dát ja podrobne rozpísaný v článku [14].



Obr. 3.1.1: Na ľavej strane obrázka je pôvodná geometria ľavej srdečnej komory. Na pravej strane je zväčšený detail hornej časti komory.

Získaná geometria (Obr. 3.1.1 vľavo) vo formáte STL bola importovaná do programu ANSYS ICEM. Tu bola komora najskôr zarovnaná na hornej časti komory (vid' obr. 3.1.2 vľavo) a bola tak vytvorená rovina (tzv. báza). A to z toho dôvodu, že na tejto rovine budú neskôr predpísané okrajové podmienky. Nepravidelný a nesúladný horný okraj komory (Obr. 3.1.1 vpravo) by totiž pri vytváraní siete konečných prvkov mohol spôsobiť zlyhanie procesu. Následne bola z jedného súvislého telesa vytvorená sieť konečných prvkov. Globálna veľkosť elementov bola nastavená na hodnotu 2,5 mm. Kvalitu siete konečných prvkov bola ďalej upravovaná kritériom „*Aspect ratio*“, ktoré kontroluje podiel najkratšej s najdlhšou stranou každého prvku. Toto kritérium bolo nastavené na hodnotu 0,55, čo znamená, že žiadny prvok z celej siete nebude mať tento pomer nižší ako je hodnota 0,55. Nakoniec bol takto vytvorený model importovaný do programu ANSYS APDL. Tu bol zmenený typ prvku z elementu ozn. MESH 200 na 10-uzlový, tetraédrický element (ozn. SOLID 187). Na Obr. 3.1.2 vidíme znázornený práve popísaný postup.

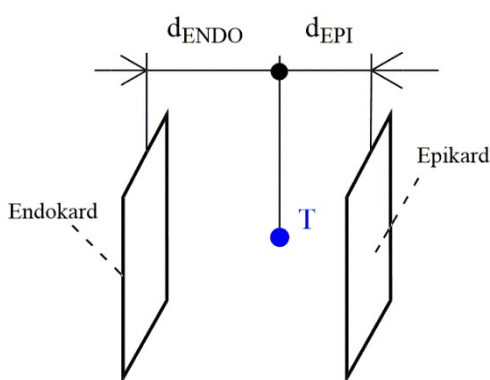


Obr. 3.1.2: Znárodnenie postupu práce od zrezania/zarovnania hornej časti komory po prenos dát do programu ANSYS APDL.

3.2 NASTAVENIE ORIENTÁCIE VLÁKIEN

Cieľom tejto podkapitoly je modelovať štruktúru usporiadania vlákien myokardu (ako je naznačené v úplnom závere kapitoly 1). Teda, aby lokálny súradnicový systém každého elementu siete konečných prvkov bol natočený oproti globálnemu súradnicovému systému, tak, aby elementy predstavovali natočenie vlákien myokardu. Natočenie budeme predpisovať na základe podkapitoly 1.3, teda v rozmedzí od -60° do $+60^\circ$, v závislosti na tom, v akej vzdialenosti od endokardu sa element v rámci steny komory nachádza. Cieľom natočenia lokálneho súradnicového systému je, aby sa lokálna os x elementu zhodovala so smerom natočenia svalových vlákien v danom mieste steny komory (aby bol rešpektovaný „*helix angle*“) vid' obr. 1.3.1 na str. 17.

Pre každý element zistíme jeho vzdialenosť (vzdialenosť jeho ťažiska) od najbližšieho uzlu siete na stene endokardu a od najbližšieho uzlu siete na stene epikardu (obr. 3.2.1).



Obr. 3.2.1: Ilustrácia získania vzdialeností d_{ENDO} a d_{EPI} ťažiska T náhodného elementu

Následne z týchto vzdialeností zistíme normalizovanú vzdialenosť ťažiska T od endokardu ako:

$$d_{NORM} = \frac{d_{ENDO}}{d_{ENDO} + d_{EPI}} \quad (3.1)$$

S pomocou normovanej vzdialenosti môžeme pre element predpísať uhol natočenia lokálneho súradnicového systému θ tak, aby $\theta_{ENDO} = 60^\circ$ a $\theta_{EPI} = -60^\circ$. Uhol sa mení lineárne pozdĺž celej hrúbky komory (vid' obr. 1.3.2 a obr. 1.3.4) podľa vzťahu:

$$\theta_T = \theta_{ENDO} \cdot (1 - d_{NORM}) + \theta_{EPI} \cdot d_{NORM} \quad (3.2)$$

Následne určíme jednotkové vektory \underline{n}_S , \underline{f}_S a \underline{s}_S (označené podobne ako na obr. 1.3.6) pootočeného súradnicového systému pre každý prvok (ilustrované na obrázku 3.2.3). Najskôr boli určené všetky plochy elementov, ktoré spoločne vytvárajú vnútornú stenu srdcovej komory a to na základe vrcholových bodov plochy (každá plocha tetraédrickej siete má tri vrcholové body). Ťažisko každej takejto plochy bolo označené písmenom S , vrcholové body boli označené ako p_1 , p_2 a p_3 (Obr. 3.2.2). Jednotkový normálový vektor \underline{r}_S každej z týchto plôch bol určený ako:

$$\underline{r}_S = \frac{\underline{v}_{12} \times \underline{v}_{23}}{|\underline{v}_{12} \times \underline{v}_{23}|} \quad (3.3)$$

Kde \underline{v}_{12} je vektor z bodu p_1 do bodu p_2 a obdobne \underline{v}_{23} je vektor z bodu p_2 do bodu p_3 .

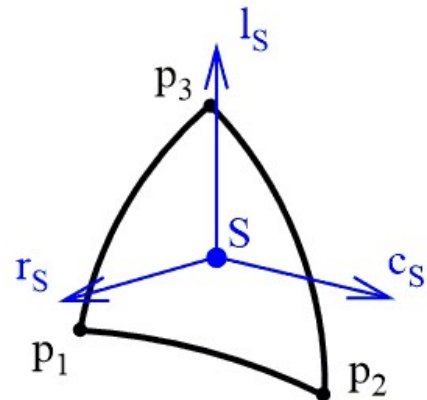
K nemu bol potom určený obvodový vektor \underline{c}_S , ktorý vznikol vektorovým súčinom jednotkového vektoru osi z globálneho súradnicového systému ($\underline{e}_z = [0 \ 0 \ 1]$), túto os je možné vidieť na Obr. 3.1.2 vpravo) a vektoru \underline{r}_S . Vektor bol zároveň normovaný:

$$\underline{c}_S = \frac{\underline{e}_z \times \underline{r}_S}{|\underline{e}_z \times \underline{r}_S|} \quad (3.4)$$

Vektorovým súčinom normálového a obvodového vektoru bol získaný pozdĺžny vektor \underline{l}_S k ploche:

$$\underline{l}_S = \underline{r}_S \times \underline{c}_S \quad (3.5)$$

Každá trojica týchto vektorov je spájaná s jednou plochou a teda s jedným ťažiskom plochy S . A práve pomocou tohto bodu sú predpisované jednotlivým elementom práve určené vektory. Elementu sú predpisované trojice vektorov \underline{r}_S , \underline{c}_S a \underline{l}_S podľa najbližšieho bodu S (k ťažisku elementu).



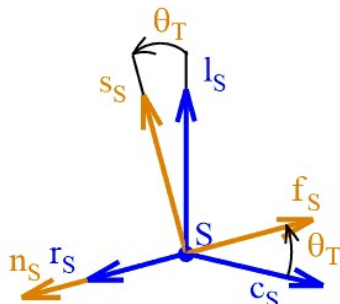
Obr. 3.2.2: Ilustrácia plochy elementu s vyznačenými vektormi \underline{r}_S , \underline{c}_S a \underline{l}_S

Vektory \underline{n}_S , \underline{f}_S a \underline{s}_S sú potom určované podľa vzťahov:

$$\underline{f}_S = \cos(\theta_T) \cdot \underline{c}_S + \sin(\theta_T) \cdot \underline{l}_S \quad (3.6)$$

$$\underline{s}_S = -\sin(\theta_T) \cdot \underline{c}_S + \cos(\theta_T) \cdot \underline{l}_S \quad (3.7)$$

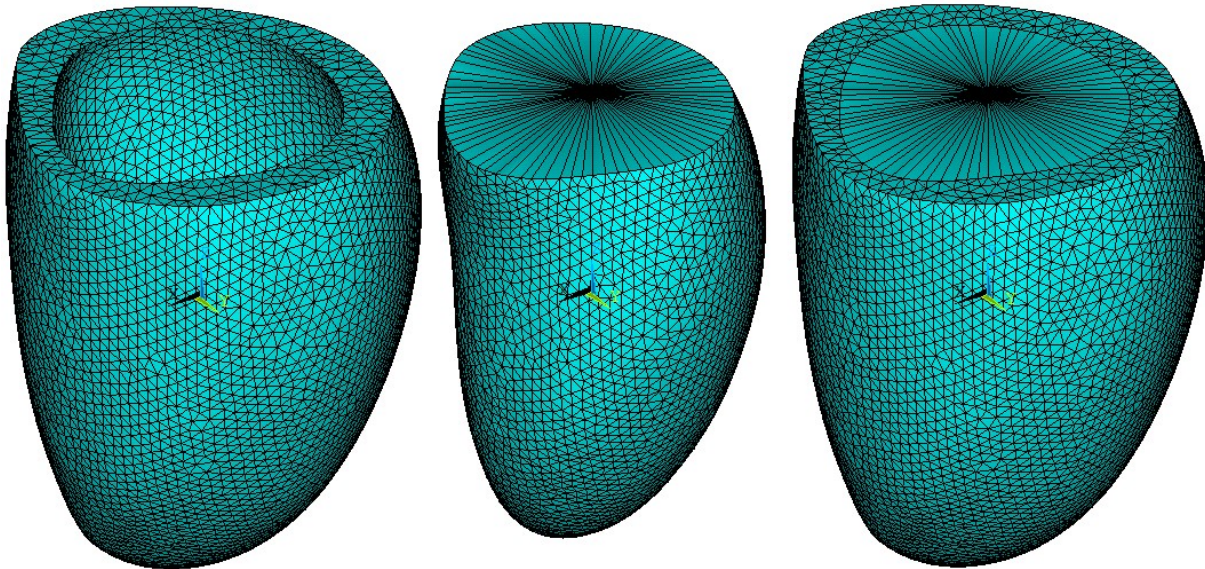
$$\underline{n}_S = \underline{r}_S \quad (3.8)$$



Obr. 3.2.3: Ilustrácia natočenia vektorov o uhol θ_T

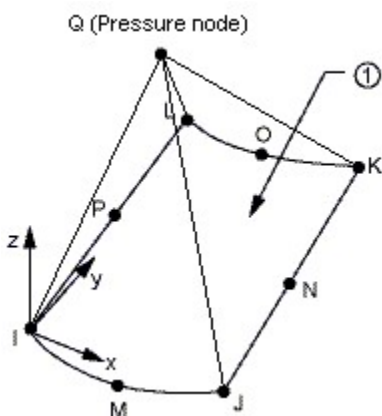
3.3 MODELOVANIE KRVI V KOMORE

Celý vnútorný objem komory bol následne vyplnený 3-D hydrostatickými elementami tekutiny typu HSFLD 242, ktorým bola predpísaná nestlačiteľnosť (viď obr. 3.3.1). Týmito prvkami je simulovaná krv vo vnútri komory, je teda predpokladaná nestlačiteľnosť krvi.



Obr. 3.3.1: Znáznorenie prázdnej komory (vľavo), hydrostatických prvkov (v strede) a komory vyplnenej týmito prvkami (vpravo)

Element typu HSFLD 242 sa používa na modelovanie tekutín, ktoré sú úplne uzavreté pevnými látkami (nádobami). Predpokladá sa, že kvapalina nemá žiadnu viskozitu, rotáciu alebo zotrvačné účinky (vrátane zrýchlenia). Ďalej sa predpokladá, že kvapalina úplne vyplňa nádobu, teda nemá žiadny voľný povrch. Za týchto podmienok možno považovať kvapalinu za hydrostatickú. To znamená, že tlak tekutiny je v celom objeme tekutiny rovnaký. Prvok má tvar pyramídy so základňou prekrývajúcou 3D plochu pevného prvku a vrchol v tlakovom uzle [26], viď obr. 3.3.2.



Obr. 3.3.2: Ilustrácia prvku HSFLD 242 (použitého hydrostatického prvku tekutiny) [26].

Uzly prvku, zdieľané so základným telesom (uzly I, J, K, L, M, N, O a P), majú tri stupne voľnosti a to posuvy v smeroch ôs x , y a z . Tlakový uzol (uzol Q) má jeden stupeň voľnosti hydrostatického tlaku. Tento uzol je zdieľaný všetkými prvkami hydrostatickej tekutiny, ktoré definujú objem tekutiny. Spojenie medzi objemom tekutiny a nádobou je modelované aplikovaním hydrostatického tlaku tekutiny ako povrchového zaťaženia nádoby. Predpokladá sa, že tekutina neprúdi ani do, ani z nádoby, pokiaľ v tlakovom uzle nie je predpísaná hodnota hydrostatického tlaku alebo hmotnostný prietok tekutiny [26].

4 MODEL MATERIÁLU

Pre úplný popis správania myokardu bol zvolený konštitutívny model materiálu, ktorý popisuje nie len pasívnu odozvu relaxovaného tkaniva na vonkajšie zaťaženie, ale aj aktívne napätie generované samotným tkanivom v dôsledku jeho kontrakcie. Pasívna zložka materiálu býva spravidla modelovaná pomocou niektorého z dostupných hypereastických modelov. Zatiaľ čo aktívnu odozvu je možné zahrnúť buď cez deformačný gradient (tzv. „*active strain approach*“) alebo použitím samotného konštitutívneho modelu pre tzv. aktívny tenzor napätia [9]. Celkový tenzor napätia je potom daný súčtom pasívneho a aktívneho tenzoru. Druhý menovaný prístup (tzv. „*active stress approach*“) nebol doteraz na ÚMTMB úspešne použitý a jeho implementácia a odskúšanie (aspoň na krátkej fáze izovolumickej kontrakcie) je hlavným cieľom tejto práce. Pokiaľ nebude uvedené inak, ďalšie informácie budú uvedené z literatúry [11].

4.1 PASÍVNY TENZOR NAPÄTIA

Najpoužívanejším hyperelastickým modelom pre popis pasívnej zložky chovania je v dnešnej dobe model Holzapfela & Ogdena (HO), ktorý bol prezentovaný v roku 2009 v článku [10]. Model bol formulovaný s ohľadom na vrstevnatú štruktúru myokardu (podrobne opísanú v sekcii 1.3.3) a z nej vyplývajúcu ortotropnú odozvu materiálu (znázornenú na obr. 1.3.7). Model je definovaný mernou energiou napätosti v exponenciálnom tvare [10]:

$$\psi = \frac{a}{2b} \{ \exp[b(I_1 - 3)] - 1 \} + \sum_{i=f,s} \frac{a_i}{2b_i} \{ \exp[b_i(I_{4i} - 1)^2] - 1 \} + \frac{a_{fs}}{2b_{fs}} [\exp(b_{fs}I_{8fs}^2) - 1] \quad (4.1)$$

Prvý člen rovnice popisuje izotropnú zložku správania a využíva invariant I_1 , ktorý je definovaný ako stopa („*trace*“) pravého Cauchy-Greenovho tenzoru deformácie \underline{C} , teda:

$$I_1 = \text{tr } \underline{C} \quad (4.2)$$

Tenzor \underline{C} je definovaný pomocou deformačného gradientu \underline{F} ako:

$$\underline{C} = \underline{F}^T \cdot \underline{F} \quad (4.3)$$

V druhom člene rovnice sa vyskytujú dva invarianty I_4 . Invariant I_{4f} vyjadruje stuhnutie materiálu v smere svalových vlákien (v smere vektoru \underline{f} , vid' obr. 1.3.6). Invariant I_{4s} popisuje spevnenie materiálu v smere priečnom k smeru svalových vlákien (v smere vektoru \underline{s} , vid' obr. 1.3.6). Invariant I_4 je definovaný ako:

$$I_4 = \underline{F} \cdot \underline{CF} \quad (4.4)$$

Invariant I_8 popisuje zmenu pôvodne pravého uhla medzi vektormi \underline{f} a \underline{s} . Exponenciálny člen s týmto invariantom teda zvyšuje tuhosť v šmykových módoch, pri ktorých sa mení uhol týmito vektormi. Autori v článku [10] tento člen zahrnuli na základe experimentálnych výsledkov Dokosa a kol. [3], vid' obr. 1.3.7. Výsledky ukazujú tuhšiu odozvu módov (fs) a (sf) – pri ktorých sa spomenutý uhol mení, ako pri odpovedajúcich módoch (fn) a (sn) – pri

ktorých sa už tento uhol nemení. Tieto výsledky však boli zistené testovaním prasacích vzoriek a novšie experimentálne štúdie Sommera a kol (2015) [15], ktorí testovali vzorky ľudského myokardu. Tu sa už ukazujú podstatne menšie rozdiely v tuhostiach medzi jednotlivými módmi. Nutnosť zahrnutia člena s invariantom I_3 je teda sporná, a preto bude v tejto práci zanedbaná. Pre zjednodušenie bude ďalej zanedbaný aj člen s invariantom I_{4s} . Nakoľko cieľom tejto práce je hlavne implementácia prístupu aktívneho napätia a jeho otestovanie na krátkej fáze izovolumickej kontrakcie pri ktorej sú deformácie stien komory v porovnaní so zvyškom pracovného cyklu relatívne malé a zásadnú rolu má skôr aktívna zložka napätia. A čo viac, ako bude ukázané ďalej, poskytuje aj takto zredukovaný konštitutívny model veľmi dobrú zhodu s experimentálnymi meraniami. Výsledný tvar funkcie mernej energie napätosti, ktorá bude v tejto práci použitá, je:

$$\psi = \frac{a}{2b} \{ \exp[b(I_1 - 3)] - 1 \} + \frac{a_f}{2b_f} \{ \exp[b_f(I_{4f} - 1)^2] - 1 \} \quad (4.5)$$

4.1.1 ODVODENIE CAUCHYHO TENZORU NAPÄTIA A TENZORU ELASTICKÝCH KONŠTÁNT

Pre implementáciu materiálového modelu do výpočtového programu je nevyhnutné najskôr z rovnice popisujúcej energiu napätosti (rovnica 4.5) odvodiť Cauchyho tenzor napätia a tenzor elastických konštánt.

Rovnicu 4.5 je možné rozdeliť na dve zložky: $\psi = \psi_1(I_1) + \psi_f(I_4)$, aby sa s nimi lepšie pracovalo pri výpočte. Ďalej je vhodné (pre výpočet) určiť prvé dve derivácie týchto zložiek podľa invariantov, ktoré tieto zložky obsahujú

$$\psi_1 = \frac{a}{2b} \cdot (e^{b(I_1-3)} - 1) \quad (4.6)$$

$$\psi_1' = \frac{d\psi_1}{dI_1} = \frac{a}{2b} \cdot e^{b(I_1-3)} \cdot b = \frac{a}{2} \cdot e^{b(I_1-3)} \quad (4.7)$$

$$\psi_1'' = \frac{d^2\psi_1}{dI_1^2} = \frac{a \cdot b}{2} \cdot e^{b(I_1-3)} \quad (4.8)$$

$$\psi_f = \frac{a_f}{2b_f} \cdot (e^{b_f(I_4-1)^2} - 1) \quad (4.9)$$

$$\psi_f' = \frac{d\psi_f}{dI_4} = \frac{a_f}{2b_f} \cdot e^{b_f(I_4-1)^2} \cdot b_f \cdot 2 \cdot (I_4 - 1) = a_f \cdot e^{b_f(I_4-1)^2} \cdot (I_4 - 1) \quad (4.10)$$

$$\psi_f'' = \frac{d^2\psi_f}{dI_4^2} = a_f \cdot e^{b_f(I_4-1)^2} \cdot 1 + (I_4 - 1) \cdot a_f \cdot e^{b_f(I_4-1)^2} \cdot b_f \cdot 2 \cdot (I_4 - 1) = a_f \cdot e^{b_f(I_4-1)^2} + (I_4 - 1)^2 \cdot 2 \cdot a_f \cdot b_f \cdot e^{b_f(I_4-1)^2} \quad (4.11)$$

Cauchyho tenzor napätia je daný ako:

$$\underline{\sigma}_p = J^{-1} \cdot \underline{F} \cdot \underline{S}_p \cdot \underline{F}^T \quad (4.12)$$

Kde \underline{F} je deformačný gradient, J je determinant tenzoru deformačného gradientu \underline{F} (tretí invariant) $J = \det(\underline{F})$ (pre nestlačiteľný materiál je $J = 1$), a \underline{S}_p je druhý Piola-Kirchhoffov (symetrický) tenzor napätia, je daný ako:

$$\underline{S}_p = 2 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \underline{C}} \quad (4.13)$$

Rovnicu 4.13 je možné rozpísať ako:

$$\underline{S}_p = 2 \cdot \frac{\partial(\psi_1 + \psi_f)}{\partial \underline{C}} = 2 \cdot \left(\psi'_1 \cdot \frac{\partial I_1}{\partial \underline{C}} + \psi'_f \cdot \frac{\partial I_4}{\partial \underline{C}} \right) \quad (4.14)$$

A po dosadení rovnic 4.7 a 4.10 do rovnice 4.14 bola získaná rovnica:

$$\underline{S}_p = 2 \cdot \left(\frac{a}{2} \cdot e^{b(I_1-3)} \cdot \frac{\partial I_1}{\partial \underline{C}} + a_f \cdot e^{b_f(I_4-1)^2} \cdot (I_4 - 1) \cdot \frac{\partial I_4}{\partial \underline{C}} \right) \quad (4.15)$$

Tenzor elastických konštánt je daný rovnicou:

$$\underline{C}_p = 2 \cdot \frac{\partial \underline{S}_p}{\partial \underline{C}} \quad (4.16)$$

Ktorú je možné rozpísať ako:

$$\begin{aligned} \underline{C}_p = 4 \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \underline{C}} \cdot \left(\psi'_1 \cdot \frac{\partial I_1}{\partial \underline{C}} \right) + \frac{\partial}{\partial \underline{C}} \cdot \left(\psi'_f \cdot \frac{\partial I_4}{\partial \underline{C}} \right) \right] = 4 \cdot \left[\frac{\partial I_1}{\partial \underline{C}} \otimes \frac{\partial \psi'_1}{\partial \underline{C}} + \psi'_1 \cdot \frac{\partial^2 I_1}{\partial \underline{C} \partial \underline{C}} + \frac{\partial I_4}{\partial \underline{C}} \otimes \frac{\partial \psi'_f}{\partial \underline{C}} + \psi'_f \cdot \frac{\partial^2 I_4}{\partial \underline{C} \partial \underline{C}} \right] \\ = 4 \cdot \left[\psi''_1 \cdot \frac{\partial I_1}{\partial \underline{C}} \otimes \frac{\partial I_1}{\partial \underline{C}} + \psi'_1 \cdot \frac{\partial^2 I_1}{\partial \underline{C} \partial \underline{C}} + \psi''_f \cdot \frac{\partial I_4}{\partial \underline{C}} \otimes \frac{\partial I_4}{\partial \underline{C}} + \psi'_f \cdot \frac{\partial^2 I_4}{\partial \underline{C} \partial \underline{C}} \right] \end{aligned} \quad (4.17)$$

Invariant I_1 daný rovnicou (4.2), ktorú je možné rozpísať ako:

$$\begin{aligned} I_1 = \underline{C} : \underline{I} = (C_{ij} \cdot \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) : (\delta_{kl} \cdot \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l) = C_{ij} \cdot \delta_{kl} \cdot (\underline{e}_i \cdot \underline{e}_k) \cdot (\underline{e}_j \cdot \underline{e}_l) = C_{ij} \cdot \delta_{kl} \cdot \delta_{ik} \cdot \delta_{jl} = \\ C_{ij} \cdot \delta_{il} \cdot \delta_{jl} = C_{ij} \cdot \delta_{ij} = C_{ii} = C_{11} + C_{22} + C_{33} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Následne je možné spočítať jeho prvú parciálnu deriváciu podľa tenzoru \underline{C} :

$$\frac{\partial I_1}{\partial \underline{C}} = \frac{\partial C_{kk}}{\partial C_{ij}} \cdot \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = \delta_{ki} \cdot \delta_{kj} \cdot \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = \delta_{ij} \cdot \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = \underline{I} \quad (4.19)$$

Kde \underline{I} je jednotkový tenzor druhého radu („second order unit (or identity) tensor“), pozn. platí, že: $\underline{I} \cdot \underline{u} = \underline{u} \cdot \underline{I} = \underline{u}$ pre všetky vektory \underline{u} .

Tiež je možné zadefinovať vzťah:

$$\frac{\partial I_1}{\partial \underline{C}} \otimes \frac{\partial I_1}{\partial \underline{C}} = \underline{I} \otimes \underline{I} = (\delta_{ij} \cdot \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) \otimes (\delta_{kl} \cdot \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l) = \delta_{ij} \cdot \delta_{kl} \cdot \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \quad (4.20)$$

Jeho druhá derivácia vyzerá nasledovne:

$$\frac{\partial^2 I_1}{\partial \underline{C} \partial \underline{C}} = \frac{\partial}{\partial \underline{C}} \cdot \left(\frac{\partial I_1}{\partial \underline{C}} \right) = \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial C_{kl}} \cdot \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l = 0 \quad (4.21)$$

Invariant I_4 daný rovnicou (4.4), ktorú je možné rozpísať ako:

$$\begin{aligned} I_4 = \lambda^2 = (f_i \cdot \underline{e}_i) \cdot [(C_{kl} \cdot \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l) \cdot (f_j \cdot \underline{e}_j)] = (f_i \cdot \underline{e}_i) \cdot [C_{kl} \cdot f_j \cdot (\underline{e}_k \otimes \underline{e}_l) \cdot \underline{e}_j] = (f_i \cdot \underline{e}_i) \cdot \\ C_{kl} \cdot f_j \cdot \delta_{lj} \cdot \underline{e}_k = f_i \cdot C_{kj} \cdot f_j \cdot \delta_{ki} = f_i \cdot C_{ij} \cdot f_j \end{aligned} \quad (4.22)$$

Prvá parciálna derivácia tohto invariantu podľa tenzoru \underline{C} vyzerá nasledovne:

$$\frac{\partial I_4}{\partial \underline{C}} = \frac{\partial(f_i \cdot c_{ij} \cdot f_j)}{\partial c_{kl}} \cdot \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l = \left[\frac{\partial f_i}{\partial c_{kl}} \cdot c_{ij} \cdot f_j + f_i \cdot \frac{\partial c_{ij}}{\partial c_{kl}} \cdot f_j + f_i \cdot c_{ij} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial c_{kl}} \right] \cdot \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l = (f_i \cdot \delta_{ik} \cdot \delta_{jl} \cdot f_j) \cdot \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l = f_k \cdot f_l \cdot \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l = (f_k \cdot \underline{e}_k) \otimes (f_l \cdot \underline{e}_l) = \underline{f} \otimes \underline{f} \quad (4.23)$$

Tiež je definovaný vzťah:

$$\frac{\partial I_4}{\partial \underline{C}} \otimes \frac{\partial I_4}{\partial \underline{C}} = \underline{f} \otimes \underline{f} \otimes \underline{f} \otimes \underline{f} = f_i \cdot f_j \cdot f_k \cdot f_l \cdot \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \quad (4.24)$$

Druhá derivácia tohto invariantu vyzerá nasledovne:

$$\frac{\partial^2 I_4}{\partial \underline{C} \partial \underline{C}} = \frac{\partial}{\partial \underline{C}} \cdot (f_i \cdot f_j \cdot \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l) = \frac{\partial(f_i \cdot f_j)}{\partial c_{kl}} \cdot \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l = \left[\frac{\partial f_i}{\partial c_{kl}} \cdot f_j + f_i \cdot \frac{\partial f_j}{\partial c_{kl}} \right] \cdot \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l = 0 \quad (4.25)$$

Teraz možno dosadiť do rovnice 4.12 rovnicu 4.14, do ktorej sú dosadené rovnice 4.19 a 4.23 a po úprave je získaná rovnica:

$$\underline{\sigma}_p = 2 \cdot \left(\psi'_1 \cdot \underline{F} \cdot \underline{I} \cdot \underline{F}^T + \psi'_f \cdot \underline{F} \cdot (\underline{f} \otimes \underline{f}) \cdot \underline{F}^T \right) = 2 \cdot \left(\psi'_1 \cdot \underline{B} + \psi'_f \cdot (\underline{F} \cdot \underline{f}) \otimes (\underline{F} \cdot \underline{f}) \right) \quad (4.26)$$

Kde výraz $\underline{F} \cdot \underline{I} \cdot \underline{F}^T$ predstavuje ľavý Cauchy-Greenov tenzor deformácie:

$$\underline{B} = \underline{F} \cdot \underline{I} \cdot \underline{F}^T \quad (4.27)$$

Výraz $\underline{F} \cdot (\underline{f} \otimes \underline{f}) \cdot \underline{F}^T$ je upravený nasledovne:

$$\begin{aligned} \underline{F} \cdot (\underline{f} \otimes \underline{f}) \cdot \underline{F}^T &= (F_{ik} \cdot \underline{e}_i \otimes \underline{e}_k) \cdot (f_a \cdot f_b \cdot \underline{e}_a \otimes \underline{e}_b) \cdot (F_{jl} \cdot \underline{e}_j \otimes \underline{e}_l) = F_{ik} \cdot f_a \cdot f_b \cdot F_{jl} \cdot \\ &(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_k) \cdot (\underline{e}_a \otimes \underline{e}_b) \cdot (\underline{e}_j \otimes \underline{e}_l) = F_{ik} \cdot f_a \cdot f_b \cdot F_{jl} \cdot (\underline{e}_k \cdot \underline{e}_a) \cdot (\underline{e}_b \cdot \underline{e}_l) \cdot \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = [F_{ik} \cdot f_a \cdot \\ &(\underline{e}_k \cdot \underline{e}_a) \cdot \underline{e}_i] \otimes [F_{jl} \cdot f_b \cdot (\underline{e}_l \cdot \underline{e}_b) \cdot \underline{e}_j] = [(F_{ik} \cdot \underline{e}_i \otimes \underline{e}_k) \cdot (f_a \cdot \underline{e}_a)] \otimes [(F_{jl} \cdot \underline{e}_j \otimes \underline{e}_l) \cdot \\ &(f_b \cdot \underline{e}_b)] = (\underline{F} \cdot \underline{f}) \otimes (\underline{F} \cdot \underline{f}) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Do rovnice 4.17 boli dosadené rovnice 4.20, 4.21, 4.24 a 4.25, a tak po úprave bola nadobudnutá rovnica tenzoru elastických konštánt v tvare:

$$\underline{C}_p = 4 \cdot \left[\psi''_1 \cdot \underline{I} \otimes \underline{I} + 0 + \psi''_f \cdot \underline{f} \otimes \underline{f} \otimes \underline{f} \otimes \underline{f} + 0 \right] = 4 \cdot \left(\psi''_1 \cdot \delta_{ij} \cdot \delta_{kl} + \psi''_f \cdot f_i \cdot f_j \cdot f_k \cdot f_l \right) \cdot \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \quad (4.29)$$

Kde výraz $4 \cdot (\psi''_1 \cdot \delta_{ij} \cdot \delta_{kl} + \psi''_f \cdot f_i \cdot f_j \cdot f_k \cdot f_l)$ možno označiť ako $(C_p)_{ijkl}$ a pomocou Piola-transformácie je možné písať:

$$(C_p)_{abcd} = \frac{1}{J} \cdot F_{ai} \cdot F_{bj} \cdot F_{ck} \cdot F_{dl} \cdot (C_p)_{ijkl} = 4 \cdot \left(\psi''_1 \cdot F_{ai} \cdot F_{bj} \cdot F_{ck} \cdot F_{dl} \cdot \delta_{ij} \cdot \delta_{kl} + \psi''_f \cdot F_{ai} \cdot f_i \cdot F_{bj} \cdot f_j \cdot F_{ck} \cdot f_k \cdot F_{dl} \cdot f_l \right) \quad (4.30)$$

A rovnici 4.29 je možné prepísať ako:

$$\underline{C}_p = (c_p)_{abcd} \cdot \underline{e}_a \otimes \underline{e}_b \otimes \underline{e}_c \otimes \underline{e}_d \quad (4.31)$$

Ktorú potom možno upraviť do konečného tvaru ako:

$$\begin{aligned} \underline{C}_p &= 4 \cdot [\psi_1'' \cdot (F_{ai} \cdot F_{bj}(\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j) \cdot \underline{e}_a \otimes \underline{e}_b) \otimes (F_{ck} \cdot F_{dl}(\underline{e}_k \cdot \underline{e}_l) \cdot \underline{e}_c \otimes \underline{e}_d) + \psi_f'' \cdot (F_{ai} \cdot \\ & f_p(\underline{e}_i \cdot \underline{e}_p) \cdot \underline{e}_a) \otimes (F_{bj} \cdot f_q(\underline{e}_j \cdot \underline{e}_q) \cdot \underline{e}_b) \otimes (F_{ck} \cdot f_r(\underline{e}_c \cdot \underline{e}_r) \cdot \underline{e}_c) \otimes (F_{dl} \cdot f_s(\underline{e}_l \cdot \underline{e}_s) \cdot \underline{e}_d)] = \\ &= 4 \cdot [\psi_1'' \cdot \underline{B} \otimes \underline{B} + \psi_f'' \cdot (\underline{F} \cdot \underline{f}) \otimes (\underline{F} \cdot \underline{f}) \otimes (\underline{F} \cdot \underline{f}) \otimes (\underline{F} \cdot \underline{f})] \quad (4.32) \end{aligned}$$

Kde \underline{B} (ľavý Cauchy-Greenov tenzor deformácie) bol získaný podobne ako pri rovnici 4.26:

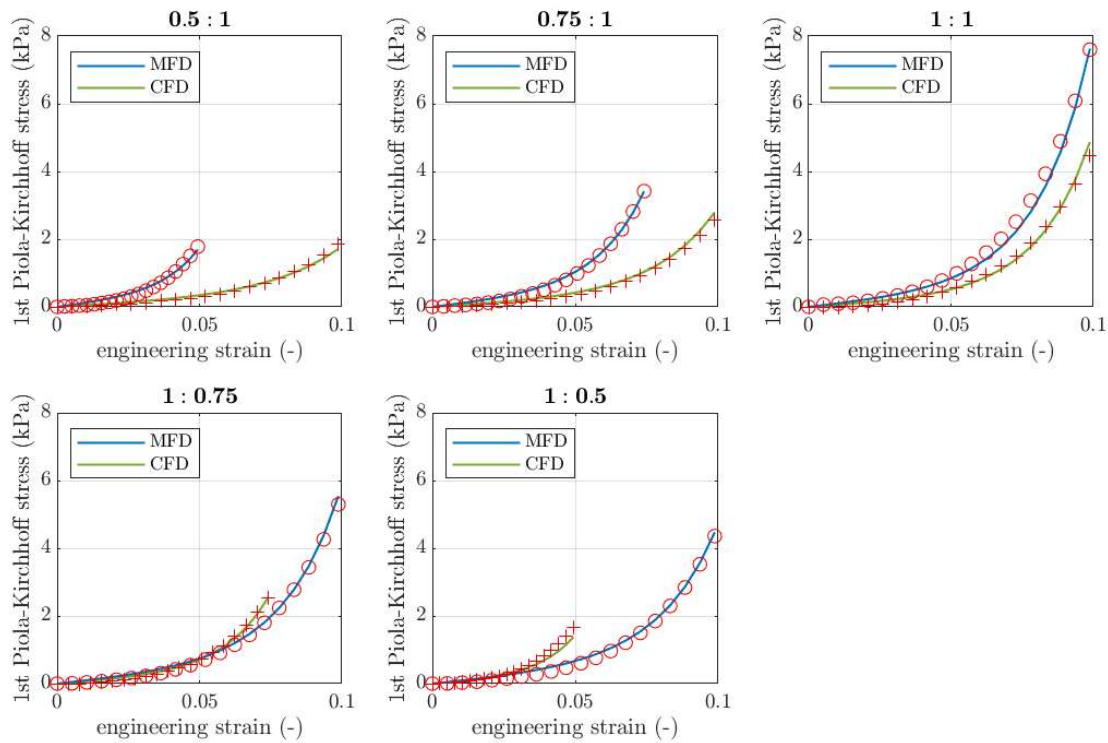
$$\underline{B} = \underline{F} \cdot \underline{F}^T = (F_{ai} \cdot \underline{e}_a \otimes \underline{e}_i) \cdot (F_{bj} \cdot \underline{e}_b \otimes \underline{e}_j) = (F_{ai} \cdot F_{bj}(\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j) \cdot \underline{e}_a \otimes \underline{e}_b) \quad (4.33)$$

A výraz $(\underline{F} \cdot \underline{f})$ bol získaný úpravou:

$$(F_{ai} \cdot f_p(\underline{e}_i \cdot \underline{e}_p) \cdot \underline{e}_a) = (F_{ai} \cdot \underline{e}_a \otimes \underline{e}_i) \cdot (f_p \cdot \underline{e}_p) = \underline{F} \cdot \underline{f} \quad (4.34)$$

4.1.2 MATERIÁLOVÉ PARAMETRE MODELU

Pre úplný popis rovnice energie napätosti (rovnica 4.2) je nutné určiť materiálové parametre sú to hodnoty: a , b , a_f a b_f . Tieto parametre boli poskytnuté vedúcim diplomovej práce, a to na základe biaxiálnych skúšok zo štúdie od Sommer G. a kol. [15]. V tejto štúdii boli vykonané biaxiálne skúšky v rôznych pomeroch pretvorenia medzi smerom vlákien („*Mean-Fibre Direction*“ alebo MFD [15]) a smerom naprieč vláknami („*Cross-Fibre Direction*“ alebo CFD [15]) vid' obr. 4.1.



Obr. 4.1: Závislosť 1. Piola-Kirchhoffovho napätia na pretvorení, kde červené krížiky a krúžky znázorňujú experimentálne dáta získané z biaxiálnych skúšok a krivky (zelená – CFD a modrá – MFD) sú zistené funkcie, z ktorých dostávame materiálové parametre. Biaxiálne skúšky boli vykonané v pomeroch pretvorenia: 1:1; 1:0,75; 0,75:1; 1:0,5 a 0,5:1.

Hodnoty parametrov sú: $a = 1,0415$ kPa, $b = 22,7206$, $a_f = 0,9615$ kPa a $b_f = 42,7630$.

4.2 AKTÍVNY TENZOR NAPÄTIA

Cauchyho tenzor napätia je daný rovnako ako v podkapitole 4.1.1 a to:

$$\underline{\sigma}_a = J^{-1} \cdot \underline{F} \cdot \underline{S}_a \cdot \underline{F}^T \quad (4.35)$$

Kde J je tretí invariant tenzoru deformačného gradientu (pre nestlačiteľný materiál je $J = 1$), \underline{F} je deformačný gradient a \underline{S}_a je Piola-Kirchhoffov tenzor napätia, ktorý je daný ako [16]:

$$\underline{S}_a = \frac{\sigma_a}{I_4} \cdot \underline{f} \otimes \underline{f} \quad (4.36)$$

Kde σ_a je funkcia aktívneho napätia indukovaného v bunke.

Po dosadení rovnice 4.36 do rovnice 4.35 bola získaná rovnica:

$$\underline{\sigma}_a = \frac{\sigma_a}{I_4} \cdot \underline{F} \cdot (\underline{f} \otimes \underline{f}) \cdot \underline{F}^T \quad (4.37)$$

Tento výraz bol upravený pomocou rovnice 4.28 na tvar:

$$\underline{\sigma}_a = \frac{\sigma_a}{I_4} \cdot (\underline{F} \cdot \underline{f}) \otimes (\underline{F} \cdot \underline{f}) \quad (4.38)$$

Následne je definované, že skalárny súčin deformačného gradientu \underline{F} s jednotkovým vektorom smeru vlákien v nedeformovanom stave \underline{f} je rovný skalárnemu súčinu pretiahnutia vlákien λ s jednotkovým vektorom smeru vlákien po pretiahnutí $\underline{\hat{f}}$:

$$\underline{F} \cdot \underline{f} = \lambda \cdot \underline{\hat{f}} \quad (4.39)$$

Cauchyho tenzor napätia je teda upravený na tvar:

$$\underline{\sigma}_a = \frac{\sigma_a}{I_4} \cdot \lambda^2 \cdot \underline{\hat{f}} \otimes \underline{\hat{f}} = \sigma_a \cdot \underline{\hat{f}} \otimes \underline{\hat{f}} \quad (4.40)$$

S prihliadnutím na rovnicu 4.22 je vhodné pripomenúť, že $I_4 = \lambda^2$.

Tenzor elastických konštánt je daný rovnako ako v rovnici 4.16, teda:

$$\underline{C}_a = 2 \cdot \frac{\partial \underline{\sigma}_a}{\partial \underline{C}} \quad (4.41)$$

Po dosadení rovnice 4.36 a úpravách bola získaná rovnica:

$$\underline{C}_a = 2 \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{C}} \left(\sigma_a \cdot I_4^{-1} \cdot \underline{f} \otimes \underline{f} \right) = 2 \cdot \underline{f} \otimes \underline{f} \otimes \frac{\partial}{\partial \underline{C}} \left(\sigma_a \cdot I_4^{-1} \right) = 2 \cdot \underline{f} \otimes \underline{f} \otimes \left(\sigma_a \cdot \frac{\partial I_4^{-1}}{\partial \underline{C}} + I_4^{-1} \cdot \frac{\partial \sigma_a}{\partial \underline{C}} \right) \quad (4.42)$$

Následne boli rozpísané jednotlivé členy s parciálnymi deriváciami v zátvorke (využijeme pritom rovnicu 4.23):

$$\sigma_a \cdot \frac{\partial I_4^{-1}}{\partial \underline{C}} = \sigma_a \cdot \frac{dI_4^{-1}}{dI_4} \cdot \frac{\partial I_4}{\partial \underline{C}} = \sigma_a \cdot (-1) \cdot I_4^{-2} \cdot \underline{f} \otimes \underline{f} \quad (4.43)$$

$$I_4^{-1} \cdot \frac{\partial \sigma_a}{\partial \underline{C}} = I_4^{-1} \cdot \frac{d\sigma_a}{dI_4} \cdot \frac{\partial I_4}{\partial \underline{C}} = I_4^{-1} \cdot \sigma_a' \cdot \underline{f} \otimes \underline{f} \quad (4.44)$$

Rovnicu 4.42 za pomoci rovníc 4.43 a 4.44 boli upravené na tvar:

$$\underline{C}_a = (-2 \cdot \sigma_a \cdot I_4^{-2} + 2 \cdot \sigma_a' \cdot I_4^{-1}) \cdot \underline{f} \otimes \underline{f} \otimes \underline{f} \otimes \underline{f} \quad (4.45)$$

Podobnými úpravami ako pri výslednej rovnici tenzoru elastických konštánt pasívneho tenzoru napätia (vid' rovnice 4.29 – 4.34) bola získaná rovnica:

$$\underline{C}_a = (-2 \cdot \sigma_a \cdot I_4^{-2} + 2 \cdot \sigma_a' \cdot I_4^{-1}) \cdot (\underline{F} \cdot \underline{f}) \otimes (\underline{F} \cdot \underline{f}) \otimes (\underline{F} \cdot \underline{f}) \otimes (\underline{F} \cdot \underline{f}) \quad (4.46)$$

Na záver je ešte potrebné určiť funkciu aktívneho napätia bunky σ_a a jeho prvú deriváciu podľa invariantu I_4 (vyplýva z rovnice 4.44).

Keďže stimulácia ľavej komory neprebíha naraz vo všetkých bunkách ale šíri sa postupne z viacerých miest v blízkosti endokardu (ako je opísané v podkapitole 1.1.3). V tejto práci bolo prijaté zjednodušenie a to, že všetky bunky v blízkosti endokardu sú aktivované v rovnaký okamih (v čase $t = 0$ ms). Nakoľko nastavenie realistického priebehu by bolo príliš zložité a ako je ukázané v kapitole 1.1.3, aktivované oblasti na nachádzajú pri povrchu

endokardu. Aktivácia všetkých buniek v blízkosti endokardu prebehne pomerne rýchlo. Celkový charakter šírenia vzruchu je teda možné zjednodušiť ako zvnútra-von (teda v smere \underline{n}_s).

V článku od Caldwell J. a kol. [21] boli namerané hodnoty rýchlosti šírenia vzruchu v troch hlavných smeroch. V smere vlákien (v smere \underline{f}_s , $v_{fs} = 0,67$ mm/ms), v smere pričnom, k smeru vlákien (v smere \underline{s}_s , $v_{ss} = 0,30$ mm/ms) a v smere naprieč stenou srdcovej komory (v smere \underline{n}_s , $v_{ns} = 0,17$ mm/ms).

Dostávame teda čas aktivácie každého prvku ako podiel jeho vzdialenosti od steny endokardu a rýchlosti šírenia vzruchu v komore naprieč stenou komory rovnicou $t_{akt} = \frac{d_{ENDO}}{v_{ns}}$. Po dobu kým nastane tento čas aktivácie je aktívna zložka kontrakcie bunky nulová. Po uplynutí tohoto času začne hodnota tejto aktívnej zložky v bunke rásť. Z článku od Holuberscha Ch. a kol. [22] je možné pozorovať, že tento nárast je v čase izovolumetrickej kontrakcie (v čase $t \in \langle 0, 60 \text{ ms} \rangle$) približne lineárny. Funkcia aktívneho napätia bunky je teda definovaná ako:

$$\sigma_a = \begin{cases} 0 & \text{pre } t \in \langle 0, t_{akt} \rangle \\ \alpha \cdot (t - t_{akt}) & \text{pre } t \geq t_{akt} \end{cases} \quad (4.47)$$

Kde α je konštantná hodnota, ktorú je potrebné vhodne zvoliť (iteračne) tak, aby rýchlosť nárastu tlaku v komore zodpovedala reálnej izovolumetrickej kontrakcii (teda, aby konečná hodnota tlaku v komore dosiahla hodnotu približne 80 mm HG $\approx 10,67$ kPa za dobu 60 ms).

Zložka aktívneho napätia však závisí aj na pretiahnutí vlákien λ . Pri zväčšovaní dĺžky ($\lambda > 1$) sila kontrakcie narastá a naopak pri skraccovaní ($\lambda < 1$) táto sila klesá. Toto je možné najjednoduchšie modelovať tak, že vzťah pre σ_a vynásobíme pretiahnutím λ [16]. Dostávame:

$$\sigma_a = \begin{cases} 0 & \text{pre } t \in \langle 0, t_{akt} \rangle \\ \alpha \cdot \lambda \cdot (t - t_{akt}) & \text{pre } t \geq t_{akt} \end{cases} \quad (4.48)$$

Pre vyjadrenie prvej derivácie podľa invariantu I_4 upravíme funkciu 4.48 pomocou rovnice 4.22:

$$\sigma_a = \begin{cases} 0 & \text{pre } t \in \langle 0, t_{akt} \rangle \\ \alpha \cdot \sqrt{I_4} \cdot (t - t_{akt}) & \text{pre } t \geq t_{akt} \end{cases} \quad (4.49)$$

Určenie derivácie:

$$\sigma'_a = \frac{\partial \sigma_a}{\partial I_4} = \frac{\partial}{\partial I_4} \cdot \alpha \cdot \sqrt{I_4} \cdot (t - t_{akt}) = \alpha \cdot (t - t_{akt}) \cdot \frac{1}{2} \cdot I_4^{-\frac{1}{2}} = \frac{\alpha \cdot (t - t_{akt})}{2 \cdot \sqrt{I_4}} = \frac{\alpha \cdot (t - t_{akt})}{2 \cdot \lambda} \quad (4.50)$$

Dostávame teda deriváciu funkcie ako:

$$\sigma'_a = \begin{cases} 0 & \text{pre } t \in \langle 0, t_{akt} \rangle \\ \frac{\alpha \cdot (t - t_{akt})}{2 \cdot \lambda} & \text{pre } t \geq t_{akt} \end{cases} \quad (4.51)$$

Tieto rovnice (4.48 a 4.51) je teraz možné dosadiť do rovníc pre Cauchyho tenzor napätia (konečný tvar rovnice 4.38) a pre tenzor elastických konštánt (konečný tvar rovnice 4.46). Týmto je popis správania materiálu kompletný, konečné rovnice (teda rovnice 4.26; 4.32; 4.38 a 4.46) boli implementované do programu ANSYS pomocou užívateľskej subrutiny Usermat, písanú v programovacom jazyku Fortran. Tento podprogram je voľne dostupný na internetových stránkach programu ANSYS. Zjednodušená forma tejto subrutiny bola poskytnutá vedúcim diplomovej práce, do ktorej boli zadávané konečné rovnice.

5 IMPLEMENTÁCIA KONŠTITUTÍVNEHO MODELU

V tejto kapitole sa nachádzajú informácie o užívateľskom podprograme („*subroutine*“) Usermat a tiež skúsenosti s používaním tohoto podprogramu, ktoré budú snáď nápomocné budúcim používateľom.

Podprogramu („*subroutine*“) Usermat, umožňuje v programe ANSYS napísať vlastné konštitutívne rovnice popisujúce správanie materiálu a všeobecnú materiálovú štruktúru. Podprogram (písaný v programovacom jazyku Fortran) definuje vzťah medzi napätím a deformáciou materiálu a vzťahuje sa na typy analýz v časovej oblasti a v úplných harmonických analýzach. Podprogram je volaný v každom bode materiálovej integrácie počas fázy riešenia. Program zadáva hodnoty napätí, deformácii a stavových premenných na začiatku prírastku. Podprogram Usermat potom aktualizuje napätia a stavové premenné na aktuálne hodnoty [28]. Pomocou tohto podprogramu bol implementovaný konštitutívny model materiálu popísaný v kapitole 4.

Dve najdôležitejšie Usermatom počítané kvantily sú napätie (Cauchyho tenzor napätia) a tzv. „*consistent tangent stiffness*“, v tejto práci označovaná ako tenzor elastických konštánt. Model je formulovaný úplnou formou („*total form*“), ktorá je bežne používaná pre hyperelastické materiály. Materiálová odozva je charakterizovaná potenciálom súvisiacim s invariantmi deformačného gradientu, ktorý je definovaný v globálnom súradnicovom systéme. Diskrétné rovnice sú formulované s ohľadom na referenčnú konfiguráciu [28].

Pri písaní kódu v podprograme je vhodné predom definovať premenné, tie sa v Usermate definujú dvomi spôsobmi. Buď je definovaná celočíselná premenná („*Integer*“), ktorá je vhodná napr. pre počet materiálových konštánt alebo premenná s dvojitou presnosťou („*Double precision*“), pre premenné, ktoré budú v podprograme počítané. Podprogram pracuje s týmito dvomi typmi premenných a pripisuje im inú presnosť. Typu *Double precision* predpisuje väčšiu presnosť (viac číslic) ako typu *Integer*. V prípade definovania, či násobenia (alebo pričítania, či akejkoľvek inej matematickej operácie) premennej typu *Double precision* konštantnou hodnotou, je nutné za túto hodnotu pridať koncovku „.d0“. Napríklad, ak je premenná a_f definovaná ako typ *Double precision* následné vynásobenie tejto premennej konštantnou hodnotou 7 by vyzeralo nasledovne: $a_f \cdot 7.d0$. Podprogram totiž pre typ *Double precision* očakáva číslo v tvare $X \cdot 10^d$, kde písmeno d predstavuje hodnotu exponentu, takže výraz $a_f \cdot 2.d0$ program číta ako $a_f \cdot 2 \cdot 10^0$ (napríklad číslo $8,9.d6$ program zase číta ako $8,9 \cdot 10^6$). Ak sa na koncovku „.d0“ pri operáciách (alebo definovaní) s konštantnými hodnotami zabudne, program môže zmeniť typ parametru na *Integer* a ďalej počítať s nižšou presnosťou.

V podprograme sa však nachádzajú už programom zadefinované premenné, viď obr. 5.1, preto je následne uvedená tabuľka 1, kde sú niektoré z týchto premenných vysvetlené.

```
*deck, usermat                                USERDISTRIB
subroutine usermat (
&          matId, elemId, kDomIntPt, kLayer, kSectPt,
&          ldstep, isubst, keycut,
&          nDirect, nShear, ncomp, nStatev, nProp,
&          Time, dTime, Temp, dTemp,
&          stress, ustatev, dsdePl, sedEl, sedPl, epseq,
&          Strain, dStrain, epsPl, prop, coords,
&          var0, defGrad_t, defGrad,
&          tsstif, epsZZ,
&          cutFactor, pVolDer, hrmflg, var3, var4,
&          var5, var6, var7)
```

Obr. 5.1: Programom definované premenné [28].

Názov premennej	Typ	Popis
matId	<i>Integer</i>	Obsahuje identifikačné číslo materiálu
elemId	<i>Integer</i>	Obsahuje číslo elementu
kDomIntPt	<i>Integer</i>	Obsahuje číslo integračného bodu materiálu
kLayer	<i>Integer</i>	Obsahuje číslo vrstvy
kSectPt	<i>Integer</i>	Obsahuje číslo sekcie bodu
ldstep	<i>Integer</i>	Obsahuje číslo load-stepu
isubst	<i>Integer</i>	Obsahuje číslo substepu
nDirect	<i>Integer</i>	Počet priamych zložiek vektoru napätia alebo deformácie materiáli
nShear	<i>Integer</i>	Počet šmykových zložiek vektoru napätia alebo deformácie materiáli
ncomp	<i>Integer</i>	Celkový počet zložiek napätia alebo deformácie v materiáli (nDirect + nShear)
nsatev	<i>Integer</i>	Počet stavových premenných, určených v príkaze TB,STATE

nProp	<i>Integer</i>	Počet materiálových konštánt, určených v príkaze TB,USER
Temp	<i>Double precision</i>	Obsahuje teplotu na začiatku časového prírastku
dTemp	<i>Double precision</i>	Obsahuje aktuálny prírastok teploty
Time	<i>Double precision</i>	Obsahuje celkový čas na začiatku časového prírastku
dTime	<i>Double precision</i>	Obsahuje aktuálny časový prírastok
Strain	<i>Double precision</i>	Pole obsahujúce celkové napätie na začiatku časového prírastku
dStrain	<i>Double precision</i>	Pole obsahujúce aktuálny napät'ový prírastok
prop	<i>Double precision</i>	Pole obsahujúce materiálové konštanty definované cez príkaz TB,USER a TBDATA (Veľkosť poľa je definovaná premennou nProp)
coords	<i>Double precision</i>	Pole obsahujúce aktuálne súradnice materiálových bodov integrácie
defGrand_t	<i>Double precision</i>	Matica obsahujúca gradient deformácie na začiatku časového prírastku. Veľkosť matice je 3x3
defGrand	<i>Double precision</i>	Matica obsahujúca aktuálny gradient deformácie. Veľkosť matice je 3x3

Tabuľka 1: Popis predom definovaných premenných [28]

Ako bolo spomenuté, celkový tenzor napätia (rovnako ako tenzor elastických konštánt) je daný súčtom pasívneho a aktívneho tenzoru. Ide teda o súčet rovnice 4.26 s rovnicou 4.38 a rovnice 4.32 s rovnicou 4.46. V nasledujúcich rovniciach budú pre názornosť uvedené tieto rovnice, ktoré budú následne zadané do podprogramu Usermat.

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2 \cdot \left(\psi'_1 \cdot \underline{\underline{B}} + \psi'_f \cdot \left(\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{f}} \right) \otimes \left(\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{f}} \right) \right) + \frac{\sigma_a}{I_4} \cdot \left(\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{f}} \right) \otimes \left(\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{f}} \right) \quad (5.1)$$

$$\underline{\underline{C}} = 4 \cdot \left[\psi''_1 \cdot \underline{\underline{B}} \otimes \underline{\underline{B}} + \psi''_f \cdot \left(\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{f}} \right) \otimes \left(\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{f}} \right) \otimes \left(\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{f}} \right) \otimes \left(\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{f}} \right) \right] + \left(-2 \cdot \sigma_a \cdot I_4^{-2} + 2 \cdot \sigma'_a \cdot I_4^{-1} \right) \cdot \left(\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{f}} \right) \otimes \left(\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{f}} \right) \otimes \left(\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{f}} \right) \otimes \left(\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{f}} \right) \quad (5.2)$$

Implementácia bola zahájená zadáním ľavého Cauchy-Greenovho tenzoru deformácie \underline{B} (definovaný v rovnici 4.33) a súčinu $(\underline{F} \cdot \underline{f}) \otimes (\underline{F} \cdot \underline{f})$. Na obr. 5.2 a obr. 5.3 sú zobrazené riadky zdrojového kódu podprogramu. Pozn.: z rovníc 4.3 a 4.33 je možné vyvodit' záver, že rovnicu 4.2 je možné rozšírit' nasledovne:

$$I_1 = \text{tr } \underline{C} = \text{tr } \underline{B} \quad (5.3)$$

```

0      10      20      30      40      50      60      70      80
-----
39
40 c
41 c --- ľavý Cauchy-Greenov tenzor B=F*transponovaný(F), invariant I1=tr(C)=tr(B)
42 c
43     B(1) = F(1,1)*F(1,1) + F(1,2)*F(1,2) + F(1,3)*F(1,3)
44     B(2) = F(2,1)*F(2,1) + F(2,2)*F(2,2) + F(2,3)*F(2,3)
45     B(3) = F(3,1)*F(3,1) + F(3,2)*F(3,2) + F(3,3)*F(3,3)
46     B(4) = F(1,1)*F(2,1) + F(1,2)*F(2,2) + F(1,3)*F(2,3)
47     B(5) = F(2,1)*F(3,1) + F(2,2)*F(3,2) + F(2,3)*F(3,3)
48     B(6) = F(1,1)*F(3,1) + F(1,2)*F(3,2) + F(1,3)*F(3,3)
49     I1 = B(1) + B(2) + B(3)

```

Obr. 5.2: Zadanie ľavého Cauchy-Greenovho tenzoru deformácie spolu s invariantom I_1 .

```

0      10      20      30      40      50      60      70
-----
59 c
60 c --- tenzor (Ff)0(Ff), invariant I4=tr((Ff)0(Ff))
61 c
62     CALL m3xv3(Ff,F,f_glob) ! maticovo-vektorové násobenie: Ff = F*f_glob
63     Ff0Ff(1) = Ff(1)**2
64     Ff0Ff(2) = Ff(2)**2
65     Ff0Ff(3) = Ff(3)**2
66     Ff0Ff(4) = Ff(1)*Ff(2)
67     Ff0Ff(5) = Ff(2)*Ff(3)
68     Ff0Ff(6) = Ff(1)*Ff(3)
69     I4 = Ff(1)**2 + Ff(2)**2 + Ff(3)**2

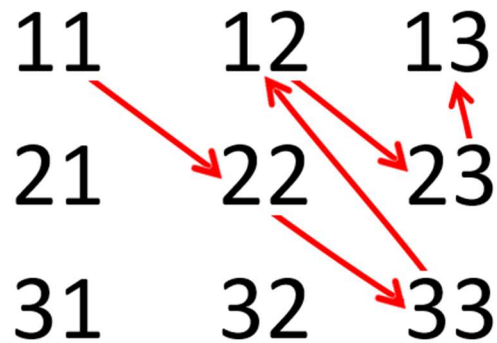
```

Obr. 5.3: Zadanie súčinu $(\underline{F} \cdot \underline{f}) \otimes (\underline{F} \cdot \underline{f})$ spolu s invariantom I_4 .

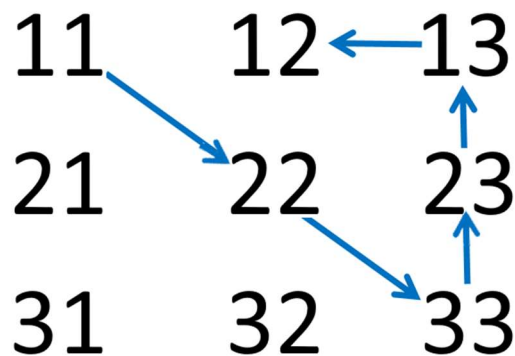
Z obr. 5.2 a 5.3 je možné všimnúť si hneď dve zaujímavosti a to, že všetky príkazy v podprograme začínajú na šiestej pozícii v každom riadku (znázornené tenkou sivou čiarou na obr. 5.3). Je tomu preto, že podprogram vyžaduje zdrojový kód písaný v programovacom jazyku Fortran („*Formule Translating system*“), ktorý bol vyvinutý ešte v 50-tych rokoch 20-teho storočia a vykoná iba príkazy nachádzajúce sa medzi šiestou a sedemdesiatou druhou pozíciou riadku (zobrazené tenkou sivou čiarou na obr. 5.2). Druhou zaujímavosťou je, že je zadávaných iba šesť zložiek tenzorov. Je tomu preto, že sa zadávajú len nezávislé zložky tenzorov a tenzory (rovnako ako tenzor napätia) sú symetrické. Za zmienku tiež stojí poradie zložiek tenzorov. Majme ľubovoľnú maticu (tenzor) rozmeru 3x3, označme pozície jej členov

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix}$$

Software ANSYS vyžaduje nasledujúce poradie prvkov (poradie od prvého prvku po šiesty prvok): 11, 22, 33, 12, 23 a 13. Napríklad Voigtova notácia uvažuje iné poradie. Obidve notácie sú znázornené na obr. 5.4 a 5.5. Notácia použitá v programe ANSYS červenou farbou a Voigtova notácia modrou farbou.



Obr. 5.4: Ilustrácia spôsobu zapisovania poradia prvkov. Červenou farbou je znázornený spôsob používaný v programe ANSYS.



Obr. 5.5: Ilustrácia spôsobu zapisovania poradia prvkov. Modrou farbou je znázornená Voigtova notácia.

Pred zadaním výsledných rovníc (5.1 a 5.2) boli ešte zadané rovnice pre derivácie zložiek energie napätosti, ktoré sa v rovniciach vyskytujú (ide o rovnice 4.7, 4.8, 4.10 a 4.11). Rovnako ako funkcia aktívneho napätia bunky a jej deriváciu podľa invariantu I_4 (rovnice 4.48 a 4.51) vid' obr. 5.6 a 5.7.

```

0          10          20          30          40          50          60          70
.....
78      a01 = prop(1)
79      b01 = prop(2)
80      a_f = prop(3)
81      b_f = prop(4)
82      dW11 = a01/2.d0*exp(b01*(I1-3.d0))
83      ddW11 = a01/2.d0*b01*exp(b01*(I1-3.d0))
84      dW14 = a_f*(I4-1.d0)*exp(b_f*(I4-1.d0)**2)
85      ddW14 = a_f*exp(b_f*(I4-1.d0)**2)
86      &          + a_f*b_f*2.d0*(I4-1.d0)**2*exp(b_f*(I4-1.d0)**2)
    
```

Obr. 5.6: Zadanie rovníc derivácii zložiek energie napätosti spolu s definovaním materiálových parametrov.


```

0          10          20          30          40          50          60          70
103 c
104 c --- Aktivne napätie
105 c
106     alfa = prop(5)
107     lambda = sqrt(I4) ! fibre stretch
108     IF (Time+dTime .LT. t_act) THEN
109
110     Sact=0.d0
111     dSact=0.d0
112     ELSE
113
114     Sact=alfa*lambda*(Time-t_act)
115     dSact=alfa*(Time-t_act)/2.d0*lambda
116     END IF

```

Obr. 5.7: Zadanie rovníc funkcie aktívneho napätia a jej derivácie.

Stojí za zmienku, že niektoré z týchto rovníc sú pomerne dlhé a nie vždy je možné napísať ich do jedného riadku (medzi šiestou a sedemdesiatou druhou pozíciou v riadku), na obr. 5.6 je možné vidieť spôsob, ako takúto dlhú rovnicu možno zapísať cez dva riadky (riadky č. 85 a 86).

Následne boli zapísané výsledné rovnice 5.1 a 5.2, vid' obr. 5.8.

```

0          10          20          30          40          50          60          70
117 c
118 c --- Cauchyho tenzor napätia (only the deviatoric part)
119 c
120     DO k1=1,6
121         stress(k1) = 2.d0*(dWI1*B(k1) + dWI4*Ff0Ff(k1))
122         &
123         + Sact/I4*Ff0Ff(k1)
124     END DO
125 c --- Tenzor elastických konštánt (only the deviatoric part)
126 c
127     DO k1=1,6
128         DO k2=1,6
129             c4th(k1,k2) =
130             &
131             4.d0*( ddWI1*B(k1)*B(k2) + ddWI4*Ff0Ff(k1)*Ff0Ff(k2) )
132             + ( -2.d0*Sact/I4**2 + 2.d0*dSact/I4 ) *Ff0Ff(k1)*Ff0Ff(k2)
133         END DO
134     END DO

```

Obr. 5.8: Zápis výsledných rovníc Cauchyho tenzoru napätia a tenzoru elastických konštánt.

Po úspešnom zadaní všetkých rovníc a po zdarenom načítaní podprogramu Usermat v programe ANSYS program vypíše hlášku „*This Mechanical APDL version was linked by Licensse*“, aby užívateľ poznal, že načítanie bolo úspešné.

Rovnice pre implementáciu materiálu boli odvodené v kapitole 4 a spôsob ich zápisu do podprogramu je opísaný vyššie. Spôsob zadaní materiálových parametrov je ale odlišný. Počet stavových premenných (materiálových parametrov) a ich hodnoty sú definované

pomocou príkazu TB, kde je nutné najskôr špecifikovať vstupné premenné, teda počet teplotných bodov a počet materiálových konštánt pre teplotné body (TB,USER). Napríklad príkaz TB,STATE,1,3,4 pre materiál č. 1 definuje 3 teplotné body a pre každý z nich definuje 4 materiálové konštanty. Potom je potrebné nastaviť počet stavových premenných pomocou príkazu TB,STATE. Pri modelovaní myokardu ľavej srdcovej komory je použitých päť materiálových parametrov (štyri k popisu pasívneho tenzoru napätia a jeden k popisu aktívneho tenzoru napätia, viac v kapitole 4), ich hodnoty sú zadávané pomocou príkazu TBDATA. Tieto príkazy už nie sú zadávané do užívateľského podprogramu Usermat ale až po úspešnom načítaní tohto podprogramu.

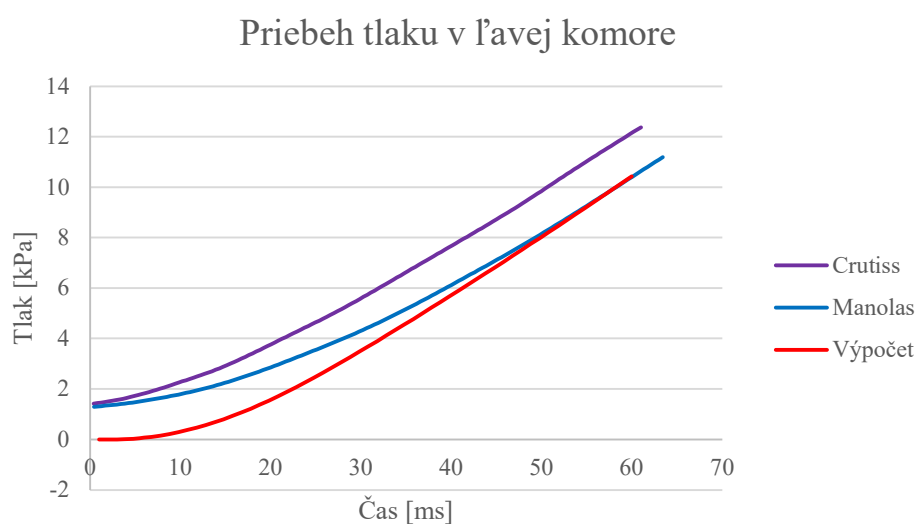
6 VÝPOČET FÁZY IZOVOLUMICKEJ KONTRAKCIE

Pred realizáciou výpočtu boli predpísané nulové posuvy vo všetkých troch osiach na rovinu bázy. Báza je rovina vzniknutá zarovnaním hornej časti komory (viac v kapitole 3.1).

Táto kapitola je ďalej rozdelená na dve podkapitoly. V prvej z nich sú prezentované primárne výsledky kontrakcie podľa cieľov diplomovej práce. Je sledovaný priebeh tlaku vo vnútri komory a následne je porovnaný s klinicky nameranými priebehmi z literatúry. V druhej podkapitole sú grafické znázornenia pretiahnutia λ , prvého hlavného napätia, času aktivácie jednotlivých buniek a aktívnej zložky kontrakcie v bunkách. Na záver je uvedené porovnanie medzi prístupom aktívneho napätia a prístupom aktívneho pretvorenia.

6.1 TLAK V KOMORE NA KONCI FÁZY

Prvým cieľom pre získanie výsledkov bolo určiť materiálový parameter α (podrobne opísaný v kapitole 4.3) a to tak, aby tlak na konci izovolumickej kontrakcie odpovedal fyziologickej hodnote. Túto hodnotu môžeme odčítať z obr. 1.2.1 (na str. 14) alebo obr. 1.2.2 (na str. 15), teda 80 mmHg (uvádzané tiež ako jednotka torr), čo je približne 10,67 kPa. K tejto hodnote sa výpočet priblížil pri hodnote parametru $\alpha = 1,51$ kPa/ms. V obr. 5.1 je zobrazený vypočítaný časový priebeh tlaku vo vnútri komory počas fázy izovolumickej kontrakcie (červená krivka). Vypočítaný časový priebeh je porovnaný s nameranými krivkami z článkov od Curtissa E. a kol. (fialová krivka) [23] a od Manolasa J. (modrá krivka) [24]. Priebeh týchto kriviek odpovedá oblasti #1 na obr. 1.2.2 (na str. 15).

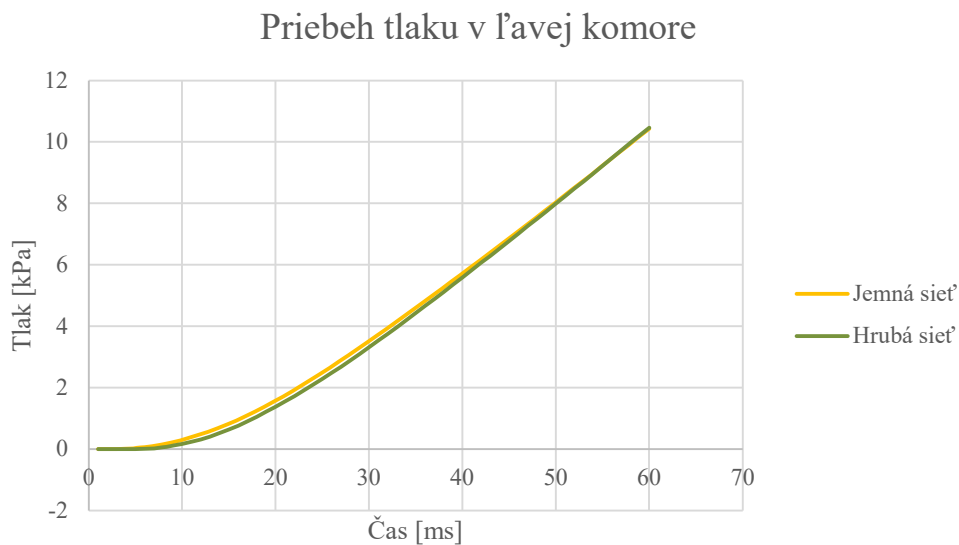


Obr. 6.1: Priebehy tlaku vo vnútri ľavej srdcovej komory počas fázy izovolumickej kontrakcie.

Z priebehu na obr. 6.1 je možné pozorovať, že vypočítaná krivka má hodnotu tlaku v čase $t = 0$ s rovnú 0 Pa. Hodnota tlaku v ľavej komore v tomto čase však nie je nulová, vid' krivky Curtiss a Manolas alebo obr. 1.2.1 a 1.2.2 na str. 14 a 15. V tomto prípade ide o zjednodušenie výpočtového modelu, nakoľko predpísaný tlak v komore v čase $t = 0$ s spôsobí v priebehu výpočtu nerealistickú deformáciu komory. Je preto uvažovaný

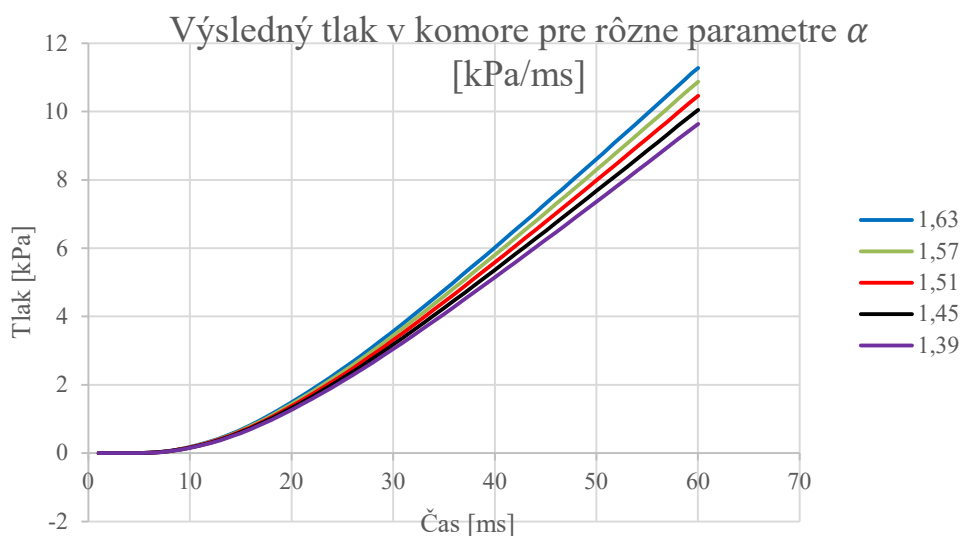
zidealizovaný stav, kde je tlak v komore na začiatku kontrakcie rovný nule. Na druhej strane, maximálna rýchlosť nárastu tlaku na konci izovolumickej kontrakcie by sa podľa Baima DS. a Grossmana W. mala pohybovať v hodnotách 180 – 250 Pa/ms [25] u bežného človeka bez tréningu. Čo potvrdzujú aj kontrolné krivky Curtissa (225 Pa/ms) a Manolasa (231 Pa/ms). Vypočítaná krivka má túto maximálnu rýchlosť 243 Pa/ms.

V obr. 6.2 vidíme rozdiel priebehu tlaku v komore pre dva výpočtové modely, každý s inou sieťou konečných prvkov. Prvý s jemnou sieťou o veľkosti elementu 2,5 mm (pôvodný výpočtový model) a druhý s hrubšou sieťou o veľkosti elementu 4,5 mm.



Obr. 6.2: Závislosť priebehu vnútorného tlaku na jemnosti siete konečných prvkov

Z grafu na obr. 6.2 je možné pozorovať, že priebehy tlaku sú takmer totožné. Konečné hodnoty tlaku sa líšia približne o 0,3%. Rýchlosť nárastu tlaku na konci kontrakcie je ale u výpočtového modelu s hrubou sieťou mierne vyššia a to 250 Pa/ms (oproti pôvodnej hodnote 243 Pa/ms). Toto zistenie, teda, že jemnosť siete konečných prvkov nemá v tomto prípade veľký vplyv na výsledný priebeh tlaku v komore, je možné využiť pre ďalšie výpočty, nakoľko výpočet s menej jemnou sieťou je niekoľkonásobne rýchlejší. Je tak možné pomerne rýchlo vykonať niekoľko výpočtov, napríklad na zobrazenie vplyvu parametru α na výsledný priebeh tlaku v komore (obr. 6.3).

Obr. 6.3: Závislosť priebehu vnútorného tlaku na parametri α [kPa]

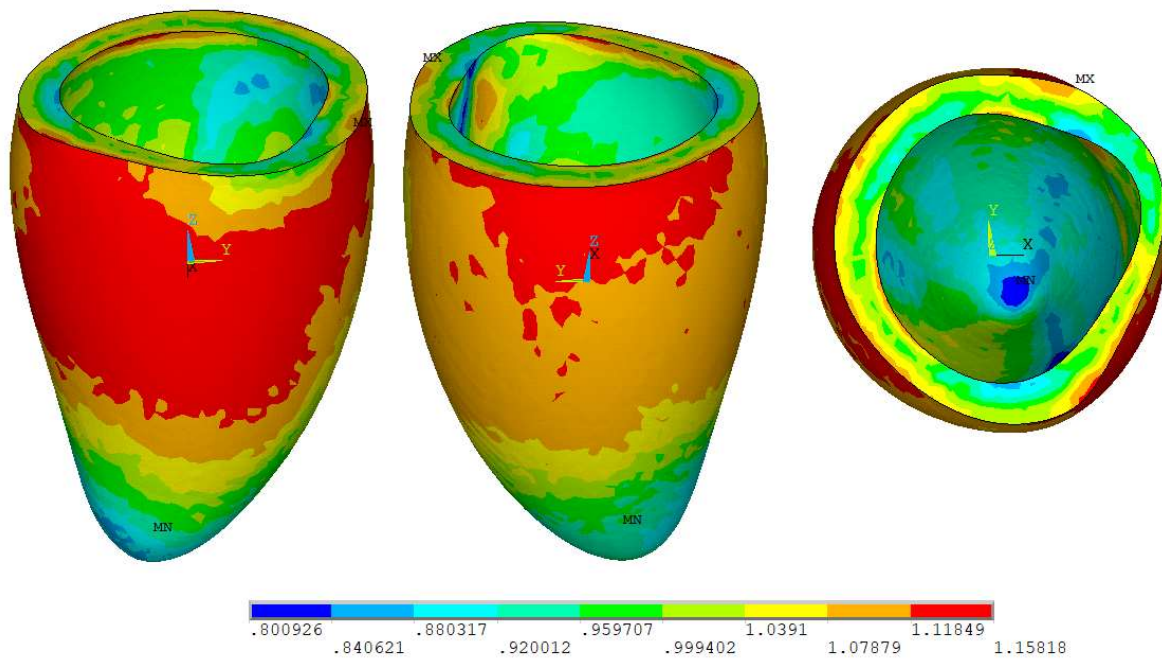
Parameter α bol menený od hodnoty 1,39 kPa/ms po 60-tich Pa/ms až na hodnotu 1,63 kPa/ms. Je možné jednoznačne určiť, že so zvyšujúcou sa hodnotou parametra konečná hodnota vnútorného tlaku v komore narastá. Rovnako to je aj s maximálnou rýchlosťou nárastu tlaku v komore. Tabuľka 2 zobrazuje približne hodnoty práve popísaných parametrov.

α [kPa/ms]	Konečný tlak v komore [kPa]	Maximálna rýchlosť nárastu tlaku [Pa/ms]
1,39	9,6	232
1,45	10,1	242
1,51	10,5	250
1,57	10,9	262
1,63	11,3	271

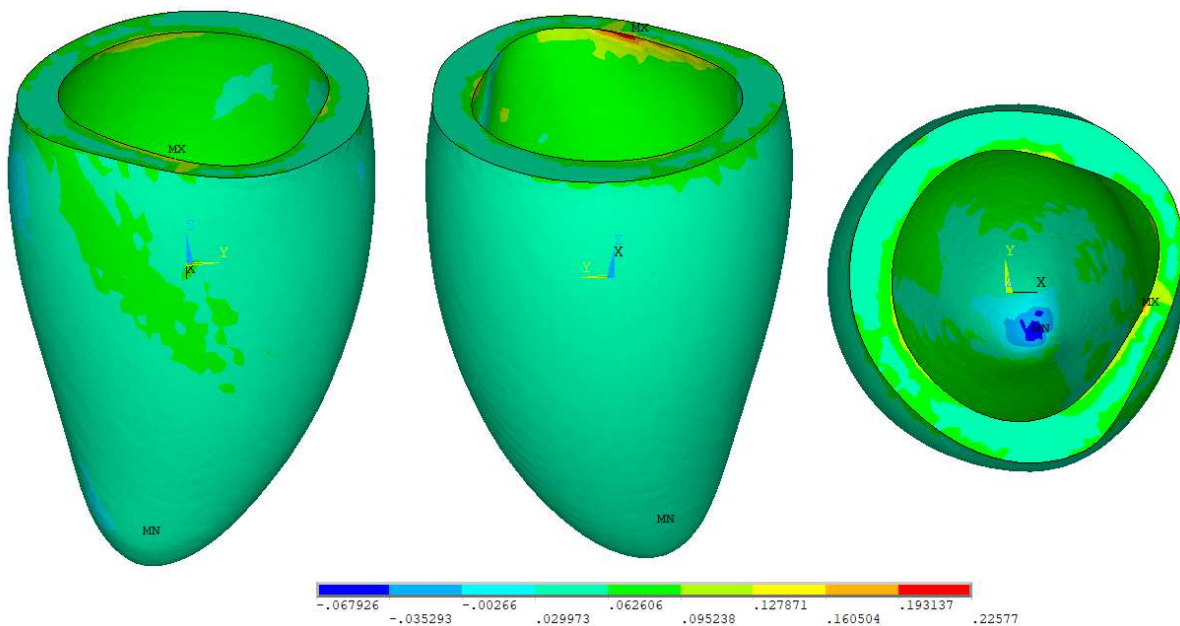
Tabuľka 2: Hodnoty konečných tlakov a maximálnych rýchlostí nárastu tlaku pre rôzne hodnoty parametru α .

6.2 ĎALŠIE ZÁVERY VÝPOČTOV

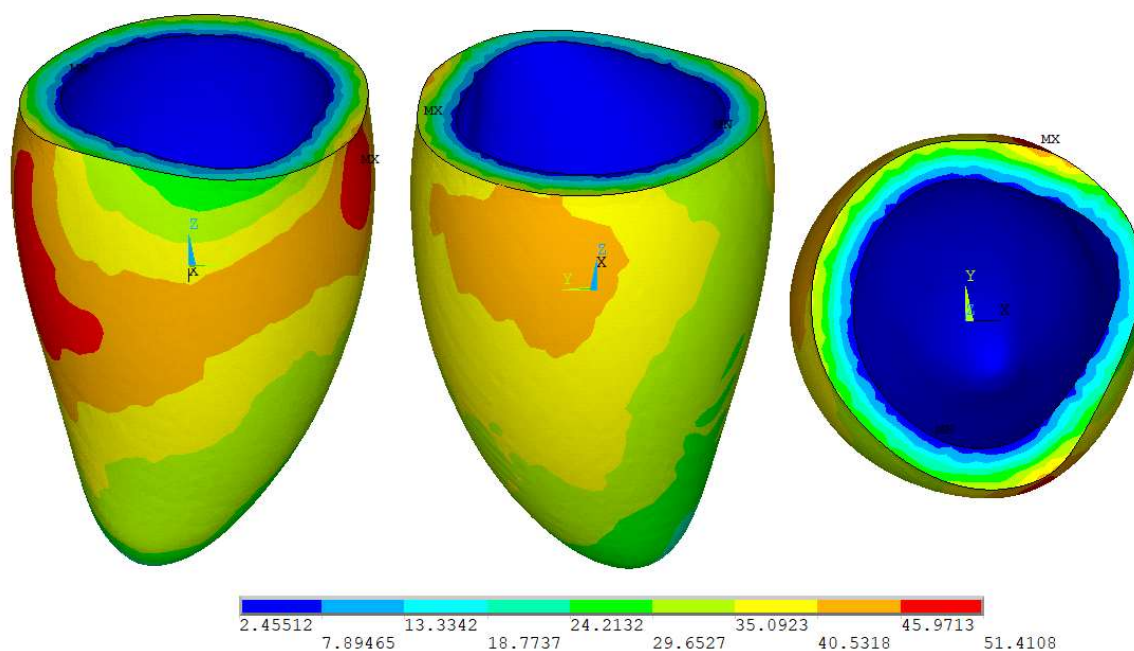
Na obr. 6.4 je zobrazené pretiahnutie λ ľavej komory po fáze izovolumickej kontrakcie (v čase $t = 60$ ms). Obr. 6.5 zobrazuje prvé hlavné napätie. Na obr. 6.6 je následne zobrazený čas aktivácie jednotlivých vlákien a na obr. 6.7 je zobrazená aktívna zložka napätia po fáze izovolumickej kontrakcie.



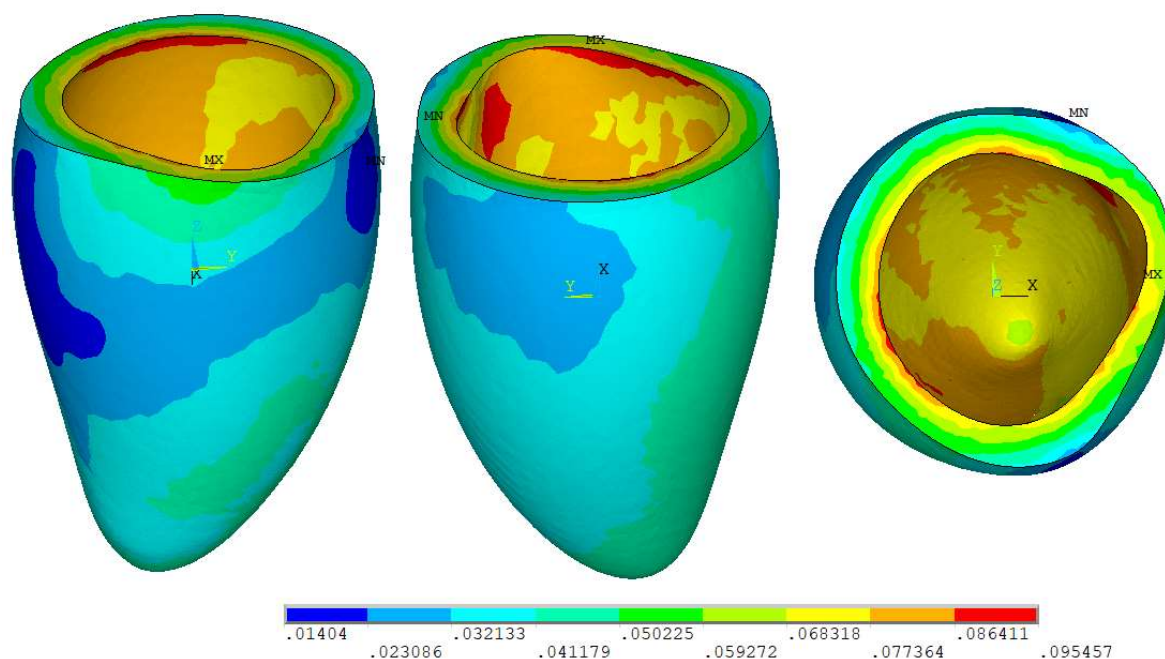
Obr. 6.4: Pretiahnutie λ ľavej srdcovej komory po fáze izovolumickej kontrakcie.



Obr. 6.5: Prvé hlavné napätie (celkové) v komore na konci fázy izovolumickej kontrakcie. Hodnoty sú uvedené v MPa.



Obr. 6.6: Čas aktivácie svalových vlákien ľavej srdcovej komory. Hodnoty sú uvedené v ms.

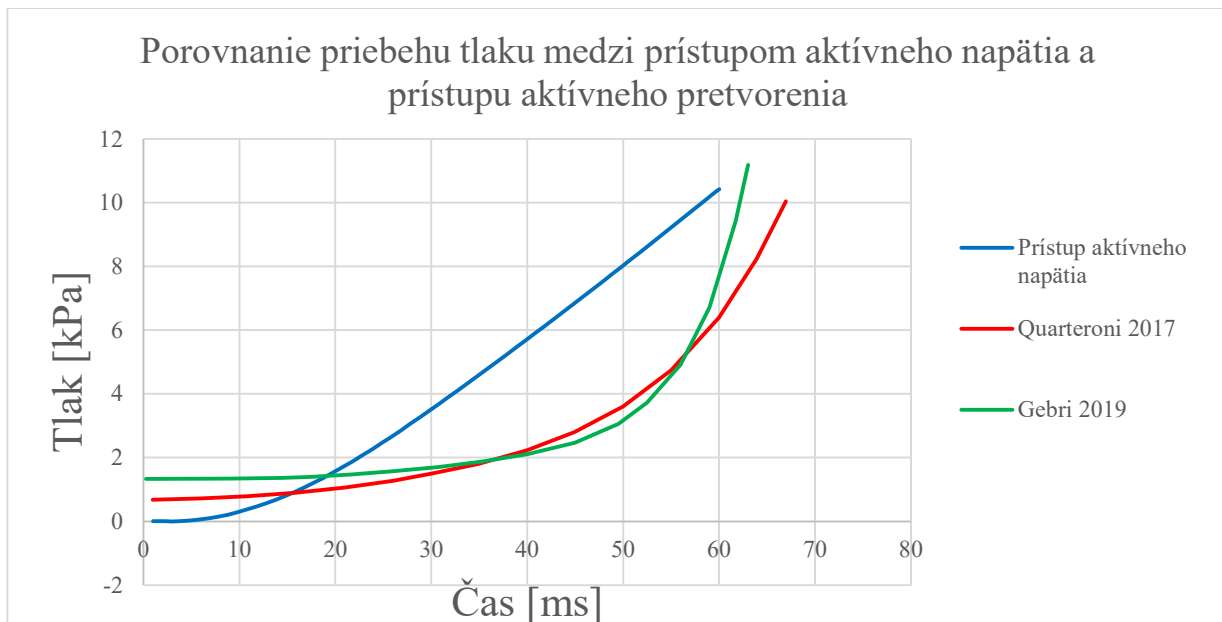


Obr. 6.7: Aktívna zložka napätia v ľavej srdcovej komore po fáze izovolumickej kontrakcie. Hodnoty sú uvedené v MPa.

Na obr. 6.4 je možné vidieť zóny komory, ktoré sa pretiahli najviac, tak ako zóny, ktoré sa naopak mierne stlačili. Celková deformácia komory na konci izovolumickej kontrakcie sa dá popísať tak, že obvod komory je mierne zúžený a hlavný rozmer komory v smere osi z (dĺžka komory) je pretiahnutý. Obr. 6.5 zobrazuje prvé hlavné napätie na konci fázy a je možné pozorovať, že toto napätie je približne rovnaké v celej komore. Výnimkami sú vnútorná stena komory, kde je prvé hlavné napätie mierne vyššie, čo môže byť spôsobené

vyššou hodnotou aktívnej zložky napätia na tejto stene (viď obr. 6.7) a hrot komory, kde je toto napätie dokonca záporné. Na obr. 6.6 je znázornený celkový charakter šírenia vzruchu, ako je podrobne popísaný v kapitole č. 4.2 (str. 30). Je tu možné vidieť, že celá vnútorná stena komory je aktivovaná takmer okamžite (ako je uvažované) a tiež, že niektoré zóny svalových buniek sú aktivované až na konci fázy izovolumickej kontrakcie, čo odpovedá poznatkom z literatúry (viď obr. 1.1.4 na strane č. 13). To má za dôsledok nižšie hodnoty aktívnej zložky napätia v týchto zónach, čo je dobre pozorovateľné na obr. 6.7.

Na záver bude uvedené porovnanie medzi dvomi spôsobmi modelovania aktívnej odozvy myokardu na elektrickú stimuláciu (spomenuté v kapitole 4). Princíp aktívneho napätia („*active stress approach*“), ktorý je prezentovaný v tejto práci, používa samostatný konštitutívny model pre aktívny tenzor napätia [9]. Celkový tenzor napätia je potom daný súčtom pasívneho a aktívneho tenzoru. Druhý prístup aktívneho pretvorenia („*active strain approach*“) zavádza aktívny deformačný gradient F_a a celkový deformačný gradient je potom daný súčinom $F_{celk} = F \cdot F_a$, kde F je deformačný gradient, ktorý zodpovedá za ukladanie elastickej energie [29]. Oba prístupy sú podrobne opísané v článku [29]. Niektorí autori vykonali simulácie s použitím princípu aktívneho pretvorenia, napr. v článku od Quarteroniho a kol. 2017 [30] alebo v článku od Gebriho a kol. 2018 [31]. V týchto článkoch boli použité dokonalejšie výpočtové modely a simulovaný bol celý srdcový cyklus. Z výsledkov, ktoré autori prezentujú je však zrejmé, že priebeh izovolumickej kontrakcie neodpovedá realite. Na obr. 6.8 je porovnanie časového priebehu tlaku v ľavej komore počas izovolumickej kontrakcie medzi jednotlivými prístupmi modelovania aktívnej odozvy myokardu.



Obr. 6.8: Porovnanie časového priebehu tlaku počas fázy izovolumickej kontrakcie v ľavej srdcovej komore. Modrou farbou je vykreslený priebeh počítaný v tejto diplomovej práci a to prístupom aktívneho napätia. Zelenou a červenou farbou sú vykreslené priebehy počítané prístupom aktívneho pretvorenia (červená farba – článok od Quarteroniho a kol. 2017 [30] zelená farba - článok od Gebriho a kol. 2018 [31]).

Na obr. 6.8 je možné pozorovať, že krivky od Quarteroniho a kol. a Gebriho a kol. síce majú na začiatku kontrakcie (v čase $t = 0$ s) reálnu hodnotu tlaku, priebeh tlaku však neodpovedá reálnemu priebehu tlaku počas tejto srdcovej fázy (vid' obr. 6.1). Tomu odpovedajú aj hodnoty maximálnej rýchlosti nárastu tlaku (na konci izovolumickej kontrakcie). Tieto hodnoty sú približne 598 Pa/ms pre priebeh tlaku od Quarteroniho (červená krivka) a 1399 Pa/ms pre priebeh tlaku od Gebriho (zelená krivka). Z tohto porovnania sa zdá, že prístup aktívneho pretvorenia vedie k nepresne nasimulovanému priebehu tlaku počas izovolumickej kontrakcie a z toho dôvodu sa prístup aktívneho napätia, ktorý bol v práci použitý, javí ako vhodnejší.

ZÁVER

Táto práca sa zaoberá modelovaním izovolumickej kontrakcie ľavej srdcovej komory, kde je kontrakcia svalových vlákien popísaná pomocou aktívneho tenzoru napätia. Z toho dôvodu bolo nutné uviesť anatomické a fyziologické základy ohľadom srdca a srdcovej svaloviny - myokardu, ktoré je možné nájsť v prvej kapitole. Bližšia pozornosť bola venovaná srdcovému cyklu, elektrickej stimulácii buniek myokardu a štruktúre myokardu v ľavej komore. Práve elektrickú stimuláciu a následné šírenie vzruchu (akýsi príkaz na činnosť pre bunky) je možné dobre popísať aktívnym tenzorom napätia. Vplyv štruktúry a odpovedí myokardu na kontrakciu (či činnosť buniek spôsobenú elektrickým stimulom) je potom popísaná pasívnym tenzorom napätia. V kapitole 2 je formulovaná problémová situácia a ciele práce.

V kapitole 3 je popísaná tvorba modelu geometrie, teda úprava geometrie z magnetických rezonancií s vysokým rozlíšením 1093 zdravých ľudských srdiec. Potom vytvorenie siete konečných prvkov a práca s touto sieťou, teda zlepšenie kvality tejto siete kritériom „*Aspect ratio*“. No hlavne natáčanie lokálnych súradnicových systémov každého prvku, tak, aby sa lokálna os x každého prvku zhodovala so smerom vlákien myokardu podľa toho, v akej vzdialenosti od endokardu sa jednotlivý prvok nachádza (viď obr. 1.3.1).

Vzťahy potrebné k implementácii aktívneho konštitutívneho modelu myokardu sú odvodené v kapitole 4. Sú tým myslené vzťahy pre pasívny a aktívny tenzor napätia. Rovnako ako materiálové parametre potrebné pre popis pasívneho tenzoru napätia. Nachádza sa tu aj určenie funkcie σ_a , čo je funkcia aktívneho napätia indukovaného v bunke (tá sa totiž vyskytuje vo vzťahoch pre aktívny tenzor napätia). Práve v tejto funkcii figuruje parameter α , popisuje intenzitu nárastu aktívneho napätia v bunkách. Túto hodnotu bolo nutné zistiť iteratívne tak, aby hodnota tlaku na konci izovolumickej kontrakcie odpovedala približne hodnote 10,67 kPa. Výsledná hodnota tohto parametru bola stanovená na $\alpha = 1,51$ kPa/ms.

Kapitola 5 je zameraná na užívateľský podprogram („*soubroutine*“) Usermat. Sú tu uvedené všeobecné informácie o tomto podprograme, rovnako ako niektoré zaujímavosti, či skúsenosti s používaním Usermatu. Následne boli ukázané niektoré kroky postupu implementácie konštitutívneho modelu materiálu ľavej komory so snahou o uľahčenie práce novým používateľom podprogramu Usermat.

V kapitole 6 sa nachádzajú výsledky výpočtového modelovania. Najskôr je zobrazený priebeh tlaku v ľavej komore v porovnaní s meranými (kontrolnými) priebehmi tohto tlaku z článkov [23] a [24]. Na obr. 6.1 je vidieť, že si sú všetky tri tieto priebehy veľmi podobné, aj keď vypočítaný priebeh má počiatočnú hodnotu tlaku nastavenú na 0 Pa, čo neodpovedá skutočnosti. Viď obr. 1.2.1 (na str. 14) a obr. 1.2.2 (na str. 15), kde tlak na začiatku kontrakcie by mal nadobúdať hodnoty asi 80 mmHg (alebo torr), čo odpovedá približne 1,33 kPa. Na kontrolných krivkách tiež vidíme, že začínajú približne na tejto hodnote. Čo sa týka nulovej hodnoty tlaku na začiatku kontrakcie, ide o nutne prijaté zjednodušenie, nakoľko prepísaná hodnota tlaku (v čase $t = 0$ s) spôsobí v priebehu výpočtu nerealistickú deformáciu komory a znehodnotenie dosiahnutých výsledkov. Na druhej strane, čo sa týka smernice krivky na konci izovolumickej kontrakcie, ktorá symbolizuje maximálnu rýchlosť nárastu tlaku počas tejto srdcovej fázy, sme dosiahli hodnotu zhruba 243 Pa/ms. Čo je v porovnaní s kontrolnými krivkami opäť veľmi podobné a podľa Baima DS. a Grossmana W. [25] by sa táto hodnota mala pohybovať v hodnotách medzi 180 – 250 Pa/ms u bežného netrénovaného človeka.

Následně byl porovnán rozdíl průběhu tlaku mezi dvěma výpočty, kde byla změněna globální velikost elementů sítě konečných prvků a to z hodnoty 2,5 mm na hodnotu 4,5 mm. Čo malo za dôsledok zbadateľné zrýchlenie výpočtu nakoľko sa celkový počet elementov zredukoval z asi 90 tisíc na skoro 16 tisíc (čo je cca 5-6 krát menej). Obr. 6.2 zobrazuje, že v tomto prípade jemnosť siete nemá veľký vplyv na výsledok priebehu tlaku v komore. Bolo tak v pomerne rýchлом čase vykonaných niekoľko výpočtov, pre zobrazenie vplyvu parametru α na výsledný priebeh tlaku v komore (obr. 6.3 a tabuľka 2).

V posledná podkapitola bola zameraná na ďalšie závery výpočtov. A to pretiahnutie svalových vlákien myokardu. Z obr. 6.4 je možné pozorovať, ktoré zóny ľavej komory sa pretiahli najviac (ide hlavne o zóny po obvode komory) a ktoré sa naopak stiahli (ide hlavne o zóny v okolí hrotu komory). Na obr. 6.5 je vykreslené prvé hlavné napätie na konci izovolumickej kontrakcie, kde je vidieť, že hodnota tohto napätia je v takmer celej komore konštantná (málo sa meníaca) s dvomi výnimkami a to v hrote komory, kde je hodnota tohto napätia dokonca záporná a na vnútornej stene komory sú hodnoty napätia mierne vyššie.

Ďalším výsledkom je čas aktivácie jednotlivých elementov výpočtovej siete (čas aktivácie buniek), vid'. Obr. 6.6. Tu je možné pozorovať zóny buniek, na ktoré bol privedený elektrický impulz najskôr a ku ktorým skupinám buniek prišiel vzruch najneskôr. Je možné si všimnúť, že uvažovaný zidealizovaný stav z podkapitoly 4.2 sa podarilo úspešne modelovať. Je vidieť, že celá vnútorná stena komory je aktivovaná takmer okamžite a vzruch sa šíri od tejto steny naprieč hrúbkou steny myokardu rýchlosťou $v_{ns} = 0,17$ mm/ms. Tiež stojí za zmienku, že niektoré zóny buniek sú aktivované až v samom závere fázy izovolumickej kontrakcie. Čo nie len súhlasí s literárnou rešeršou (vid' obr. 1.1.4 na str. 13) ale tiež má vplyv na veľkosť aktívnej zložky napätia v bunkách. Keďže práve tieto zóny majú najnižšie hodnoty aktívnej zložky napätia. Čo je dobre pozorovateľné na obr. 6.7 a opačne vnútorná stena myokardu (zóny prvej aktivácie) vykazuje najvyššie hodnoty aktívnej zložky napätia.

Na záver boli porovnané dva prístupy modelovania aktívnej odozvy myokardu na elektrickú stimuláciu. Prvým prístupom je prístup aktívneho napätia (použitý v tejto práci). Druhým prístupom je prístup aktívneho pretvorenia (použitý v článkoch [30] a [31]). Z porovnania priebehu tlaku počas fázy izovolumickej kontrakcie, vid' obr. 6.8, je zrejmé, že priebehy tlaku z článkov [30] a [31] neodpovedajú experimentálne nameraným hodnotám z článkov [23] a [24] (na obr. 6.1). Rovnako ako smernice kriviek na konci kontrakcie sa nepohybujú vo fyziologických hodnotách (v rozmedzí hodnôt 180 – 250 Pa/ms [25]) pre bežného netrénovaného človeka. Z tohto porovnania sa zdá, že prístup aktívneho pretvorenia vedie k nepresne simulovanému tlaku počas fázy izovolumickej kontrakcie a teda, že prístup aktívneho napätia, ktorý je v tejto práci použitý, sa javí ako vhodnejší.

POUŽITÉ INFORMAČNÉ ZDROJE

- [1] Srdece: struktura a funkce [online], Národní zdravotnický informační portál 2022 [cit. 2022-01-15]. Dostupné z:
<<https://www.nzip.cz/clanek/912-srdce-struktura-a-funkce>>.
- [2] Myocardium Definition [online], Biology online 2023 [cit. 2023-05-15]. Dostupné tiež z:
<<https://www.biologyonline.com/dictionary/myocardium>>.
- [3] DOKOS S; SMAILL B; YOUNG A; LEGRICE I. *Shear properties of passive ventricular myocardium*. In American journal of physiology Heart and circulatory physiology 2002;283:H2650-H2659 (2002).
- [4] Heart Anatomy [online], open stax 2013 [cit. 2022-01-15]. Dostupné tiež z:
<<https://openstax.org/books/anatomy-and-physiology/pages/19-1-heart-anatomy>>.
- [5] Převodní systém [online], Kardio chirurgie 2023 [cit. 2023-05-15]. Dostupné tiež z:
<<https://www.kardiochirurgie.cz/prevodni-system>>.
- [6] Srdeční revoluce 2018 [online], [cit. 2023-04-12]. Dostupné z:
<https://www.wikiskripta.eu/w/Srdeční_revoluce>.
- [7] LUNKENHEIMER P. Paul; REDMANN Klaus; ANDERSON H. Robert. *The architecture of the ventricular mass and its functional implications for organ-preserving surgery*. In European Journal of Cardio-thoracic Surgery 27 (2005).
- [8] LUKENHEIMER PP, NIEDERER P. *Hierarchy and inhomogeneity in the systematic structure of the mammalian myokardium: towards a comprehensive view of cardiodynamics*. In Technology and Health care 2012;20(5):423-434 (2012).
- [9] GIANTESIO G, MUSESTI A, RICCOBELLI D. *A Comparison Between Active Strain and Active Stress in Transversely Isotropic Hypereastic Materials*. In Journal of Elasticity 10 (2009).
- [10] HOLZAPFEL A. Gerhard and OGDEN W. Ray. *Constitutive modelling of passive myocardium: a structurally based framework for material characterization*. In Philosophical Transactions of the Royal Society A 2009;367:3445-3475 (2009).
- [11] HOLZAPFEL A. Gerhard. *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering* (2000). ISBN 0-471-82304.
- [12] NIELLES-VALLESPIN S. a kol. *Assessment of Myocardial Microstructural Dynamics by In Vivo Diffusion Tensor Cardiac Magnetic Resonance*. In Journal of American College of Cardiology volume 69, NO 6 (2017).



- [13] AGGER P. a kol. *Changes in overall ventricular myocardial architecture in the setting of a porcine animal model of right ventricular dilation*. In *Journal of Cardiovascular Magnetic Resonance* 19:93 (2017).
- [14] BAI W. a kol. *Imperial Cardiac Atlas* [online], Imperial College London 2015 [cit. 2023-01-23]. Dostupné z:
<<http://wp.doc.ic.ac.uk/wbai/data/>>.
- [15] SOMMER G. a kol. *Biomechanical properties and microstructure of human ventricular myocardium*. In *Acta Biomaterialia* 24 (2015).
- [16] PATHMANATHAN P. a kol. *Cardiac electromechanics: The effect of contraction model on the mathematical problem and accuracy of the numerical scheme*. In *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* volume 63, issue 3 (2010). stiahnuté z:
<<https://academic.oup.com/qjmam/article/63/3/375/1886888>>.
- [17] Srdcový cyklus [online], srdcove-zlyhavanie 2022 [cit. 2023-04-12]. Dostupné z:
<<https://www.srdcove-zlyhavanie.sk/srdce/srdcovy-cyklus>>.
- [18] Onemocnění chlopní [online], Fakultní nemocnice Ostrava 2023 [cit. 2023-04-12]. Dostupné z:
<<https://www.fno.cz/kardiochirurgicke-centrum/onemocneni-chlopni>>.
- [19] Srdeční chlopně [online], Národní zdravotnický informační portál 2023 [cit. 2023-04-12]. Dostupné tiež z:
<<https://www.nzip.cz/rejstrikovy-pojem/552>>.
- [20] DURRER D. a kol. *Total Excitation of the Isolated Human Heart*. In *Circulation* volume 41, issue 6 (1970). Dostupné z:
<<https://www.ahajournals.org/doi/epdf/10.1161/01.CIR.41.6.899>>.
- [21] CALDWELL J. Bryan a kol. *Three Distinct Directions of Intramural Activation Reveal Nonuniform Side-to-Side Electrical Coupling of Ventricular Myocytes*. In *Circulation: Arrhythmia and Electrophysiology* 2009:2:433-440 (2009).
- [22] HOLUBARSCH Ch a kol. *Shortening versus isometric contractions in isolated human failing and non-failing left ventricular myocardium: dependency of external work and force on muscle length, heart rate and inotropic stimulation* (1997). In *Cardiovascular Research* 37 (1998).

- [23] CURTISS I. Edward, MATTHEWS G. Robert a SHAVER A. James *Mechanism of Normal Splitting of the Second Heart Sound*. In *Circulation* 1975;51:157-164 (1975). Dostupné tiež z:
<<https://www.ahajournals.org/doi/10.1161/01.cir.51.1.157>>.
- [24] MANOLAS J. *Inavsiive and Nninvasive Assessment of Exercise-induced Ischemic Diastolic Response Using Pressure Transducers*. In *Current Cardiology Reviews* 2015;11:90-99 (2015).
- [25] BAIM DS a GROSSMAN W. *Grossman's Cardiac Catheterization, Angiography, and Intervention*. LWW medical book colection. Lippincott Williams & Wilkins; 2006.
- [26] HSFLD242 - 3D Hydrostatic Fluid [online], ANSYS 2023 [cit. 2023-05-17]. Dostupné z:
<https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v231/en/ans_thry/thy_el242.html>.
- [27] MITCHELL R. Jamie, a WANG Jiun-Jr. *Expanding application of the Wiggers diagram to teach cardiovascular physiology*. In *Adv Physiol Educ* 38:170-175 (2014).
- [28] Subroutines for Customizing Material Behavior [online], ANSYS 2023 [cit. 2023-05-20]. Dostupné z:
<https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v231/en/ans_prog/Z7K4r1e5lcd.html%23UPFusermatjwf032800403>.
- [29] GIANTESIO G, MUSESTI A a RICCOBELLI D. *A Comparison Between Active Strain and Active Stress in Transversely Isotropic Hyperelastic Materials*. In *Journal of Elasticity* 137:63-82 (2019).
- [30] QUARTERONI A, LASSILA T, ROSSI S a RUIZ-BAIER R. *Integrated Heart – Coupling multiscale and multiphysics models for the simulation of the cardiac function*. In *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 341:345-407 (2017).
- [31] GERBI A, DEDE L a QUARTERONI A. *A monolithic algorithm for the simulation of cariac electromechanics in the human left ventricle*. In *Mathematics in Engineering* 1:1-37 (2018).